

# Algoritmi za ravansku interpretaciju grafova u vidu mreže minimalne širine i visine



Katarina Dimitrijević  
Matematički fakultet  
Univerzitet u Beogradu

*Master rad*

Beograd 2021

## Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Master rad

**Autor:** Katarina Dimitrijević

**Naslov:** Algoritmi za ravansku interpretaciju grafova  
u vidu mreže minimalne širine i visine

**Mentor:** doc. dr Zorica Dražić,  
Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

**Članovi komisije:** prof. dr Zoran Stanić,  
Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu,  
prof. dr Aleksandar Savić,  
Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

**Datum:** 28.09.2021.



**Naslov master rada:** Algoritmi za ravansku interpretaciju grafova u vidu mreže minimalne širine i visine

**Rezime:** Problemi ravanske interpretacije grafova spadaju u klasu problema iz oblasti teorije grafova sa značajnom primenom u praksi. Ovi problemi se bave određivanjem adekvatnog načina konstruisanja geometrijskih prikaza struktura koje su modelovane grafovima, zadovoljavajući neke unapred zadate kriterijume. Problem ravanske interpretacije grafova u poslednje vreme privlači veliku pažnju zbog brojnih praktičnih primena u računarstvu, dizajnu integralnih kola, građevinarstvu, kartografiji, itd. Od posebnog interesa su pravolinijske ravanske interpretacije grafova u kojima je svaki čvor grafa predstavljen kao tačka pravouglaone mreže, dok su grane predstavljene kao duži koje spajaju dva čvora i pri tome se ne seku. Dodatni cilj je minimizacija veličine rezultujuće pravouglaone mreže.

U okviru ovog rada će najpre biti pružen pregled osnovnih pojmova o grafovima, sa posebnim osvrtom na planarne grafove. Biće razmotreni različiti načini za predstavljanje planarnih i ravanskih grafova u vidu pravouglaone mreže, kao i minimizacija veličine rezultujuće pravouglaone mreže. Teorijski pristup problemu će takođe biti pokriven ključnim teoremama i dokazima na kojima se zasnivanju algoritmi kojima je postignuta minimalna širina, odnosno dužina.

**Ključne reči:** graf, teorija grafova, crtanje na mreži, grafička reprezentacija grafa

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Istorijat i značaj vizualizacije grafova . . . . .	1
1.2	Osnovni pojmovi . . . . .	4
1.2.1	Grafička interpretacija grafa. Pojam planarnog grafa. . . . .	6
1.2.2	Pojam šetnje, puteva i cikla. Povezanost grafa. . . . .	8
1.2.3	Načini reprezentacije grafova . . . . .	11
1.3	Opšti pristup grafičkoj reprezentaciji grafova . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Grafička interpretacija ravanskih grafova</b>	<b>15</b>
2.1	Interpretacija grafa na mreži . . . . .	18
2.2	Kanonsko uređenje grafa . . . . .	19
2.3	Metoda pomeraja . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Ravanska interpretacija grafova minimalne širine</b>	<b>29</b>
3.1	Uvodni pojmovi . . . . .	29
3.2	Algoritam za generisanje trianguliranih grafova . . . . .	31
3.3	Skica algoritma za redukciju širine mreže . . . . .	32
3.4	Primer izvršavanja algoritma za redukciju širine mreže . . . . .	33
3.5	Korektnost algoritma i procena dimenzija rezultujuće mreže . . . . .	41
3.5.1	Procena širine mreže . . . . .	44
3.5.2	Procena visine mreže . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Ravanska interpretacija grafova redukovane visine</b>	<b>46</b>
4.1	Uvodni pojmovi . . . . .	46
4.2	Skica algoritma za redukciju visine mreže . . . . .	48
4.3	Primer izvršavanja algoritma B . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Prezentovanje rezultata</b>	<b>59</b>
5.1	Dobijeni rezultati . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>65</b>



# Glava 1

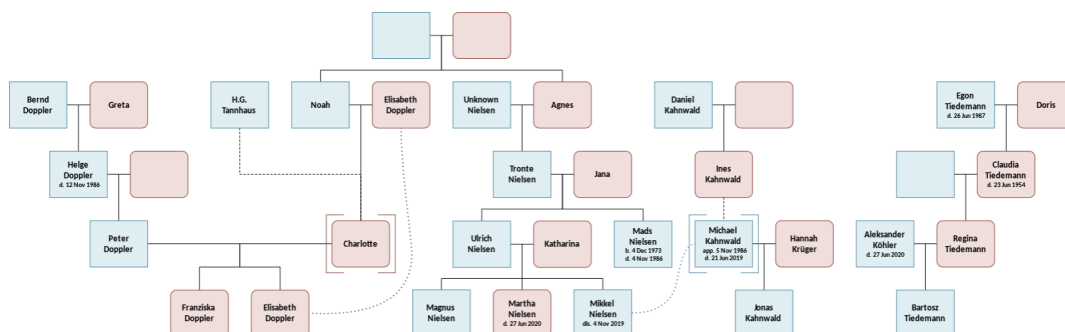
## Uvod

"Počeci teorije grafova su skromni, čak i neozbiljni"

*Norman L. Biggs*

### 1.1 Istorijat i značaj vizualizacije grafova

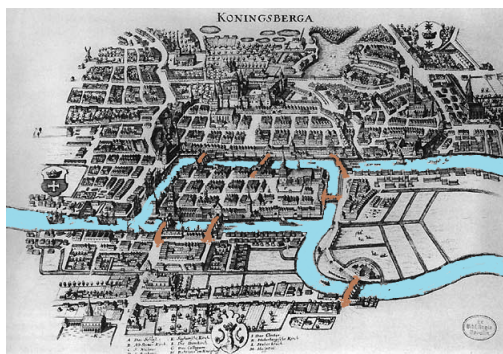
U matematici, odnosno preciznije u teoriji grafova, graf predstavlja strukturu preko koje se modeluju odnosi nekih objekata u odnosu na druge. Zbog svojih osobina grafovi danas imaju brojne primene, počevši od matematičkog modelovanja, preko računarskih nauka do društvenih nauka za predstavljanje veza i relacija između određenih entiteta. Upravo zbog toga možemo naći razne primene grafova ili grafolikih struktura tokom ljudske istorije. Iako model i osobine grafova počivaju na matematičkim principima, bitna osobina grafova je i njihova grafička reprezentacija, odnosno način na koji graf predstavljen u vidu slike, da bi se vernije i jasnije približila struktura koju graf predstavlja. Na slici 1.1 je predstavljeno porodično stablo iz naučno-fantastične TV serije Dark. Karakteristična stvar za ovo stablo je da postoji cikl, na kom se bazira radnja serije, a nije lako uočljiv prilikom gledanja serije, dok se na grafičkoj reprezentaciji ovog stabla vrlo jasno vidi.



Slika 1.1: Primer grafa kroz porodično stablo nemačke naučno-fantastične TV serije "Dark"<sup>1</sup>

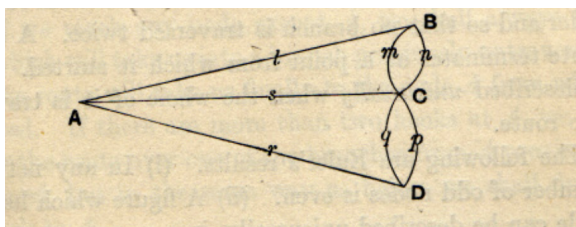
<sup>1</sup>Slika preuzeta sa: [https://en.wikipedia.org/wiki/Dark\\_\(TV\\_series\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Dark_(TV_series))

Nisu poznati tačni počeci korišćenja grafova. Smatra se da su se grafolike strukture u vidu geometrijskih crteža koristile jos od najranijih začetaka ljudske civilizacije u različite svrhe. Neke od najranijih upotreba koje su zabeležene se na primer odnose na različite igre - na zidovima u grobnici Ramzesa I (1305-1303 p.n.e.) se mogu naci crteži ondašnjih igara koji nalikuju današnjoj igri Mice. Takođe, iako su materijalni dokazi uništeni, tekstovi Plinija Starijeg i Seneke svedoče o tome da su neke patricijske atrijume u Starom Rimu krasili crteži porodičnih stabala porodica kojima su te rezidencije pripadale. Začeci moderne teorije grafova se pripisuju Ojleru<sup>2</sup> i čuvenom problemu mostova Kenigsberga. Naime u gradu Kenigsbergu (današnji Kalinjingrad) reku Pregel dva ostrva dele na dva rukavca i na toj reci postoji 7 mostova. Postavlja se pitanje da li je moguće obići sve mostove tako da se nijedan most ne pređe više od jedanput. Godine 1736. je Ojler dao odgovor na ovo pitanje pokazavši da ovakva šetnja ne postoji i to se smatra začetkom proučavanja teorije grafova. Međutim, uprkos tome, ovo još uvek ne označava početak grafičke reprezentacije grafova. Naime, rezultat ovog Ojlerovog rada sadrži crtež koji predstavlja mostove i obale (slika 1.2) ali to nije vizualizacija grafova kakvu poznajemo danas, u vidu čvorova i grana.



Slika 1.2: Ojlerov problem mostova Kenigsberga

Godine 1892. u svojoj knjizi britanski matematičar Rauz Bol<sup>3</sup> prvi put daje grafovsku vizualizaciju Ojlerovog problema, tako da se ovo može uzeti za početak moderne ravanske interpretacije grafova (slika 1.3) [7].

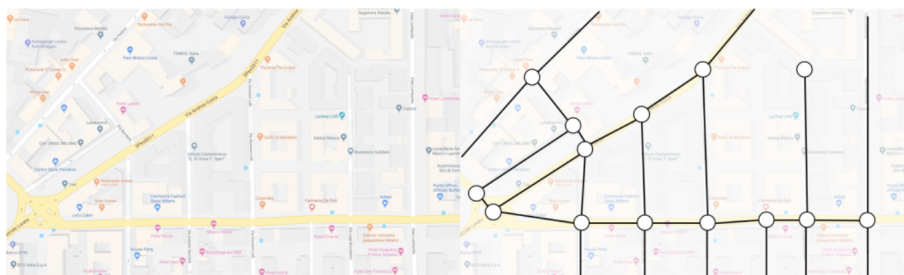


Slika 1.3: Bol-ov nacrt Ojlerovog problema<sup>4</sup>

<sup>2</sup>Leonhard Paul Euler (1707 - 1783) - svajcarski matematičar i fizicar  
<sup>3</sup>Walter Rouse Ball (1850 - 1925) - britanski matematičar i pravnik  
<sup>4</sup>Slika preuzeta iz [7]



U godinama nakon toga, posebno nakon industrijske revolucije sredinom 19. veka kao i sa daljim razvojem nauke, je potreba za vizualizacijom grafova rasla, te osim u raznim granama matematike, njene primene danas možemo naći i u raznim drugim oblastima, kao što su hemija (na primer matematičko modelovanje molekula u vidu grafova kako bi se njihova fizička svojstva što bolje prezentovala), nauci o organizaciji rada i, generalno, kada su hijerarhijske strukture u pitanju, zatim elektrotehnici (modelovanje električnih šema, gde čvorovi predstavljaju različite električne elemente, a grane to kako su oni međusobno povezani), kartografiji, itd. Takođe, uzevši u obzir značajnu ekspanziju poslednjih decenija, ni softversku industriju nije moguće zamisliti bez grafova, počevši od brojnih dijagrama (dijagram toka podataka, dijagram stanja, klasni dijagram objektno-orientisane paradigme, dijagram baza podataka koji modeluje odnose među entitetima, itd.), preko modelovanja konkretnih razgranatih sistema, kao što su, recimo, aktuelne društvene mreže, primene u oblasti veštačke inteligencije, logičke programske paradigme i mnogih drugih. Trend rasta količine podataka koji se svakodnevno obrađuju ukazuje na činjenicu da će grafovi i ubuduće biti sve potrebni u najrazličitijim sferama delatnosti, kako bi se podaci vizualizovali i kako bi se odnosi među njima predstavili što konciznije, sa uočavanjem određenih pravilnosti u njima, a sve sa ciljem smanjenja kompleksnosti, već "velikih" sistema. Na slici 1.4 možemo videti jasno prikazanu mapu dela grada (levo) dok sa desne strane je prezentovan graf koji predstavlja taj deo grada, gde je svaka raskrsnica označena čvorom. Ovakva reprezentacija se kasnije koristi za razne algoritme (najkraći put i slično).



Slika 1.4: Primer grafa u službi mapiranja grada<sup>5</sup>

Takođe jedna od standardnih primena reprezentacije grafova je i modelovanje odnosa između ljudi. Prethodno je pomenuto porodično stablo, ali takođe se mogu modelovati i predstaviti odnosi između ljudi na društvenoj mreži, kao što je to urađeno na slici 1.5.

<sup>5</sup>Slika preuzeta sa: <https://research.aimultiple.com/graph-analytics/>



Slika 1.5: Primena grafa u svrhu analize društvenih mreža<sup>6</sup>

Budući da je primena grafova ovako široka, dosta pažnje se posvećuje proučavanju teorije grafova. U tom smislu, kao jedna od grana ove oblasti, ne zaostaje ni ravanska interpretacija grafova (odnosno "crtanje grafova"), pri čemu bi ravanska interpretacija jednog grafa čuvala topologiju tog grafa. Naime, bitno je da ravanska (ali i 3D) interpretacija grafa bude "dobro" vizuelizovana, jer se na taj način u velikoj meri mogu uprostiti i sistematizovati složeni razvojni procesi. Kriterijumi za "dobru" vizuelnu interpretaciju grafova bi na primer bili da grane grafa budu ravne, da se seku pod pravim uglom i da se taj broj preseka minimizuje, te simetrija, planarnost, itd, a sve sa ciljem povećanja čitljivosti. Osim navedenog, u neposrednoj upotrebi se mogu naći različiti standardi vizualizacije grafova - strogo ravne linije u matematici ili ortogonalna crtanja u nekim granama softverskog inženjeringa. Ono što predstavlja uopštenje je da su najčešće grane prosta, otvorena Žordanova kriva, a da su čvorovi grafa tačke, krugovi ili pravougaonici.

## 1.2 Osnovni pojmovi

U okviru ove sekcije biće formalno uvedeni pojmovi koji će biti korišćeni u nastavku rada. Osnovni pojmovi i definicije koji su izloženi u ovoj glavi preuzeti su iz [1], [6], [23].

Na samom početku biće definisan pojam grafa.

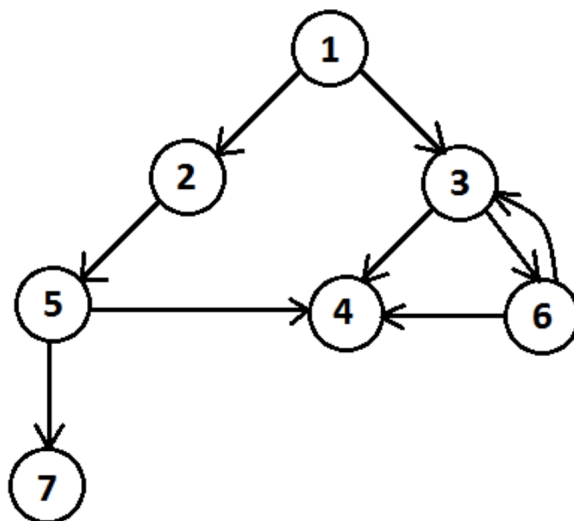
<sup>6</sup>Slika preuzeta sa: <https://research.aimultiple.com/graph-analytics/>

**Definicija 1.2.1.** Graf  $G = (V, E)$  je uređeni skup, pri čemu  $V$  predstavlja konačan, neprazan skup elemenata koji se nazivaju *čvorovima* (eng. *vertices*) grafa, dok je  $E$  konačan skup elemenata koji se nazivaju *granama* (eng. *edges*) grafa  $G$ .

Ukoliko je  $E$  prazan skup, u pitanju je graf bez grana, dok se u suprotnom može definisati preslikavanje  $f$  koje svakoj grani pridružuje dva čvora koji se nazivaju *krajevima* te grane. Čvorove koji su krajevi iste grane nazivamo *susednim*, a kažemo da je grana *incidentna* tim čvorovima, kao i oni njoj. Ako je poznato koji je od čvorova početni, a koji završni, grana se naziva *orijentisana* (usmerena), dok je u suprotnom *neorijentisana* (neusmerena). Takođe, moguće je da grana počinje i završava se u istom čvoru - ovakve grane se nazivaju *petlje* [1], [29].

Graf može biti orijentisan (usmeren), neorijentisan (neusmeren) ili mešoviti u zavisnosti od toga da li su sve njegove grane orijentisane, sve njegove grane neorijentisane ili ima i orijentisanih i neorijentisanih grana (redom). *Paralelne* grane grafa su grane koje imaju iste krajeve. Može se desiti da graf nema paralelne grane niti petlje, i u tom slučaju će on biti nazivan *prost* graf. To će biti jedna od pretpostavki u daljem toku rada.

**Primer 1.2.1.** Na slici 1.6 je dat primer orijentisanog grafa sa 7 čvorova, pri čemu su grane incidentne čvorovima 3 i 6 paralelne.



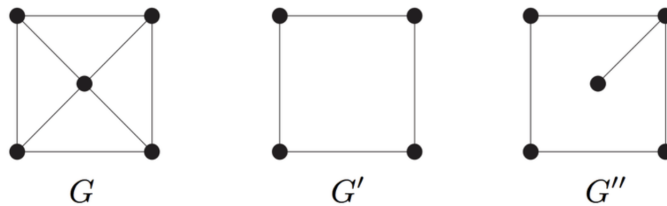
Slika 1.6: Primer orijentisanog grafa

Jedan od bitnijih pojmova kada je reč o grafovima je i **podgraf grafa**.

**Definicija 1.2.2.** Podgraf grafa  $G = (V, E)$  je graf  $G' = (V', E')$  akko je  $V' \subseteq V$ ,  $E' \subseteq E$  i važi da je, za neprazno  $E'$ , preslikavanje  $f'$ , koje svakoj grani  $e \in E'$  dodeljuje čvorove  $v \in V'$  koji predstavljaju krajeve te grane, restrikcija preslikavanja  $f$  na  $V'$  (preslikavanje  $f$ , analogno, svakoj

grani  $e \in E$  dodeljuje čvorove  $v \in V$  koji predstavljaju krajeve te grane). Ako su skupovi  $V$  i  $V'$  jednaki, onda se ovakav podgraf  $G$  naziva *razapinjućim* ili *povezujućim* podgrafom grafa  $G$  [14].

**Primer 1.2.2.** Na slici 1.7 je prikazan graf  $G$  i njegova dva podgraфа  $G'$  i  $G''$ . Može se primetiti da je  $G''$  ujedno i razapinjući podgraf grafa  $G$ , budući da sadrži sve čvorove ovog grafa.



Slika 1.7: Primer grafa  $G$  i njegova dva podgraфа  $G'$  i  $G''$

Sledeća definicija uvodi pojam **stepena** čvora grafa, kao i pojam **stepena grafa**.

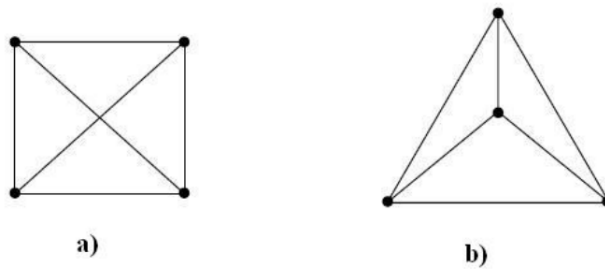
**Definicija 1.2.3.** U slučaju neorijentisanog grafa *stepenom* čvora se naziva broj grana incidentnih tom čvoru (pri čemu se svaka petlja računa dvaput). U slučaju orijentisanih grafova, budući da se pravi razlika između grana koje uviru, odnosno izviru, iz čvora, razlikuju se i ulazni, odnosno izlazni polustепен čvora, tj. broj grana koje uviru, odnosno izviru iz čvora, respektivno.

Stepen neorijentisanog grafa (o kakvim će biti reči u nastavku rada) predstavlja sumu stepena svih njegovih čvorova.

### 1.2.1 Grafička interpretacija grafa. Pojam planarnog grafa.

U prethodnoj sekciji ovog poglavlja je već pomenut značaj grafičke interpretacije grafova, a to je ujedno i pojam kojim će se ovaj rad i baviti. Formalnije govoreći, čvorovi grafa se mogu predstaviti kao tačke nekog euklidskog prostora, a u tom prostoru granama datog grafa mogu biti pridruženi neprekidni lukovi koji spajaju tačke koje odgovaraju čvorovima koji predstavljaju krajeve te grane, pri čemu orijentacija luka odgovara orijentaciji grane. Dakle, svakom grafu može biti pridružena njegova grafička interpretacija u nekom euklidskom prostoru. Važi i obrnuto - svaka figura u nekom euklidskom prostoru koja se sastoji od konačnog skupa tačaka povezanih ili ne, orijentisanim ili neorijentisanim neprekidnim lukovima predstavlja grafičku interpretaciju nekog grafa. Grafička interpretacija grafa nije jedinstvena. Naime, isti graf može imati različite grafičke interpretacije [1].

**Primer 1.2.3.** Na slici 1.8 su date dve različite grafičke interpretacije istog neorijentisanog grafa. Druga grafička interpretacija b) ilustruje primenu kriterijuma minimizacije broja preseka između grana, dok a) favorizuje kriterijum simetrije grafičke interpretacije grafa. O ovim kriterijumima će više reči biti u nastavku rada.

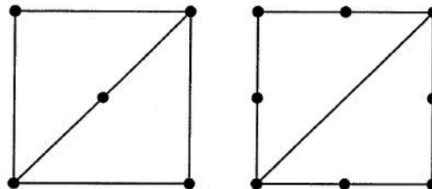


Slika 1.8: Dve različite grafičke interpretacije istog grafa

U uskoj vezi sa grafičkom interpretacijom grafova je i pojam *planarnog grafa* (eng. *planar graph*). Svi algoritmi za grafičku interpretaciju grafova koji su izloženi u ovom radu uzimaju planarnost ulaznog grafa kao pretpostavku. Štaviše, poslednjih godina je na ovu temu prezentovana velika količina istraživačkog materijala [15], [17], [25].

Za karakterizaciju pojma planarnosti grafa bitan je pojam *homeomorfni grafova*. Naime, dva grafa su homeomorfna ako se oba mogu dobiti izbacivanjem čvorova stepena 2 i njima incidentnih grana, pri čemu se čvorovi susedni izbačenom čvoru spajaju novom granom ili dodavanjem novih čvorova stepena 2 unutar njihovih grana [1].

**Primer 1.2.4.** Na slici 1.9 dat je primer homeomorfni grafova.



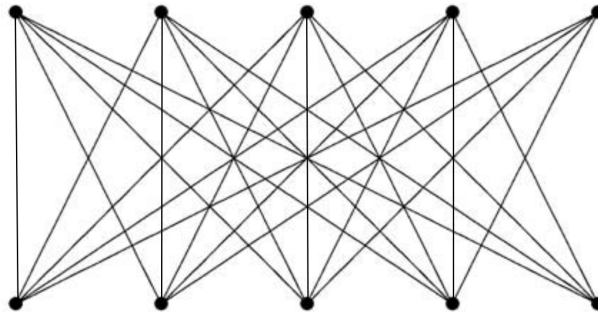
Slika 1.9: Homeomorfni grafovi

Naredna definicija uvodi pojmove **kompletnih** i **bipartitnih** grafova.

**Definicija 1.2.4.** *Kompletni* graf, u oznaci  $K_n$ , se definiše kao prost graf sa  $n$  čvorova, pri čemu su svaka dva čvora susedna. Ako se skup čvorova prostog grafa može podeliti u dva disjunktna neprazna podskupa, takva da grane grafa povezuju samo čvorove iz različitih podskupova, onda se takav graf zove *bipartitni* graf.

Bipartitni graf je i kompletni (u oznaci  $K_{m,n}$ , pri čemu su  $m$  i  $n$  brojevi čvorova dva pomenuta podskupa) ako je svaki čvor jednog podskupa susedan svakom čvoru drugog podskupa i analogno za čvorove drugog podskupa [1].

Na slici 1.10 dat je primer kompletnog bipartitnog grafa  $K_{5,5}$ .



Slika 1.10: Kompletan bipartitni graf  $K_{5,5}$

### 1.2.2 Pojam šetnje, puteva i cikla. Povezanost grafa.

**Definicija 1.2.5.** U slučaju neorijentisanog grafa  $G = (V, E)$  konačni neprazni niz alternirajućih čvorova  $u_i \in V, 0 \leq i \leq n$  i grana  $e_j \in E, 1 \leq j \leq m$  koje ih povezuju,  $u_0, e_1, u_1, \dots, u_{n-1}, e_m, u_n$ , predstavlja *šetnju* od čvora  $u_0$  do čvora  $u_n$ . *Put* je šetnja u kojoj nema ponavljanja grana. *Cikl* u grafu je zatvoreni put, odnosno put čiji su početni i krajni čvor isti [1].

**Definicija 1.2.6.** Dva proizvoljna čvora u neorijentisanom grafu  $G$  su *povezana* akko postoji šetnja od jednog do drugog. Graf  $G$  se naziva *povezanim* ukoliko su svaka njegova dva čvora međusobno povezana.

**Definicija 1.2.7.** Povezanost grafa  $G$ , u oznaci  $k(G)$ , predstavlja najmanji broj čvorova čijim uklanjanjem se dobija nepovezan graf ili graf koji sadrži samo jedan čvor [23]. Skup čvorova čije uklanjanje rezultuje ovakvim grafom se naziva *separator* ili *razdvajajući  $k$ -skup* grafa  $G$ .

Graf je  *$k$ -povezan* akko sadrži više od  $k$  čvorova i ne sadrži razdvajajući  $k-1$  skup čvorova. U skladu s tim, 1-povezani, 2-povezani, 3-povezani grafovi se, respektivno, nazivaju povezani, bipovezani i tripovezani grafovi.

Naredna definicija uvodi relaciju izomorfizma između dva grafa.

**Definicija 1.2.8.** Za grafove  $G = (V, E)$  i  $G' = (V', E')$  kaže se da su *izomorfni* akko postoji bijekcija  $f : V \rightarrow V'$  tako da je  $\{u, v\} \in E$  ako i samo ako  $\{f(u), f(v)\} \in E'$ .

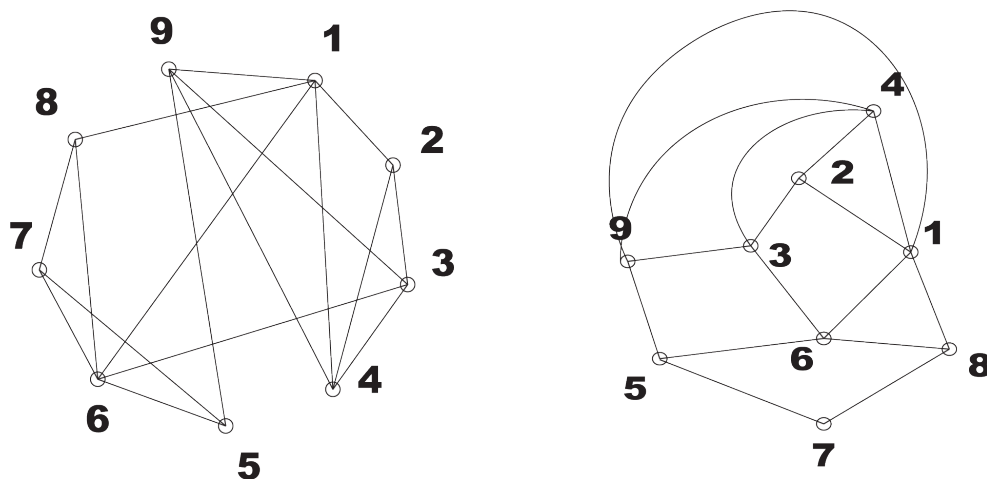
Funkcija  $f$  se naziva *izomorfizmom* grafova  $G$  i  $G'$ . Takođe, može se primetiti da izomorfizam predstavlja relaciju ekvivalencije u skupu grafova.

Konačno, definisani su pojmovi potrebni za definisanje **planarnog** i **ravanskog** grafa [21], [27].

**Definicija 1.2.9.** Graf koji se može predstaviti slikom u ravni ili na sferi bez presecanja grana, osim u eventualnom zajedničkom čvoru, naziva se *planarnim* (eng. *planar*) grafom [1]. Njegovo utapanje u ravni naziva se *ravanskim* grafom (eng. *plane graph*) i on je izomorfan datom planarnom grafu [16], [31].

**Primer 1.2.5.** Na slici 1.11 je dat primer jednog planarnog grafa i njemu izomornog ravanskog grafa. Obe grafičke reprezentacije predstavljaju isti graf. Na levoj slici se grane seku, dok na desnoj ne.

**Primer 1.2.6.** Na slici 1.8 a) je graf koji naizgled deluje kao neplanaran, međutim slika 1.8 b) pokazuje da nije tako, odnosno da se on može interpretirati u ravni bez presecanja grana, osim, eventualno, u zajedničkim čvorovima.



Slika 1.11: Planarni graf i njemu izomorfan ravanski graf

Ravanska interpretacija planarnog grafa particioniše ravan, tačnije one tačke ravni koje ne pripadaju grafu (nisu čvor grafa, niti pripadaju granama grafa), na povezane oblasti koje se nazivaju *stranama* (eng. *faces*) ili *regionima* grafa. Neograničena oblast se najčešće naziva spoljašnjom stranom grafa. U opštem slučaju će granicu strane predstavljati neka šetnja grafa. Na primer, granica spoljašnje strane ravanskog grafa na slici 1.11 jeste cikl odredjen čvorovima 1,9,5,7,8,1.

Jednu zanimljivu karakterizaciju ravanske interpretacije planarnog grafa, tj. vezu između broja grana, čvorova i strana, daje **Ojlerova teorema** iz 1750. godine [1]:

**Teorema 1.2.1.** Neka je data proizvoljna ravanska interpretacija  $G$  povezanog planarnog grafa, pri čemu su  $m, n, p$  brojevi grana, čvorova i strana, redom, u  $G$ . Tada važi:

$$n - m + p = 2 \tag{1.1}$$

**Dokaz:**

Teorema će biti dokazana matematičkom indukcijom po broju grana grafa, tj. po  $m$ . Ako je  $m = 0$ , onda je  $n = 1$ , jer je  $G$  povezan, a  $p = 1$  (jedna neograničena strana), dakle u ovom slučaju teorema trivijalno važi.

Pretpostavimo da teorema važi za grafove sa najviše  $m - 1$  grana. Potrebno je pokazati da važi i za grafove sa  $m$  grana. Neka je  $G$  proizvoljna ravanska interpretacija grafa sa  $m$  grana. Ako je  $G$  stablo

(povezan acikličan neorijentisani graf), onda važi  $m = n - 1, p = 1$ , dakle  $n - m + p = n - n + 1 + 1 = 2$  čime je tvrđenje dokazano. U suprotnom ako  $G$  poseduje neki cikl, pretpostavimo da je  $e$  proizvoljna grana tog cikla. Odstranjivanje grane  $e$  iz  $G$ , rezultuje povezanim, planarnim grafom sa  $n$  čvorova,  $m - 1$  granom i  $p - 1$  strana, pa je  $n - (m - 1) + p - 1 = 2$  prema induktivnoj pretpostavci, odakle direktno sledi  $n - m + p = 2$ , čime je pokazano da teorema važi i za grafove sa  $m$  grana.  $\square$

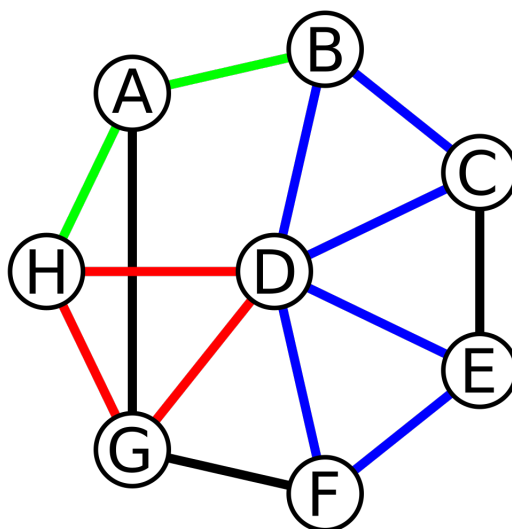
**Definicija 1.2.10.** Maksimalni planarni graf je planarni graf sa maksimalnim brojem grana, odnosno takav graf da bi dodavanje grane koja je incidentna sa proizvoljna dva čvora grafa narušilo njegovu planarnost.

U okviru ovog rada fokus će biti na neorijentisanim ravanskim grafovima. Jos jedna od pretpostavki algoritama koji će biti izloženi u nastavku ovog rada jeste i pretpostavka o triangulaciji grafa.

**Definicija 1.2.11.** Prost cikl u grafu se definiše kao zatvorena šetnja bez ponavljanja grana i čvorova, osim prvog odnosno poslednjeg čvora.

**Definicija 1.2.12.** Tetiva cikla grafa je grana koja povezuje dva čvora iz cikla, a da ne pripada samom ciklu, ukoliko takva grana postoji za dati cikl.

Na slici 1.12 se uočava cikl određen čvorovima H, D, G, odnosno granama HG, GD i DH. Svaki čvor koji pripada tom ciklu nije povezan ni sa jednim drugim čvorom, preko grane koja ne pripada tom ciklu. Takav cikl se naziva cikl bez tetiva. Dalje se uočava i cikl između čvorova D, F, E, C, B, odnosno grana DF, FE, EC, CB, BD, međutim čvor D je povezan sa drugim čvorovima cikla sa granama DE i DC, ove grane su tetive cikla.



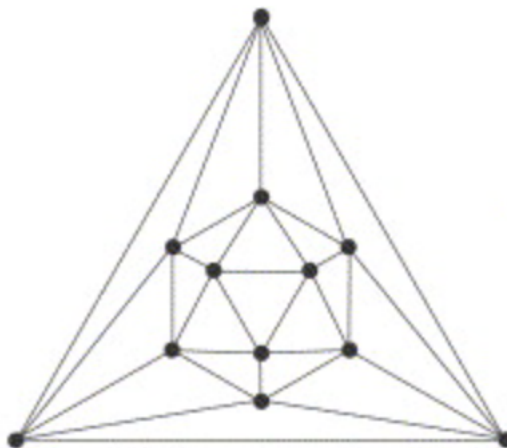
Slika 1.12: Primer grafa sa prostim ciklima, kao i cikla sa tetivama <sup>7</sup>

<sup>7</sup>Slika preuzeta sa [https://en.wikipedia.org/wiki/Cycle\\_\(graph\\_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Cycle_(graph_theory))



**Definicija 1.2.13.** Graf je trianguliran ukoliko nema proste cikla dužine veće od 3, odnosno ako svaki cikl u grafu dužine  $n > 3$  poseduje grane (tetine) koje povezuju svaka dva neuzastopna čvora [24].

**Primer 1.2.7.** Graf na slici 1.13 je jedan primer trianguliranog grafa, svaka unutrašnja strana ovog grafa je trougao. U pitanju je graf koji formira "skelet" ikosaedra.



Slika 1.13: Primer trianguliranog grafa

### 1.2.3 Načini reprezentacije grafova

Osim grafičkih interpretacija grafova o kojim će mahom biti reči u okviru ovog rada, postoje i neki drugi načini reprezentacije grafova koji će u određenim situacijama dati nešto pogodnija predstavljanja grafova. Na primer, zbog ograničenja arhitekture računara, grafovi se na specifičan način moraju čuvati u memoriji računara kako bi ih softver efikasno koristio. Takođe, analogno predstavljanje se može iskoristiti i u slučaju da se radi o grafovima velikih dimenzija, gde bi bilo potencijalno nepogodno graf predstaviti grafičkom reprezentacijom.

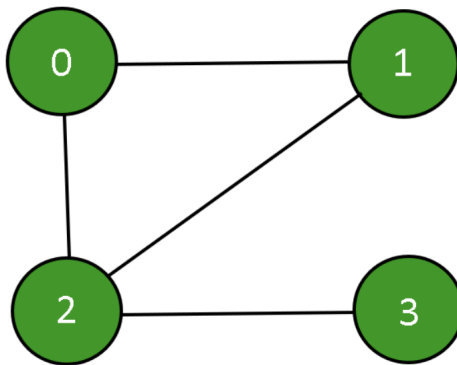
Konkretnije, pomenute alternative reprezentacije grafova se odnose pre svega na predstavljanje grafova različitim strukturama podataka. Strukture podataka koje su najčešće korišćene u te svrhe su liste i matrice i to *lista povezanosti (lista susedstva) (eng. adjacency list)* i matrice - *matrica povezanosti (matrica susedstva) (eng. adjacency matrix)* i *matrica incidencije (eng. incidence matrix)*.

Dimenzija liste povezanosti je uvek jednaka broju čvorova, jer se graf reprezentuje na takav način što se svakom čvoru  $v \in V$  grafa  $G = (V, E)$  dodeljuje lista njegovih suseda. Ovaj način predstavljanja je nešto pogodniji kada su u pitanju retki grafovi. Ova činjenica govori u prilog tome što je prostor potreban za skladištenje liste povezanosti grafa reda veličine  $O(|V| + |E|)$ .

Matrica povezanosti grafa  $G = (V, E)$  je kvadratna matrica  $A = (a_{ij})$  dimenzija  $n \times n$ , gde je  $n$  broj čvorova grafa  $G$ , takva da svaki element matrice  $a_{ij}$  predstavlja broj grana koji povezuju čvorove  $v_i, v_j \in V$ . Može se primetiti da je ova matrica i simetrična u slučaju da je graf neorijentisan, kao što su grafovi koji će se dalje obrađivati u okviru ovog rada. Slično, ako je  $G$  prost graf, može se uočiti da će svi elementi matrice  $A$  na glavnoj dijagonali biti jednaki nuli. Ono što je mana ovog načina reprezentovanja grafova je prostor potreban za njeno skladištenje. Naime, taj prostor je reda veličine  $O(|V|^2)$  i zbog toga u nekim slučajevima, kao što su pomenuti retki grafovi, liste imaju prednost.

Matrica incidencije grafa  $G = (V, E)$  predstavlja način koji se nešto ređe koristi za reprezentaciju grafova nego pomenuta dva. Ova matrica  $A = (a_{ij})$  je dimenzija  $n \times m$ , gde su  $n$  i  $m$  brojevi čvorova, odnosno grana grafa  $G$ , respektivno. Svaki element  $a_{ij}$  ove matrice je, u slučaju neorijentisanih grafova, jednak 1 ako je čvor  $v_i$  incidentan grani  $e_j$  i 0 ukoliko to nije slučaj.

**Primer 1.2.8.** Na slici 1.14 je dat primer grafa sa 4 čvora i 4 grane. Njegova matrica povezanosti je  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , dok je njegova matrica incidencije  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , pri čemu su grane označene na sledeći način  $e_0 = (v_0, v_1)$ ,  $e_1 = (v_0, v_2)$ ,  $e_2 = (v_1, v_2)$ ,  $e_3 = (v_2, v_3)$ , a čvorovi  $v_i = i, i = 0, 1, 2, 3$ .



Slika 1.14: Graf iz primera 1.2.8<sup>8</sup>

### 1.3 Opšti pristup grafičkoj reprezentaciji grafova

Pre svega, nije trivijalno objasniti pojam "najbolje" reprezentacije grafa. Razlog za to je što pojam dobre grafičke reprezentacije podložan subjektivnoj oceni ljudskog oka i uz to dosta zavisi od samog domena primene reprezentacije grafa, odnosno za koje potrebe se pravi grafička interpretacija grafa. Na primer, na različit način se predstavljaju hijerarhijske strukture (reprezentovane grafovima bez cikla, tj. stablima) i na primer saobraćajna, telokomunikaciona ili računarska mreža. Različitost

<sup>8</sup>Slika preuzeta sa <https://www.geeksforgeeks.org/add-and-remove-vertex-in-adjacency-matrix-representation-of-graph/>

je u ovom slučaju direktno uslovljena odnosima između entiteta koji se predstavljaju, odnosno specifičnošću domena u okviru koga se grafovi i njihovo reprezentovanje primenjuju. U uskoj vezi sa pomenutim parametrima je i klasa grafova koja se uzima za ulaz algoritma za grafičku interpretaciju grafova. Naime, pojedini algoritmi će dati bolje rezultate za reprezentaciju malopre pomenutih stabala, nego u slučaju cikličnih algoritama [13], [22].

Iz ovih razloga je bitno definisati neke standarde koji bi opisivali "dobru" reprezentaciju grafa i u tu svrhu uvesti koncepte kao što su konvencije grafičke reprezentacije, estetski kriterijumi, ograničenja grafičke reprezentacije ili efikasnost i optimalnost grafičke reprezentacije grafa [11].

Različite **konvencije reprezentacije grafova** se odnose na uslove koje reprezentacije moraju da zadovoljavaju kako bi dati prikaz bio prihvatljiv. Na primer, u softverskom inženjerstvu se algoritmi predstavljaju dijagramima toka, odnosno grafovima gde su čvorovi koji predstavljaju naredbe vizualizovani pravougaonicima, uslovna račvanja rombovima, itd. Neke od najrasprostranjenijih konvencija su reprezentacije čije su grane predstavljene ravnim linijama, ortogonalne reprezentacije gde su grane predstavljene alternirajućim nizom horizontalnih i vertikalnih duži, ravanske reprezentacije grafova, reprezentacije na mreži sa celobrojnim koordinatama (o kojima je i reč u ovom radu) i druge.

**Estetski kriterijumi** dobre reprezentacije grafa postoje u cilju povećanja čitljivosti grafa. Neretko se, zbog toga što su ovi kriterijumi zahtevni za izračunavanje, u cilju ispunjavanja ovih kriterijuma primenjuju odgovarajuće heuristike i optimizacije. Neka od najčešćih estetskih kriterijuma su:

1. Minimizacija broja preseka između grana grafa,
2. Minimizacija površine koju zauzima interpretacija grafa - može se definisati kao površina minimalnog (u smislu inkluzije), poligona koji prekriva ravansku interpretaciju grafa,
3. Minimizacija sume dužina grana,
4. Minimizacija maksimalne dužine grane interpretacije grafa,
5. Minimizacija ukupnog broja savijanja grana grafa (posebno važno svojstvo u slučaju ortogonalnih interpretacija),
6. Maksimizacija minimalnog ugla koji zaklapaju dve grane incidentne istom čvoru,
7. Minimizacija proporcija (*eng. aspect ratio*) ravanske interpretacije grafa, odnosno minimizacija odnosa dužine i širine minimalnog (u smislu inkluzije) pravougaonika koji pokriva ravansku interpretaciju grafa,
8. Simetrija interpretacije grafa.

Kada su u pitanju **ograničenja reprezentacije grafa**, za razliku od prethodnih svojstava, ovo se odnosi na podgrafe zadanog grafa. Konkretno su najčešće korišćena: centriranje (pozicioniranje datog čvora u okolini središta interpretacije grafa), pozicioniranje datog čvora u okolini spoljašnjih granica grafa, klasterovanje (grupisanje određenog podskupa čvorova), levo/desno ili gore/dole pozicioniranje čvorova, zadavanje unapred predefinisano "oblika" grafa ili nekog njegovog podgrafa i mnoga druga svojstva. Poslednje, ali takođe važno svojstvo metoda, tj. algoritama koji realizuju interpretaciju grafova je i **efikasnost**. Generalno je dobra praksa da algoritam ima što manju vremensku složenost. Ovo pogotovu može postati bitno kada su u pitanju algoritmi koji se izvršavaju u realnom vremenu (*eng. real-time*). Za konkretan primer se može uzeti nadgledanje neke saobraćajne strukture koja je predstavljena u vidu grafa. U tom slučaju je dosta važno što pre uočiti izmene koje se dešavaju.

## Glava 2

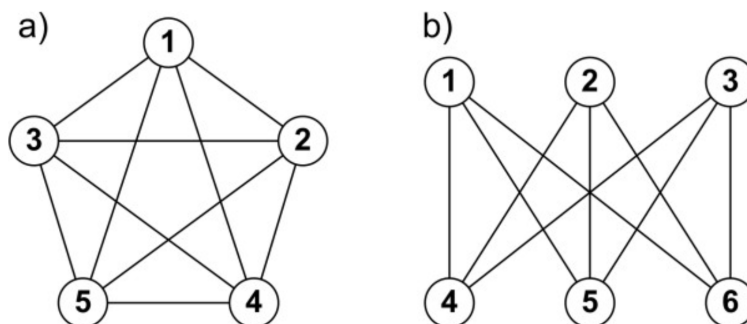
# Grafička interpretacija ravanskih grafova

U ovom poglavlju će biti više reči o planarnim grafovima i rezultatima koji su do sad izloženi u vezi sa predstavljanjem ravanskih grafova na mreži. Takođe, nešto više pažnje će biti posvećeno definisanju kanonskog uređenja grafa i metodi pomeraja.

Pojam planarnog grafa zauzima značajno mesto u teoriji grafova. U skladu s tim je i određivanje planarnosti grafa bitno pitanje zahvaljujući kome su se razvili brojni algoritmi koji u linearnom vremenu izvršavaju ovaj zadatak.

Kada je teorijska pozadina određivanja planarnosti grafa u pitanju, važnu karakterizaciju, odnosno neophodne i dovoljne uslove daje teorema Kuratovskog<sup>1</sup> (1930):

**Teorema 2.0.1** (dokaz se može naći u [30]). Graf je planaran akko nema podgraf homeomorfan sa  $K_5$  ili  $K_{3,3}$ .



Slika 2.1: Na slici a) je graf  $K_5$ , a na slici b) graf  $K_{3,3}$ <sup>2</sup>

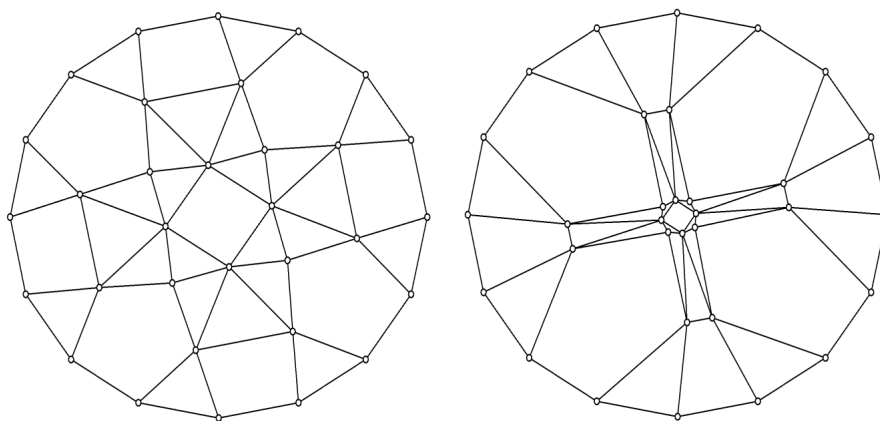
U nastavku rada će biti podrazumevano da je svaki graf uzet u razmatranje planaran i njegovo utapanje u ravni ćemo nazivati, kako je i ranije pomenuto, *ravanskim grafom*. Matematičar Feri je

<sup>1</sup>Kazimierz Kuratowski (1896 - 1980) - poljski matematičar i logičar

<sup>2</sup>Slika preuzeta sa [https://www.researchgate.net/figure/Auxiliary-graphs-in-Kuratowski-theorem-a-K5-and-bK3-3\\_fig9\\_257878116](https://www.researchgate.net/figure/Auxiliary-graphs-in-Kuratowski-theorem-a-K5-and-bK3-3_fig9_257878116)

dao rezultat koji dokazuje da svaki prost planarni graf ima pravolinijsko crtanje i da se može nacrtati bez presecanja grana. Teorema je nazvana po Ištvanu Feriju<sup>3</sup>, mada je i nezavisno dokazano od strane Klauusa Vagnera<sup>4</sup> (1936), i Šermana Štajna<sup>5</sup> (1951). Detaljnije o ovome se može naći u [10].

Jedna od najpoznatijih metoda za konstrukciju konveksnih grafičkih interpretacija 3-povezanih ravanskih grafova (odnosno planarnih grafova sa fiksiranim utapanjem u ravni) je i baricentrična metoda koju je u svom radu 1963. izložio matematičar Tut<sup>6</sup> [30]. Motivacija ove metode je u vezi sa rešavanjem sistema linearnih jednačina, gde se svaki čvor grafa postavlja u baricentar (težište) njegovih suseda, odakle i naziv metode. Tut je pokazao da je dobijeno rešenje ovako postavljenog sistema jedinstveno i da korespondira konveksnoj grafičkoj interpretaciji polaznog grafa koja pritom ima neka od svojstava poželjnih kada je grafička interpretacija grafa u pitanju. Može se pokazati da se pod određenim uslovima može ostvariti i simetričnost ovakve ravanske interpretacije. Primer grafičke interpretacije konstruisane na ovaj način dat je na slici 2.2.



Slika 2.2: Grafičke interpretacije dobijene baricentričnom metodom

Ovako dobijena crtanja pokazuju izvesne manjkavosti ove metode. Naime, koordinate uzimaju realne vrednosti visoke preciznosti i kako je ovo usko povezano sa brojem čvorova ulaznog grafa, ovu metodu nije preporučljivo koristiti u slučaju grafova sa nešto većim brojem čvorova (npr. 100). Još jedan problem predstavlja i odnos između najvećeg i najmanjeg euklidskog rastojanja između dva čvora grafa (eksponencijalno raste sa veličinom, odnosno porastom broja čvorova grafa). Dakle, ukoliko bi se ove koordinate aproksimirale celobrojnim vrednostima, dobijena mreža grafičke interpretacije grafa bi bila prilično velika odnosno eksponencijalnih dimenzija u odnosu na broj čvorova polaznog grafa.

<sup>3</sup>István Fáry (1922 - 1984) - matematičar mađarskog porekla

<sup>4</sup>Klaus Wagner (1910 - 2000) - nemački matematičar poznat po svojim doprinosima teoriji grafova

<sup>5</sup>Sherman K. Stein (1926) - američki matematičar, autor brojnih udžbenika

<sup>6</sup>William Thomas Tutte (1917 - 2002) - britanski matematičar i razbijač šifara

Ovi problemi su bili motivacija da se postavi pitanje da li se ravanski grafovi (ne nužno 3-povezani) mogu predstaviti pravolinijskom grafičkom interpretacijom na mreži dimenzija  $O(n^k) \times O(n^k)$ , pri čemu je  $n$  broj čvorova grafa, a  $k$  neka fiksirana konstanta. Dodatno, ova mreža bi imala celobrojne koordinate.

Na ovo pitanje, odgovor je dao De Frejsi<sup>7</sup> 1988. godine u radu [9], kada je pokazao da se svaki planaran graf sa  $n$  čvorova može grafički interpretirati na mreži dimenzija  $(2n - 4) \times (n - 2)$ , za broj čvorova veći ili jednak 3 (pretpostavlja se da ovo važi u nastavku rada). Ova metoda se naziva **metodom pomeraja** (*eng. shift method*) i o njoj će biti više reči kasnije u nastavku rada. Takođe, ovaj i njemu srodni algoritmi koji će kasnije biti spomenuti, pretpostavljaju da je ulazni graf  $G$  trianguliran. Ukoliko to nije slučaj, triangulacija grafa se može postići relativno jednostavno, dodavanjem minimalnog broja grana tako da je dobijeni graf  $G_1$  trianguliran. Da bi graf  $G$  bio trianguliran graf mora da ispuni uslov da svaki prost cikl u okviru grafa ne sadrži više od 3 čvora. Zatim se odredi pravolinijska grafička interpretacija grafa  $G_1$  na celobrojnoj mreži pomenutih dimenzija, a onda se naknadno izvrši brisanje pomoćnih grana koje su dodate u svrhu triangulacije.

Motivisani idejom metode pomeraja, 1995. godine su Črobak<sup>8</sup> i Pejn<sup>9</sup> u svom radu [20] predložili algoritam koji implementira metodu pomeraja i izvršava se u linearnom vremenu.

Nezavisno od njih je i Šnajder<sup>10</sup> došao do algoritma koji, bez gubljenja na kompleksnosti, daje grafičke interpretacije na mreži nešto manjih dimenzija. Ovaj metod se naziva *metod realizacije* (*eng. realizer method*) i zasniva se na baricentričnim reprezentacijama ravanskog grafa koje se mogu dobiti iz tzv. **realizacije** trianguliranog ravanskog grafa  $G$ . Realizacija grafa  $G$  predstavlja particionisanje skupa grana grafa  $G$  u tri skupa od kojih svaki indukuje podgraf grafa  $G$  koji predstavlja stablo i može se pokazati da svaki triangulirani ravanski graf ima svoju realizaciju. Na ovaj način se dobijaju pravolinijske grafičke interpretacije ulaznog trianguliranog ravanskog grafa na mreži dimenzija  $(2n - 5) \times (2n - 5)$  ili u slučaju oslabljenih uslova ove metode, rezultujuća dimenzija može biti i  $(n - 2) \times (n - 2)$ . Više o ovome se može naći u radu [26].

Pitanje koje se nameće je, kolika je minimalna dimenzija ovako dobijene mreže? De Frejsi je započeo rešavanje ovog problema i pokazao da za svako  $n \geq 3$  postoji utapanje planarnog grafa (odnosno ravanski graf) dimenzije  $n$ , gde  $n$  označava broj čvorova, takav da je za proizvoljnu pravolinijsku grafičku interpretaciju ovakvog grafa potrebna mreža minimalnih dimenzija  $(2n/3 - 1) \times (2n/3 - 1)$ . Generalno se, motivisano ovim De Frejsijevim rezultatima, odnosno uz manju optimizaciju istih, može doći do rezultata da za proizvoljno  $n \geq 3$  obe dimenzije moraju biti minimum  $\lfloor 2(n-1)/3 \rfloor$ . Ova ocena minimalne širine (odnosno visine) od  $\lfloor 2(n-1)/3 \rfloor$  važi čak i u slučaju da je druga dimenzija neograničena.

<sup>7</sup>Hubert de Fraysseix - francuski matematičar

<sup>8</sup>Marek Chrobak - matematičar i informatičar

<sup>9</sup>T.H.Payne - američki matematičar i informatičar

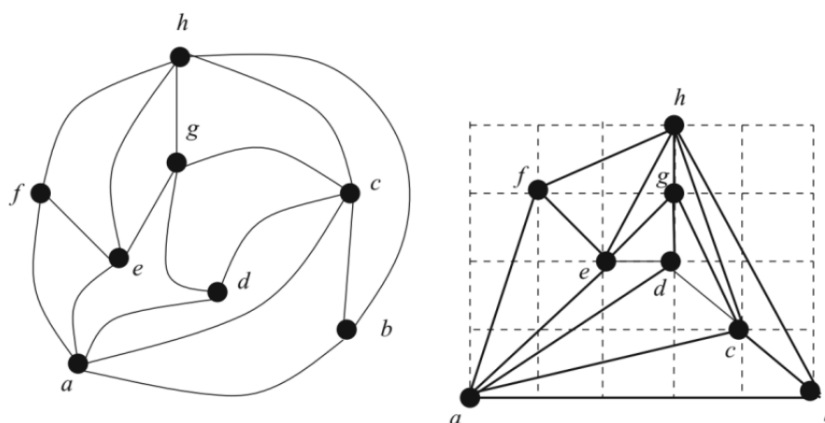
<sup>10</sup>Walter Schnyder - matematičar i informatičar

Optimizovanje ovih rezultata se nastavlja i dalje, pa se razvila i pretpostavka da svaki ravanski graf sa  $n$  čvorova može da se interpretira pravolinijski na mreži dimenzija  $\lceil 2n/3 \rceil \times \lceil 2n/3 \rceil$ , međutim ovo još uvek predstavlja otvoren problem u teoriji grafova [23].

Za neke specifične klase grafova su poznate i nešto optimalnije dimenzije. Na primer, 4-povezani planarni graf  $G$  sa  $n$  čvorova, sa minimum 4 čvora na ivici spoljašnje strane grafa  $G$  se može reprezentovati u vidu pravolinijske grafičke interpretacije na mreži dimenzije  $(\lceil n/2 - 1 \rceil) \times (\lfloor n/2 \rfloor)$ .

U nastavku ovog rada biće izložena implementacija algoritma, zajedno sa teorijskom pozadinom istog, koja u linearnom vremenu daje grafičku interpretaciju ulaznog ravanskog i trianguliranog grafa na mreži čija je širina najviše  $\lfloor 2(n-1)/3 \rfloor$ , kao i implementacija algoritma koji redukuje visinu na  $4\lfloor 2(n-1)/3 \rfloor - 1$ .

Na slici 2.3 pod a) se može videti grafička reprezentacija trianguliranog grafa, pri čemu su grane predstavljene krivim linijama, dok se na slici b) može videti pravolinijska ravanska interpretacija istog grafa na mreži.



Slika 2.3: **a)** Ravanski triangulirani graf  $G$  **b)** Pravolinijska grafička interpretacija grafa  $G$  na celobrojnoj mreži<sup>11</sup>

## 2.1 Interpretacija grafa na mreži

Pomenuto je da će u okviru rada jedan od preduslova biti da je graf interpretiran na mreži, konkretno mreži sa celobrojnim koordinatama. Neke od pogodnosti kada je u pitanju restrikcija na celobrojne koordinate su direktno vezane za pojednostavljanje računa i sprečavanje mogućnosti da dođe do grešaka prilikom zaokruživanja što je slučaj sa realnim vrednostima koordinata. Ovaj problem potiče iz različitih reprezentacija brojeva sa pokretnim zarezom na različitim računarima. Takođe, uvođenje celobrojnih koordinata olakšava prikazivanje grafičkih interpretacija na uređajima koji koriste rastersku grafiku<sup>12</sup>.

<sup>11</sup>Slika preuzeta iz [23]

<sup>12</sup>Prikazivanje slike u pikselima, odnosno tačkama



**Definicija 2.1.1.** Neka je dat ravanski graf  $G = (V, E)$  i neka je data funkcija  $P : V \rightarrow N_0 \times N_0$ , gde je  $N_0 = N \cup 0$ , pri čemu funkcija  $P$  svakom čvoru  $v \in V$  pridružuje uređeni par koordinata  $(x, y) \in N_0 \times N_0$ . Ukoliko preslikavanje  $P$  daje topološki ekvivalentnu strukturu grafa  $G$ , onda se naziva *interpretacijom grafa  $G$  na mreži*.

Na ovaj način svaka grana  $e \in E$  grafa  $G$ , se može interpretirati kao  $e = [P(u), P(v)]$  i ako  $e$  predstavlja duž, onda je reč o pravolinijskoj interpretaciji grafa  $G$  na mreži. Godine 1998. su matematičari Črobak i Nakano<sup>13</sup> pokazali sledeće [18]:

**Teorema 2.1.1.** Postoji ravanski graf  $G_n$ , za svako  $n \geq 3$  ( $n$  predstavlja broj čvorova datog grafa), takav da su širina i visina svake interpretacije grafa  $G_n$  na mreži minimum  $\lfloor 2(n-1)/3 \rfloor$ .

**Dokaz:**

Dovoljno je pokazati da ovo važi za jednu dimenziju, npr. širinu grafa  $G_n$ . Rekurzivno se konstruišu grafovi  $G_n$ .  $G_3$  je inicijalni graf, trougao čiji su čvorovi  $(v_1, v_2, v_3)$ , a na dalje se, za svako  $n \geq 4$ ,  $G_n$  konstruišu na isti način - dodavanjem čvora  $v_n$  u spoljašnju stranu grafa  $G_{n-1}$  i povezivanjem čvora  $v_n$  sa čvorovima  $v_{n-3}, v_{n-2}, v_{n-1}$ , tako da je ivica spoljašnje strane (kontura) grafa  $G_n$   $(v_n, v_{n-1}, v_{n-2})$ .

Dokaz se izvodi indukcijom. Primetimo da, za  $n \in \{3, 4, 5\}$ ,  $G_n$  imaju širine minimum 1,2,2 (redom). Pretpostavimo da tvrđenje važi za graf  $G_n$  (induktivna hipoteza). Dodavanje čvorova  $v_{n+1}, v_{n+2}$  i  $v_{n+3}$  u  $G_n$  zahteva uvođenje bar još dve  $x$  koordinate, tako da tvrđenje sledi indukcijom.  $\square$

$W$  i  $H$  označavaju, redom, širinu i visinu ortogonalne intepretacije na mreži, a  $n$  predstavlja broj čvorova grafa  $G$  [25]. Može se pokazati da, u slučaju proizvoljne ortogonalne interpretacije ravanskog grafa  $G$ , pri čemu su grane takve interpretacije predstavljene kao vertikalne ili horizontalne duži, važe sledeća ograničenja i ona su najbolja moguća:  $W + H \leq \frac{n}{2}$  i  $W \cdot H \leq \frac{n^2}{16}$  kao ograničenje površine koju zauzima pomenuta ortogonalna interpretacija.

Na slici 2.4 je ilustracija prethodnog dokaza, odnosno prikaz konstrukcije grafa  $H_n$ .

## 2.2 Kanonsko uređenje grafa

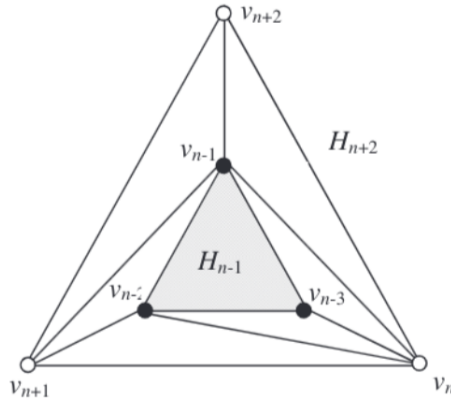
U svrhu realizacije metode pomeraja uvodi se pojam *kanonskog uređenja (poretka)* grafa (*eng. canonical ordering*), definisan na isti način koji su u svom radu [9] dali De Frejsi, Pah<sup>15</sup> i Polak<sup>16</sup>. Pojam kanonskog uređenja je od suštinskog značaja za interpretaciju ravanskih grafova i u osnovi je mnogih algoritama koji se bave rešavanjem tog problema.

<sup>13</sup>Shin-ichi Nakano - japanski matematičar i informatičar

<sup>14</sup>Slika preuzeta iz [18]

<sup>15</sup>János Pach (1954) - mađarski matematičar i informatičar

<sup>16</sup>Richard M. Pollack (1935 - 2018) - američki matematičar



Slika 2.4: Konstrukcija grafa  $H_n$  iz teoreme 2.1.1<sup>14</sup>

**Definicija 2.2.1.** Neka je  $G = (V, E)$  triangulirani ravanski graf sa  $n$  čvorova ( $n \geq 3$ ) i neka je  $\pi = (v_1, \dots, v_n)$  uređenje skupa čvorova  $V$ , takvo da  $(v_1, v_2, v_n)$  predstavljaju konturu grafa  $G$ , odnosno čvorove spoljašnjih grana grafa, pri čemu je redosled čvorova suprotan smeru kretanja kazaljke na satu, odnosno matematički pozitivan. Neka je  $i$  sa  $G_k$  označen podgraf grafa  $G$  koji je određen čvorovima  $(v_1, \dots, v_k)$  i neka je sa  $C_k$  označena ivica njegove spoljašnje strane (tj. kontura). Uređenje  $\pi$  nazivamo *kanonskim uređenjem* grafa  $G$  akko su  $\forall k, 3 \leq k \leq n$  ispunjena sledeća tri uslova:

1.  $G_k$  je 2-povezan i trianguliran,
2.  $C_k$  sadrži granu incidentnu čvorovima  $v_1$  i  $v_2$ , odnosno  $(v_1, v_2)$ ,
3. Ako je  $k < n$ , onda  $v_{k+1}$  pripada spoljašnjoj strani podgraфа  $G_k$ .

Primer kanonskog uređenja trianguliranog grafa sa  $n = 16$  čvorova je dat na slici 2.5.

Kako je De Fraysseix pokazao [8], svaki triangulirani ravanski graf ima kanonsko uređenje:

**Lema 2.2.1.** Svaki triangulirani ravanski graf sa granom  $(v_1, v_2)$  na ivici spoljašnje strane ima kanonsko uređenje koje počinje čvorovima  $v_1, v_2$ .

**Dokaz:**

Neka je  $G$  proizvoljan triangulirani ravanski graf i  $n$  broj čvorova tog grafa. U slučaju  $n = 3$  dokaz je trivijalan.

Pretpostavimo da je  $n \geq 4$ . Dokaz će biti izveden metodom matematičke indukcije po  $n$ , odnosno broju čvorova grafa.

Neka je proizvoljan  $G = (V, E)$  triangulirani ravanski graf sa  $n \geq 4$  čvorova. Pokažimo da je dovoljno odabrati čvor  $v_n$  različit od čvorova  $v_1, v_2$ , takav da  $v_n \in C(G)$  i da  $v_n$  nije kraj neke tetive u  $C(G)$ , a zatim primeniti metodu matematičke indukcije na graf  $G \setminus v_n$ . (Može se pokazati da ovakvo  $v_n$  uvek postoji, dokaz izostaje.)

Treba pokazati da važi sledeće:

1. graf  $G_{n-1} := G \setminus v_n$  je trianguliran i 2-povezan,
2. grana  $(v_1, v_2)$  pripada ivici spoljašnje strane grafa  $G_{n-1}$ ,
3. induktivno dobijenom kanonskom uređenju grafa  $G_{n-1}$  se može dodati čvor  $v_n$ , pri čemu se na taj način dobija kanonsko uređenje grafa  $G$ .

Tvrđenje 2. sledi direktno iz činjenice da je čvor  $v_n$  različit od čvorova  $v_1$  i  $v_2$ . Takođe, budući da je  $G = G_n$ , jasno je da su uslovi (1-3) iz definicije 2.2.1 ispunjeni za  $k = n$ , pa tvrđenje 3 važi. Dakle, ostalo je još pokazati da važi tvrđenje 1.

Svaka unutrašnja strana grafa  $G_{n-1}$  je ujedno i unutrašnja strana grafa  $G$ , a budući da je  $G$  trianguliran, sledi da će to važiti i za  $G_{n-1}$ . Pokažimo da je graf  $G_{n-1}$  2-povezan. Ivica spoljašnje strane grafa  $G_{n-1}$ , tj.  $C(G_{n-1})$  se dobija uklanjanjem čvora  $v_n$  iz  $C(G)$  i eventualnim dodavanjem skupa čvorova  $u_2, \dots, u_{m-1}$  (koji može biti prazan). Budući da čvor  $v_n$  nije bio kraj neke tetive u  $C(G)$ , tj. nijedan čvor iz skupa  $\{u_2, \dots, u_m\}$  nije pripadao ciklu  $C(G)$ ,  $C(G_{n-1})$  takođe predstavlja cikl. Dodavanjem čvora  $v$  u spoljašnjost grafa  $G_{n-1}$  i povezivanjem čvora  $v$  sa svakim čvorom koji pripada  $C(G_{n-1})$ , dobija se maksimalni planarni graf (triangulacija)  $H, H \supset G_{n-1}$ . Kako važi da je svaki maksimalni planarni graf sa barem 4 čvora 3-povezan <sup>17</sup>, odatle sledi da je  $H$  3-povezan, a samim tim i da je  $G_{n-1}$  2-povezan što je i trebalo dokazati.  $\square$

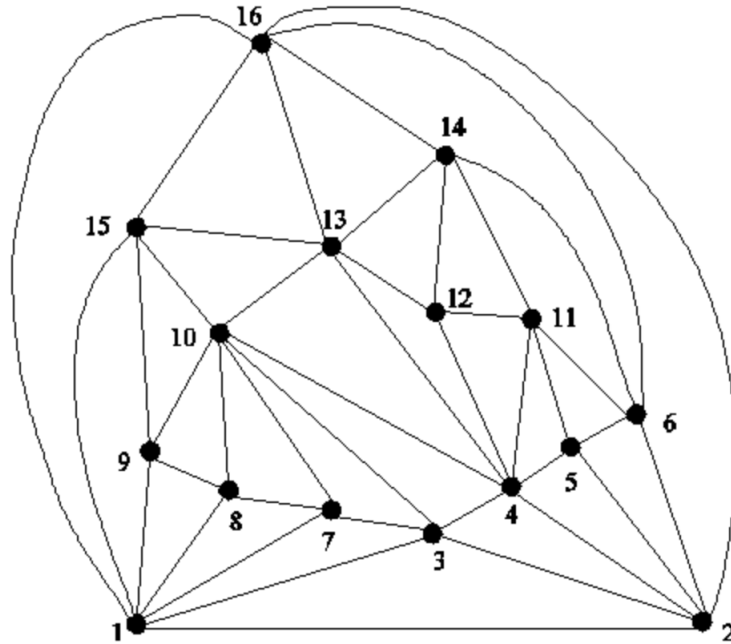
Algoritam za određivanje kanonskog uređenja ravanskog trianguliranog grafa koji je implementiran u okviru ovog rada se izvršava u linearnom vremenu, tj. složenosti je  $O(n)$ .

U nastavku rada će uređeni par  $(G, \pi)$  označavati triangulirani ravanski graf  $G$  sa zadatim kanonskim uređenjem  $\pi = (v_1, \dots, v_n)$ , pri čemu je  $(v_1, v_2, v_n)$  ivica spoljašnje strane grafa  $G$  zadata redosledom u matematički pozitivnom smeru. Ovakav uređeni par  $(G, \pi)$  će biti nazivan *uređenim trianguliranim ravanskim grafom*.

Takođe, na dalje će simbol  $\prec$  biti koriscen da označi poredak čvorova u kanonskom uređenju grafa  $G$ .

**Definicija 2.2.2.** Neka su sa  $w_p, w_{p+1}, \dots, w_q \in G_k$  označeni susedi čvora  $v = v_{k+1}$ ,  $3 \leq k < n$ . Unutrašnjim stepenom čvora  $v$ , u oznaci  $\deg^-(v)$ , označava se broj suseda od  $v$  u  $G_k$ , odnosno  $\deg^-(v) = q - p + 1$ . Takođe, indeks čvora  $w_i$  u odnosu na  $v$ , u oznaci  $\text{ind}_v(w_i)$ , predstavljaće broj  $\text{ind}_v(w_i) = i - p + 1$ ,  $p \leq i \leq q, i \in N$ . Stepen  $\deg^-(v_k)$  i indeks  $\text{ind}_{v_k}(w_i)$  nisu definisani za  $k = 1, 2, 3$ .

<sup>17</sup>Dokaz se može naći u <http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/academic/class/15456-s10/Homeworks/hw3-answers.pdf>



Slika 2.5: Kanonsko uređenje grafa

**Primer 2.2.1.** Na slici 2.5 je dat primer kanonskog uređenja grafa. U tom slučaju je  $\deg^-(8) = 2$ ,  $\deg^-(10) = 5$ ,  $\deg^-(14) = 4$ . Kako su susedi čvora 8 u podgrafu  $G_7$ , redom, čvorovi 1 i 7, to će indeks čvora 8 u odnosu na čvor 7 biti 2, odnosno  $\text{ind}_7(8) = 2$ . Analognim postupkom se dobija i  $\text{ind}_{10}(7) = 3$  (susedi čvora 10 u  $G_9$  su, redom, 9, 8, 7, 3, 4),  $\text{ind}_{14}(6) = 4$  (susedi čvora 14 u  $G_{13}$  su, redom, 13, 12, 11, 6), pri čemu su čvorovi u prethodnim primerima označavani brojem koji predstavlja njihov redosled u datom kanonskom uređenju grafa.

## 2.3 Metoda pomeraja

Metoda pomeraja (*eng. Shift method*) je jedna od poznatijih metoda za realizovanje grafičke interpretacije određene klase ravanskih grafova. Ovu metodu su u svom radu [8] predstavili De Frejsi, Pah i Polak 1990. godine. Originalna metoda za ulaz uzima triangulirani ravanski graf i za svaki čvor računa njegove koordinate na celobrojnoj mreži, tako da je rezultat interpretacija polaznog grafa na mreži kvadratne dimenzije.

Neka je  $(G, \pi)$  zadat uređeni triangulirani ravanski graf sa kanonskim uređenjem  $\pi = v_1, v_2, \dots, v_n$ , pri čemu je  $n \geq 3$ . Ideja samog algoritma je da se, jedan po jedan, u svakom koraku metode, dodaju čvorovi onim redosledom kojim se pojavljuju u kanonskom uređenju.

Prilikom dodavanja čvora  $v_{k+1}$  kontura  $C_k = (w_1 = v_1, w_2, \dots, w_m = v_2)$  (ivica spoljašnje strane) podgraфа  $G_k$ , mora da zadovoljava određenu invarijantu. Sama metoda pomeraja se zasniva na

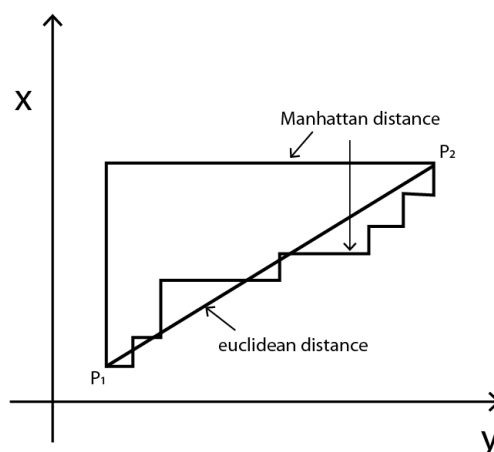
očuvanju te invarijante. Da bi se invarijanta očuvala, ukoliko je to potrebno, u datom koraku će se izvršiti pomeranje čvorova, odnosno korekcija koordinata pojedinih čvorova iz podgraфа  $G_k$ .

Odatle i motivacija za naziv metode. Formalnije, u vezi sa tim biće predstavljen pojam  $U$ -skupova.

**Definicija 2.3.1.**  $U$ -skup će za svaki čvor  $v_i$  u oznaci  $U(v_i)$  predstavljati skup čvorova čije bi pozicije trebalo ažurirati svaki put kada se pozicija čvora  $v_i$  promeni, odnosno kada se čvor  $v_i$  "pomeri". Može se primetiti  $v_i \in U(v_i)$ .

Dalje, neka je pozicija čvora  $v \in V$ , gde je  $V$  skup čvorova graфа  $G$  data funkcijom  $P(v) = (x(v), y(v)) = (x, y)$ .

**Definicija 2.3.2.** Menhetn rastojanje (eng. *Manhattan distance*) (poznato i kao taksi metrika ili  $l_1$  norma) između dve tačke  $x = (x_1, \dots, x_n)$  i  $y = (y_1, \dots, y_n)$  se u euklidskom prostoru dimenzije  $n$  definiše kao  $\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ .



Slika 2.6: Menhetn rastojanje<sup>18</sup>

Ako su  $A = (x_1, y_1)$  i  $B = (x_2, y_2)$  dve tačke ravni čije je Menhetn rastojanje parno, onda presek prave koja prolazi kroz tačku  $A$  i ima koeficijent pravca 1 i prave koja prolazi kroz tačku  $B$  i ima koeficijent pravca -1 predstavlja jednu tačku mreže koja će se u nastavku označavati sa  $\mu(A, B)$ . Realizacija metoda pomeraja se odvija na sledeći način. Inicijalni korak algoritma za realizaciju metode pomeraja je interpretacija trougla  $G_3$ , gde su pozicije čvorova ovog trougla date sa  $P(v_1) = (0, 0)$ ,  $P(v_2) = (2, 0)$ ,  $P(v_3) = (1, 1)$  na celobrojnoj mreži. Važi i  $U(v_i) = v_i, i = 1, 2, 3$ . Neka je pretpostavka da je u koraku  $k - 1 \geq 3$  podgraф  $G_{k-1}$  "ispravno" interpretiran, tj. "utopljen" u ravan, odnosno da važe sledeći uslovi :

<sup>18</sup>Slika preuzeta sa [https://subscription.packtpub.com/book/big\\_data\\_and\\_business\\_intelligence/9781789956399/1/ch01lv1sec05/introduction-to-k-means-clustering](https://subscription.packtpub.com/book/big_data_and_business_intelligence/9781789956399/1/ch01lv1sec05/introduction-to-k-means-clustering)

mp1:  $P(v_1) = (0, 0)$  i  $P(v_2) = (2k - 6, 0)$ ,

mp2:  $x(w_1) < x(w_2) < \dots < x(w_m)$ , pri čemu  $m$  predstavlja broj čvorova ivice spoljašnje strane podgraфа  $G_{k-1}$ , odnosno  $C_{k-1} = w_1, \dots, w_m, w_1 = v_1, w_m = v_2$ ,

mp3: Svaka grana  $(w_i, w_{i+1})$  u  $C_{k-1}$  je predstavljena pravom linijom sa koeficijentom pravca 1 ili -1.

U nastavku će biti objašnjeno dodavanje čvora  $v_k$  sa pretpostavkom da je  $G_{k-1}$  već interpretiran. Neka su  $w_p, w_{p+1}, \dots, w_q$  susedi od  $v_k$  na  $C_{k-1}$ . U tom slučaju će se govoriti da čvor  $v_k$  *pokriva* čvorove  $w_p, w_{p+1}, \dots, w_q$ . Prema uslovu mp3 važi da je Menhetn rastojanje između čvorova  $w_p$  i  $w_q$  parno, pa stoga  $\mu(w_p, w_q)$  predstavlja jednu tačku mreže. Ako bi čvor  $v_k$  bio postavljen u toj tački, onda bi grane  $(w_p, v_k)$  i  $(w_p, w_{p+1})$  imale presek, odnosno presek bi bio neprazan skup, budući da je koeficijent pravca grane  $(w_p, w_{p+1})$  jednak 1. Stoga se izvodi pomeranje čvorova  $w_1, \dots, w_p$  i još nekih unutrašnjih čvorova nalevo za 1 i pomeranje čvorova  $w_q, \dots, w_m$  (kao i nekih unutrašnjih čvorova) nadesno za 1, a tački  $\mu(w_p, w_q)$  se pridružuje čvor  $v_k$ , odnosno to postaje njegova pozicija. Na slici 2.7 dat je prikaz opisanog postupka. Tačka  $\mu(w_p, w_q) = (x', y')$  u kojoj se nalazi čvor  $v_k$  zadovoljava sledeće uslove :

gsm1:  $x(w_p) \leq x' \leq x(w_q)$ ,

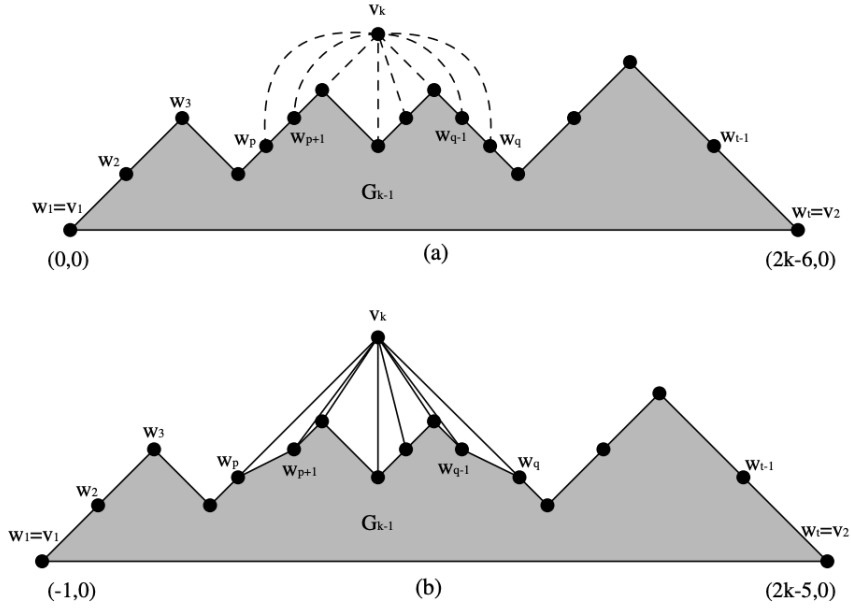
gsm2:  $y' \geq \max\{y(w_{p+1}), y(w_{q-1})\}$ ,

gsm3: svi čvorovi  $w_p, \dots, w_q$  su "vidljivi" iz tačke  $(x', y')$ , što znači da je presek konture  $C_k$  i grana  $(v_k, w_p), \dots, (v_k, w_q)$  jedino u čvorovima  $w_p, \dots, w_q$ .

Formalnije, prethodna priča se svodi na sledeće korake:

1.  $\forall v \in \cup_{i=1}^p U(w_i)$  se  $x$  koordinata menja na sledeći način:  $x(v) = x(v) - 1$ ,
2.  $\forall v \in \cup_{i=q}^m U(w_i)$  se  $x$  koordinata menja na sledeći način:  $x(v) = x(v) + 1$ ,
3.  $P(v_k) = \mu(w_p, w_q)$ ,
4.  $U(v_k) = \{v_k\} \cup (\cup_{i=p+1}^{q-1} U(w_i))$ .

Dodatno, može se primetiti da skupovi  $U(w_1), U(w_2), \dots, U(w_m)$  particionišu čvorove u  $G_{k-1}$ .



Slika 2.7: Ilustracija metode pomeraja<sup>19</sup>

Pozicija čvora  $v_1$  je, očigledno, nakon metode pomeraja, u tački  $(-1, 0)$ . U cilju translacije  $P(v_1)$  u koordinatni početak (odnosno translacije celog crteža na desno za 1) se umesto prva dva koraka metode, uvode sledeći koraci, pri čemu će uslovi mp1, mp2, mp3 i dalje važiti:

1.  $\forall v \in \cup_{i=p+1}^{q-1} U(w_i)$  se  $x$  koordinata menja na sledeći način:  $x(v) = x(v) + 1$ ,
2.  $\forall v \in \cup_{i=q}^m U(w_i)$  se  $x$  koordinata menja na sledeći način:  $x(v) = x(v) + 2$ .

Potrebno je pokazati da je na ovaj način data pravolinijska interpretacija  $G_k$ . Ovo tvrđenje sledi iz leme koju su u svom radu izneli i dokazali De Frejsi, Pah i Polak (1990).

**Lema 2.3.1.** Neka  $G_k$  predstavlja pravolinijsku ravansku interpretaciju na način koji je prethodno opisan i neka je dat neopadajući niz nenegativnih celih brojeva  $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_m$ . Translacija svakog elementa skupa  $U(w_i), \forall i$  za  $\rho_i$  na desno će za rezultat takođe dati pravolinijsku ravansku interpretaciju.

**Dokaz:**

Dokaz ove leme se izvodi indukcijom po  $k$ . Pretpostavimo da važi za  $G_{k-1}$ . Potrebno je pokazati da tvrđenje važi i za  $G_k$ .

Neka je, kao i u konstrukciji metode ivica spoljašnje strane, odnosno kontura  $G_{k-1}$ ,  $C_{k-1} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ . Dodajmo čvor  $v_k$ . Fiksirajmo niz nenegativnih celih brojeva:

$$\rho_1 \leq \dots \leq \rho_p \leq \rho \leq \rho_q \leq \dots \leq \rho_m \tag{2.1}$$

<sup>19</sup>Slika preuzeta iz [27]

i translirajmo svaki  $U(w_i)$  za  $\rho_i$ , a čvor  $w_i$  za  $\rho$ . Neka je, dalje, fiksiran niz  $\rho'_1 \leq \rho'_2 \leq \dots \leq \rho'_m$  koji se dobija na sledeći način:

$$\rho'_i = \begin{cases} \rho_i, \forall i = 1, \dots, p \\ \rho + 1, \forall i = p + 1, \dots, q - 1 \\ \rho_i + 2, \forall i = q, \dots, m \end{cases} \quad (2.2)$$

Po induktivnoj pretpostavci, nakon translacije skupova  $U(w_i)$  od  $G_{k-1}$  za  $\rho'_i$ ,  $G_{k-1}$  ostaje pravolinijska ravanska interpretacija. Neposredno odatle sledi i da je  $G_k$  pravolinijska interpretacija, budući da se i  $v_k$  pomera strogo sa  $w_p, \dots, w_q$ .  $\square$

Tokom vremena je dolazilo do različitih optimizacija originalne metode pomeraja koja je predstavljena i postizani su bolji rezultati kada su u pitanju dimenzije rezultujuće mreže. Poboljšanja se ogledaju u oslabljivanju uslova mp3, odnosno invarijante da su koeficijenti pravaca grana iz uslova 1 ili -1. Naime, na taj način su dimenzije rezultujuće mreže širina  $2n - 4$  i visina  $n - 2$ . Može se pokazati da se, ukoliko bi se za koeficijente pravaca uzimale vrednosti -1 ili proizvoljne nenegativne vrednosti, može doći do rezultata  $(n - 1) \times (n - 1)$ , budući da se u svakom koraku izvršava tačno jedno pomeranje. Dodatna optimizacija bi bila modifikacija koraka za poslednji čvor, što bi dalo rezultat dimenzija mreže  $(n - 2) \times (n - 2)$  (Črobak i Kant 1997, a Šnajder je pokazao da postoji interpretacija ovih dimenzija koja se realizuje u linearnom vremenu).

Što se same složenosti algoritma tiče, relativno je lako postići kvadratnu vremensku složenost izvršavanja algoritma  $O(n^2)$ . De Frejsi, Pah i Polak su u svom radu uspeli da vremensku složenost izvršavanja redukuju na  $O(n \log n)$ .

U okviru ovog rada biće implementirani algoritmi koje su u svom radu izneli Črobak i Pejnj, 1995. godine [20], koji postiže linearnu vremensku složenost izvršavanja  $O(n)$ . Algoritam se može predstaviti na sledeći način:

$G_k$  se, za svako  $k$ , može posmatrati kao šuma koja se sastoji od stabala  $U(w_1), \dots, U(w_m)$ , pri čemu su korenski čvorovi ovih stabala, redom,  $w_1, \dots, w_m$ . U daljem toku rada će biti korišćene sledeće oznake: prethodno pomenuta šuma će biti posmatrana kao binarno drvo i biće označavana sa  $T$ . *Levim T-detetom* nekog čvora biće označavan čvor koji je njegovo najlevlje dete, ako postoji, a *desnim T-detetom* čvora biće označavan čvor koji je njegov prvi desni rođak (čvorovi koji imaju istog roditelja su rođaci) ukoliko on postoji.

Za svaki čvor  $v \neq v_1$  će biti definisana i sledeća veličina  $x$ -pomeraja  $\Delta x(v) = x(v) - x(w)$ , gde je  $w$  T-roditelj čvora  $v$ . I opštije, ako je  $w$  predak od  $v$ , ova veličina će biti definisana na sledeći način:  $\Delta x(v, w) = x(v) - x(w)$ . Konačno, u svrhu predstavljanja algoritma pomeraja, biće uvedene i ove veličine:

- $l(v)$  - levo T-dete čvora  $v$ ,
- $r(v)$  - desno T-dete čvora  $v$ ,



- $\Delta x(v)$  -  $x$ -pomeraj čvora  $v$  u odnosu na T-roditelja čvora  $v$ ,
- $y(v)$  -  $y$  koordinata čvora  $v$ .

$w_1, \dots, w_m$  označava ivicu spoljašnje strane, tj. konturu podgraфа  $G_{k+1}$ ; takođe  $w_p, \dots, w_q$  predstavljaju susede čvora  $v_k$  u  $G_{k-1}$ .

U koraku inicijalizacije se uvode čvorovi  $v_1, v_2, v_3$  i postavljaju se vrednosti veličina ovih promenljivih na sledeći način:

$\Delta x(v_1), y(v_1), r(v_1), l(v_1)$  se inicijalizuju na, redom,  $0, 0, v_3, null$

$\Delta x(v_2), y(v_2), r(v_2), l(v_2)$  se inicijalizuju na, redom,  $1, 0, null, null$

$\Delta x(v_3), y(v_3), r(v_3), l(v_3)$  se inicijalizuju na, redom,  $1, 1, v_2, null$

Dalje se čvorovi, u redosledu u kom su dati u kanonskom uređenju, u svakom koraku ugrađuju na sledeći način:

---

**Algoritam 1** Faza ugrađivanja čvorova u okviru metode pomeraja

---

**for**  $k := 4$  **to**  $n$  **do**

$\Delta x(w_{p+1}) \leftarrow \Delta x(w_{p+1}) + 1$

$\Delta x(w_q) \leftarrow \Delta x(w_q) + 1$

$\Delta x(w_p, w_q) \leftarrow \Delta x(w_{p+1}) + \dots + \Delta x(w_q)$

$\Delta x(v_k) \leftarrow \frac{1}{2}[-y(w_p) + \Delta x(w_p, w_q) + y(w_q)]$

$y(v_k) \leftarrow \frac{1}{2}[y(w_p) + \Delta x(w_p, w_q) + y(w_q)]$

$\Delta x(w_q) \leftarrow \Delta x(w_p, w_q) - \Delta x(v_k)$

▷ ugrađivanje čvora  $v_k$

$r(w_p) \leftarrow v_k$

$r(v_k) \leftarrow w_q$

**if**  $p + 1 \neq q$  **then**

$l(v_k) \leftarrow w_{p+1}$

$r(w_{q-1}) \leftarrow null$

**else**

$l(v_k) \leftarrow null$

**end if**

**end for**

---

U drugoj fazi algoritma biće korišćena funkcija  $AzuriranjeX(v, delta)$ . Funkcija će biti pozvana za vrednosti  $v = v_1$  i  $delta = 0$  koja radi tako što vrši obilazak stabla i na osnovu pomeraja računa krajnje vrednosti  $x$  koordinata. Računanje  $x$  koordinate se vrši tako što se  $\Delta x(v)$  akumuliraju tokom izvršavanja funkcije  $AzuriranjeX$ , pa  $\Delta x(v)$  zapravo predstavlja  $x$  koordinatu nakon završetka izvršavanja funkcije  $AzuriranjeX$ . Ta funkcija je implementirana na sledeći način:

---

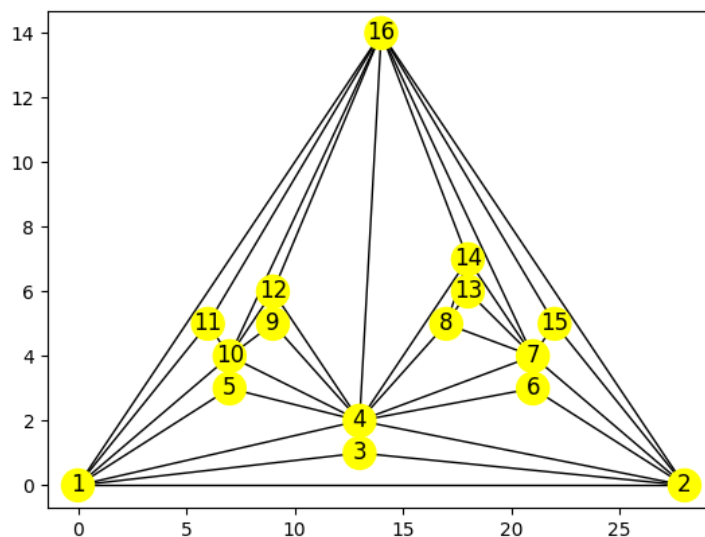
**Algoritam 2** Funkcija ažuriranja koja predstavlja drugu fazu metode pomeraja

---

```
function AZURIRANJEX( $v$ : čvor,  $\delta$ : integer)
  if  $v \neq null$  then
     $\Delta x(v) \leftarrow \Delta x(v) + \delta$ 
    AzuriranjeX( $l(v)$ ,  $\Delta x(v)$ )
    AzuriranjeX( $r(v)$ ,  $\Delta x(v)$ )
  end if
end function
```

---

Na slici 2.8 je jedan primer grafičke reprezentacije grafa dobijenog pomoću metode pomeraja. Metoda pomeraja predstavlja polaznu tačku u okviru ovog rada, pošto algoritmi koji će biti predstavljeni u nastavku rada pokušavaju da optimizuju grafičku reprezentaciju dobijenu pomoću metode pomeraja, u smislu širine i visine rezultujuće celobrojne mreže grafičke reprezentacije grafa.



Slika 2.8: Primer interpretacije dobijene metodom pomeraja

## Glava 3

# Ravanska interpretacija grafova minimalne širine

U okviru prethodnog poglavlja predstavljena je metoda pomeraja koja je jedan od načina da se uređeni triangulirani ravanski graf predstavi na mreži. Pitanje koje se nameće je na koji način rezultati mogu da se optimizuju, odnosno konkretnije, da li je moguće redukovati dimenzije ovako dobijene mreže. Odgovor na ovo pitanje je delimično dat u vidu površnog osvrta na optimizovanije rezultate koje su matematičari dobijali proteklih godina, a u sklopu ovog poglavlja će detaljnije biti izložen algoritam do kog su 1998. godine došli matematičari Črobak i Nakano [18], a koji daje za rezultat graf kome je gornja granica širine mreže  $\lfloor 2(n-1)/3 \rfloor$ , odnosno ovo predstavlja gornju granicu širine mreže u okviru koje je graf grafički prikazan.

### 3.1 Uvodni pojmovi

U nastavku će biti korišćene oznake kao u prethodnom delu rada, pri čemu  $\pi$  predstavlja kanonsko uređenje grafa. Neka je, dakle,  $(G, \pi)$  uređeni triangulirani ravanski graf, pri čemu je  $\pi = (v_1, \dots, v_n)$  dato kanononsko uređenje, gde je  $n$  broj čvorova grafa  $G$ . Neka su, takođe,  $w_p, \dots, w_q$ , susedi čvora  $v = v_{k+1}$  na konturi  $C_k$ , odnosno ivici spoljašnje strane  $G_k$ .

Nakon dodavanja čvora  $v$  u  $G_k$ , deo konture takođe postaju i  $(w_p, v)$  koja će dalje biti nazivana *prednjom granom* (eng. *forward edge*), kao i  $(v, w_q)$  koja će u nastavku biti označena kao *zadnja grana* (eng. *backward edge*). Neke od grana će prilikom dodavanja čvora  $v$  prestati da budu deo konture i one će biti nazivane *granama pokrivenim od strane čvora  $v$* . Dodatno, čvor  $v \neq v_1, v_2, v_3$  će biti označen kao *prednje orijentisan* (eng. *forward-oriented*), odnosno *zadnje orijentisan* (eng. *backward-oriented*) ako pokriva, redom, prednju, odnosno zadnju granu.

Pretpostavka koja će važiti u nastavku je da je broj čvorova grafa najmanje 4.

Neka je  $v = v_{k+1}, 2 \leq k \leq n-2$  i  $w_p$  kao i do sad najleviji sused čvora  $v$  u  $G_k$ , odnosno takav da je  $ind_v(w_p) = 1$  ( $w_p = v_1$  u slučaju  $k = 2$ ). Neka je, dalje,  $z$  čvor koji pokriva granu  $(w_p, v)$  (takvo  $z$  postoji, budući da je  $v \neq v_n$ ).

**Definicija 3.1.1.** U nastavku, pod navedenim uslovima za svaki čvor  $v \neq v_1, v_2$  definiše se pojam stabilnog i nestabilnog čvora. Takođe svakom ovakvom čvoru  $v$  biće pridružen niz čvorova koji će biti nazivan *domino lanac* (eng. domino chain) u oznaci  $DC(v)$ , kao i funkcija  $dom(v)$ , koja se naziva dominatorom čvora  $v$ , kojom se svakom čvoru pridružuje ili čvor ili nedefinisana vrednost u oznaci  $\perp$ . Uzimajući u obzir navedene uslove i oznake važi:

- (dl1) Ako je  $ind_z(v) = 2$ , tada je  $DC(v) = v$ ,  $dom(v) = z$  i  $v$  je nestabilan,
- (dl2) Ako je  $ind_z(v) \geq 4$ , tada je  $DC(v) = v$ ,  $dom(v) = z$  i  $v$  je stabilan,
- (dl3) Ako je  $ind_z(v) = 3$  i  $DC(z) = (z_1, z_2, \dots, z_i = z)$ , tada je  $DC(v) = (z_1, z_2, \dots, z_i, v)$  i  $dom(v) = dom(z)$ . Vazi i da je  $v$  stabilan akko je  $z$  stabilan.

Dodatno, u slučaju  $v = v_n$  domino lanac i dominator biće definisani na sledeći način:

$$\begin{aligned} DC(v_n) &= (v_n) \\ dom(v_n) &= \perp \end{aligned} \tag{3.1}$$

**Definicija 3.1.2.** Nestabilan čvor  $v \neq v_1, v_2, v_3$  unutrašnjeg stepena 2 se naziva *čvorom m-pomeraja* (intuicija iza ovog naziva će biti pojasnjena u daljem tekstu).

Intuitivnije, npr. u grafovima koji reprezentuju dijagrame kontrole toka, pojmovi dominatora čvora mogu biti posmatrani i na sledeći način - čvor  $p$  dominira čvor  $q$  ako svaki put od ulaznog čvora do čvora  $q$  mora da prodje kroz  $p$ .

Zanimljivo je primetiti i da je naziv "domino lanac" opravdan time što se svi čvorovi u lancu ponašaju na isti način - ako je prvi stabilan, biće i ostali. Analogno važi za slučaj da je prvi čvor nestabilan.

Još neke od osobina domino lanaca i dominatora će dati i sledeća lema.

**Lema 3.1.1.** Neka je  $n \geq 4$  i  $u, v \neq v_1, v_2$ . Tada vazi:

1. Ako  $u \in DC(v)$ , onda je  $DC(u)$  prefiks lanca  $DC(v)$ , to jest svi čvorovi lanca  $DC(u)$  se nalaze na početku lanca  $DC(v)$ ,
2. Ako  $u \notin DC(v)$  i  $v \notin DC(u)$ , onda važi:
  - (a)  $DC(u) \cap DC(v) = \emptyset$
  - (b) Ako su  $u$  i  $v$  nestabilni, onda važi  $dom(u), dom(v) \neq \perp$  i  $dom(u) \neq dom(v)$

**Dokaz:**

Prvo tvrđenje (1) sledi direktno iz definicije domino lanaca, budući da je prethodnik (roditelj) svakog čvora u domino lancu jedinstveno određen.

U svrhu dokazivanja drugog tvrđenja (2), odnosno tvrđenja (2a) pretpostavimo suprotno. Pretpostavimo da postoji neprazan zajednički prefiks ovih lanaca i neka je čvor  $z$  poslednji čvor ovog

prefiksa (takav čvor mora postojati, budući da je prefiks neprazan). Neka su  $u'$  i  $v'$  sledbenici (deca) ovog čvora u  $DC(u)$  i  $DC(v)$ , redom. Po definiciji domino lanaca je  $u', v' \prec z, ind_z(u') = 3$  i  $ind_z(v') = 3$ , što je kontradikcija. Dakle, važi (2a).

Dokažimo tvrđenje (2b). Pretpostavimo da su čvorovi  $u$  i  $v$  nestabilni. Odatle neposredno sledi prvi deo tvrđenja  $dom(u), dom(v) \neq \perp$ , jer bi, u suprotnom, čvorovi  $u$  i  $v$  bili stabilni. Dalje, neka su čvorovi  $u'$  i  $v'$  prvi čvorovi u lancima  $DC(u)$  i  $DC(v)$ , redom. Iz tvrđenja 2a sledi da je  $u' \neq v'$ . Pretpostavimo suprotno, to jest da  $z = dom(u) = dom(v)$ . Odatle  $z = dom(u') = dom(v')$ . Važi  $u', v' \prec z$ . Budući da je  $u$  nestabilan, svi čvorovi u lancu  $DC(u)$ , uključujući i  $u'$  moraju biti nestabilni. Analogno važi i za  $v'$ . Odatle se može zaključiti da je  $ind_z(u') = ind_z(v') = 2$ , što je kontradikcija, čime je i ovo tvrđenje dokazano.  $\square$

**Primer 3.1.1.** Na slici 2.5 je dato jedno kanonsko uređenje grafa, te se mogu odrediti dominatori i domino lanci čvorova ovog grafa. Recimo:

- U trećem koraku dodaje se čvor 4. Njegov najleviji sused je čvor 3, a kako granu (3, 4) pokriva čvor 10 i  $ind_{10}4 = 5$ , to je prema definiciji  $DC(4) = 4$  i  $dom(4) = 10$  i čvor 4 je stabilan,
- Slično prvom slučaju, za korak  $k = 4$  dobijamo i  $DC(5) = 5, dom(5) = 11$ , pri čemu je čvor 5 nestabilan,
- U koraku  $k = 5$ , se dodaje čvor 6, a budući da je  $ind_{11}6 = 3$ , biće  $DC(6) = (11, 6), dom(6) = dom(11) = 12$  dobijamo i  $DC(5) = 5, dom(5) = 11$ . Takođe, čvor 6 je, kao i 11, nestabilan.

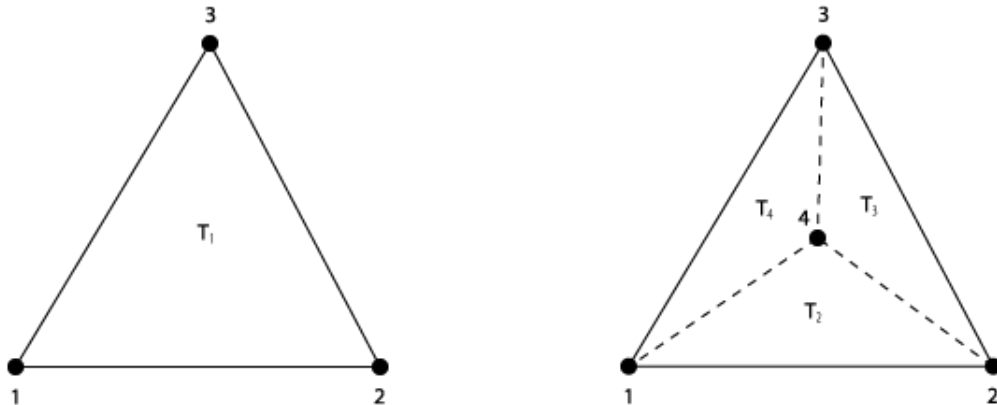
## 3.2 Algoritam za generisanje trianguliranih grafova

U svrhu testiranja implementiranih algoritama iz ovog rada, takođe je implementiran i algoritam za generisanje instanci koje sadrže triangulirane grafove.

Algoritam počiva na činjenici da je svaki trianguliran graf sastavljen od određenog broja trouglova. Svaki trougao je određen sa tri čvora i granama koje ih povezuju. Početni korak je formiranje prvog trougla  $T_1$ , odnosno grafa sa tri čvora  $v_1, v_2$  i  $v_3$  (leva strana slike 3.1). Posmatranom trouglu  $T_1$ , možemo dodati čvor  $v_4$  i spojiti ga sa svim čvorovima koji određuju trougao  $T_1$ , odnosno sa čvorovima  $v_1, v_2, v_3$  i time trougao  $T_1$  podeliti na tri nova trougla  $T_2, T_3$  i  $T_4$ , kao što je ilustrovano na desnoj strani slike 3.1.

Opisani korak se dalje ponavlja za slučajno izabran trougao  $T_i$  iz grafa  $G_k$  kome se dodaje novi čvor  $v_k$ , gde se izabrani trougao  $T_i$  razbija na nova tri trougla, na isti način kao što je opisano na slici 3.1. Ovaj korak se ponavlja dok se ne doda dovoljan broj čvorova  $n$ .

Pošto se u svakom koraku na slučajan način bira trougao, ovim se postiže da generisane instance budu različite.



Slika 3.1: Ilustracija koraka dodavanja čvora za generisanje trianguliranih grafova

### 3.3 Skica algoritma za redukciju širine mreže

U okviru ove sekcije biće izloženi detaljni koraci algoritma za redukciju širine mreže o kome je reč u ovom poglavlju. U daljem radu će se definisati i algoritam za redukciju visine mreže, stoga radi lakšeg obeležavanja algoritam za redukciju širine mreže nazivaćemo Algoritam A. Ideja algoritma je da se minimizuje broj pomeraja u svakom koraku, ali da se takođe očuva invarijanta iz uslova mp1, mp2, mp3, tj.  $x(w_i) \leq x(w_{i+1}), \forall i$ . Pritom će jednakost važiti samo u slučaju  $y(w_i) < y(w_{i+1})$ . Prilikom dodavanja stabilnog čvora, on će zadržati  $x$  koordinatu svog najlevljjeg suseda, tj. biće smešten neposredno iznad svog najlevljjeg suseda. U slučaju nestabilnog čvora,  $x$  koordinata će biti veća za 1 u odnosu na  $x$  koordinatu njegovog najlevljjeg suseda. Ako je ovaj čvor pritom i čvor  $m$ -pomeraja, može doći do narušavanja malopre pomenute invarijante (čvor koji se dodaje može biti smešten iznad svog najdešnjeg suseda), pa ovaj slučaj zahteva nešto dodatnih operacija - pomeranje desnog suseda na desno, tj. ažuriranje njegove  $x$  koordinate, kako bi se napravilo mesta za čvor koji se dodaje. Otuda i naziv čvora, jer zahteva "pomeranje mesta".

#### Skica algoritma:

Ulaz algoritma obrađenog u ovom poglavlju je uređeni triangulirani ravanski graf  $(G, \pi)$ , gde je  $\pi = v_1, \dots, v_n$ , kanonsko uređenje grafa  $G$ .

Neka su sa  $a_f$  i  $a_b$  označeni ukupni brojevi čvorova grafa  $G$  unutrašnjeg stepena 2 koji su, redom, prednje, odnosno zadnje orijentisani. Neka takođe važi  $a_f \leq a_b$ .

U slučaju  $n = 3$  pozicije prva tri čvora kanonskog uređenja biće:  $P(v_1) = (x(v_1), y(v_1)) = (0, 0)$ ,  $P(v_2) = (x(v_2), y(v_2)) = (1, 0)$ ,  $P(v_3) = (x(v_3), y(v_3)) = (0, 1)$ .

U slučaju da je  $n \geq 4$ , inicijalno će čvorovi  $v_1, v_2, v_3$  biti pozicionirani na sledeći način:  $P(v_1) = (0, 0)$ ,  $P(v_2) = (2, 0)$ ,  $P(v_3) = (1, 1)$ . U svakom sledećem koraku biće dodavan po jedan čvor u sledećem redosledu:  $v_4, v_5, \dots, v_n$ .

U nastavku će biti opisan korak  $k, 3 \leq k \leq n - 1$ , odnosno dodavanje čvora  $v = v_{k+1}$ . Neka je, kao i do sad,  $C_k = (w_1, \dots, w_m)$  kontura, odnosno ivica spoljašnje strane  $G_k$ , a  $w_p, \dots, w_q$  susedi čvora  $v$  u  $G_k$ . Ako je  $v$  stabilan, onda je  $x(v) = x(w_p)$ , a u slučaju da je  $v$  nestabilan, biće  $x(v) = x(w_p) + 1$  i dodatno će se u slučaju  $deg^-(v) = 2$  izvršiti operacija  $shift(w_q)$ . Ova funkcija potiče iz metode pomeraja, opisane u sekciji 2.3 i za čvor konture  $w_j, 1 \leq j \leq m$  predstavlja operaciju koja  $x$  koordinatu svakog čvora  $u \in \cup_{i=j}^m U(w_j)$  povećava za 1.

Koordinata  $y$  čvora  $v$  biće određena tako da je to najmanji celi broj takav da  $P(v) = (x(v), y(v)) = (x', y')$  zadovoljava sledeće uslove:  $y' \geq \max\{y(w_{p+1}), y(w_{q-1})\}$  i da su čvorovi  $w_p, \dots, w_q$  vidljivi iz čvora  $v$  (kao i u metodi pomeraja).

Slučaj koji još treba obraditi je  $a_f > a_b$ . Za potrebe ovog slučaja biće posmatran graf  $(G', \pi')$ , odnosno graf koji je simetričan grafu  $G$ , tj. njegova "kopija u ogledalu". Kanonsko uređenje ovog grafa,  $\pi'$ , biće zapravo različito od  $\pi$  po tome što je obrnut redosled čvorova  $v_1$  i  $v_2$ . Odatle se može zaključiti da je čvor prednje (odnosno zadnje) orijentisan u uređenju  $\pi$  ako i samo ako je zadnje (odnosno prednje) orijentisan u uređenju  $\pi'$ . Ta činjenica za posledicu ima to što se u tom slučaju prethodni opisani slučaj algoritma i ulaz  $(G, \pi)$  može primeniti na  $(G', \pi')$ . Nakon toga se dobijena interpretacija može modifikovati primenom refleksije, odnosno:  $x_0 \leftarrow x(v_2)$  i  $x(v_k) \leftarrow x_0 - x(v_k), \forall k$  kako bi dobijena interpretacija bila topološki ekvivalentna grafu  $G$ .

### 3.4 Primer izvršavanja algoritma za redukciju širine mreže

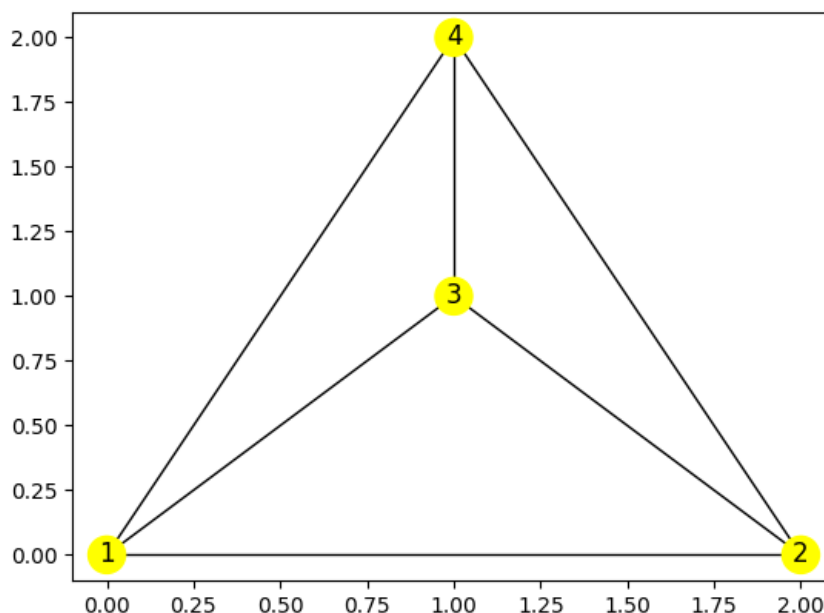
Na sledećim slikama biće grafički prikazano izvršavanje koraka algoritma za redukciju širine mreže na primeru jednog grafa sa  $n = 16$  čvorova. Zbog prethodno navedenog načina generisanja ulaznih grafova, indeksi čvorova se ne poklapaju sa redosledom koji vraća kanonsko uređenje. Kao i sam proces generisanja ulaznih instanci i algoritam A počinje od trivijalnog koraka gde se uzimaju prva tri čvora  $v_1, v_2, v_3$  koji obrazuju trougao, nakon čega se za  $k = 4, \dots, n$  dodaju novi čvorovi  $v_k$  na već postojeći podgraf  $G_{k-1}$ .

Kanonsko uređenje grafa je sledeće, navedeno u obliku  $v_k : [w_p, \dots, w_q]$  gde su, prateći redosled iz kanonskog uređenja, za svaki čvor  $v_k$  u okviru uglastih zagrada navedeni njegovi susedi sa konture  $C_{k-1}$ :

- 1 :  $\square$
- 2 :  $\square$
- 3 : [1, 2]
- 4 : [1, 3, 2]
- 6 : [4, 2]
- 7 : [4, 6, 2]
- 8 : [4, 7]

- 5 : [1, 4]
- 13 : [8, 7]
- 10 : [1, 5, 4]
- 9 : [10, 4]
- 15 : [7, 2]
- 14 : [4, 8, 13, 7]
- 12 : [10, 9, 4]
- 11 : [1, 10]
- 16 : [1, 11, 10, 12, 4, 14, 7, 15, 2]

Na slici 3.2 se vidi graf dobijen nakon dodavanja čvora  $v_4$ . Kako je stepen čvora  $v_4$  nije jednak 2 i čvor nije stabilan dodeljuje mu se  $x$  koordinata sa vrednošću 1, odnosno koordinata najlevljeg suseda sa grafa  $G_3$  uvećana za jedan  $x(v_1) + 1$  u našem slučaju. Koordinata  $y(v_4)$  se određuje na osnovu trećeg uslova metode pomeraja (gsm3, tj. uslov "vidljivosti") odnosno uzima se najveća  $y$  koordinata koja zadovoljava da se grane iz  $v_4$  kao ostalim susedima ne seku sa konturom  $C_3$  grafa  $G_3$ .

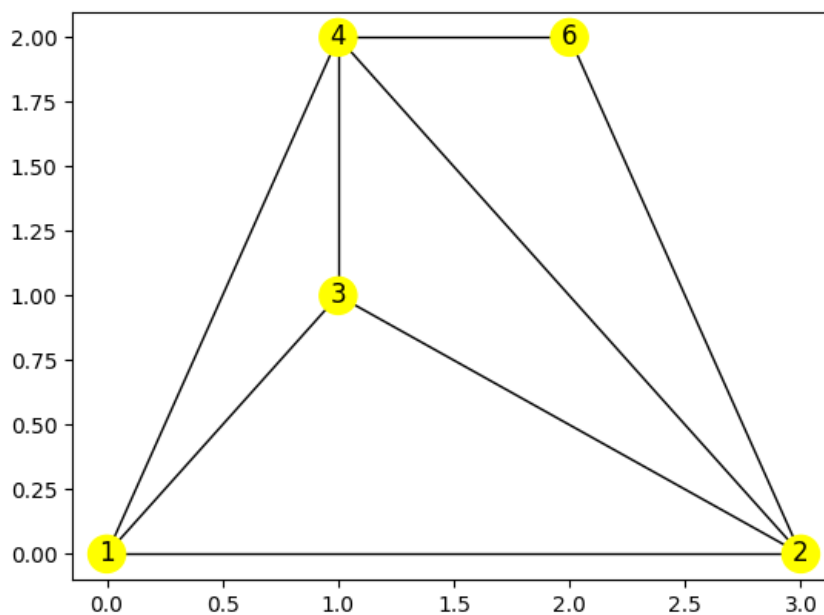


Slika 3.2: Korak 3 - Dodavanje čvora 4

Sledeći čvor koji se dodaje prema kanonskom uređenju je  $v_6$ , na slici 3.3 je predstavljeno stanje nakon dodavanja  $v_6$ . Pošto je stepen čvora  $v_6$  tačno 2 i čvor  $v_6$  nije stabilan, to znači da ceo  $U$  – skup vezan za čvor  $v_6$  mora biti pomeren na desno. U ovom slučaju to je samo čvor  $v_2$ , čija se  $x$  koordinata

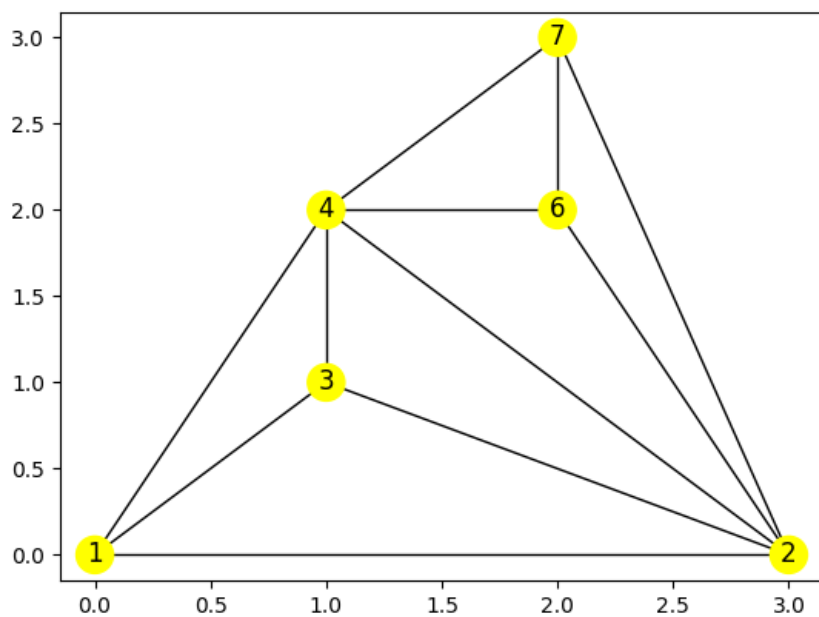


uvećava za 1, pa je sad  $x(v_2) = 3$ . Kako je koeficijent pravca prave koju obrazuju najlevlji sused  $v_6$  sa konture  $C_4$  ( $v_4$ ) i najdešnji sused ( $v_2$ ) negativan, a  $v_6$  nije stabilan biće  $y(v_6) = 2$  odnosno  $y$  koordinata najlevljeg suseda sa  $C_4$  u oznaci  $w_p$ , to jest  $v_4$  u ovom slučaju. Takođe,  $x$  koordinata čvora  $v_6$  će biti jednaka  $x(v_6) = x(w_p) + 1 = x(v_4) + 1 = 2$ , pošto kao što je prethodno spomenuto  $v_6$  nije stabilan čvor.



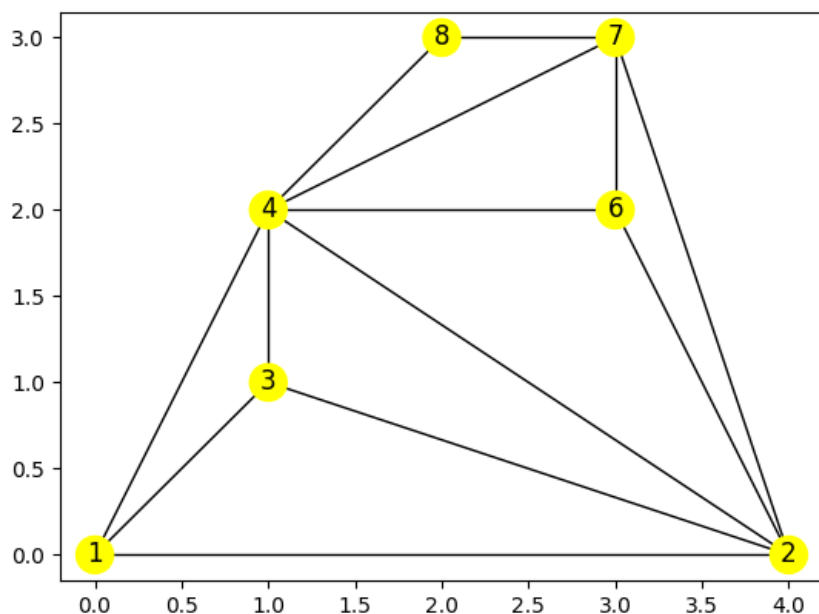
Slika 3.3: Korak 4 - Dodavanje čvora 6

Slično kao i kod dodavanja čvora  $v_4$ , dodavanje čvora  $v_7$  prati iste korake, samo što umesto čvora  $v_1$  gledamo  $v_4$  i gleda se ispunjenje uslova da se grane ne seku sa konturom  $C_5$ . Na osnovu toga čvoru  $v_7$  pridružujemo koordinate (2,3) kao što je predstavljeno na slici 3.4.



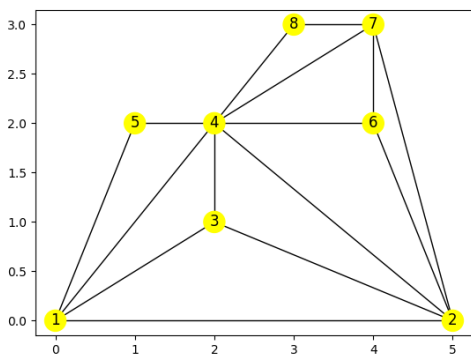
Slika 3.4: Korak 5 - Dodavanje čvora 7

Prilikom dodavanja čvora  $v_8$  prati se slična procedura kao kod dodavanja čvora  $v_6$ , stim što u ovom slučaju se šiftuju čvorovi  $v_7$ ,  $v_6$  i  $v_2$ , a pošto  $v_8$  nije stabilan i  $w_p$  i  $w_q$  odnosno  $v_4$  i  $v_7$  obrazuju pravu čiji je koeficijent pravca pozitivan,  $v_8$  se dodeljuju koordinate  $(2, 3)$ , kao što je prikazano na slici 3.5.

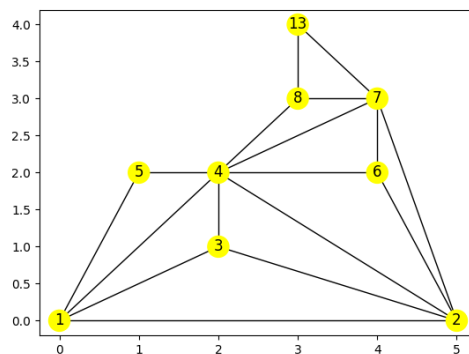


Slika 3.5: Korak 6 - Dodavanje čvora 8

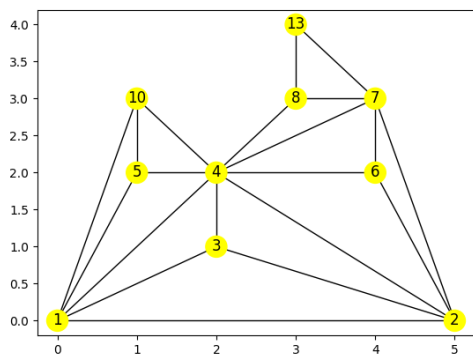
Svaki sledeći korak dodavanja novog čvora prati korake koji su analogni prethodno opisanim koracima. Jedini slučaj koji nije obuhvaćen jednim od prethodnih koraka je kada je koeficijent pravca prave koji obrazuju  $w_p$  i  $w_q$  jednak 0, u kom slučaju čvor  $v_k$  uzima  $y$  koordinatu prema formuli  $y(v_k) + y(w_q) + 1$ . Međurezultati svakog koraka su prikazani na slikama 3.6-3.14, pri čemu su objašnjenja izostavljena jer se mogu zaključiti na osnovu objašnjenja dodavanja prva 4 čvora.



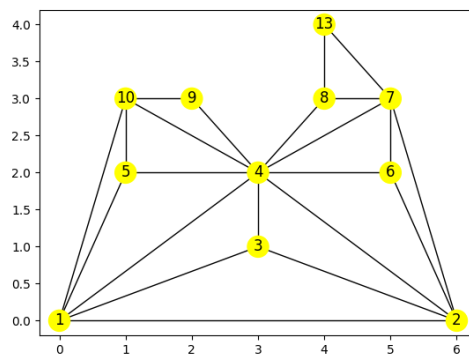
Slika 3.6: Korak 7 - Dodavanje čvora 5



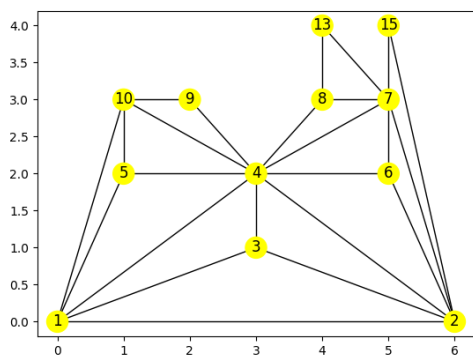
Slika 3.7: Korak 8 - Dodavanje čvora 13



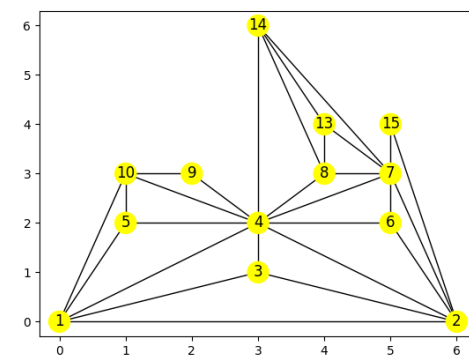
Slika 3.8: Korak 9 - Dodavanje čvora 10



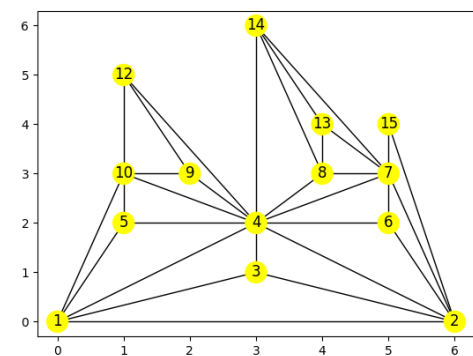
Slika 3.9: Korak 10 - Dodavanje čvora 9



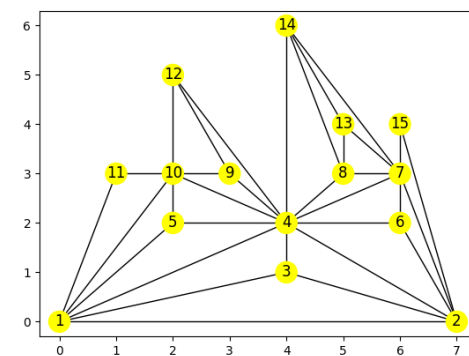
Slika 3.10: Korak 11 - Dodavanje čvora 15



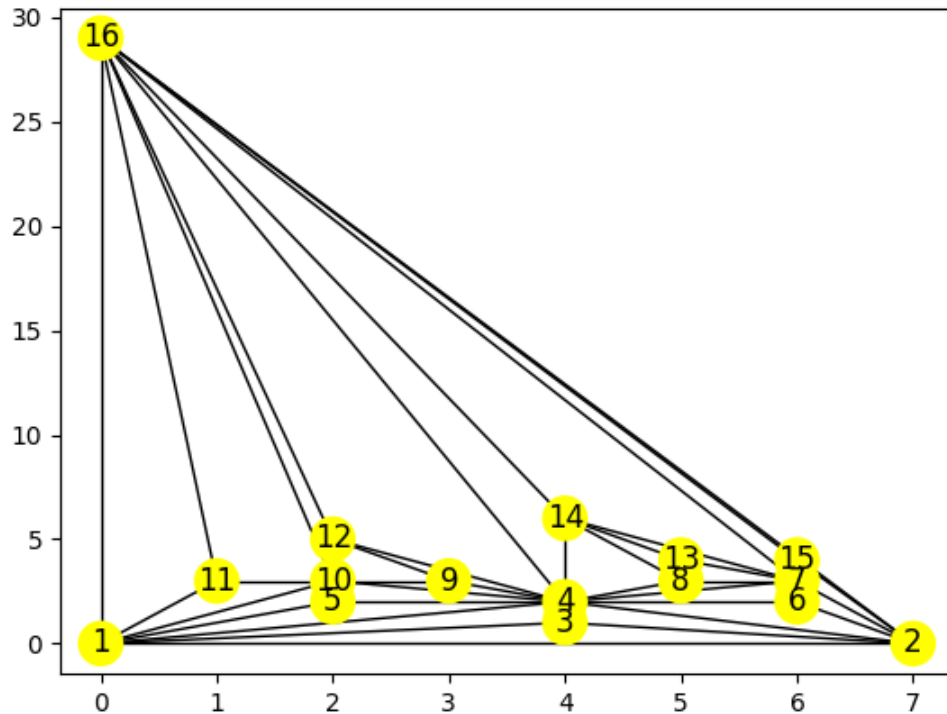
Slika 3.11: Korak 12 - Dodavanje čvora 14



Slika 3.12: Korak 13 - Dodavanje čvora 12



Slika 3.13: Korak 14 - Dodavanje čvora 11



Slika 3.14: Korak 15 - Dodavanje čvora 16

Prilikom izvođenja ovog algoritma, dobijeni su sledeći međurezultati: dominatori čvorova ulaznog grafa su određeni na sledeći način, pri čemu  $-1$  određuje nepostojanje dominatora za taj čvor:

- $\text{dom}(16) = -1$
- $\text{dom}(3) = 4$
- $\text{dom}(4) = 5$
- $\text{dom}(6) = 7$
- $\text{dom}(7) = 8$
- $\text{dom}(8) = 14$
- $\text{dom}(5) = 10$
- $\text{dom}(14) = 16$
- $\text{dom}(13) = 16$
- $\text{dom}(10) = 11$
- $\text{dom}(9) = 12$
- $\text{dom}(15) = 16$
- $\text{dom}(12) = 16$

$\text{dom}(11) = 16.$

Domino lanci su određeni na sledeći način u oznaci  $v_k$  : [*domino lanac*]:

16 : [16]  
3 : [3]  
4 : [4]  
6 : [6]  
7 : [7]  
8 : [8]  
5 : [5]  
14 : [14]  
13 : [14, 13]  
10 : [10]  
9 : [9]  
15 : [15]  
12 : [12]  
11 : [11]

Neposredno u vezi sa određivanjem dominatora čvorova i domino lanaca je i određivanje stabilnosti čvorova i rezultati za ovaj primer su sledeći: Za svaki čvor je definisana funkcija  $\text{stable}(v)$  koja vraća vrednost *True* ukoliko je on stabilan i *False* ukoliko važi obratno. Dakle:

$\text{stable}(16) = \text{True}$   
 $\text{stable}(1) = \text{True}$   
 $\text{stable}(2) = \text{True}$   
 $\text{stable}(3) = \text{False}$   
 $\text{stable}(4) = \text{False}$   
 $\text{stable}(6) = \text{False}$   
 $\text{stable}(7) = \text{False}$   
 $\text{stable}(8) = \text{False}$   
 $\text{stable}(5) = \text{False}$   
 $\text{stable}(14) = \text{True}$   
 $\text{stable}(13) = \text{True}$   
 $\text{stable}(10) = \text{False}$   
 $\text{stable}(9) = \text{False}$   
 $\text{stable}(15) = \text{True}$   
 $\text{stable}(12) = \text{True}$   
 $\text{stable}(11) = \text{False}$

Takođe i U-skupovi prema kojima se vrši pomeranje zavisnih čvorova u oznaci  $U(v_k) = [U\text{-skup}]$  :

$U(1) = [1]$

$U(2) = [2]$

$U(3) = [3]$

$U(4) = [4, 3]$

$U(6) = [6]$

$U(7) = [7, 6]$

$U(8) = [8]$

$U(5) = [5]$

$U(13) = [13]$

$U(10) = [10, 5]$

$U(9) = [9]$

$U(15) = [15]$

$U(14) = [14, 8, 13]$

$U(12) = [12, 9]$

$U(11) = [11]$

$U(16) = [16, 11, 10, 5, 12, 9, 4, 3, 14, 8, 13, 7, 6, 15]$

Algoritam A za korišćenu test instancu grafa daje grafičku reprezentaciju na mreži širine 7 i visine 29, slika 3.14.

### 3.5 Korektnost algoritma i procena dimenzija rezultujuće mreže

U okviru ovog poglavlja biće pokazana korektnost algoritma za redukciju širine mreže izloženog u poglavlju 3.3. Takođe, biće pokazano da ovaj algoritam rezultuje ravanskim interpretacijama na mreži čija je širina najviše  $\lfloor 2(n-1)/3 \rfloor$ , a visina najviše  $n^2/4$ .

Za potrebe ovih dokaza neophodno je uvesti sledeće oznake. **Koeficijent pravca** grane  $(u, v)$ , za neka dva čvora  $u$  i  $v$  pozicionirana na mreži ravanske interpretacije grafa  $G$ , biće definisan i označavan na sledeći način:

$$kp(u, v) = \frac{y(v) - y(u)}{x(v) - x(u)} \quad (3.2)$$

gde su  $x(v), y(v)$  koordinate pozicije čvora  $v$  na mreži ravanske interpretacije grafa  $G$  (analogno i za čvor  $u$ ). Za  $x(v) = x(u)$  će važiti da je  $kp(u, v) = \pm\infty$ , gde će znak biti određen znakom razlike  $y(v) - y(u)$ .

Posmatrajući korake algoritma A, može se uočiti da prilikom izvršavanja istih dolazi do promene koeficijenta pravca pojedinih grana. Recimo, grane  $(u, v)$  koje nikad nisu pripadale konturi grafa

će imati konstantan koeficijent pravca. S druge strane, ako je grana  $(u, v)$  deo konture grafa, njen koeficijent pravca biće nepromenjen sve dokle god je ta grana deo konture. U slučaju da je bitno naglasiti promenu njenog koeficijenta pravca, biće data preciznija oznaka  $kp_k(u, v)$ , koeficijenta pravca grane  $(u, v)$  u  $k$ -tom koraku, odnosno u ravanskoj interpretaciji  $G_k$ .

Može se primetiti da prilikom realizacije algoritma, u svakom koraku algoritma, grana  $(w_i, w_{i+1})$  konture  $C_k$  za proizvoljni korak  $k$ , može pripadati jednom od sledećih tipova:

- vertikalna:  $x(w_i) = x(w_{i+1})$  i  $y(w_i) < y(w_{i+1})$ ,
- horizontalna:  $y(w_i) = y(w_{i+1})$ ,
- usmerena na gore:  $y(w_i) < y(w_{i+1})$  i  $x(w_i) < x(w_{i+1})$ ,
- usmerena na dole:  $y(w_i) > y(w_{i+1})$  i  $x(w_i) < x(w_{i+1})$ .

U algoritmu izloženom u ovom poglavlju važi da će horizontalne, kao i grane usmerene na dole, odnosno gore, biti ili prednje ili zadnje grane, dok će vertikalne grane uvek biti prednje grane.

U vezi sa klasifikacijom grana, može se primetiti, takođe, da za čvorove  $v$  unutrašnjeg stepena 2 algoritam određuje  $y$  koordinatu pozicije čvora  $v$  na mreži na sledeći način: Ako je grana  $(w_p, w_q)$  usmerena na gore, onda će biti  $y(v) = y(w_q)$ . S druge strane, ako je grana  $(w_p, w_q)$  horizontalna, onda će važiti  $y(v) = y(w_p) + 1 = y(w_q) + 1$ . U slučaju da je pak grana  $(w_p, w_q)$  usmerena na dole,  $y(v)$  će, u zavisnosti od toga da li je čvor  $v$  stabilan ili nestabilan, biti ili  $y(w_p) + 1$  ili  $y(w_p)$ , respektivno.

**Teorema 3.5.1.** Neka je  $G$  triangulirani planarni graf sa  $n \geq 3$  čvorova. Tada algoritam za redukovanje širine mreže koji je opisan u ovom poglavlju rezultuje ravanskim interpretacijama na mreži čija je širina najviše  $\lfloor 2(n-1)/3 \rfloor$ , a visina  $n^2/4$ .

**Dokaz:**

Budući da je slučaj  $n = 3$  trivijalan, neka je data pretpostavka  $n \geq 4$ . Korektnost algoritma će slediti iz dokaza da naredne invarijante važe u svakom koraku  $k = 3, \dots, n$  algoritma:

Neka se posmatra korak u kome se dodaje čvor  $v_{k+1}$ , pri čemu  $C_k = (w_1, \dots, w_m)$  označava ivicu spoljašnje strane, odnosno konturu  $G_k$ . Treba pokazati da važi:

1.  $\forall j = 1, \dots, m - 1$

(a)  $x(w_j) \leq x(w_{j+1})$ ,

(b)  $x(w_j) = x(w_{j+1})$  akko  $w_j \prec w_{j+1}$  i  $w_{j+1}$  je stabilan. Takođe, iz  $x(w_j) = x(w_{j+1})$  sledi  $y(w_j) < y(w_{j+1})$ . (t1)

2. Ako je  $k < n$  i  $w_p, \dots, w_q$  su, kao i do sad susedi od  $v_{k+1}$  u  $G_k$ , onda nakon dodavanja čvora  $v_{k+1}$  važe uslovi gsm1, gsm2 i gsm3 iz opisa metode pomeraja. (t2)



Kako iz uslova gsm1, gsm2, gsm3 direktno sledi korektnost, odnosno da algoritam daje korektne pravolinijske interpretacije, dovoljno je pokazati da važi tvrđenje 1 (t1), odakle će slediti i tvrđenje 2 (t2).

Dokažimo tvrđenje (t1) indukcijom. Tvrđenje očigledno važi za  $k = 3$ . Neka (t1) važi za  $k < n$ , pokažimo da je tačno i za  $k + 1$ . U tu svrhu će biti dokazana dva pomoćna tvrđenja:

**Lema 3.5.1.**  $x(w_{p+1}) > x(w_p)$ .

**Dokaz leme:**

Ako je  $w_{p+1} < w_p$  onda po induktivnoj hipotezi sledi  $x(w_{p+1}) > x(w_p)$ . Pretpostavimo obratno, neka je  $w_p < w_{p+1}$ . Budući da je u tom slučaju  $ind_v(w_{p+1}) = 2$ , tada je prema definiciji  $v = dom(w_{p+1})$  i  $w_{p+1}$  je nestabilan, pa tvrđenje sledi iz induktivne hipoteze (t1).  $\Delta$

**Lema 3.5.2.** Ako je  $v_{k+1}$  nestabilan i  $deg^-(v_{k+1}) \geq 3$ , onda važi  $x(w_{p+2}) > x(w_{p+1})$ .

**Dokaz leme:**

Ako je  $w_{p+2} < w_{p+1}$  onda tvrđenje direktno sledi po induktivnoj hipotezi. Pretpostavimo obratno, neka je  $w_{p+1} < w_{p+2}$ . Budući da je u tom slučaju  $ind_v(w_{p+2}) = 3$  i da  $v$  prekriva granu  $(w_{p+1}, w_{p+2})$ , iz pretpostavke da je  $v_{k+1}$  nestabilan sledi da je i  $w_{p+2}$  nestabilan i u tom slučaju tvrđenje sledi iz induktivne hipoteze (t1).  $\Delta$

U daljem nastavku dokaza teoreme biće razlikovana tri slučaja:

- Čvor  $v_{k+1}$  je stabilan: Iz leme 3.5.1 i induktivne hipoteze (t1), ako se izabere takvo  $x(v_{k+1})$  da je  $x(v_{k+1}) = x(w_p)$  i dovoljno veliko  $y(v_{k+1})$ , onda će  $v_{k+1}$  zadovoljavati uslove (mp2, mp3). Takođe, kako je  $x(w_p) = x(v_{k+1}) < x(w_{p+1}) \leq x(w_q)$ , važi i mp3 uslov, pa je time dokazano (t2). Dodatno, iz induktivne hipoteze i prethodnih nejednakosti sledi da je i invarijanta tvrđenja (t1) očuvana.
- Čvor  $v_{k+1}$  je nestabilan i  $deg^-(v_{k+1}) \geq 3$ : Iz lema 3.5.1 i 3.5.2 sledi  $x(w_p) < x(w_{p+1}) < x(w_{p+2})$ . Uzimajući dalje u obzir induktivnu hipotezu tvrđenja (t1), postavljajući  $x(v_{k+1}) = x(w_p) + 1$  i birajući dovoljno veliko  $y(v_{k+1})$ , čvor  $v_{k+1}$  će zadovoljavati uslove (mp2, mp3). Iz toga i činjenice da je  $x(w_p) < x(v_{k+1}) \leq x(w_{p+1}) < x(w_{p+2}) \leq x(w_q)$  sledi (t2). Dodatno, iz induktivne hipoteze i prethodnih nejednakosti sledi da je i invarijanta tvrđenja (t1) očuvana.
- Čvor  $v_{k+1}$  je nestabilan i  $deg^-(v_{k+1}) = 2$  i neka je  $v_{k+1}$  čvor m-pomeraja. Prema lemi 3.5.1, nakon izvršavanja operacije pomeraja, biće  $x(w_q) \geq x(w_p) + 2$ . Odatle, postavljanjem  $x(v_{k+1}) = x(w_p) + 1$  i biranjem  $y(v_{k+1})$  kao u algoritmu, slediće (mp2, mp3). Budući da je  $x(w_p) < x(v_{k+1}) < x(w_q)$ , važi (t2). Analogno i prethodnim slučajevima, iz induktivne hipoteze i prethodnih nejednakosti sledi da je i invarijanta tvrđenja (t1) očuvana.

Ovo pokazuje korektnost algoritma.

Ostalo je dokazati procenu širine i visine mreže ravanske interpretacije konstruisane algoritmom.

### 3.5.1 Procena širine mreže

Neka su  $a$  i  $b$  brojevi čvorova unutrašnjeg stepena 2 i unutrašnjeg stepena čija je vrednost barem 3, redom. Pritom su čvorovi  $v_1, v_2, v_3$  izuzeti iz ove pretpostavke. Dakle, sledi  $n = a + b + 3$ , gde je  $n$  kao i do sad broj čvorova grafa. Bez gubitka opštosti, može se pretpostaviti da je  $a_f \leq a_b$ .

U nastavku će biti izvedena ocena širine mreže ravanske interpretacije koja je dobijena algoritmom iz ovog poglavlja. Dakle, neka je ta širina označena sa  $\omega$  i neka je  $a_p$  broj čvorova m-pomeraja (različitih od čvorova  $v_1, v_2, v_3$ ). Tada je  $\omega = a_p + 2$ .

Može se primetiti da dominator ne može biti zadnje orijentisan čvor unutrašnjeg stepena 2. Takođe, prema lemi 3.1.1, dominatori čvorova m-pomeraja su međusobno različiti i takođe su različiti od dominatora čvora  $v_3$ . Odatle je:  $a_p + 1 \leq a_f + b$ , odakle sledi:

$$\omega = a_p + 2 \leq (a_f + b - 1) + 2 \leq a/2 + b + 1 = n - a/2 - 2. \quad (3.3)$$

Budući da važi i  $\omega \leq a + 2$ , dolazi se do krajnjeg zaključka

$$\omega \leq \min\{a + 2, n - a/2 - 2\} \leq 2(n - 1)/3. \quad (3.4)$$

### 3.5.2 Procena visine mreže

Neka je fiksiran korak algoritma  $k$  i neka je  $\gamma_k$  najmanji koeficijent pravca među koeficijentima pravaca grana u  $C_k$ . Prema t1 važi da je  $-\infty < \gamma_k < 0$ .

Ako bi važilo

$$\gamma_k \geq a_k^p + 2 - k, \quad (3.5)$$

gde je  $a_k^p$  broj čvorova m-pomeraja koji pripadaju skupu  $\{v_4, \dots, v_k\}$ , onda bi važila i procena širine data u formulaciji teoreme 3.5.1. Naime,

$$\gamma_n \geq a_p + 2 - n = \omega - n, \quad k = n \quad (3.6)$$

i odatle je visina mreže ravanske interpretacije dobijene ovim algoritmom najviše  $\omega(n - \omega) \leq n^2/4$ .

Ostalo je još dokazati:

**Lema 3.5.3.** Ako je  $a_k^p$  broj čvorova m-pomeraja koji pripadaju skupu  $\{v_4, \dots, v_k\}$ , onda važi  $\gamma_k \geq a_k^p + 2 - k$ .

**Dokaz:**

Ovo tvrđenje će biti dokazano indukcijom po  $k$ .

U slučaju  $k = 3$ , biće  $a_k^p = 0, \gamma_3 = -1$ , dakle tvrđenje važi. Pretpostavimo da tvrđenje važi za neko  $k, 3 \leq k < n$  i da u tekućem koraku dodajemo čvor  $v = v_{k+1}$ . Treba pokazati da tvrđenje važi i za  $k + 1$ . Takođe, dovoljno je u razmatranje uzeti u obzir nove grane konture, tj.  $(w_p, v)$  i  $(v, w_q)$  i to kada su one usmerene na dole.

Biće razlikovana dva slučaja:

- Prvi slučaj je kada je čvor  $v$  čvor  $m$ -pomeraja. Tada je  $a_{k+1}^p = a_k^p + 1$ , pa je dovoljno pokazati da su koeficijenti pravaca novih grana konture barem  $\gamma_k$ . Grana  $(w_p, v)$  je uvek horizontalna ili usmerena na gore. Pretpostavimo da je grana  $(v, w_q)$  usmerena na dole. Ako je  $(w_p, w_q)$  horizontalna, onda je koeficijent pravca grane  $kp(v, w_q) \geq -1$ , a ako je  $(w_p, w_q)$  usmerena na dole, onda je koeficijent pravca grane  $(v, w_q)$  jednak koeficijentu pravca grane  $(w_p, w_q)$  u  $k$ -tom koraku, budući da dolazi do pomeraja,
- Drugi slučaj je kada čvor  $v$  nije čvor  $m$ -pomeraja, pa je  $a_{k+1}^p = a_k^p$ . Pokazaćemo da su koeficijenti pravaca bilo koje grane nove konture barem  $\gamma_k - 1$ . Posmatrajmo granu  $(w_p, v)$  i pretpostavimo da je ona usmerena na dole. Tada je svakako koeficijent pravca grane  $(w_p, v)$  u  $k + 1$ -om koraku veći od koeficijenta pravca grane  $(w_p, w_{p+1})$  u  $k$ -tom koraku. Posmatrajmo dalje slučaj gde je  $(v, w_q)$  grana usmerena na dole. Ako je tada  $deg^-(v) = 2$ , onda važi  $x(v) = x(w_p), y(v) = y(w_p) + 1$ , dakle, važi i  $kp_{k+1}(v, w_q) \geq kp_k(w_p, w_q) - 1 \geq \gamma_k - 1$ . U suprotnom, za slučaj kada je  $deg^-(v) \geq 3$ , kao posledica biranja minimalnog  $y(v)$  koje ispunjava potrebne uslove, sledi da postoji grana usmerena na dole  $(w_i, w_{i+1}), p \leq i \leq q - 1$ , za čiji koeficijent pravca važi  $kp(w_i, w_{i+1}) > kp(v, w_{i+1}) \geq kp(w_i, w_{i+1}) - 1$ . Budući da je  $kp(v, w_q) \geq kp(v, w_{i+1})$ , biće  $kp(v, w_p) \geq kp(w_i, w_{i+1}) - 1 \geq \gamma_k - 1$ .  $\square$

Ovim je ujedno i završen dokaz teoreme 3.5.1.  $\square$

## Glava 4

# Ravanska interpretacija grafova redukovane visine

U prethodnom poglavlju je izložen algoritam Črobaka i Nakana koji za zadati ulazni uređeni triangulirani ravanski graf određuje njegovu ravansku interpretaciju na mreži maksimalne širine  $\lfloor 2(n-1)/3 \rfloor$ . U istom radu [18] se može naći i algoritam izložen u ovom poglavlju, kao i pojmovi koji će nadalje biti korišćeni. Radi pravljenja razlike između algoritma iz prethodnog poglavlja i algoritma koji će biti prezentovan u ovom, ovaj algoritam će se nazivati algoritam B. Osim ocene širine, pokazano je i da visina rezultujuće mreže algoritma A može biti i kvadratna u odnosu na broj čvorova ulaznog grafa, tj. gornja granica visine mreže ravanske interpretacije je  $n^2/4$ , gde je  $n$  broj čvorova ulaznog grafa.

U okviru ovog poglavlja će biti prezentovan algoritam koji redukuje ovu ocenu visine i daje ravanske interpretacije grafa na mreži visine maksimalno  $4\lfloor 2(n-1)/3 \rfloor - 1$  [18]. Ulazni graf će, kao i do sada, biti triangulirani ravanski graf  $(G, \pi)$  sa zadatim kanonskim uređenjem  $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Ovaj algoritam će se u velikoj meri zasnivati na algoritmu A, uz izvesne modifikacije. Apropos toga, zanimljivo je i da algoritam B zadržava gornju ocenu visine mreže koja je data algoritmom A.

Algoritam B se izvršava u linearnom vremenu, tj. složenosti je  $O(n)$ .

### 4.1 Uvodni pojmovi

Na samom početku biće uveden pojam *slack-a* [18] između čvorova  $u$  i  $v$  ulaznog grafa  $G$  i to na sledeći način:

$$\text{slack}(u, v) = y(v) + 4[x(v) - x(u)] - y(u) = 4\Delta x(u, v) + \Delta y(u, v). \quad (4.1)$$

Budući da je koeficijent pravca grane  $(u, v)$  definisan na sledeći način  $kp(u, v) = \frac{y(v)-y(u)}{x(v)-x(u)}$ , može se izvesti veza između ove veličine i slack-a:

$$\text{slope}(u, v) = -4 + \frac{\text{slack}(u, v)}{\Delta x(u, v)} \quad (4.2)$$

Naredna lema će dati neke od osobina funkcije slack:

**Lema 4.1.1.** Neka je  $v_1, \dots, v_l$  proizvoljna šetnja u grafu  $G = (V, E)$ ,  $v_i \in V, 1 \leq i \leq l$ . Tada važi:

1.  $slack(v_1, v_l) = \sum_{i=1}^{l-1} slack(v_i, v_{i+1})$ ,
2. Neka je  $slack(v_i, v_{i+1}) \geq 1, \forall i = 1, \dots, l-1$  i  $1 \leq a < b \leq l$ . Tada je  $slack(v_1, v_l) \geq slack(v_a, v_b)$ .  
 Dodatno, ukoliko je  $a > 1$  ili  $b < l$ , onda je  $slack(v_1, v_l) \geq slack(v_a, v_b) + 1$ .

**Dokaz:**

Dokaz prvog tvrđenja leme je trivijalan, sumiranjem se dobija data jednakost. Drugo tvrđenje leme sledi direktno iz prvog.  $\square$

Ranije je napomenuto da se realizacija algoritma B zasniva na realizaciji algoritma A. Kako je glavni cilj algoritma B redukcija visine mreže dobijene algoritmom A, osnovna razlika će se ogledati u ideji algoritma B kojom se ovo postiže, a to je da nagibe, odnosno koeficijente pravaca svih grana konture ograničava odozdo nekom konstantom, na primer.  $c$ . To za posledicu ima činjenicu da će visina ovako dobijene mreže ravanske interpretacije biti ograničena sa  $c$ -širina mreže ravanske interpretacije. Konkretnije, algoritam B će koristiti koeficijente pravaca veće od  $-4$  i posledica očuvanja ove invarijante će zahtevati potencijalno više operacija pomeraja nego što to zahteva algoritam A.

Pre samog izlaganja algoritma B, biće definisani pojmovi potrebni za realizaciju algoritma.

U okviru algoritma A su uvedeni čvorovi m-pomeraja. Za potrebe algoritma B pored ovakvih čvorova uvešće se i pojam *čvorova kp-pomeraja* (eng. *slope-shift vertices*). Naime, prilikom dodavanja čvora  $v$  će, u cilju smanjivanja apsolutne vrednosti koeficijenta pravca grane  $(v, w_q)$ , dolaziti do potrebe da se čvor  $w_q$  "pomeri". Takav čvor  $v$  se naziva čvorom kp-pomeraja. Treba napomenuti da proizvoljan čvor  $v$  može biti ili čvor m-pomeraja ili čvor kp-pomeraja. U proizvoljnom koraku se ne mogu desiti oba tipa pomeraja istovremeno.

Dalje će, kroz opis osnovne ideje algoritma, biti uveden i pojam *čvorova koji čuvaju slack* (eng. *slack-preserving*). Neka se posmatra korak  $k$  algoritma u kome se dodaje čvor  $v = v_{k+1}$ , pri čemu je  $deg^-(v) \geq 4$ . Neka je, kao i do sad,  $w_q$  njegov najdešnji sused u konturi  $C_k$  i neka je grana  $(w_{q-1}, w_q)$  usmerena na dole to jest ima negativan koeficijent pravca. Kako bi algoritam bio korektan, čvor  $w_q$  mora biti vidljiv iz čvora  $v$ , odnosno koeficijent pravca  $(v, w_q)$  mora biti manji nego koeficijent pravca  $(w_{q-1}, w_q)$ . Možda bi bilo očekivano da se, sa dodavanjem čvorova na ovaj način, koeficijent pravca spusti na vrednost manju od  $-4$ , međutim to nije slučaj i otuda i naziv ovakvih čvorova.

Naime, prema definiciji važi da je koeficijent pravca proizvoljne grane veći od  $-4$  akko je slack te grane pozitivan. Budući da je  $deg^-(v) \geq 4$ ,  $v$  se može dodati tako da važi  $x(v) < x(w_{q-1})$ . Tada, postavljanjem vrednosti  $y$  koordinate čvora  $v$  na  $y(v) = y(w_q) + 4\Delta x(v, w_q) - slack(w_{q-1}, w_q)$ , postiže se  $slack(v, w_q) = slack(w_{q-1}, w_q)$ . Dakle, koeficijent pravca grane  $(v, w_q)$  će biti veći od  $-4$ .

Sa druge strane biće razlikovani i *čvorovi koji redukuju slack* (eng. *slack-reducing*), odnosno oni čvorovi na kojima se ne može primeniti prethodno objašnjena ideja. Za konkretan primer se

može uzeti dodavanje stabilnog čvora  $v$ , pri čemu je  $\deg^-(v) = 2$  i važi da je  $(w_p, w_q)$  usmerena na dole. U tom slučaju će čvoru  $v$  biti dodeljene sledeće koordinate prilikom izvršavanja algoritma:  $x(v) = x(w_p), y(v) = y(w_p) + 1$  i u tom slučaju će biti  $\text{slack}(v, w_q) = \text{slack}(w_{q-1}, w_q) - 1$ . Ako bi bilo  $\text{slack}(w_{q-1}, w_q) = 1$ , onda bi bilo  $\text{slack}(v, w_q) = 0$ , u kom slučaju bi se morala izvršiti operacija pomeraja  $w_q$ , kako bi invarijanta bila očuvana. U nastavku se uvodi pojam *pivota čvora*.

**Definicija 4.1.1.** Neka je  $v = v_{k+1}$  čvor koji se dodaje u  $k$ -tom koraku i neka su njegovi susedi u  $G_k$  čvorovi  $w_p, \dots, w_q$ . Neka je  $i$   $p + 1 \leq r \leq q$ . Tada se čvor  $w_r$  naziva *pivotom* čvora  $v$  akko je  $r$  najmanji indeks, takav da je  $w_i$  stabilan i  $w_{i-1} < w_i, \forall i = r + 1, \dots, q$

**Tvrđenje 4.1.1.** Pivot  $w_r$  čvora  $v$  grafa  $G$  je dobro definisan za svaki čvor grafa  $G$ . Ako je  $\deg^-(v) = 2$ , onda je  $r = p + 1$ . Ako je čvor  $v$  nestabilan i  $\deg^-(v) \geq 3$ , onda važi  $r \geq p + 2$ .

**Dokaz:**

Dokaz ovog tvrđenja sledi iz definicije stabilnih čvorova.  $\square$

## 4.2 Skica algoritma za redukciju visine mreže

U okviru ove sekcije biće izloženi koraci algoritma za redukciju visine mreže (u nastavku algoritma B) kao i reprezentativni primer izvršavanja ovog algoritma.

Kao što je spomenuto ranije, ulaz je triangulirani, ravanski graf  $G$  sa zadatim kanonskim uređenjem  $\pi = v_1, \dots, v_n$ . Neka su oznake  $a_f$  i  $a_b$  date kao i u algoritmu A i neka pritom važi  $a_f \leq a_b$ .

U slučaju  $n = 3$  pozicije prva tri čvora kanonskog uređenja biće:  $P(v_1) = (x(v_1), y(v_1)) = (0, 0)$ ,  $P(v_2) = (x(v_2), y(v_2)) = (1, 0)$ ,  $P(v_3) = (x(v_3), y(v_3)) = (0, 1)$  slično kao i pri realizaciji algoritma A.

Neka je data pretpostavka  $n \geq 4$  i da je trenutni korak  $k, 3 \leq k \leq n - 1$  u kome treba dodati čvor  $v = v_{k+1}$ . Uobičajeno,  $C_k = (w_1, \dots, w_m)$  i  $w_p, \dots, w_q$  će predstavljati susede čvora  $v$  u  $G_k$ . Neka je  $w_r$  pivot čvora  $v$ . Korak dodavanja novog čvora  $v_k$  na  $G_k$  dati su algoritmom 3.

---

**Algoritam 3** Korak dodavanja čvora  $v_k$  u  $G_{k-1}$  u algoritmu B

---

```
if  $stable(v_k)$  then
   $x(v_k) \leftarrow x(w_p)$ 
else
   $x(v_k) \leftarrow x(w_p) + 1$ 
end if
if  $deg^-(v_k) = 2$  then
  if  $stable(v_k)$  then
     $y(v_k) \leftarrow \max(y(w_p) + 1, y(w_q))$ 
  else
     $shift(w_q)$  ▷ operacija pomeraja  $w_q$ 
    if grana  $(w_p, w_q)$  usmerena na gore then
       $y(v_k) \leftarrow y(w_q)$ 
    else
       $y(v_k) \leftarrow \max(y(w_p), y(w_q) + 1)$ 
    end if
  end if
else
  if  $deg^-(v_k) \geq 3$  then
     $y' \leftarrow y(w_r) + 4\Delta x(v_k, w_r) - slack(w_{r-1}, w_r)$ 
    if  $r = p + 1$  or (not  $stable(v_k)$  and  $r = p + 2$ ) then
       $y' \leftarrow y' + 1$ 
    end if
     $y(v_k) \leftarrow \max(y', y(w_{q-1}))$ 
  end if
end if
if  $slack(v, w_q) = 0$  then
   $shift(w_q)$ 
end if
```

---

U nastavku će biti pokazana lema koja potvrđuje ocenu širine ravanske interpretacije realizovane algoritmom B.

**Lema 4.2.1.** Algoritmom B se dobijaju korektne ravanske interpretacije grafa na mreži. Visina ovako dobijene mreže ravanske interpretacije je manja od 4 vrednosti širine mreže ove interpretacije, odnosno  $y(v_n) < 4x(v_2)$

**Dokaz leme:**

Kako je slučaj  $n = 3$  trivijalan, pretpostavimo  $n \geq 4$  i pokažimo da važi sledeća invarijanta (u nastavku I1) iz koje će direktno slediti i dokaz leme 4.2.1:

I1: Neka je  $3 \leq k \leq n$  i  $C_k = (w_1, \dots, w_m)$ . U tom slučaju ravanska interpretacija dobijena algoritmom B zadovoljava sledeće uslove:

(a)  $\forall i \in \{1, \dots, m - 1\}$

i. Važi  $x(w_i) \leq x(w_{i+1})$ . Dodatno, jednakost se dostiže akko  $w_i \prec w_{i+1}$  i čvor  $w_{i+1}$  je stabilan,

- ii.  $slack(w_i, w_{i+1}) \geq 1$ . Dodatno, ako je čvor  $w_{i+1}$  nestabilan i  $w_i \prec w_{i+1}$ , onda je  $slack(w_i, w_{i+1}) \geq 2$ .
- (b) Za  $k < n$ , neka je  $v = v_{k+1}$  i neka su  $w_p, \dots, w_q$  susedi čvora  $v$  u  $G_k$  kao što je prethodno i naznačeno. Neka, takođe,  $slack'(v, w_q)$  označava  $slack(v, w_q)$  pre nego što je poslednja naredba B algoritma (**if**  $slack(v, w_q) = 0$  **then**  $shift(w_q)$ ) izvršena. Tada važi:
- i.  $x(w_p) \leq x(v) < x(w_q)$ ,
- ii.  $y(v) \geq \max\{y(w_{p+1}), y(w_{q-1})\}$ , čvor  $v$  pripada spoljašnjosti  $G_k$  i čvorovi  $w_p, \dots, w_q$  su vidljivi iz  $v$ ,
- iii. Neka je  $deg^-(v) = 2$ . Ako je grana  $(w_p, w_q)$  usmerena na gore ili horizontalna, onda je  $slack'(v, w_q) \geq 3$ .  
Ako je grana  $(w_p, w_q)$  usmerena na dole, onda je ili čvor  $v$  stabilan i  $slack'(v, w_q) = slack(w_p, w_q) - 1$  ili je  $v$  nestabilan i  $slack'(v, w_q) = slack(w_p, w_q)$ ,
- iv. Neka je  $deg^-(v) \geq 3$ . Ako je  $y' < y(w_{q-1})$ , onda je grana  $(v, w_q)$  usmerena na gore. Ako je  $y' \geq y(w_{q-1})$ , onda za čvor  $v$  važi sledeće: ako je  $r = p + 1$  ili ako je  $v$  nestabilan i  $r = p + 2$ , onda je  $slack'(v, w_q) \geq slack(w_{r-1}, w_r) + q - r - 1$ . U suprotnom,  $slack'(v, w_q) \geq slack(w_{r-1}, w_r) + q - r$ .

Korektnost ravanske interpretacije sledi direktno iz korektnosti metode pomeraja i iz tvrđenja (b)i i (b)ii. Budući da iz invarijante (a)ii sledi da je  $kp(v_n, v_2) > -4$ , odatle direktno sledi i ocena širine mreže ravanske interpretacije  $y(v_n) < 4x(v_2)$ .

**Dokaz II:**

Invarijanta II će biti dokazana metodom matematičke indukcije po  $k$ . Za  $k = 3$  se neposrednom proverom može utvrditi da tvrđenje (a) važi. Pretpostavimo da, u  $k$ -tom koraku,  $k \geq 3$ ,  $G_k$  zadovoljava (a). U induktivnom koraku biće pokazano da (a) implicira (b), kao i da (a) važi, tj. da se (a) čuva nakon dodavanja čvora  $v$ .

Za potrebe ovog dokaza biće korišćena sledeća tvrđenja:

**Tvrđenje 4.2.1.**  $x(w_{p+1}) > x(w_p)$ . Ako je  $v$  nestabilan i  $deg^-(v) \geq 3$ , onda je  $x(w_{p+2}) > x(w_{p+1})$ .

Dokaz tvrđenja 4.2.1 se sprovodi kao u lemapa 3.5.1 i 3.5.2.  $\triangle$

- Dokaz tvrđenja (b)i: Ako je  $v$  stabilan, onda važi  $x(v) = x(w_p) < x(w_q)$  prema prethodnom tvrđenju 4.2.1. U slučaju da je  $v$  nestabilan i  $deg^-(v) \geq 3$ , važi  $x(v) = x(w_p) + 1 \leq x(w_{p+1}) < x(w_q)$  prema prethodnom tvrđenju 4.2.1. Ako je  $v$  čvor m-pomeraja, onda je  $x(v) = x(w_p) + 1 < x(w_q)$  kao posledica operacije pomeraja. Dakle,  $x(w_p) \leq x(v) < x(w_q)$  važi u svakom slučaju.
- Dokaz tvrđenja (b)ii: U slučaju da je  $deg^-(v) = 2$ , tačnost tvrđenja sledi direktno iz koraka B algoritma (koraci kada je  $deg^-(v_k) = 2$ ). Neka je  $deg^-(v) \geq 3$  i neka je  $v'$  takav da je  $v' = (x(v), y')$ , gde je na ovaj način data pozicija čvora  $v'$ . Iz koraka algoritma B (koraci kada



je  $deg^-(v_k) \geq 3$ ), direktno važi sledeće: Ako je  $v$  stabilan i  $r > p + 1$  ili ako je  $v$  nestabilan i  $r > p + 2$ , onda je  $slack(v', w_{r-1}) = slack(v', w_r) - slack(w_{r-1}, w_r) = 0$ . U suprotnom će biti  $slack(v', w_{r-1}) = -1$ .

Neka je, na dalje, sa  $H_i$  označena otvorena poluravan koja se nalazi sa leve strane grane  $(w_i, w_{i+1})$  (ukoliko se posmatra orijentacija od  $w_i$  ka  $w_{i+1}$ ).  $H_i$  će se u tom slučaju nalaziti iznad  $(w_i, w_{i+1})$  pod uslovom da ova grana nije vertikalna. Takođe, može se приметiti da za  $x(v) \leq x(w_{i+1})$ ,  $slack(v', w_{i+1}) < 0$  implicira  $v' \in H_i$ . U daljem toku dokaza koristiće se sledeće tvrđenje.

**Tvrđenje 4.2.2.**  $y' \geq \max_{p < i < r} y(w_i)$  i  $v' \in \bigcap_{i=p}^{r-1} H_i$ .

U narednim koracima biće dokazano da prethodno tvrđenje 4.2.2. implicira (b)ii, a nakon toga će i samo tvrđenje 4.2.2. biti dokazano.

Budući da je  $y(w_r) < \dots < y(w_q)$  i  $y(v) = \max(y', y(w_{q-1}))$ , sledi da je  $y(v) \geq \max_{p < i < q} y(w_i)$ . Takođe je  $v' \in H_i, i = r, \dots, q - 1$ , budući da se čvorovi  $w_r, \dots, w_q$  dodaju vertikalno i  $x(v) < x(w_r)$ . Dakle važi  $v' \in \bigcap_{p \leq i < q} H_i$ . Odavde sledi da je čvor  $v'$  u spoljašnjem regionu podgrafa  $G_k$  i da su čvorovi  $w_p, \dots, w_q$  vidljivi iz čvora  $v'$ . Kako se čvor  $v$  dodaje direktno "iznad" čvora  $v'$ , to isto važi i za čvor  $v$ .

**Dokaz tvrđenja 4.2.2:**

Pretpostavimo da je čvor  $v$  stabilan. Ako je  $r = p + 1$ , onda je  $x(v) = x(w_p)$  i  $y' = y(w_p) + 1$ , dakle tvrđenje očigledno važi. U slučaju da je  $r > p + 1$ , po induktivnoj hipotezi, tvrđenju 4.2.1 i lemi 4.1.1 sledi da je  $x(w_i) > x(v)$  i  $slack(w_i, w_r) \geq slack(w_{r-1}, w_r), i = p + 1, \dots, r - 1$ . Specijalno, za  $i = p$ ,  $x(w_p) = x(v)$  i  $slack(w_p, w_r) > slack(w_{r-1}, w_r)$ . Dakle,  $\forall i \in \{p, \dots, r - 1\}$

$$y' = y(w_r) + 4\Delta x(v, w_r) - slack(w_{r-1}, w_r) > y(w_r) + 4\Delta x(w_i, w_r) - slack(w_i, w_r) = y(w_i). \quad (4.3)$$

Dalje je,  $\forall i \in \{p, \dots, r - 1\}$

$$slack(v', w_i) = slack(v', w_{r-1}) - slack(w_i, w_{r-1}) \leq slack(v', w_{r-1}) = 0 \quad (4.4)$$

odakle sledi  $v' \in H_i$ .

Posmatrajmo slučaj kada je čvor  $v$  nestabilan, ako je  $r = p + 2$ , onda je  $x(w_p) < x(v) \leq x(w_{p+1})$

$$y' = y(w_r) + 4\Delta x(v, w_r) - slack(w_{p+1}, w_r) + 1 > y(w_r) + 4\Delta x(w_{p+1}, w_r) - slack(w_{p+1}, w_r) = y(w_{p+1}). \quad (4.5)$$

Jednakost  $slack(v', w_r) = slack(w_{p+1}, w_r) - 1$  implicira  $v' \in H_{p+1}$ . Budući da je  $slack(v', w_{p+1}) = slack(v', w_r) - slack(w_{p+1}, w_r) = -1 < slack(w_p, w_{p+1})$ , dobija se da važi  $v' \in H_p$ .

U slučaju da je  $r > p + 2$ , postupak dokaza je sličan slučaju kada je  $v$  stabilan i  $r > p + 1$ . Iz induktivne hipoteze, tvrđenja 4.1.1 i leme 4.1.1 sledi da je  $x(w_i) > x(v)$  i  $slack(w_i, w_r) \geq slack(w_{r-1}, w_r)$ ,  $i = p + 2, \dots, r - 1$ , kao i  $x(w_{p+1}) \geq x(v)$  i  $slack(w_{p+1}, w_r) > slack(w_{r-1}, w_r)$ . Dakle,  $\forall i \in \{p + 1, \dots, r - 1\}, y' > y(w_i)$ . Važi i  $slack(v', w_i) \leq 0, \forall i \in \{p, \dots, r - 1\}$ , odakle sledi  $v' \in H_i$  čime je dokaz tvrđenja 4.2.2 završen.  $\Delta$

- Dokaz tvrđenja (b)iii: Ako je grana  $(w_p, w_q)$  usmerena na gore, onda je grana  $(v, w_q)$  horizontalna, dakle važi  $slack(v, w_q) \geq 4$ . Ako je pak grana  $(w_p, w_q)$  horizontalna, onda je  $x(v) < x(w_q)$  i  $y(v') = y(w_q) + 1$ , što implicira  $slack(v, w_q) \geq 3$ . Pretpostavimo dalje da je grana  $(w_p, w_q)$  usmerena na dole. U slučaju da je čvor  $v$  stabilan, važi  $slack'(v, w_q) = \Delta y(v, w_q) + 4\Delta x(v, w_q) = \Delta y(w_p, w_q) - 1 + 4\Delta x(w_p, w_q) = slack(w_p, w_q) - 1$ .

U slučaju da je  $v$  nestabilan, označimo sa  $x'(w_q)$   $x$ -koordinatu čvora  $w_q$  nakon operacije m-pomeraja. Sledi da je  $slack'(v, w_q) = \Delta y(v, w_q) + 4[x'(w_q) - x(v)] = \Delta y(w_p, w_q) + 4\Delta x(w_p, w_q) = slack(w_p, w_q)$ .

- Dokaz tvrđenja (b)iv: Neka je  $deg^-(v) \geq 3$ . Pretpostavimo  $y' < y(w_{q-1})$ , tj.  $y(v) = y(w_{q-1})$ . Ako je  $r < q$ , onda  $y(w_q) > y(w_{q-1})$ , čime je dokaz završen. Ako je  $r = q$ , onda su, prema (b)ii, čvorovi  $w_{q-1}$  i  $w_q$  vidljivi iz čvora  $v'$ . Dakle, budući da je  $x(v') < x(w_{q-1})$ , mora biti  $y(w_q) > y(w_{q-1})$ , pa je grana  $(v, w_q)$  usmerena na gore.

Pretpostavimo sada da je  $y' \geq y(w_{q-1})$ , tj.  $y(v) = y'$ . Za sve  $i \in \{r, \dots, q - 1\}$  su grane  $(w_i, w_{i+1})$  vertikalne, pa imamo  $slack'(v, w_{i+1}) > slack(v, w_i)$ . Dakle važi  $slack'(v, w_q) \geq slack(v, w_r) + q - r$ . Odatle sledi tvrđenje (b)iv, budući da je  $slack(v, w_r) = slack(w_{r-1}, w_r) - 1$  ako je  $v$  stabilan i  $r = p + 1$  ili ako je  $v$  nestabilan i  $r = p + 2$ . Inače je  $slack(v, w_r) = slack(w_{r-1}, w_r)$ .

Dokažimo sada da (b) implicira da je invarijanta (a) očuvana. Prema induktivnoj hipotezi, dovoljno je u razmatranje uzeti dve nove grane  $(w_p, v)$  i  $(v, w_q)$ .

- Dokaz tvrđenja (a)i: Ako je čvor  $v$  stabilan, onda je, prema tvrđenju 4.1.1,  $x(v) = x(w_p) < x(w_{p+1}) \leq x(w_q)$ . U slučaju da je  $v$  čvor m-pomeraja, onda je kao posledica operacije pomeraja  $x(v) = x(w_p) + 1 < x'(w_q)$ . Pritom je sa  $x'(w_q)$  označena nova  $x$ -koordinata čvora  $w_q$ . Ako je  $deg^-(v) \geq 3$  i  $v$  je nestabilan, onda će, prema tvrđenju 4.1.1, biti  $x(v) = x(w_p) + 1 \leq x(w_{p+1}) < x(w_q)$ . Ovim je završen dokaz tvrđenja (a)i.
- Dokaz tvrđenja (a)ii: Pokažimo da tvrđenje važi za granu  $(w_p, v)$ . Ovo je očigledno u slučaju da je čvor  $v$  stabilan, budući da je  $x(v) = x(w_p)$  i  $y(v) > y(w_p)$ . Slično važi i za slučaj da je  $v$  čvor m-pomeraja. Pretpostavimo dakle da je čvor  $v$  nestabilan i da je  $deg^-(v) \geq 3$ . Ako je  $r \geq p + 2$ , biće  $slack(w_p, v) = slack(w_p, w_{r-1}) + slack(w_{r-1}, w_r) - slack(v, w_r)$ . U slučaju da je

$r \geq p + 3$ , biće  $slack(w_p, w_{r-1}) \geq 2$  i  $slack(v, w_r) = slack(w_{r-1}, w_r)$ . Ako je  $r = p + 2$ , onda je  $slack(w_p, w_{r-1}) \geq 1$  i  $slack(v, w_r) = slack(w_{r-1}, w_r) - 1$ . U oba slučaja važi  $slack(w_p, v) \geq 2$ .

U slučaju dokaza za granu  $(v, w_q)$  dovoljno je pokazati da važi  $slack(v, w_q) \geq 1$ . Pretpostavimo da je  $deg^-(v) = 2$ . Prema (b)iii tvrđenje važi ako je grana  $(w_p, w_q)$  usmerena na gore, horizontalna ili ako je  $slack'(v, w_q) = slack(w_p, w_q)$ . Posmatrajmo slučaj kada je grana  $(w_p, w_q)$  usmerena na dole i čvor  $v$  je stabilan. U tom slučaju je  $slack'(v, w_q) = slack(w_p, w_q) - 1 \geq 0$ . Ako je  $slack'(v, w_q) > 0$ , dokaz je završen, a ako je  $slack'(v, w_q) = 0$ , operacija pomeraja koja se dešava na kraju algoritma B će rezultovati time da je  $slack(v, w_q) = 4$ .

Obradimo i slučaj kada je  $deg^-(v) \geq 3$ . Neka je takođe  $v' = v$  (inače je grana  $(v, w_q)$  usmerena na gore). Budući da je  $slack(w_{r-1}, w_r) \geq 1$  i  $q \geq r$ , iz (b)iv sledi da je  $slack'(v, w_q) \geq 0$ , pri čemu se jednakost postiže samo u slučaju da je  $r = q = p + 2$  i čvor  $v$  je nestabilan. Tada je takođe  $slack(v, w_q) = 4$  kao posledica operacije pomeraja na kraju algoritma B.  $\square$

### 4.3 Primer izvršavanja algoritma B

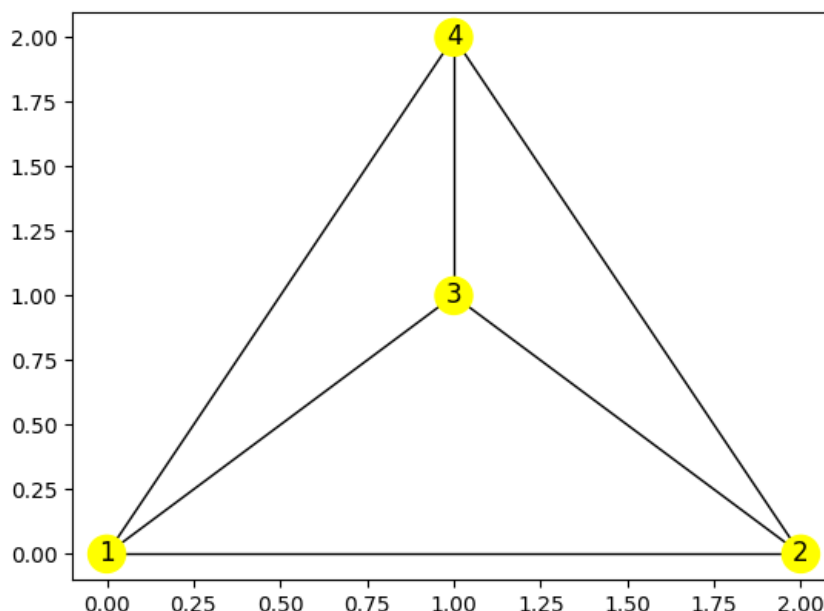
U okviru ove sekcije biće obrazloženo izvršavanje algoritma B po koracima. Za ulazni graf uzima se isti graf koji je korišćen i kod opisa izvršavanja algoritma A u prethodnoj glavi.

Algoritam B počinje od kanonskog uređenja grafa. Kanonsko uređenje grafa je sledeće, navedeno u obliku  $v_k : [w_p, \dots, w_q]$  odnosno čvor i njegovi susedi sa konture  $C_{k-1}$ , isto kao i kod algoritma A:

- 1 :  $\square$
- 2 :  $\square$
- 3 : [1, 2]
- 4 : [1, 3, 2]
- 6 : [4, 2]
- 7 : [4, 6, 2]
- 8 : [4, 7]
- 5 : [1, 4]
- 13 : [8, 7]
- 10 : [1, 5, 4]
- 9 : [10, 4]
- 15 : [7, 2]
- 14 : [4, 8, 13, 7]
- 12 : [10, 9, 4]
- 11 : [1, 10]
- 16 : [1, 11, 10, 12, 4, 14, 7, 15, 2]

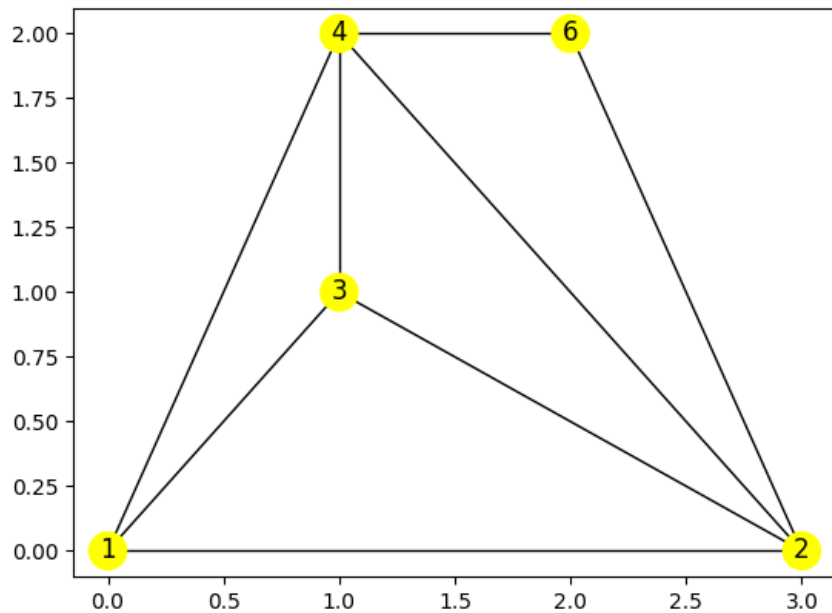
Slično algoritmu A prva dva koraka počinju od formiranja kompletnog grafa iz prva tri čvora  $v_1, v_2, v_3$ , odnosno trougla. Nakon toga sledi dodavanje čvorova prema datom redosledu kanonskog uređenja grafa.

Prvi čvor koji se ubacuje je čvor  $v_4$ . Čvor  $v_4$  nije stabilan, stoga mu se odmah dodeljuje koordinata najlevljeg suseda u konturi  $C_3$  uvećana za 1, odnosno  $x(v_4) = x(w_p) + 1 = x(v_1) + 1 = 1$ . Pošto je stepen čvora  $v_4$  jednak 3, odnosno različit od 2,  $y$  koordinata se računa na sledeći način  $y(w_r) + 4\Delta x(v_4, w_r) - slack(w_{r-1}, w_r)$ , gde je  $w_r = v_2$  a  $w_{r-1} = v_3$  za čvor  $v_4$  u trenutku dodavanja. Računom se dobija da je  $y(v_4) = 2$ , što se vidi na slici 4.1.



Slika 4.1: Korak 3 - Dodavanje čvora 4

Drugi čvor koji se dodaje prema kanonskom uređenju je čvor  $v_6$ , a kao i čvor  $v_4$  u prethodnom koraku, ni čvor  $v_6$  nije stabilan, stoga je  $x(v_6) = 2$ , po istom principu navedenom u prethodnom koraku. Kako je stepen čvora  $v_6$  tačno 2 i čvor nije stabilan, vrši se pomeranje čvorova zavisnih od najdešnjeg suseda od  $v_6$  na  $C_4$ , odnosno u ovom slučaju samo čvora  $v_2$ . Kako prava koju obrazuju  $w_p$  i  $w_q$  sa svojim koordinatama, nema pozitivan koeficijent pravca,  $y(v_6) = \max(y(w_p), y(w_q) + 1)$  odnosno  $\max(y(v_4), y(v_2) + 1)$ , što je jednako 2, to jest  $y(v_4)$ . Ovaj korak je opisan na slici 4.2

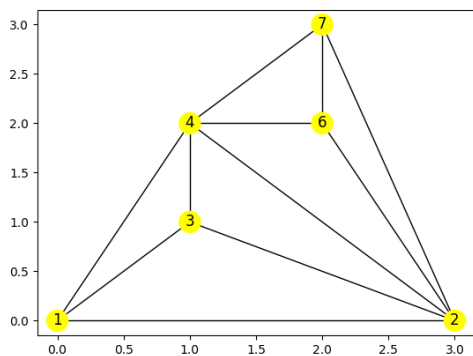


Slika 4.2: Korak 4 - Dodavanje čvora 6

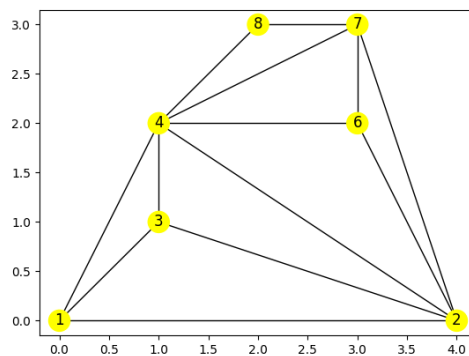
Dalje se algoritam B izvršava na sličan način kao što je opisano u prva dva koraka. Proces izračunavanja  $x(v_k)$  koordinate je analogan prethodno opisanom postupku dodavanja čvorova i svodi se na određivanje stabilnosti čvora  $v_k$ .

Kako je algoritam B razvijen da bi optimizovao veličinu mreže potrebne da bi se algoritam grafički prezentovao, glavni vid optimizacije se odnosi na određivanje  $y(v_k)$  koordinate, koji je u algoritmu B značajno brži jer se ne proverava uslov sečenja grana prilikom određivanja i biranja  $y(v_k)$  koordinate. Stoga je prirodno proces određivanja  $y(v_k)$  nešto komplikovaniji, gde se uzimaju u obzir faktori koeficijenta pravca koju obrazuju najlevlji i najdešnji sused od  $v_k$  na  $C_{k-1}$  odnosno u  $G_{k-1}$ , kao i eventualna korekcija pomoću pomeranja čvorova ukoliko je  $slack(v_k, w_q) = 0$ . Poslednji slučaj nije pokriven sa prva dva koraka ali je proces isti kao prilikom svakog drugog pomeraja, samo je uslov započinjanja pomeranja drugačiji.

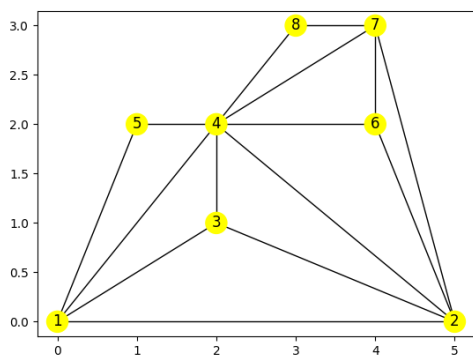
Dalji koraci, tj. dodavanje čvorova  $v_7, \dots, v_{16}$  su analogni prethodno opisanim postupcima i grafički su opisani na slikama 4.3 - 4.12.



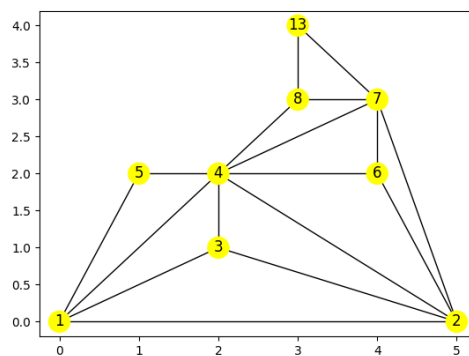
Slika 4.3: Korak 5 - Dodavanje čvora 7



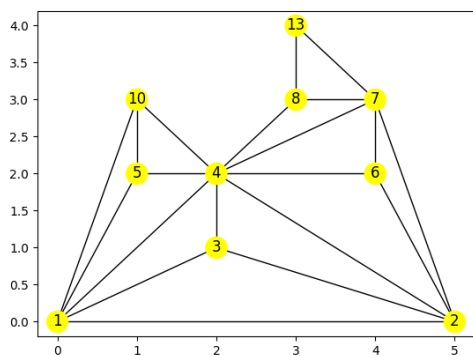
Slika 4.4: Korak 6 - Dodavanje čvora 8



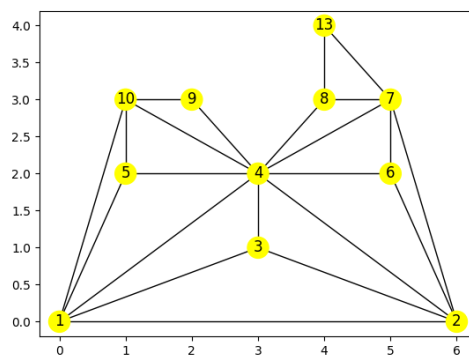
Slika 4.5: Korak 7 - Dodavanje čvora 5



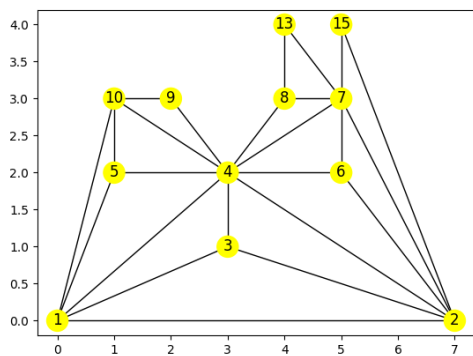
Slika 4.6: Korak 8 - Dodavanje čvora 13



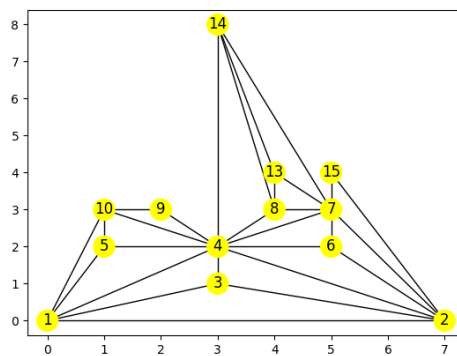
Slika 4.7: Korak 9 - Dodavanje čvora 10



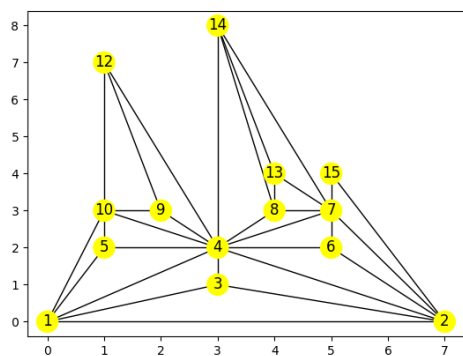
Slika 4.8: Korak 10 - Dodavanje čvora 9



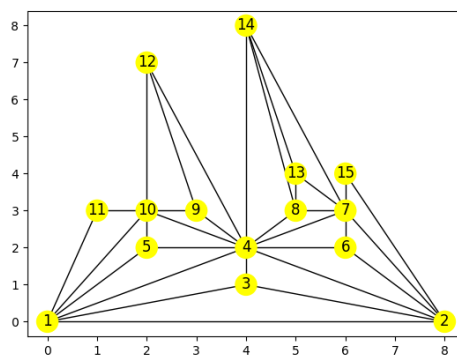
Slika 4.9: Korak 11 - Dodavanje čvora 15



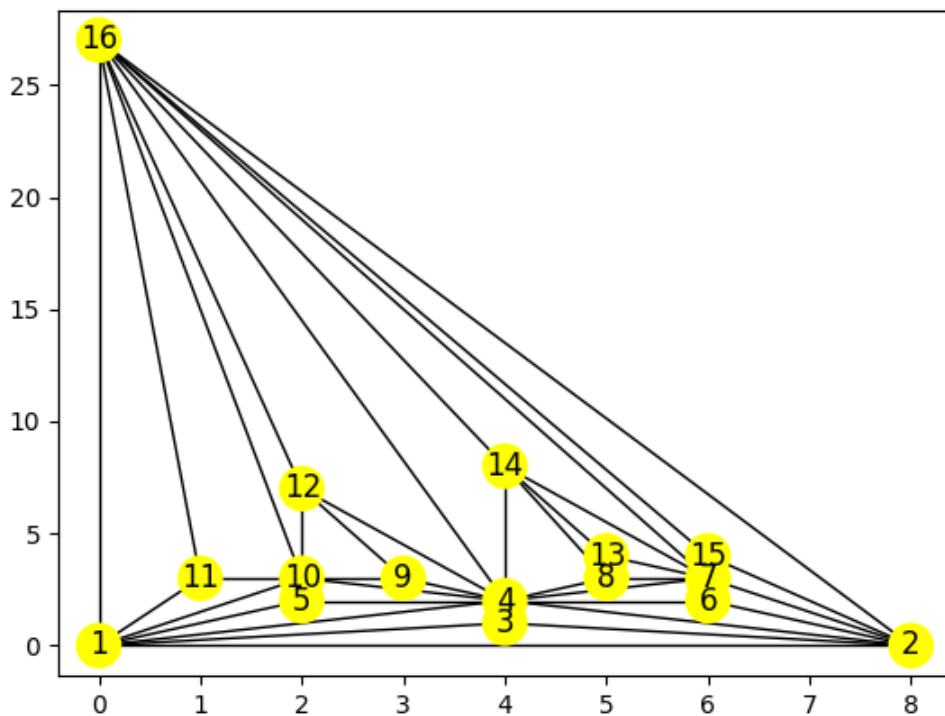
Slika 4.10: Korak 12 - Dodavanje čvora 14



Slika 4.11: Korak 13 - Dodavanje čvora 12



Slika 4.12: Korak 14 - Dodavanje čvora 11



Slika 4.12: Korak 15 - Dodavanje čvora 16

Za potrebe izvršavanja ovog algoritma svi međurezultati koji se odnose na dominatore, domino lance, stabilnost čvorova i U-skupove su isti kao i za algoritam A i mogu se pogledati u sekciji 3.4.

Za test instancu grafa algoritam B daje grafičku reprezentaciju na mreži širine 8 i visine 27, što predstavlja neznatno manju mrežu u odnosu na mrežu dobijenu Algoritmom A za isti graf.



## Glava 5

# Prezentovanje rezultata

Određivanje dobre grafičke reprezentacije grafa nije nešto što se može jednostavno testirati ili izračunati jedinstveno, prvenstveno zato što pojam dobre ili optimalne grafičke reprezentacije može varirati od čoveka do čoveka. Odnosno, grafička reprezentacija koja je jednoj osobi pregledna, ne mora nužno biti pregledna i dobra za drugu osobu. U okviru ovog rada razmatrana su tri načina za generisanje optimalne grafičke reprezentacije grafa - metoda pomeraja, algoritam A i algoritam B [18].

Sva tri pomenuta algoritma za ulaz zahtevaju triangulirane ravanske grafove. Koordinate rezultujuće mreže su celobrojne, međutim sama grafička reprezentacija ne mora nužno biti prijemčiva oku. Rezultujući grafovi za karakteristiku imaju to da im se grane ne seku (osim u zajedničkim čvorovima), kao i to da su čvorovi tačke u ravni. Prilikom grafičkog prikazivanja, obično je čvor prikazan krugom, tj. ima znatno veću površinu od tačke, kao i same grane koje su prikazane linijama, koje opet, imaju svoju debljinu, tj. širinu. Stoga treba uzeti u obzir da se koordinate mogu množiti sa određenim faktorom radi lepše fizičke reprezentacije.

Za potrebe testiranja sva tri algoritma, korišće se 5 klasa grafova. Klase će se razlikovati po broju čvorova u okviru te klase. Svaka klasa će imati po 15 grafova generisanih sa istim brojem čvorova. Rezultati će biti prezentovani u vidu prosečnog vremena izvršavanja, takođe, biće prezentovana i prosečna veličina dimenzije mreže po klasi.

Kako će grafovi koji pripadaju određenim klasama imati veliki broj čvorova, njihova grafička reprezentacija neće moći da bude prikazana u okviru ovog rada.

Klase koje će se razmatrati u okviru testiranja su:

- 10,
- 100,
- 500,
- 750,
- 1000.

Algoritam je teoretski moguće primeniti i na veće ulaze, međutim kako je cilj dobijanje grafičke reprezentacije grafa, sve preko 500 čvorova prevazilazi upotrebu u svakodnevne svrhe, odnosno upotreba rezultata zahteva da specifični računarski zahtevi budu ispunjeni, kao na primer, dovoljno veliki monitor za prikaz ili implementacija parcijalnog prikazivanja grafičke reprezentacije, što nije deo ovog rada.

Implementacija osnovnog algoritma za grafičku reprezentaciju grafova na mreži je algoritam metode pomeraja. Implementacija korišćena prilikom testiranja je preuzeta iz biblioteke otvorenog koda pod nazivom *networkx*<sup>1</sup> stoga je očekivano da metoda pomeraja bude brža u odnosu na algoritme A i B koji su implementirani u okviru ovog rada. Razlog tome su dodatne optimizacije koje postoje u okviru biblioteke *networkx*, koje su što računarske, što matematičke prirode. Sva testiranja su izvršena na računaru sa procesorom 2.6 GHz 6-Core Intel Core i7 sa 16GB RAM memorije pod MacOS-BigSur operativnim sistemom. Algoritmi su kodirani u programskom jeziku Python.

## 5.1 Dobijeni rezultati

Ulazne instance su za potrebe testiranja generisane na slučajan način. Proces generisanja instanci je opisan u sekciji 3.2. Takođe, kao što je prethodno pomenuto, iz svake klase se na slučajan način generiše 15 instanci. U tabeli 5.1 predstavljeni su podaci koji se odnose na vreme u sekundama koje je bilo potrebno algoritmima da dođu do tražene reprezentacije grafova. U prvoj koloni navedene su dimenzije problema, to jest ukupan broj čvorova grafova nad kojima se vrši testiranje. U naredne tri kolone nalaze se prosečna vremena izvršavanja (u sekundama) za svih 15 instanci po klasi koja su bila potrebna algoritmima A i B i metodi pomeraja respektivno, da bi došli do rezultujuće grafičke reprezentacije:

Klasa	Algoritam A	Algoritam B	Metoda Pomeraja
10	0.00407488	0.001434888	0.001287699
100	0.096903937	0.014813764	0.013858131
500	0.710259557	0.104404705	0.098012907
750	1.01170373	0.175941127	0.145398123
1000	1.541114313	0.262413161	0.14973075

Tabela 5.1: Prosečno vreme izvršavanja algoritama u sekundama po klasama

Kao što se može primetiti u tabeli 5.1 sva tri algoritma su vrlo učinkovita. Algoritam A se pokazao kao najmanje učinkovit, kao što je i očekivano, prvenstveno zbog naivnog određivanja  $y$  koordinate, tj. kao posledica održavanja uslova "vidljivosti", odnosno da se grane ne smeju seći sa konturom prethodnog podgraфа prilikom dodavanja novog čvora.

U tabeli 5.2 su predstavljeni podaci koji se odnose na prosečnu širinu mreže dobijenih grafičkih reprezentacija po klasama. U prvoj koloni, kao i u prethodnoj tabeli, navedene su dimenzije prob-

<sup>1</sup><https://networkx.org/>

lema. U drugoj koloni su date vrednosti gornje granice širine mreže, koju garantuje algoritam A. Naredne tri kolone predstavljaju prosečnu vrednost širine mreže dobijenih na 15 instanci iz svake dimenzije problema, respektivno za algoritam A, B i metodu pomeraja.

Klasa	Najveća širina Algoritam A	Algoritam A	Algoritam B	Metoda Pomeraja
10	6	5	5	16
100	66	47	48	196
500	332	234	245	996
750	499	353	369	1496
1000	666	471	493	1996

Tabela 5.2: Prosečna širina mreže algoritama po klasama

Tabela 5.3 je organizovana na sličan način kao i prethodne dve tabele, s tim što se u drugoj i trećoj koloni nalaze vrednosti najveće vrednosti visine mreže garantovane algoritmom A odnosno algoritmom B. U poslednje tri kolone se nalaze prosečne vrednosti visine rezultujućih mreža dobijene algoritmima A, B i metodom pomeraja, respektivno.

Klasa	Najveća visina Algoritam A	Najveća visina Algoritam B	Algoritam A	Algoritam B	Metoda Pomeraja
10	25	23	14	15	8
100	2500	263	182	177	98
500	62500	1327	1003	957	498
750	140625	1995	1464	1441	748
1000	250000	2663	2001	1952	998

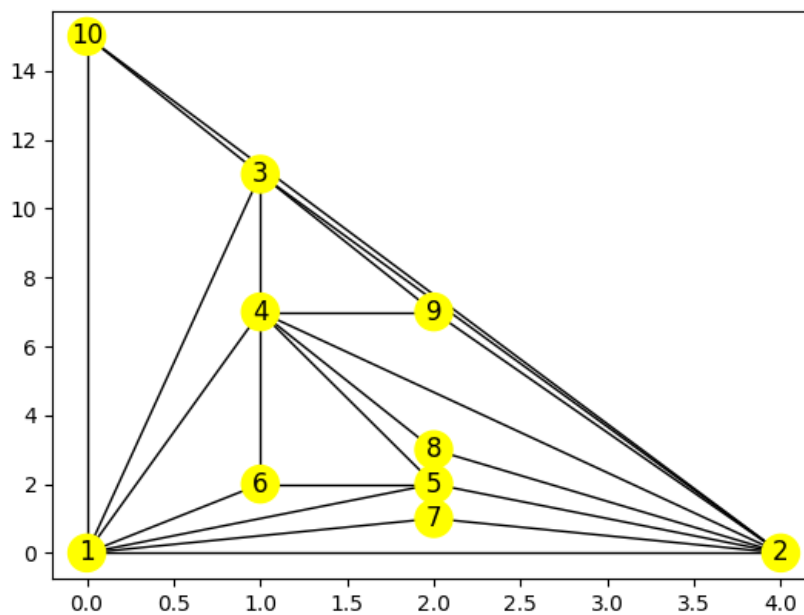
Tabela 5.3: Prosečna visina mreže algoritama po klasama

Kao što se može videti u tabeli 5.2 najmanja širina je postignuta algoritmom A, za sve klase grafova osim u slučaju sa 10 čvorova kada je prosečna širina ista, što se očekuje na instancama sa malim brojem čvorova. Širine grafova dobijene algoritmima A i B su uporedive, dok metoda pomeraja daje oko 4 puta šire mreže. Dobijene vrednosti za širine mreže algoritama A i B su za oko 30% manje nego što garantuje gornja granica pomenutih algoritama.

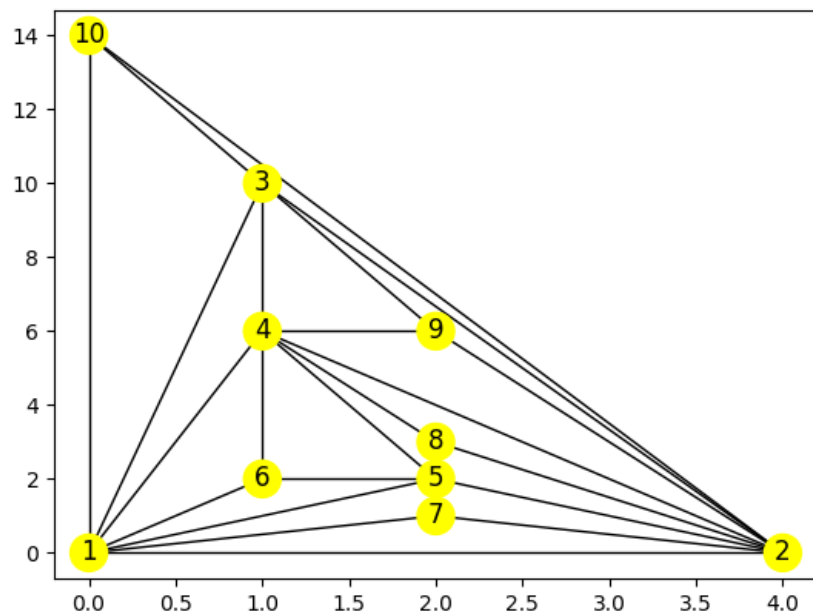
Što se tiče prosečne visine rezultujuće mreže u tabeli 5.3 se može primetiti da algoritam B rezultuje manjom visinom mreže u odnosu na algoritam A, osim u slučaju sa malim brojem čvorova, odnosno sa 10 čvorova u ovom slučaju. Metoda pomeraja daje grafičke reprezentacije sa mrežom najmanje širine, međutim uzimajući u obzir širinu i visinu rezultujućih grafova, odnosno površinu dobijenih mreža, rezultati metode pomeraja nisu uporedivi sa rezultatima algoritama A i B.

Radi vernijeg prikazivanja rezultata, uzete su prosečne vrednosti širina i visina mreža potrebnih za prikazivanje dobijenih grafičkih reprezentacija grafova. Kao što se vidi iz tabela 5.2 i 5.3, algoritmi A i B daju znatno manje mreže na kojima se grafovi mogu prikazati. U prosečnom slučaju to su višestruko manje mreže, kao na primer kod grafova  $G_{750}$  odnosno kod grafova sa 750 čvorova, metoda pomeraja daje mrežu u prosečnom slučaju [1496, 748] dok algoritam B, kao optimizovanija verzija algoritma A, daje mrežu dimenzija [369, 1441].

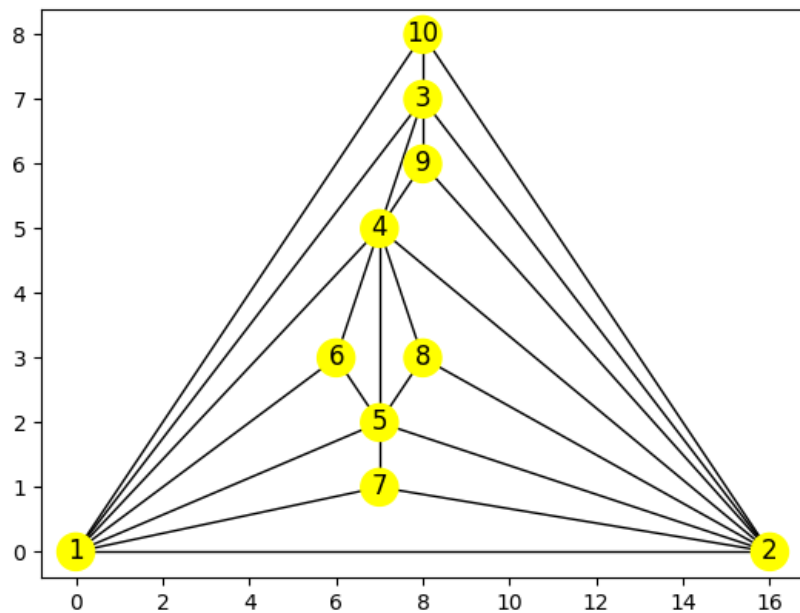
Takođe, može se primetiti razlika u širini i visini, gde konkretno metoda pomeraja daje dosta šire reprezentacije. Generalno govoreći, to se ne može okarakterisati ni kao dobra, a ni kao loša osobina, jer svi postavljeni uslovi su ispunjeni, stoga preferenca prema širim, odnosno višim grafičkim reprezentacijama je strogo subjektivna ili zavisi od tehničkih ograničenja, tj. samih zahteva koje reprezentacija treba da ispunjava.



Slika 5.1: Primer klase 10 - A Algoritam



Slika 5.2: Primer klase 10 - B Algoritam

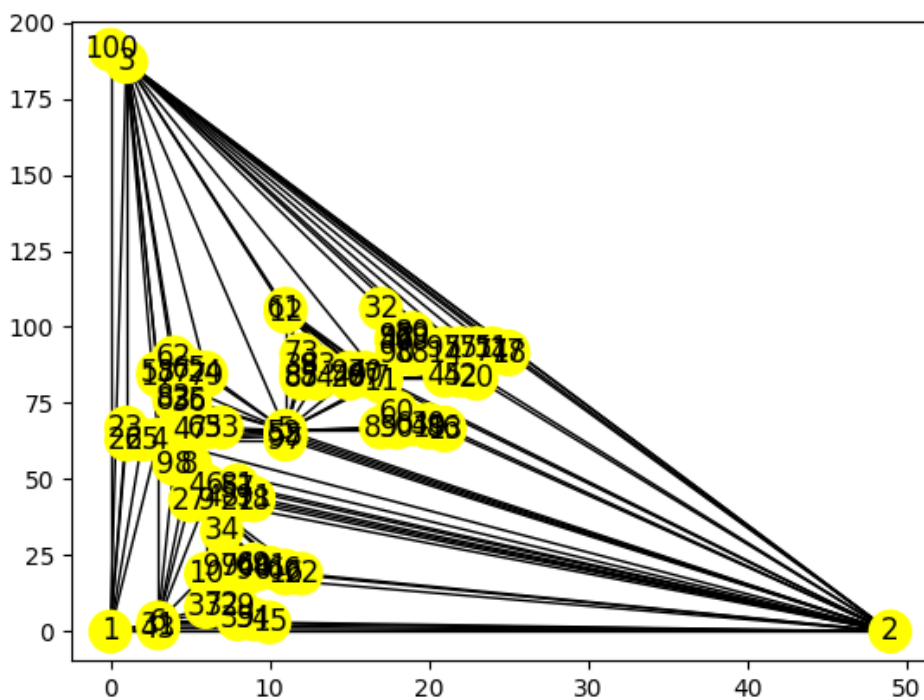


Slika 5.3: Primer klase 10 - Metoda pomeraja

Na slikama 5.1, 5.2 i 5.3 su prikazane grafičke reprezentacije slučajno izabranog primerka iz klase

10. Lako se uočava da je način crtanja i postavljanja čvorova dosta sličan između algoritma A i B, dok se u slučaju metoda pomeraja razlikuje, imajući u vidu raspored čvorova koji više orbitira oko sredine grafičke reprezentacije u odnosu na levo dominantne grafičke reprezentacije algoritama A i B.

Zbog tehničkih ograničenja grafičke interpretacije grafova sa više od 20 čvorova nisu pogodne za prikazivanje u okviru pisanog rada. Slika 5.4 je grafička reprezentacija dobijena algoritmom B za slučajno izabran graf sa 100 čvorova, i kao što se može primetiti, potrebna je veća površina za adekvatan prikaz ovakve interpretacije. Jedno rešenje bi svakako bilo skaliranje koordinata kako bi interpretacija mogla da bude čitljiva, a samim tim i ima upotrebnu vrednost. Interpretacija sa slike 5.4 je data u okviru rada kako bi se naslutio izgled rezultujućeg grafa u slučaju većeg broja čvorova.



Slika 5.4: Primer klase 100 - Algoritam B

## Glava 6

# Zaključak

Potreba za grafičkom interpretacijom grafova, s posebnim osvrtom na reprezentaciju ravanskih grafova u vidu mreže celobrojne širine i dužine (o čemu je i bilo reči u ovom radu), je od velike važnosti za praktičnu upotrebu.

U okviru ovog rada su opisane i implementirana tri algoritma za generisanje grafičkih reprezentacija grafova na celobrojnim mrežama. Metoda pomeraja koja predstavlja industrijski standard za generisanje grafičkih prikaza grafova, algoritam A, koji nastoji da redukuje širinu mreže i algoritam B, kao nadograđenu verziju algoritma A u pogledu rezultujuće visine mreže. Ulazne instance sva tri algoritma su triangulirani ravanski grafovi.

Rezultati prikazani u ovom radu pokazuju da prezentovani načini grafičke interpretacije ovih grafova na mreži minimalne širine i visine daju zadovoljavajuće rezultate. Uprkos tome što estetski dojam rezultujuće interpretacije dosta zavisi od samog posmatrača i svrhe u koju će interpretacija biti korišćena, kao i još nekih faktora, kao što je, recimo, broj čvorova, može se reći da, iako nešto manje prijemčivi oku od metode pomeraja, algoritmi A i B dobro optimizuju dimenzije rezultujuće mreže ravanske interpretacije i u tom smislu mogu biti od velike koristi.

Postoji dosta prostora za napredak kada je reč o ovom pitanju. Pre svega, u pogledu optimizacije dimenzija rezultujuće mreže. S tim u vezi je otvoreno i pitanje da li se visina rezultujuće mreže dobijene algoritmom B može dodatno optimizovati? Ta optimizacija bi, između ostalog, mogla da se odnosi na modifikaciju trenutne invarijante, odnosno da koeficijent pravca bude ograničen sa  $-3$  umesto sa  $-4$ . Ipak, pokazano je (kontraprimer se može naći u radu [18]) da na ovaj način ne može da se garantuje postignuta dimenzija širine rezultujuće mreže. S druge strane, potencijalno bolji rezultati bi se mogli postići proučavanjem nekih drugih klasa ulaznih grafova i u tom smeru bi se mogla vršiti neka dalja istraživanja.

# Appendix A

## Prateće informacije

Prateći praktični deo ovog rada je pisan u programskom jeziku *Python*.

Sav kod se nalazi na *GIT* repozitirijumu na adresi <https://github.com/kaca-1212/master-thesis>.

U okviru koda se nalazi implementacija za sledeće stvari:

- Generisanje trianguliranih grafova
- Određivanje kanonskog uređenja
- Metoda pomeraja
- Algoritam A
- Algoritam B

Takođe za potrebe ovog rada i testiranja razvijene su mogućnosti praćenja međurezultata i koraka za algoritam A i B.



# Literatura

- [1] Đ. Dugošija A. Savić. *Operaciona istraživanja*. Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, 2018.
- [2] B. Bollobas. *Modern graph theory*. Springer Science Business Media Vol. 184., 2013.
- [3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph theory with applications. Vol. 290*. London: Macmillan, 1976.
- [4] F. J. Brandenburg. *Drawing planar graphs on  $89n^2$  area*. Electronic Notes in Discrete Mathematics 31, 2008.
- [5] T. Nishizeki C. Norishige K. Onoguchi. *Drawing plane graphs nicely*. Acta Informatica 22.2, 1985.
- [6] D. Cvetković. *Teorija grafova i njene primene*. Beograd: Naučna knjiga, 1990.
- [7] A. Blair R. Waters E. Kruja J. Marks. *A Short Note on the History of Graph Drawing*. International Symposium on Graph Drawing (GD), 2001.
- [8] R. Pollack H. de Fraysseix J. Pach. *How to draw a planar graph on a grid*. Combinatorica 10 (1990) 41-51, 1990.
- [9] R. Pollack H. de Fraysseix J. Pach. *Small sets supporting straight-line embeddings of planar graphs*. Proc. 20th Annual Symposium on Theory of Computing, 1988.
- [10] I. Fáry. *On straight-line representation of planar graphs*. Acta scientiarum mathematicarum 11.229-233, 1948.
- [11] R. Tamassia I. Tollis G. Battista P. Eades. *Graph drawing - Algorithms for the visualization of graphs*. 1999.
- [12] J. Murray H. C. Purchase R. F. Cohen. *An experimental study of the basis for graph drawing algorithms*. publisher of Experimental Algorithmics (JEA) 2, 1997.
- [13] J. Murray H. C. Purchase R. F. Cohen. *Validating graph drawing aesthetics*. International Symposium on Graph Drawing. Springer, Berlin, Heidelberg, 1995.
- [14] M. E. Fisher J. W. Essam. *Some basic definitions in graph theory*. Reviews of Modern Physics 42.2, 1970.
- [15] G. Kant. *Algorithms for drawing planar graphs*. Ph.D. Dissertation, Department of Computer Science, University of Utrecht, 1993.
- [16] G. Kant. *Drawing Planar Graphs Using the Canonical Ordering*. Algorithmica (1996) 16:4-32, 1996.
- [17] G. Kant M. Chrobak. *Convex grid drawings of 3-connected planar graphs*. Technical Report RUU-CS-93-45, Department of Computer Science, Utrecht University, 1993.
- [18] S. Nakano M. Chrobak. *Minimum-width grid drawings of plane graphs*. Computational Geometry 11, 1998.
- [19] J. A. McHugh. *Algorithmic graph theory. Vol. 68056*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990.

- [20] M. Chrobak T.H. Payne. *A Linear-time Algorithm for Drawing a Planar Graph on a Grid*. Technical Report UCR-CS-89-1, 1995.
- [21] K. Ranganathan R. Balakrishnan. *A Textbook of Graph Theory*. Springer Science Business Media, 2012.
- [22] I. G. Tollis R. Tamassia. *A unified approach to visibility representations of planar graphs*. Discrete Computational Geometry 1.4, 1986.
- [23] S. Rahman. *Basic Graph Theory*. Springer International Publishing, 2017.
- [24] D. J. Rose. *Triangulated graphs and the elimination process*. publisher of Mathematical Analysis and Applications 32, no. 3 (1970): 597-609, 1970.
- [25] T. Nishizeki S. Rahman S. Nakano. *Rectangular grid drawings of plane graphs*. Computational Geometry 10 (1998) 203-220, 1998.
- [26] W. Schnyder. *Embedding planar graphs on the grid*. Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, 1990.
- [27] S. Rahman T. Nishizeki. *Planar graph drawing*. 2004.
- [28] R. Tamassia. *Handbook of graph drawing and visualization*. CRC press, 2013.
- [29] R. J. Trudeau. *Introduction to graph theory*. Courier Corporation, 2013.
- [30] W. T. Tutte. *How to draw a graph*. Proceedings of the London Mathematical Society 3.1, 1963.
- [31] L. Vismara. *Planar Straight-Line Drawing Algorithms*. Brown University, Providence Rhode Island.
- [32] D. B. West. *Introduction to graph theory. Vol. 2*. Upper Saddle River: Prentice hall, 2001.

## Lista slika

1.1 Primer grafa kroz porodično stablo nemačke naučno-fantastične TV serije "Dark" . . .	1
1.2 Ojlerov problem mostova Kenigsberga . . . . .	2
1.3 Bol-ov nacrt Ojlerovog problema . . . . .	2
1.4 Primer grafa u službi mapiranja grada . . . . .	3
1.5 Primena grafa u svrhu analize društvenih mreža . . . . .	4
1.6 Primer orjentisanog grafa . . . . .	5
1.7 Primer grafa $G$ i njegova dva podgraфа $G'$ i $G''$ . . . . .	6
1.8 Dve različite grafičke interpretacije istog grafa . . . . .	7
1.9 Homeomorfni grafovi . . . . .	7
1.10 Kompletan bipartitni graf $K_{5,5}$ . . . . .	8
1.11 Planarni graf i njemu izomorfan ravanski graf . . . . .	9
1.12 Primer grafa sa prostim ciklima, kao i cikla sa tetivama . . . . .	10
1.13 Primer trianguliranog grafa . . . . .	11

1.14 Graf iz primera 1.2.8 . . . . .	12
2.1 Na slici a) je graf $K_5$ , a na slici b) graf $K_{3,3}$ . . . . .	15
2.2 Grafičke interpretacije dobijene baricentričnom metodom . . . . .	16
2.3 a) Ravanski triangulirani graf $G$ b) Pravolinijska grafička interpretacija grafa $G$ na celobrojnoj mreži . . . . .	18
2.4 Konstrukcija grafa $H_n$ iz teoreme 2.1.1 . . . . .	20
2.5 Kanonsko uređenje grafa . . . . .	22
2.6 Menhetn rastojanje . . . . .	23
2.7 Ilustracija metode pomeraja . . . . .	25
2.8 Primer interpretacije dobijene metodom pomeraja . . . . .	28
3.1 Ilustracija koraka dodavanja čvora za generisanje trianguliranih grafova . . . . .	32
3.2 Korak 3 - Dodavanje čvora 4 . . . . .	34
3.3 Korak 4 - Dodavanje čvora 6 . . . . .	35
3.4 Korak 5 - Dodavanje čvora 7 . . . . .	36
3.5 Korak 6 - Dodavanje čvora 8 . . . . .	37
3.6 Korak 7 - Dodavanje čvora 5 . . . . .	37
3.7 Korak 8 - Dodavanje čvora 13 . . . . .	37
3.8 Korak 9 - Dodavanje čvora 10 . . . . .	38
3.9 Korak 10 - Dodavanje čvora 9 . . . . .	38
3.10 Korak 11 - Dodavanje čvora 15 . . . . .	38
3.11 Korak 12 - Dodavanje čvora 14 . . . . .	38
3.12 Korak 13 - Dodavanje čvora 12 . . . . .	38
3.13 Korak 14 - Dodavanje čvora 11 . . . . .	38
3.14 Korak 15 - Dodavanje čvora 16 . . . . .	39
4.1 Korak 3 - Dodavanje čvora 4 . . . . .	54
4.2 Korak 4 - Dodavanje čvora 6 . . . . .	55
4.3 Korak 5 - Dodavanje čvora 7 . . . . .	56
4.4 Korak 6 - Dodavanje čvora 8 . . . . .	56
4.5 Korak 7 - Dodavanje čvora 5 . . . . .	56
4.6 Korak 8 - Dodavanje čvora 13 . . . . .	56
4.7 Korak 9 - Dodavanje čvora 10 . . . . .	56
4.8 Korak 10 - Dodavanje čvora 9 . . . . .	56
4.9 Korak 11 - Dodavanje čvora 15 . . . . .	57
4.10 Korak 12 - Dodavanje čvora 14 . . . . .	57

4.11 Korak 13 - Dodavanje čvora 12 . . . . .	57
4.12 Korak 14 - Dodavanje čvora 11 . . . . .	57
4.12 Korak 15 - Dodavanje čvora 16 . . . . .	58
5.1 Primer klase 10 - A Algoritam . . . . .	62
5.2 Primer klase 10 - B Algoritam . . . . .	63
5.3 Primer klase 10 - Metoda pomeraja . . . . .	63
5.4 Primer klase 100 - Algoritam B . . . . .	64