УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Стефан Митровић

ХРОМАТСКА ФУНКЦИЈА ГРАФА

мастер рад

Београд, 2021.

Ментор:

др Тања Стојадиновић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Горан Ђанковић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Марко Радовановић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 1.10.2021.

Предговор

Тема овог рада је дефинисање хроматске функције графа и изучавање њених најзначајнијих карактеристика. Хроматска функција нам даје могућност да графове, који су по својој природи комбинаторни објекти, алгебризујемо и проучавамо њихова својства користећи теорију симетричних функција. Ова функција је први пут уведена 1995. године у раду Ричарда Стенлија као уопштење, односно бесконачни аналогон хроматског полинома. У том раду су постављена два главна питања која већ четврт века окупирају пажњу математичара. Прво је да ли хроматска функција разликује неизоморфна стабла, што је до сада потврђено само за одређене фамилије стабала. Друго, значајније, је питање такозване e-позитивности хроматске функције графа, које је садржано у Стенли-Стембрицовој хипотези. И ово питање је још увек отворено, иако су до сада доказани неки слабији резултати.

У уводној глави дефинишемо појмове који ће нам бити неопходни у даљем раду. Друга глава се бави хроматским полиномом, објектом који је први пут уведен 1912. године у Бирхофовом раду у циљу решавања проблема четири боје. Након тога, у трећој глави, уводимо појам симетричне хроматске функције графа и изводимо њен развој у мономијалној и степеној бази. Као директну последицу ових развоја, добијамо резултате који су значајни за прво Стенлијево питање. Четврта и пета глава нам дају неке од многих комбинаторних интерпретација коефицијената хроматске функције при развоју у различитим базама простора симетричних функција. Након тога, дефинишемо модификовану хроматску функцију и налазимо природну везу између ње и класичне хроматске функције. Напослетку, седма глава је резервисана за неке од резултата који су доказани у циљу решавања другог Стенлијевог питања.

Садржај

1 Увод **1**

1.1 Партиције 1

1.2 Симетричне функције 3

1.3 Мреже 11

1.4 Геометријске мреже 13

1.5 Графови 15

1.6 Партиције скупова 18

2 Хроматски полином графа **21**

3 Хроматска функција графа **26**

4 Ацикличне оријентације **32**

4.1 Простор квазисиметричних функција 33

4.2 Сливници 36

5 Разбијени циклуси **41**

6 Реципроцитет **44**

7 Позитивност **47**

7.1 Специјални графови 50

Библиографија **61**

Глава 1

Увод

У уводном делу ћемо дати дефиниције основних појмова које изучавамо и користимо у даљем раду.

1.1 Партиције

Дефиниција 1.1. Партиција $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ је сваки низ (коначан, или бесконачан) ненегативних целих бројева таквих да је $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$, који садржи само коначно много ненула елемената. Поистовећујемо сваке две партиције које се разликују само у низу нула на крају.

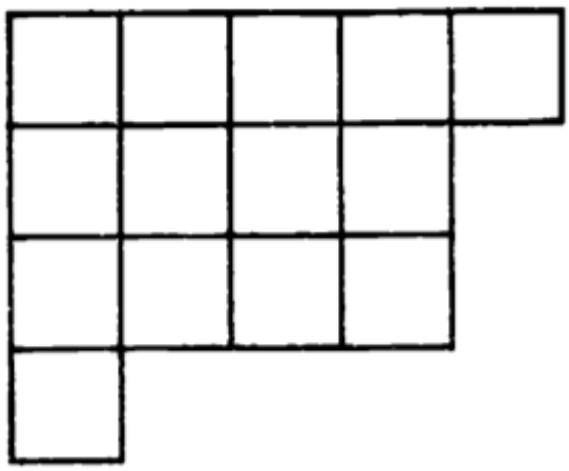
Делови партиције λ су њени ненула елементи. Број ненула елемената партиције λ је дужина од λ, у ознаци $l(\lambda)$. Величину $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$ зовемо тежином партиције λ.

Уколико је $|\lambda| = n$, кажемо да је λ партиција броја n и пишемо $\lambda \vdash n$. Скуп свих партиција броја n означавамо са $\mathcal{P}_n$, кардиналност овог скупа са $p(n)$, а скуп свих партиција са $\mathcal{P}$. Специјално, скуп $\mathcal{P}_0$ се састоји од само једне партиције, коју означавамо са 0.

Партиције можемо записивати и у облику $\lambda = (1^{r_1} 2^{r_2} \ldots i^{r_i} \ldots)$, где је $r_i = m_i(\lambda)$ број делова од λ који су једнаки i, величина коју називамо мултиплицитетом од i у λ.

Свакој партицији $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ можемо природно придружити њен дијаграм, односно табелу од d врста која у i-тој врсти, за $1 \leq i \leq d$, садржи λ_i поља.

Пример: Посматрајмо партицију (5441) и њој придружен дијаграм:



Дијаграм партиције нам омогућава да на врло природан начин дефинишемо конјугат партиције - то је нова партиција λ' чији је дијаграм транспонат дијаграма λ. Другим речима, дијаграм од λ' добијамо заменом места врста и колона дијаграма партиције λ. Очигледно, $\lambda'' = \lambda$.

Формално, λ' ће бити партиција чији је део $\lambda'_i = |\{j \geq 0 \mid \lambda_j \geq i\}|$. Специјално, $\lambda'_1 = l(\lambda)$. Из претходно наведеног имамо

$$m_i(\lambda) = |\{j \geq 0 | \lambda_j = i\}| = |\{j \geq 0 | \lambda_j \geq i\}| - |\{j \geq 0 | \lambda_j \geq i+1\}| = \lambda'_i - \lambda'_{i+1}.$$

Пример: Из дијаграма за партицију (5441) лако видимо да је њој конјугована партиција (43331).

Дефиниција 1.2. За две партиције $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ броја n кажемо да је $\lambda \leq \mu$ уколико је за свако $i \in \mathbb{N}$ испуњено $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \leq \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i$.

Приметимо да претходно дефинисана релација јесте уређење, али да то уређење не мора бити тотално. Најмањи елемент овог уређења је партиција $(1, 1, \ldots, 1)$, а највећи партиција (n). Лако уочавамо да су те две партиције међусобно конјуговане.

Посматрајмо за тренутак векторе са целобројним координатама: $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. Симетрична група S_n дејствује на $\mathbb{Z}^n$ пермутацијом координата, а пресек орбите било ког елемента $a \in \mathbb{Z}^n$ при овом дејству и скупа $P_n = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) \mid b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n\}$ је једночлан (вектор добијен

прерасподелом координата у нерастући поредак). Означимо тај елемент са a^+.

Као и малопре, можемо дефинисати поредак на скупу $\mathbb{Z}^n$:
за $a, b \in \mathbb{Z}^n$ кажемо да је $a \leq b$ акко је за свако $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ испуњено $a_1 + a_2 + \cdots + a_i \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_i$.

Лема 1.3. Нека је $a \in \mathbb{Z}^n$. Тада је $a \in P_n$ акко је за сваку пермутацију $\sigma \in S_n$ $\sigma a \leq a$.

Доказ. Нека је $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in P_n$. Уколико је $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ нека пермутација низа a, тада је $a_1 + a_2 + \cdots + a_i \geq b_1 + b_2 + \cdots + b_i$ јер се у првој суми појављује i највећих координата од a.

Обратно, нека је за сваку пермутацију $\sigma \in S_n$ испуњено $\sigma a \leq a$. Специјално, имамо да је за произвољно $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \ldots, a_n) \leq a.$$

Одавде је $a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} \leq a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_i$, односно $a_{i+1} \leq a_i$. □

1.2 Симетричне функције

Посматрајмо прстен $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ полинома са целобројним коефицијентима над n променљивих. Симетрична група S_n дејствује на овај прстен пермутацијом променљивих.

Дефиниција 1.4. За полином из $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ кажемо да је симетричан уколико је инваријантан у односу на дејство групе S_n.

Лако се проверава да скуп свих симетричних полинома из $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ формира потпрстен полазног прстена, који означавамо са Λ_n.

Приметимо да, уколико са Λ_n^k означимо скуп свих симетричних полинома из $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ који су степена k, заједно са нула-полиномом, имамо:

$$\Lambda_n = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda_n^k,$$

што ћемо у наставку називати својством градуисаности прстена Λ_n.

Уколико је $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, означимо са x^α моном $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Ако је λ било која партиција дужине не веће од n, можемо посматрати симетрични полином:

$$m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_\alpha x^\alpha,$$

где се сумација врши по свим пермутацијама α од $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Штавише, јасно је да је $m_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ заправо у скупу $\Lambda_n^{|\lambda|}$.

Лако се уочава и да скуп полинома m_λ, када λ прође скупом свих партиција дужине не веће од n формира једну $\mathbb{Z}$-базу од Λ_n, односно да се сваки симетрични полином овог прстена може на јединствен начин представити као $\mathbb{Z}$-линеарна комбинација полинома m_λ.

Посматрајмо пресликавање $\rho_{m,n} : \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m] \longrightarrow \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, где је $m \geq n$ дефинисано тако да шаље $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у $x_1, x_2, \ldots, x_n$ респективно, а остале x_i у 0, те проширено до хомомрфизма прстена. Уколико рестрикујемо овако дефинисано пресликавање на Λ_m, добијамо хомоморфизам који обележавамо на исти начин:

$$\rho_{m,n} : \Lambda_m \longrightarrow \Lambda_n.$$

Примећујемо да $\rho_{m,n}$ шаље $m_\lambda(x_1, \ldots, x_m)$ у $m_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ уколико је $l(\lambda) \leq n$, односно у 0 уколико је $l(\lambda) > n$ (јер се у сваком моному таквог полинома појављује нека од променљивих која са $\rho_{m,n}$ иде у 0).

Рестрикцијом хомоморфизма $\rho_{m,n}$ на Λ_m^k добијамо:

$$\rho_{m,n}^k : \Lambda_m^k \longrightarrow \Lambda_n^k.$$

Приметимо да скупови Λ_m^k и Λ_n^k нису затворени за множење, па самим тим нису ни прстени. Међутим, они свакако јесу адитивне групе и $\rho_{m,n}^k$ јесте хомоморфизам ових група. Прецизније, $\rho_{m,n}^k$ је хомоморфизам ових $\mathbb{Z}$-модула.

Став 1.5. Хомоморфизам $\rho_{m,n}^k$ дефинисан за $m \geq n$ и $k \geq 0$ је сурјективан. Уколико је и $n \geq k$, овај хомоморфизам је и инјективан.

Доказ. Да бисмо доказали први део става, довољно је видети да је хомоморфизмом $\rho_{m,n}^k$ погођен сваки полином $m_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ из Λ_n^k. Међутим, он јесте слика полинома $m_\lambda(x_1, \ldots, x_m)$.

Како је $\rho_{m,n}^k$ хомоморфизам група, довољно је увидети да се у случају да је $n \geq k$, једино нула полином из домена слика у нула полином из кодомена. С обзиром на то да сваки ненула симетрични полином степена k мора садржати моном у ком се од променљивих јављају само (можда не сви) $x_1, \ldots, x_k$ који при хомоморфизму $\rho_{m,n}^k$ имају нетривијалну слику, ово јесте испуњено. $\square$

У наставку ћемо желети да посматрамо бесконачне формалне суме, те нам је потребан појам инверзног лимеса модула:

Дефиниција 1.6. Нека је $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ $\mathbb{Z}$-модула и $g_n : A_{n+1} \longrightarrow A_n$ хомоморфизам $\mathbb{Z}$-модула за свако $n \in \mathbb{N}$. Пар $(\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ се назива инверзни систем. Инверзни лимес овог система се дефинише као:

$$\varprojlim A_n = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n \mid g_n(x_{n+1}) = x_n, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Сада можемо дефинисати:

$$\Lambda^k := \varprojlim \Lambda_n^k$$

у односу на хомоморфизме $\rho^k_{n+1,n}$: елемент скупа Λ^k је низ $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, где је сваки f_n хомоген симетрични полином степена k са n променљивих и где је $\rho^k_{n+1,n}(f_{n+1}) = f_n$. Другим речима, $f_n(x_1, \ldots, x_n) = f_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, 0)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Одавде лако видимо да важи и општији резултат: $f_n(x_1, \ldots, x_n) = f_m(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ кад год је $m \geq n$.

Како је пресликавање $\rho^k_{m,n}$ изоморфизам кад год је $m \geq n \geq k$, видимо и да је пројекција $\rho^k_n : \Lambda^k \longrightarrow \Lambda^k_n$ која $f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ слика у f_n такође изоморфизам за свако $n \geq k$. Стога, Λ^k има $\mathbb{Z}$-базу која се састоји од мономијалних симетричних функција m_λ, за сваку партицију λ од k, које дефинишемо као:

$$\rho^k_n(m_\lambda) = m_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$$

где је $n \geq k$. Дакле, Λ^k је слободан $\mathbb{Z}$-модул ранга $p(k)$.

На крају, дефинишемо Λ као слободан $\mathbb{Z}$-модул генерисан са m_λ, када λ прође скупом $\mathcal{P}$

$$\Lambda = \bigoplus_{k\geq 0} \Lambda^k.$$

Дефиниција 1.7. Претходно дефинисан Λ називамо прстеном симетричних функција са пребројиво много променљивих.

Приметимо да елементи од Λ више нису полиноми, већ формалне бесконачне суме монома. Такође, приметимо да имамо сурјективне хомоморфизме:

$$\rho_n = \bigoplus_{k\geq 0} \rho^k_n : \Lambda \longrightarrow \Lambda_n.$$

Уместо прстена $\mathbb{Z}$, могли смо у дефиницији користити било који комутативни прстен са јединицом A, те тако добити прстен симетричних функција Λ_A. За $A = \mathbb{Q}$, добијамо прстен симетричних функција са рационалним коефицијентима Λ_Q.

Различите базе простора Λ

У току саме конструкције прстена Λ, скуп мономијалних симетричних функција се природно наметнуо као база овог $\mathbb{Z}$-модула. Да ли постоје још неке „смислене" базе?

Нека је $r \geq 0$. Дефинишимо $e_0 = 1$ и

$$e_r = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$$

за $r \geq 1$. Ове функције називамо елементарним симетричним функцијама. За сваку партицију $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, дефинишемо :

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots .$$

Став 1.8. Нека је λ нека партиција. Тада је

$$e_{\lambda'} = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} a_{\lambda,\mu} m_\mu,$$

где су $a_{\lambda,\mu}$ ненегативни цели бројеви.

Доказ. Уколико формално измножимо производ $e_{\lambda'} = e_{\lambda'_1} e_{\lambda'_2} \cdots$, добијамо суму монома од којих је сваки облика

$$(x_{i_1} x_{i_2} \cdots)(x_{j_1} x_{j_2} \cdots) \ldots = x^\alpha,$$

где је $i_1 < i_2 < \cdots < i_{\lambda'_1}$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_{\lambda'_2}$ и тако даље. Бројеве i_1, i_2,..., $i_{\lambda'_1}$ уписујемо у прву колону дијаграма за партицију λ (која заиста има λ'_1 поља). Бројеве $j_1, j_2, \ldots, j_{\lambda'_2}$ уписујемо у другу колону, и тако даље, док не попунимо читав дијаграм.

Уколико је $r \in \mathbb{N}$, видимо да се, након оваквог попуњавања табеле, бројеви не већи од r могу наћи једино у првих r врста дијаграма. Стога, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$ за свако $r \in \mathbb{N}$, или еквивалентно $\alpha \leq \lambda$. По леми 1.3, видимо да је

$$e_{\lambda'} = \sum_{\mu \leq \lambda} a_{\lambda,\mu} m_\mu$$

са $a_{\lambda,\mu} \geq 0$. Такође, лако видимо да се израз x^λ појављује само једном (за $i_k = j_k = \cdots = k$ за свако k), те је $a_{\lambda,\lambda} = 1$. $\square$

Последица 1.9. Скуп свих e_λ је $\mathbb{Z}$-база модула Λ.

Доказ. Приметимо да су e_λ и m_λ хомогени симетрични полиноми степена $|\lambda|$. Стога, довољно је посматрати шта се дешава на нивоу партиција неког унапред фиксираног природног броја n. Нека су $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p(n)}$ све партиције од n у неком опадајућем поретку ранга (на последњем месту је најмањи елемент $(1, 1, \ldots, 1)$, пре тога су оне партиције које су веће једино од најмањег елемента,. . . , на првом месту је највећи елемент, односно партиција (n)). Став 1.8 нам даје:

$$\begin{bmatrix} e_{\lambda'_1} \\ e_{\lambda'_2} \\ \vdots \\ e_{\lambda'_{p(n)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{\lambda_1,\lambda_2} & \cdots & a_{\lambda_1,\lambda_{p(n)}} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{\lambda_2,\lambda_{p(n)}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{\lambda_1} \\ m_{\lambda_2} \\ \vdots \\ m_{\lambda_{p(n)}} \end{bmatrix}$$

где су испод главне дијагонале нуле, а на главној дијагонали јединице. Стога, детерминанта ове матрице је 1, па је и инвертибилна у скупу целобројних матрица, те се мономијалне симетричне функције могу на јединствен начин изразити преко елементарних симетричних функција. С обзиром на то да скуп мономијалних симетричних функција чини базу за Λ, видимо да аналогно важи и за функције e_λ. $\square$

Последица 1.10. Скуп $\{e_r\}_{r\geq 0}$ је једна алгебарска база прстена Λ.

За свако $r \geq 0$, дефинишемо комплетну симетричну функцију h_r као

$$h_r = \sum_{\lambda \vdash r} m_\lambda.$$

Посматрајмо генераторне функције за e_r и h_r респективно, односно формалне степене редове

$$E(t) = \sum_{r\geq 0} e_r t^r = \prod_{i\in\mathbb{N}} (1 + x_i t)$$

$$H(t) = \sum_{r\geq 0} h_r t^r = \prod_{i\in\mathbb{N}} \sum_{k\geq 0} x_i^k t^k = \prod_{i\in\mathbb{N}} (1 - x_i t)^{-1}$$

Одавде је јасно да је $H(t)E(-t) = 1$, односно

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r e_r h_{n-r} = 0 \tag{1.1}$$

за свако $n \geq 1$.

Из претходне везе, индукцијом лако закључујемо да се сваки e_r може изразити преко h_l, те ће скуп свих комплетних симетричних функција чинити један алгебарски генераторни скуп за Λ.

Уколико је $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ партиција, можемо дефинисати $h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots$

Посматрајмо хомоморфизам ω прстена Λ који је задат на базним елементима e_r са:

$$\omega(e_r) = h_r.$$

Став 1.11. Пресликавање ω је инволуција.

Доказ. С обзиром на то да је ω задато на алгебарској бази, те проширено до хомоморфизма прстена, приметимо да је довољно да докажемо да је $\omega(h_n) = e_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Ово лако добијамо индукцијом:

(БИ): За $n = 0$, $e_n = h_n = 1$.

(ИХ): Нека важи за све индексе мање од n.

(ИК) Ако применимо ω на везу (1.1), добијамо

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r h_r \omega(h_{n-r}) = 0 = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r h_r e_{n-r}.$$

Како је по хипотези, $\omega(h_{n-r}) = e_{n-r}$ за свако $r \in \{1, .., n\}$, то скраћивањем $n-1$ сабирака претходне две суме добијамо $h_0\omega(h_n) = h_0 e_n$. □

Последица 1.12. Скуп $\{h_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ је једна алгебарска база, а скуп свих h_λ је $\mathbb{Z}$-база за Λ.

У наставку ће нам бити неопходне и степене симетричне функције дефинисане за $r \geq 1$ са:

$$p_r = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i^r.$$

Уколико посматрамо генераторну функцију за p_r

$$P(t) = \sum_{r\geq 1} p_r t^{r-1} = \sum_{r\geq 1}\sum_{i\geq 1} x_i^r t^{r-1} = \sum_{i\geq 1}\sum_{r\geq 1} x_i^r t^{r-1} = \sum_{i\geq 1} \frac{x_i}{1 - x_i t},$$

видимо да $P(t)$ можемо посматрати као формални извод

$$\frac{d}{dt}\sum_{i\geq 1}\log(1-x_it)^{-1}=\frac{d}{dt}\log\prod_{i\geq 1}(1-x_it)^{-1}=\frac{d}{dt}\log H(t)=\frac{H'(t)}{H(t)}.$$

Дакле,

$$P(t)=\frac{H'(t)}{H(t)} \tag{1.2}$$

и потпуно аналогно

$$P(-t)=\frac{E'(t)}{E(t)}. \tag{1.3}$$

Како ω замењује $E(t)$ и $H(t)$, из веза (1.2) и (1.3) видимо да је $\omega(p_n)=(-1)^{n-1}p_n$.

Уколико је $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ нека партиција, тада са p_λ означавамо $p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots$ Из претходног лако закључујемо да је $\omega(p_\lambda)=(-1)^{|\lambda|-l(\lambda)}p_\lambda$. Означимо предзнак $(-1)^{|\lambda|-l(\lambda)}$ са ϵ_λ. Напоменимо да скуп степених симетричних функција није $\mathbb{Z}$-база за Λ, али јесте $\mathbb{Q}$-база за $\Lambda_{\mathbb{Q}}$.

Дефиниција 1.13. За попуњавање дијаграма неке партиције λ позитивним целим бројевима кажемо да је Јангов табло на λ уколико важи:

(а) попуњавање је неопадајуће у свакој врсти

(б) попуњавање је строго растуће у свакој колони.

Стандардни табло је онај који је попуњен бројевима од 1 до $|\lambda|$, при чему се сваки број појављује тачно једном.

Кажемо да је табло T партиције λ тежине $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$, ако се број i појављује $\alpha_i=\alpha_i(T)$ пута у њему. Приметимо да је само коначно много бројева α_i различито од нуле и да је $|\lambda|=\sum_i\alpha_i$. Са $\mathcal{T}_{\lambda,\alpha}$ означавамо скуп свих Јангових таблоа тежине α, а са $K_{\lambda,\alpha}$ кардиналност овог скупа, односно број различитих таблоа тежине α.

За Јангов табло T тежине α дефинишемо

$$x^T=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots.$$

Под Шуровом функцијом s_λ, где је λ нека партиција, подразумевамо:

$$s_\lambda=\sum_T x^T,$$

при чему се сумација врши по свим Јанговим таблоима дијаграма λ.

Директно из дефиниције Шурове функције добијамо да је

$$s_\lambda = \sum_\alpha K_{\lambda,\alpha} x^\alpha,$$

где се сумација врши по свим тежинама α од $|\lambda|$.

Став 1.14. За сваку партицију λ, Шурова функција s_λ је симетрична.

Доказ. Довољно је доказати да се s_λ не мења када заменимо x_i и x_{i+1}. Нека је $|\lambda| = n$ и нека је $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ растављање од n. Означимо са $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \alpha_{i+2}, \ldots)$. Како је Шурова функција сума монома индексираних таблоима, довољно је конструисати бијекцију између $\mathcal{T}_{\lambda,\alpha}$ и $\mathcal{T}_{\lambda,\alpha'}$, јер тада знамо да је коефицијент уз x^α једнак коефицијенту уз $x^{\alpha'}$.

Нека је $T \in \mathcal{T}_{\lambda,\alpha}$. Ако колона не садржи ниједну од ћелија са i, или $i+1$, замена на њу не утиче, па не разматрамо тај случај. Ни случај када су обе овакве ћелије у истој колони нас не занима зато што ту замена не може да се изврши, а да попуњавање остане табло. Стога, посматрајмо колоне у којима се појављује i, а не појављује се $i+1$. Аналогно разматрање пролази и у обрнутом случају.

Нека се у врсти налази r ћелија са уносом i испод којих нису ћелије са уносом $i+1$ и s ћелија са уносом $i+1$ изнад којих нису ћелије са уносом i. Конструишимо други табло од претходног, тако што у левих s од тих $r+s$ ћелија упишемо i, а у десних r упишемо $i+1$. Понављањем овог поступка за сваку врсту дијаграма, добијамо табло $T' \in \mathcal{T}_{\lambda,\alpha'}$. На овај начин, добијамо тражену бијекцију. □

Претходни став директно повлачи:

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash |\lambda|} K_{\lambda,\mu} m_\mu(x). \tag{1.4}$$

Став 1.15. Нека су μ и λ партиције истог природног броја. Ако је $K_{\lambda,\mu} \neq 0$, тада је $\mu \leq \lambda$. Додатно, $K_{\lambda,\lambda} = 1$.

Доказ. Нека је $K_{\lambda,\mu} \neq 0$. То значи да постоји табло T дијаграма λ тежине μ. Нека је k произвољан природан број. Тада се бројеви од 1 до k морају налазити у првих k врста таблоа T јер су таблои строго растући по колонама. Стога, $\mu_1 + \cdots + \mu_k \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ за свако k.

Уколико је $\lambda = \mu$, онда за свако i, у i-тој врсти мора да се налази само број i, па постоји само један такав табло. □

Применом претходног става на (1.4) добијамо

$$s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} K_{\lambda,\mu} m_\mu.$$

Стога, исто као код елементарних симетричних функција, добили смо систем једначина чија је детерминанта 1:

Последица 1.16. Шурове функције s_λ, када λ пролази скупом свих партиција од n, чине базу за Λ^n. Шурове функције s_λ, када λ пролази скупом свих партиција, чине базу за Λ.

1.3 Мреже

Дефиниција 1.17. Нека је $(P, \leq)$ парцијално уређен скуп. За њега кажемо да је мрежа уколико за свака два $x, y \in P$ постоји најмање горње ограничење (које обележавамо са $x \vee y$) и највеће доње ограничење (које обележавамо са $x \wedge y$) скупа $\{x, y\}$.

Дефиниција 1.18. Нека је $(P, \leq)$ парцијално уређен скуп и $x, y \in P$. Под сегментом $[x, y]$ подразумевамо скуп $\{z \mid x \leq z \leq y\}$. Кажемо да је P локално коначан уколико је сваки сегмент коначан скуп.

Повремено ће нам бити неопходни и полуотворени (отворени) сегменти $(x, y]$, $[x, y)$, (x, y) у којима су одговарајуће крајње тачке избачене.

Алгебра инциденције

Нека је $(P, \leq)$ локално коначан парцијално уређен скуп. Посматрајмо скуп свих реално вредносних функција $f(x, y)$ дефинисаних на $P \times P$ таквих да је $f(x, y) = 0$ кад год је $x \not\leq y$. Збир две функције f и g, као и множење функције f реалним скаларом λ дефинишемо на уобичајен начин.

Међутим, приметимо да на овом скупу можемо увести на природан начин још једну (унутрашњу) операцију. Уколико су f и g две функције, тада под конволуцијом (производом) f и g, у ознаци $f * g$, подразумевамо функцију задату са

$$(f * g)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) g(z, y).$$

Како смо претпоставили да је парцијално уређење локално коначно, ова сума је добро дефинисана. За функцију $f * g$ очигледно јесте испуњен услов $(f * g)(x, y) = 0$ уколико је $x \not\leq y$ с обзиром на то да је у том случају сума са десне стране празна.

Дефиниција 1.19. Под алгебром инциденције локално коначног парцијално уређеног скупа P подразумевамо скуп свих горенаведених функција заједно са операцијама сабирања, множења реалним скаларом и конволуције.

На сваком локално коначном парцијално уређеном скупу можемо дефинисати неке функције за које се врло лако проверава да јесу елементи алгебре инциденције - зета и делта функцију:

Под зета функцијом алгебре инциденције P подразумевамо функцију

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y \\ 0, & x \not\leq y \end{cases}$$

Кронекерова делта функција, дефинисана као и иначе:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

се понаша као неутрал за конволуцију:

$$(\delta * g)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \delta(x, z) g(z, y) = g(x, y)$$

$$(f * \delta)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) \delta(z, y) = f(x, y).$$

Дефиниција 1.20. За функцију f алгебре инциденције парцијално уређеног скупа P кажемо да је инвертибилна уколико постоји функција g таква да је $f * g = g * f = \delta$. Функцију g називамо инверзом функције f.

Став 1.21. Зета функција локално коначног парцијално уређеног скупа P је инвертибилна.

Доказ. Дефинисаћемо инверз $\mu(x, y)$ функције ζ индукцијом по броју елемената у сегменту $[x, y]$:

Нека је $\mu(x, x) = 1$ за свако $x \in P$.

Даље, претпоставимо да је $\mu(x,z)$ дефинисано за све $z \in [x,y)$. Дефинишимо

$$\mu(x,y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z).$$

Очигледно, μ јесте инверз функције ζ и зовемо је Мебијусовом функцијом парцијално уређеног скупа P.

□

1.4 Геометријске мреже

Дефиниција 1.22. За парцијално уређен скуп кажемо да има 0 (односно I) уколико има јединствени минимални (односно максимални) елемент.

Парцијално уређен скуп са 0 и I задовољава услов ланца уколико сви линеарно уређени подскупови са максималним бројем елемената имају једнак број елемената.

Дефиниција 1.23. Нека је P парцијално уређени скуп који задовољава услов ланца и нека је $p \in P$. Дефинишемо ранг (висину) елемента p, у ознаци $r(p)$ као дужину максималног ланца у сегменту $[0,p]$ умањену за 1. Висина од P је дефинисана као $r(I)+1$.

Приметимо да је, у складу са претходном дефиницијом, $r(0) = 0$. Под атомима подразумевамо све елементе који су ранга 1.

Дефиниција 1.24. Кажемо да елемент x парцијално уређеног скупа P наткрива елемент y уколико је $y < x$ и не постоји елемент z такав да је $y < z < x$.

Уколико је на скупу P дефинисан ранг и уколико елемент x наткрива елемент y, тада је очигледно $r(x) = r(y)+1$. Јасно, атоми су баш они елементи који наткривају минимални елемент 0. Под дуалним атомима подразумевамо оне елементе које наткрива максимални елемент I.

Дефиниција 1.25. Коначна мрежа која задовољава услов ланца са функцијом ранга r у којој је:

(а) сваки елемент најмање горње ограничење неког скупа атома

(б) за свака два елемента a и b испуњено $r(a \wedge b) + r(a \vee b) \leq r(a) + r(b)$

је геометријска мрежа.

Лема 1.26. Нека је μ Мебијусова функција геометријске мреже L и нека је $a \in L$ такво да је $a > 0$. Тада је

$$\sum_{x \vee a = I} \mu(0, x) = 0$$

Доказ. Приметимо да чињенице да је $\mu * \zeta = \delta$ и $\zeta * \mu = \delta$ респективно дају:

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu(z, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

Сада видимо да је

$$\sum_{x \vee a = I} \mu(0, x) = \sum_{x \in L} (\mu(0, x) \sum_{x \vee a \leq z \leq I} \mu(z, I)) = \sum_{x \in L} \sum_{a \leq z \leq I} \zeta(x, z) \mu(0, x) \mu(z, I) =$$

$$\sum_{a \leq z \leq I} \sum_{x \in L} \zeta(x, z) \mu(0, x) \mu(z, I) = \sum_{a \leq z \leq I} \mu(z, I) (\sum_{0 \leq x \leq z} \mu(0, x))$$

Како је у последњем изразу $0 < a \leq z$, то је $0 \neq z$, па је сума у загради 0.

□

Став 1.27. Нека је μ Мебијусова функција коначне геометријске мреже L. Тада:

(а) За свака два $x, y \in L$ важи да је $\mu(x, y) \neq 0$ уколико је $x \leq y$.

(б) Ако y наткрива z, тада су $\mu(x, y)$ и $\mu(x, z)$ супротног знака.

Доказ. Сваки сегмент $[x, y]$ геометријске мреже је такође геометријска мрежа, па је довољно претпоставити да је $x = 0$, $y = I$ и да је z неки дуални атом.

Доказ спроводимо индукцијом по висини мреже L.

БИ: Уколико је висина од L једнака 2 (еквивалентно, уколико је $L = \{0, I\}$), тада је по дефиницији Мебијусове функције $\mu(0, I) = -\mu(0, 0) = -1$.

ИХ: Нека је тврђење тачно за све мреже висине $n > 1$.

ИК: Нека је L мрежа висине $n+1$. На основу претходне леме, за неки атом a мреже L важи:

$$\mu(0, I) = -\sum_{x \vee a = I, x \neq I} \mu(0, x)$$

Нека је x неки елемент који фигурише у претходној суми. Уколико би било $a \leq x$, тада би $x \vee a = x \neq I$. Стога, x и a су неупоредиви, па је $x \wedge a = 0$. Сада, из особине субадитивности (б) дефиниције 1.25 имамо

$$r(x \wedge a) + r(x \vee a) = r(0) + r(I) = n \leq r(x) + r(a) = r(x) + 1,$$

те је $r(x) \geq n-1$. Стога, x је дуални атом. Из индуктивне хипотезе и чињенице да мрежа L задовољава услов ланца, имамо да су сви сабирци у горњој суми ненула и истог знака. Стога, $\mu(0, I)$ је ненула и супротног знака од свих њих.

□

Последица 1.28. (Формула Мебијусове инверзије) Нека је f реално вредносна функција дефинисана на локално коначном парцијално уређеном скупу P. Претпоставимо да постоји елемент p такав да је $f(x) = 0$ за свако x за које није $x \geq p$. Ако је

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y)$$

тада је

$$f(x) = \sum_{y \leq x} g(y)\mu(y, x).$$

Доказ. Приметимо да је функција g добро дефинисана с обзиром на то да $g(x)$ можемо видети као суму по сегменту $[p, x]$ који јесте коначан скуп. Пођимо од десне стране једнакости коју треба да докажемо:

$$\sum_{y \leq x} g(y)\mu(y, x) = \sum_{y \leq x} \sum_{z \leq y} f(z)\mu(y, x) = \sum_{y \leq x} \sum_{z \in P} f(z)\zeta(z, y)\mu(y, x) =$$

$$\sum_{z \in P} f(z) \sum_{y \leq x} \zeta(z, y)\mu(y, x) = \sum_{z \in P} f(z)\delta(z, x) = f(x).$$

□

1.5 Графови

Дефиниција 1.29. Граф је уређени пар $G = (V, E)$, где је V коначан скуп, а E подскуп скупа двочланих подскупова од V. Елементи скупа V су чворови (темена), а елементи скупа E гране (ивице) графа G. За $\{x, y\} \in E$ користимо скраћену ознаку xy.

Дефиниција 1.30. За чворове $x, y \in V$ графа $G = (V, E)$ кажемо да су суседни уколико је $xy \in E$. Скуп $N(x) = \{y \mid xy \in E\}$ зовемо суседством чвора x. Под степеном чвора x подразумевамо величину $d(x) = |N(x)|$.

Дефиниција 1.31. Уколико је $G = (V, E)$ граф и $S \subseteq V$, тада са $G[S]$ означавамо граф (S, E') где за свака два $x, y \in S$ важи $xy \in E' \iff xy \in E$. Граф $G[S]$ зовемо индукованим подграфом графа G.

Дефиниција 1.32. Уколико је $G = (V, E)$ граф, тада је његов комплемент $\overline{G} = (V, E')$ граф такав да је за свака два различита чвора a и b из G испуњено $ab \in E \iff ab \notin E'$.

Дефиниција 1.33. Нека је $G = (V, E)$ граф и $v \in V$. Граф $G \setminus v$ је уређени пар $(V \setminus \{v\}, E')$, где је $E' = \{xy \in E \mid x, y \in V \setminus \{v\}\}$.

Дефиниција 1.34. Нека је $G = (V, E)$ граф и нека је $e = xy \in E$. Граф $G \setminus e$ је уређени пар $(V, E \setminus \{e\})$. За граф $G/e = (V', E')$ дефинисан са $V' = (V \setminus \{x, y\}) \cup \{v_{xy}\}$ (подразумевамо да $v_{xy} \notin V$), а $E' = (E \setminus U) \cup U'$, где је $U = \{xx' \mid x' \in N(x)\} \cup \{yy' \mid y' \in N(y)\}$ и $U' = \{v_{xy}z \mid z \in (N(x) \cup N(y)) \setminus \{x, y\}\}$, кажемо да је добијен од G контракцијом гране e.

Неформално, граф $G \setminus e$ је добијен од G избацивањем гране e, док је граф G/e добијен од G сажимањем гране e (и њених чворова) у један чвор. Очигледно је да и $G \setminus e$ и G/e имају мање грана од графа G.

Дефиниција 1.35. За граф H кажемо да је минор графа G уколико се граф изоморфан графу H може добити од G применом коначно много следећих операција:

(1) брисање чвора

(2) брисање гране

(3) контракција гране.

Дефиниција 1.36. Шетња у графу $G = (V, E)$ је низ чворова $v_1, v_2, \ldots, v_k$ из V тако да за свако $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ важи $v_i v_{i+1} \in E$. За ову шетњу кажемо да је од v_1 до v_k. Уводимо релацију $\sim$ на скупу чворова V са:

$$u \sim v \text{ акко постоји шетња од } u \text{ до } v \text{ у } G.$$

За релацију $\sim$ се лако проверава да је релација еквиваленције. Класе еквиваленције релације $\sim$ су компоненте повезаности графа G. Уколико граф G има тачно једну компоненту повезаности, кажемо да је повезан.

Дефиниција 1.37. Шетња $v_1, v_2, \ldots, v_k$ у графу G је циклус уколико је $v_1 = v_k$, док су сви остали чворови међусобно различити и различити од v_1, односно v_k. Шетња $v_1, v_2, \ldots, v_k$ у графу G је пут уколико су сви чворови ове шетње међусобно различити.

Дефиниција 1.38. За граф кажемо да је стабло уколико је повезан и без циклуса. За граф кажемо да је шума уколико је свака његова компонента повезаности стабло.

За чворове стабла који имају само једног суседа кажемо да су листови.

Лема 1.39. Свако стабло са бар 2 чвора има бар 2 листа.

Доказ. Уколико посматрамо најдужи пут $P : v_1, v_2, \ldots, v_n$ у овом стаблу, сви суседи чворова v_1 и v_n се налазе на P (иначе бисмо могли да нађемо дужи пут). Уколико би v_1 на путу P имао још неког суседа v_i, поред v_2, тада би $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_1$ био циклус, што није могуће. Аналогно закључујемо и за v_n, те су чворови v_1 и v_n листови. □

Лема 1.40. Стабло са n чворова има $n - 1$ грану.

Доказ. Став тривијално важи за стабло са једним чвором. Уколико имамо $n \geq 2$ чворова, тада у том графу постоји лист чијим уклањањем добијамо стабло са једним чвором и једном граном мање. □

Последица 1.41. Шума са n чворова и l компоненти повезаности има $n - l$ грана.

Дефиниција 1.42. За граф кажемо да је комплетан уколико су свака два чвора тог графа суседна.

Дефиниција 1.43. За подскуп S скупа чворова V графа $G = (V, E)$ кажемо да је независан скуп уколико никоја два чвора из S нису суседна у G.

Дефиниција 1.44. За граф $G = (V, E)$ кажемо да је бипартитни уколико постоји разбијање скупа V на непразне дисјунктне независне скупове чворова A и B. Скупове A и B називамо партицијама графа G.

Лема 1.45. Уколико је $G = (V, E)$ граф и $C_1, C_2, \ldots, C_k$ његове компоненте повезаности, тада је $|V| \leq k + |E|$.

Доказ. Доказ спроводимо индукцијом по броју грана графа G.

БИ: Уколико G нема ниједну грану, тада је $k = |V|$.

ИХ: Став важи за $G = (V, E)$ са l грана.

ИК: Уколико G има $l + 1$ грану, тада га можемо видети као граф са l грана којем смо додали још једну грану. Додата грана може бити грана између два чвора која су и у првобитном графу била у истој компоненти повезаности, те се број k не мења, па неједнакост остаје на снази, или грана између два чвора из различитих компоненти повезаности у првобитном графу, када се број k смањује за 1, па величина са десне стране неједнакости остаје непромењена. □

Дефиниција 1.46. Нека је $G = (V, E)$ граф. За скуп $M \subseteq E$ кажемо да је упаривање у G ако никоје две гране из M немају заједнички чвор. За упаривање M кажемо да је савршено уколико за сваки чвор v из G постоји грана из M која је инцидентна са v, а скоро савршено уколико исти услов важи за све чворове, осим (евентуално) једног.

1.6 Партиције скупова

Поред партиција које су уведене дефиницијом 1.1, у математици често посматрамо и партиције скупа - разбијање скупа на непразне дисјунктне подскупове које називамо блоковима те партиције. Означимо са $|\pi|$ број блокова партиције π.

Приметимо да свакој партицији π коначног скупа V можемо придружити партицију $\mathrm{type}(\pi)$ броја $|V|$ чији су делови једнаки величинама блокова (наравно, у нерастућем поретку).

На скупу свих партиција коначног скупа V можемо увести релацију профињења: за две партиције π и σ кажемо да је π финија од σ (односно да је σ грубља од π), у ознаци $\pi \preccurlyeq \sigma$, уколико је сваки блок од π подскуп неког блока од σ. Лако се види да је ово једна релација поретка у којој је најмањи елемент партиција скупа V на једночлане подскупове, односно синглтоне, док је највећи $\{V\}$.

Прецизије, скуп свих партиција коначног скупа V постаје мрежа у односу на ову релацију. Уверимо се у то:

Уколико су π и σ две партиције од V, тада ће њихово највеће доње ограничење $\pi \wedge \sigma$ бити партиција чији су блокови дефинисани на следећи начин:

За $x \in V$, уколико су A и B блокови од π и σ респективно који садрже x, тада је $A \cap B$ блок од $\pi \wedge \sigma$ који садржи елемент x.

Како је скуп свих партиција коначног скупа коначан, то најмање горње ограничење можемо видети као највеће доње ограничење скупа свих горњих ограничења за π и σ (који је непразан због егзистенције највећег елемента овог посета).

Посматрајмо две партиције $\pi = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ и $\sigma = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ коначног скупа V. Креирајмо бипартитни граф $G = (A \sqcup B, E)$, где је $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, а $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ (чворови ће одговарати блоковима ових партиција), док је $E = \{a_i b_j \mid$ блокови A_i и B_j имају непразан пресек$\}$. Очигледно, партиција $\pi \wedge \sigma$ ће имати онолико блокова колико имамо непразних пресека блокова ових партиција, односно, с обзиром на начин на који смо увели граф G, онолико колико имамо грана у овом графу. Са друге стране, блокова у $\pi \vee \sigma$ ће бити онолико колико граф G има компонената повезаности (свака два блока која имају непразан пресек, у $\pi \vee \sigma$ морају бити подскупови истог блока). Након ове интерпретације, лема 1.45 нам даје:

Лема 1.47. Уколико су π и σ две партиције коначног скупа, тада је

$$|\pi| + |\sigma| \leq |\pi \vee \sigma| + |\pi \wedge \sigma|.$$

Мрежа контракције

У наставку нећемо посматрати партиције било ког скупа, већ скупа чворова неког графа. Притом, од тих партиција ћемо захтевати да испуњавају неке особине:

Дефиниција 1.48. Нека је $G = (V, E)$ граф. Партиција $\pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ скупа чворова V графа G је повезана уколико је за свако $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ индуковани подграф $G[V_i]$ повезан.

Скуп свих повезаних партиција природно наслеђује уређење профињења. Ако је граф G повезан, тада су наслеђени и највећи и најмањи елемент (уколико G није повезан, највећи елемент ће бити разбијање на компоненте повезаности). Лако уочавамо да ће и овај скуп у односу на релацију профињења бити мрежа: уколико су π и σ две повезане партиције, тада је и $\pi \vee \sigma$ такође повезана. Са друге стране, $\pi \wedge \sigma$ не може бити уведена као код обичних партиција због тога што пресек два повезана подграфа не мора бити повезан

подграф. Стога, $\pi \wedge \sigma$ у овом случају уводимо као најмање горње ограничење скупа свих доњих ограничења за π и σ (ово је добро дефинисано јер је тај скуп коначан и непразан - садржи дискретну партицију). Приметимо да и у овом модификованом случају, лема 1.47 остаје на снази.

Дефиниција 1.49. Мрежу дефинисану у претходном разматрању називамо мрежом контракције графа $G = (V, E)$ и означавамо је са L_G.

Чудно име ове мреже долази из следећег конструктивног начина да се изгенеришу сви елементи овог посета, односно све повезане партиције неког графа G: претпоставимо да чвор v графа G представља једночлан скуп $\{v\}$. Стога, на самом почетку ове конструкције, имамо дискретну партицију. Уколико је v_1v_2 нека грана овог графа, њеном контракцијом добијамо нови чвор који у овој интерпретацији можемо доживети као $\{v_1, v_2\}$, те смо добили нову повезану партицију графа G. Очигледно, свака повезана партиција графа се може добити на овај начин и обратно.

Атоми ове мреже су баш партиције које добијамо контракцијом само једне гране, односно партиције у којима су сви блокови једночлани, осим једног који је двочлан. Лако видимо да сваку повезану партицију можемо посматрати као најмање горње ограничење неког скупа атома, те је ова мрежа и атомична. Такође, уколико означимо $r(\pi) = |V| - |\pi|$, директно утврђујемо да функција r јесте једна функција ранга на скупу L_G, док нам лема 1.47 даје да важи:

$$r(\pi \wedge \sigma) + r(\pi \vee \sigma) \leq r(\pi) + r(\sigma).$$

На основу претходног разматрања и става 1.27, добијамо:

Став 1.50. Мрежа контракције L_G графа G је коначна геометријска мрежа. Њена Мебијусова функција је алтернирајућа.

Глава 2

Хроматски полином графа

Дефиниција 2.1. Нека је $G = (V, E)$ граф. Било коју функцију $k : V \longrightarrow \mathbb{N}$ зовемо функцијом бојења чворова графа G. Кодомен овог пресликавања $\mathbb{N}$ зовемо скупом боја. За бојење k кажемо да је правилно уколико за свака два суседна чвора $x, y \in V$ важи да је $k(x) \neq k(y)$.

Приметимо да је у овом тренутку врло природно поставити следеће питање: за дати природан број n, на колико начина је могуће правилно обојити граф G, уколико нам је дозвољено да користимо само боје $\{1, 2, \ldots, n\}$?

Дефиниција 2.2. Хроматски полином $\chi_G(n)$ графа G је број различитих начина на које је могуће правилно обојити дати граф G користећи не више од n различитих боја.

Напоменимо да из саме дефиниције хроматског полинома није јасно да је у питању заиста полином (по n). Међутим:

Став 2.3. Нека је $G = (V, E)$ граф и нека је $e \in E$. Тада је

$$\chi_G(n) = \chi_{G \setminus e}(n) - \chi_{G/e}(n).$$

Доказ. Нека је $e = xy$ за $x, y \in V$. Број правилних бојења помоћу n боја графа $G \setminus e$ у којима су чворови x и y обојени различитим бојама је исти без обзира на то да ли су чворови x и y суседни, или не, те је стога једнак $\chi_G(n)$. Слично, број правилних бојења графа $G \setminus e$ помоћу n боја у којима су чворови x и y обојени истом бојом је једнак броју начина да се правилно обоји граф добијен од графа G поистовећивањем ових чворова, што је, пак, једнако величини $\chi_{G/e}(n)$. $\square$

Последица 2.4. Ако је G граф, тада је $\chi_G(n)$ полином по n.

Доказ. Доказ спроводимо индукцијом по броју грана.

БИ: Ако је E празан скуп, тада очигледно сваки чвор можемо обојити произвољном бојом, те је $\chi_G(n) = n^d$, где је $d = |V|$.

ИХ: Нека тврђење важи за све графове са мање од m грана.

ИК: Уколико је $G = (V, E)$ граф са $m > 0$ грана, тада је (за $e \in E$ произвољну грану) на основу претходног става $\chi_G(n) = \chi_{G\setminus e}(n) - \chi_{G/e}(n)$ разлика два полинома по n, те стога полином по n. □

Следећа лема је директна последица дефиниције хроматског полинома графа и принципа производа:

Лема 2.5. Уколико су $C_1, C_2, \ldots, C_k$ компоненте повезаности графа G, тада је

$$\chi_G = \chi_{G[C_1]}\chi_{G[C_2]} \cdots \chi_{G[C_k]}.$$

Дефиниција 2.6. Хроматски број графа G, у ознаци $\chi(G)$, је најмањи природан број n за који постоји правилно бојење од G са n боја.

Као директну последицу дефиниције хроматског полинома и хроматског броја, добијамо следеће:

Последица 2.7. $\chi(G) = min\{n \in \mathbb{N} \mid \chi_G(n) > 0\}$.

Пример: Приметимо да нам формула дата у ставу 2.3 даје ефикасан начин да (потпуно аналогно као у доказу последице 2.4) израчунамо хроматски полином за неки задати граф G. Искористимо то у случају када је G стабло:

Докажимо да за стабло G са k чворова важи $\chi_G(n) = n(n-1)^{k-1}$ индукцијом по k:

БИ: За $k = 1$ је очигледно $\chi_G(n) = n$.

ИХ: Нека формула важи за сва стабла са $k - 1$ чворова.

ИК: Ако је G стабло са $k \geq 2$ чворова, тада на основу леме 1.39 имамо да G садржи бар један лист v. Нека је e једина грана инцидентна са v. Како је $G \setminus e$ граф чија је једна компонента повезаности стабло са $k - 1$ чворова, а друга синглтон $\{v\}$, то на основу индуктивне хипотезе и леме 2.5 имамо $\chi_{G\setminus e}(n) = n \cdot n(n-1)^{k-2}$. Са друге стране, граф G/e је стабло са $k-1$ чворова, па је по хипотези $\chi_{G/e}(n) = n(n-1)^{k-2}$.

Напослетку, формула из става 2.3 нам даје:

$$\chi_G(n) = \chi_{G\setminus e}(n) - \chi_{G/e}(n) = n^2(n-1)^{k-2} - n(n-1)^{k-2} = n(n-1)^{k-1}.$$

Самим тим, видимо да хроматски полином никада „не разликује" два стабла са истим бројем чворова.

Посматрајмо сада коначан скуп B са n елемената и неко својство A које неки елементи скупа B задовољавају, а неки не. Означимо са $n(A)$ број елемената скупа B код којих је својство A испуњено.

Уколико са $\overline{A}$ означимо својство супротно својству A (односно својство које је задовољено од стране оних и само оних елемената који не испуњавају A), тада је очигледно

$$n(\overline{A}) = n - n(A)$$

Уколико су A_1, A_2, ..., A_m нека својства, означимо са $n(A_1A_2\dots A_m)$ број елемената скупа B који задовољавају сва ова својства. Математичком индукцијом лако добијамо уопштење претходне формуле:

$$\begin{aligned} n(\overline{A}_1\overline{A}_2\dots\overline{A}_m) = n - [n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_m)] + \\ +[n(A_1A_2) + n(A_1A_3) + \dots + n(A_{m-1}A_m)] \\ -[n(A_1A_2A_3) + \dots] + \dots + (-1)^m n(A_1A_{2m}). \end{aligned}$$

Посматрајмо сада скуп свих бојења неког графа $G = (V, E)$ са λ боја, где је $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Означимо са A_e својство које задовољавају она и само она бојења у којима су крајњи чворови гране e обојени истом бојом. Знамо да је бојење правилно акко никоја два суседна чвора нису обојена истом бојом, те су правилна бојења баш она која задовољавају својство $\overline{A}_{e_1}\overline{A}_{e_2}\dots\overline{A}_{e_m}$. Стога, како је $\chi_G(\lambda)$ баш број правилних бојења графа G помоћу λ боја, по претходној формули имамо

$$\begin{aligned} \chi_G(\lambda) = n(\overline{A}_{e_1}\overline{A}_{e_2}\dots\overline{A}_{e_k}) = n - [n(A_{e_1}) + n(A_{e_2}) + \dots + n(A_{e_k})] + \\ +[n(A_{e_1}A_{e_2}) + n(A_{e_1}A_{e_3}) + \dots + n(A_{e_{m-1}}A_{e_m})] - [n(A_{e_1}A_{e_2}A_{e_3}) + \dots] + \\ + \dots + (-1)^m n(A_{e_1}A_{e_2}\dots A_{e_m}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где је n кардиналност читавог скупа који посматрамо, односно број свих бојења графа G помоћу λ боја, што је баш $\lambda^{|V|}$.

У претходној суми, сабирци су у бијективној кореспонденцији са подскуповима S скупа грана E графа G (први члан суме одговара празном скупу).

Нека је $n(A_{e_{k_1}}A_{e_{k_2}}\dots A_{e_{k_l}})$ општи члан претходне суме. Посматрајмо граф $H = (V, \{e_{k_1}, e_{k_2}, \dots e_{k_l}\})$.

Бојења графа G која задовољавају $A_{e_{k_1}}A_{e_{k_2}}\dots A_{e_{k_l}}$ су управо она бојења у којима су свака два суседна чвора графа H обојена истом бојом. Другим речима, у графу H, сви чворови једне компоненте повезаности су обојени истом бојом. Уколико са $c(\{e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_l}\})$ означимо број компоненти повезаности у графу H, видимо да је

$$n(A_{e_{k_1}}A_{e_{k_2}}\dots A_{e_{k_l}}) = \lambda^{c(\{e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_l}\})}.$$

Смештањем овог резултата у формулу 2.1 и преименовањем променљиве λ стандардном ознаком n (која је у претходном извођењу била резервисана), добијамо следећи став:

Став 2.8. За граф $G = (V, E)$ важи:

$$\chi_G(n) = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{|S|} n^{c(S)}.$$

Покушајмо да на још један начин израчунамо хроматски полином графа. Нека је π нека партиција скупа V и нека је $f_G(\pi, n)$ број бојења чворова графа G уз помоћ n боја у којима су чворови из истог блока партиције π обојени истом бојом, а чворови из суседних блокова (односно блокова B_1 и B_2 за које постоје суседни чворови $v_1 \in B_1$, $v_2 \in B_2$) различито. Уколико са G_π означимо граф добијен од графа G „сажимањем" чворова из исте партиције у један чвор, тада је очигледно $f_G(\pi, n) = \chi_{G_\pi}(n)$. Са друге стране, за свако бојење $k : V \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, постоји јединствена повезана партиција π од V таква да k фигурише у $f_G(\pi, n)$. Наиме, партицију π добијамо тако што суседне чворове обојене истом бојом у k смештамо у исти блок од π (на пример, правилним бојењима ће одговарати дискретна партиција). Број бојења у којима су сви чворови из истог блока у партицији π обојени истом бојом уз помоћ n боја једнак је $n^{|\pi|}$. Стога,

$$n^{|\pi|} = \sum_{\pi \leq \sigma, \sigma \in L_G} f_G(\sigma, n) = \sum_{\pi \leq \sigma, \sigma \in L_G} \chi_{G_\sigma}(n).$$

Користећи формулу Мебијусове инверзије 1.28, добијамо:

$$\chi_{G_\pi}(n) = \sum_{\pi \leq \sigma, \sigma \in L_G} \mu(\pi, \sigma) n^{|\sigma|}.$$

Како нас занимају правилна бојења, односно она која одговарају дискретној партицији 0, добијамо:

Став 2.9. За граф $G = (V, E)$ важи:

$$\chi_G(n) = \sum_{\sigma \in L_G} \mu(0, \sigma) n^{|\sigma|}.$$

У следећој глави, увешћемо један објекат комбинаторног типа који можемо доживети као бесконачни аналогон хроматског полинома. Поред тога, доказаћемо ставове који су аналогни претходно доказаним ставовима. Потешкоћа на том путу је чињеница да немамо као оружје формулу брисања и контракције дату у ставу 2.3.

Глава 3

Хроматска функција графа

Дефиниција 3.1. Нека је $G = (V, E)$ граф и нека је $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$. Под хроматском функцијом графа G подразумевамо

$$X_G = X_G(x) = X_G(x_1, x_2, \ldots) = \sum_k x_{k(v_1)} x_{k(v_2)} \cdots x_{k(v_d)}$$

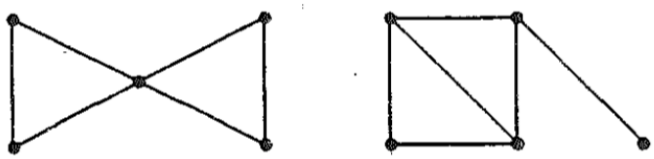
где се сумација врши по свим правилним бојењима k чворова графа G.

Из дефиниције је очигледно да је хроматска функција графа G једна симетрична хомогена функција степена $d = |V|$ (пренумерација боја не нарушава правилност бојења). Одавде видимо да из хроматске функције графа можемо „прочитати" број чворова у датом графу. Другим речима, два графа са истом хроматском функцијом имају исти број чворова.

Став 3.2. Нека је n природан број и G граф. Тада је $\chi_G(n) = X_G(1^n)$.

Доказ. У суми којом је дефинисана хроматска функција ће се појавити само они суманди у којима фигуришу искључиво $x_1, x_2, \ldots, x_n$, односно само она бојења у којима је коришћено првих n боја и то са вишеструкошћу 1, те ћемо свако такво бојење тачно једном пребројати. □

Природно је поставити питање да ли хроматска функција графа разликује неизоморфне графове. Међутим, хроматска функција је исувише једноставан комбинаторни објекат да би тако нешто било испуњено. Испоставља се да се хроматске функције свих 11 неизоморфних графова са 4 чвора разликују,



Слика 3.1: неизоморфни графови са једнаким хроматским функцијама

али да постоји јединствени пар неизоморфних графова са 5 чворова чије су хроматске функције једнаке.

У секцији 1.3 смо дефинисали мономијалне симетричне функције m_λ и видели да нам оне дају природну базу прстена симетричних функција. Ради поједностављења неких формула у наставку рада, мономијалне симетричне функције ћемо мало модификовати:

Дефиниција 3.3. Уколико је $\lambda = (1^{r_1}2^{r_2}\dots)$ нека партиција, тада под увећаном мономијалном симетричном функцијом подразумевамо

$$\tilde{m}_\lambda = r_1!r_2!\cdots m_\lambda.$$

Уочимо да, за разлику од „обичних" мономијалних функција, увећане мономијалне функције нису база за Λ. Са друге стране, оне јесу $\mathbb{Q}$-база за $\Lambda_{\mathbb{Q}}$.

Приметимо да је проблем правилног бојења графа еквивалентан проблему партиционисања графа на независне скупове чворова:

Дефиниција 3.4. Под стабилном партицијом графа $G = (V, E)$ подразумевамо сваку партицију π скупа чворова V такву да је сваки блок од π у G независан скуп чворова.

Као директну последицу претходних дефиниција, добијамо:

Последица 3.5. Нека је a_λ број стабилних партиција π графа G таквих да је $\mathrm{type}(\pi) = \lambda$. Тада је:

$$X_G = \sum_{\lambda \vdash |V|} a_\lambda \tilde{m}_\lambda$$

Доказ. Коефицијент уз моном $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\dots$ у X_G једнак је броју правилних бојења графа G у којима је λ_1 чворова обојено првом бојом, λ_2 чворова другом,... Другим речима, једнак је броју начина да се изабере стабилна партиција графа G типа $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) = (1^{r_1}2^{r_2}\dots)$, а након тога бојење које

неки блок величине λ_i боји бојом i за свако i. Када изаберемо π (што можемо учинити на a_λ начина), бојење можемо изабрати на $r_1!r_2!\cdots$ начина. $\square$

Дефиниција 3.6. Уколико је $G = (V, E)$ граф и $S \subseteq E$, тада је $\lambda(S)$ партиција броја $|V|$ чији су делови једнаки величинама компонената повезаности графа $G_S = (V, S)$.

Теорема 3.7.

$$X_G = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{|S|} p_{\lambda(S)}$$

.

Доказ. Ако је $S \subseteq E$, имамо да је

$$p_{\lambda(S)}(x) = \sum_{k \in K_s} x^k,$$

где је K_S скуп свих бојења $k : V \longrightarrow \mathbb{N}$ која су монохроматска на компонентама повезаности од G_S и где смо са x^k означили $x_{k(v_1)} x_{k(v_2)} \cdots$.

Стога,

$$\sum_{S \subseteq E} (-1)^{|S|} p_{\lambda(S)} = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{|S|} \sum_{k \in K_s} x^k = \sum_k x^k \sum_{S \subseteq E_k} (-1)^{|S|}, \qquad (3.1)$$

где је прва сума по свим бојењима k графа G, а E_k је скуп свих грана у графу G чији су крајњи чворови обојени истом бојом при k. Стога, друга сума је заправо $(1-1)^{|E_k|} = 0$, осим у случају када је E_k празан скуп (те је та сума 1), односно када је бојење k правилно. Дакле, (3.1) је заправо

$$\sum_k x^k,$$

где се сумација врши по свим правилним бојењима графа G, али то је по дефиницији баш хроматска функција од G. $\square$

Приметимо да ову теорему можемо доживети као уопштење става 2.8. Као што смо већ навели, хроматска функција не разликује свака два неизоморфна графа. Можемо се запитати које све заједничке особине (поред једнаког броја чворова) морају имати два неизоморфна графа да би њихове хроматске функције биле једнаке. Слично, можемо се запитати које то неизоморфне графове хроматска функција „разликује”.

Последица 3.8. Ако два графа имају исте хроматске функције, тада имају исти број грана и исти број k-елементних упаривања.

Доказ. Уколико је $G = (V, E)$ граф и $X_G = \sum c_\lambda p_\lambda$, из претходне теореме видимо да је (за $S \subset E$ једночлан) број грана заправо једнак броју $-c_{(2,1,\ldots,1)}$. Аналогно, број k-елементних упаривања се може прочитати из c_λ, где је $\lambda = (2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1)$ партиција са k делова једнаких 2. □

Последица 3.9. Ако два графа имају исте хроматске функције, тада имају и исту суму квадрата степена чворова.

Доказ. Нека је $S_G^{(2,2)}$ број подграфова од $G = (V, E)$ са скупом чворова V и две дисјунктне гране. По теореми 3.7, тај број је баш једнак коефицијенту уз $p_{(2,2,1,\ldots,1)}$ у развоју од X_G. Стога, уколико G и $H = (V', E')$ имају исту хроматску функцију, тада је $S_G^{(2,2)} = S_H^{(2,2)}$. Даље, нека је $S_G^{(3)}$ број подграфова од G са скупом чворова V и две гране са једним заједничким чвором. Како су сви подграфови од G са скупом чворова V и две гране једног од претходно наведена два типа, добијамо да је $\binom{|E|}{2} = S_G^{(2,2)} + S_G^{(3)}$.

По претходној последици, закључујемо да је за G и H испуњено $S_G^{(3)} = S_H^{(3)}$. Са друге стране, одабир подграфа који фигурише у $S_G^{(3)}$ еквивалентан је избору централног чвора и неке његове две гране. Стога,

$$S_G^{(3)} = \sum_{v \in V} \binom{d(v)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} (d^2(v) - d(v)) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d^2(v) - |E|.$$

Одавде директно видимо да је $\sum_{v \in V} d^2(v) = 2(S_G^{(3)} + |E|) = 2(S_H^{(3)} + |E'|) = \sum_{v \in V'} d^2(v)$. □

Последица 3.10. Ако два графа имају исте хроматске функције, тада имају и исти број троуглова.

Доказ. Ако је T_G број троуглова у графу G, лако видимо да је коефицијент уз $p_{(3,1,\ldots,1)}$ у развоју за X_G баш једнак $S_G^{(3)} - T_G$. □

Последица 3.11. Уколико је $G = (V, E)$ стабло, $X_G = \sum c_\lambda p_\lambda$, тада је $|c_{(j,1,..,1)}|$ број подстабала од G са j чворова, а $c_{(n-1,1)}$ број листова у G.

Доказ. Први део тврђења следи директно из теореме 3.7 и чињенице да је $S \subset E$ скуп грана j-елементног стабла акко је $\lambda(S) = (j, 1, \ldots, 1)$, а други произилази из тога што је свако подстабло од G са $n-1$ чворова заправо $G \setminus v$ за неки лист v. □

Наредну теорему, са друге стране, видимо као уопштење става 2.8, а како је и доказ потпуно аналоган, изостављамо га.

Теорема 3.12.

$$X_G = \sum_{\pi \in L_G} \mu(0, \pi) p_{\mathrm{type}(\pi)}.$$

Дефиниција 3.13. Ако је дата база $\{u_\lambda\}$ простора Λ, кажемо да је симетрична функција f u-позитивна уколико су у развоју $f = \sum d_\lambda u_\lambda$ сви коефицијенти d_λ ненегативни. Кажемо да је граф G u-позитиван уколико то важи за његову хроматску функцију X_G.

Последица 3.14. Функција ωX_G је p-позитивна

Доказ. Како је за $\lambda \vdash |V|$ испуњено $\epsilon_\lambda = (-1)^{|V|-l(\lambda)}$, имамо да је $\epsilon_{\mathrm{type}(\pi)} = (-1)^{|V|-|\pi|}$. Из теореме 3.12 и чињенице да је Мебијусова функција од L_G алтернирајућа, видимо:

$$\omega X_G = \sum_{\pi \in L_G} |\mu(0, \pi)| p_{\mathrm{type}(\pi)}.$$

□

У одељку 2, видели смо да хроматски полином не разликује стабла са истим бројем чворова. Испоставља се да хроматска функција стабла није толико једноставан објекат. Приметимо прво да, уколико је $G = (V, E)$ шума, тада је мрежа контракције L_G изоморфна партитивном скупу скупа од $|E|$ елемената. Наиме, одабир повезане партиције графа G је еквивалентан одабиру неког подскупа скупа грана E, и за две повезане партиције π и σ важи $\pi \preccurlyeq \sigma$ акко је индуковани подскуп грана за π подскуп индукованог скупа грана за σ. Ово не важи за произвољан граф јер можемо, на пример, у истом блоку неке партиције имати три чвора од којих је сваки са сваким суседан.

Лема 3.15. Ако је G шума и π нека повезана партиција, тада је $\mu(0, \pi) = (-1)^{|V|-|\pi|}$.

Доказ. Доказ можемо спровести индукцијом по рангу партиције π у L_G.

(БИ): Уколико је $\pi = 0$, тада је $\mu(0, 0) = 1 = (-1)^0$.

(ИХ): Нека важи за све партиције ранга мањег од n

(ИК): Ако је π партиција ранга n, тада је

$$\mu(0,\pi) = -\sum_{0\leq\sigma<\pi}\mu(0,\sigma) = -\left[1-\binom{l}{1}+\binom{l}{2}-\cdots+(-1)^{l-1}\binom{l}{l-1}\right] = (-1)^l$$

где је l број грана придруженог подскупа грана. Приметимо да сваки блок од π у графу G индукује стабло, те сваки блок B_i партиције π придруженом подскупу грана даје $|B_i|-1$ грану. Стога, $l = \sum(|B_i|-1) = |V|-|\pi|$. □

Последица 3.16. Нека је $G=(V,E)$ шума. Тада за свако $\lambda \vdash |V|$ знамо број a_λ стабилних партиција од G које су типа λ акко за свако $\lambda \vdash |V|$ знамо број b_λ повезаних партиција типа λ.

Доказ. По последици 3.5, знамо $X_G = \sum a_\lambda \tilde{m}_\lambda$. На основу претходне леме и теореме 3.12, имамо $X_G = \sum \mu(0,\pi)p_{\mathrm{type}(\pi)} = \sum(-1)^{|V|-l(\lambda)}b_\lambda p_\lambda$. Како су $\{\tilde{m}_\lambda\}$ и $\{p_\lambda\}$ $\mathbb{Q}$-базе за $\Lambda_{\mathbb{Q}}$, то коефицијенте из првог развоја можемо изразити преко коефицијената из другог развоја и обратно. □

Глава 4

Ацикличне оријентације

Дефиниција графа коју смо дали у поглављу 1.5 је дефиниција неоријентисаног графа - гране смо посматрали као двочлане подскупове, а не као уређене парове облика (a, b), где су a и b различити чворови. Када бисмо усвојили ову другу конвенцију, могли бисмо грану ab да посматрамо као усмерену грану „од чвора a до чвора b".

Дефиниција 4.1. Оријентација графа $G = (V, E)$ је свако пресликавање $\mathcal{O} : E \longrightarrow \{(a, b) \mid a, b \in V\}$ где је за сваку грану ab испуњено $\mathcal{O}(ab) = (a, b)$, или $\mathcal{O}(ab) = (b, a)$.

Дефиниција 4.2. За оријентацију графа G кажемо да је ациклична уколико не садржи усмерене циклусе.

Ацикличне оријентације су у тесној вези са хроматском функцијом и хроматским полиномом графа.

Лема 4.3. $\chi_G(n)$ је заправо број уређених парова $(\sigma, \mathcal{O})$, где је $\sigma : V \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$, а $\mathcal{O}$ оријентација од G која је:

(а) ациклична

(б) уколико је $\mathcal{O}(uv) = (u, v)$, тада је $\sigma(u) > \sigma(v)$.

Доказ. Приметимо да испуњеност услова (б) даје да је пресликавање σ правилно бојење графа, али и да је оријентација $\mathcal{O}$ ациклична. Обратно, уколико је σ правилно бојење графа помоћу n боја, тада можемо увести јединствену оријентацију на гранама тако да је испоштован услов (б). □

Дефиниција 4.4. Сливник оријентисаног графа G је сваки чвор тог графа чија ниједна грана није оријентисана „од њега".

Приметимо да свака ациклична оријентација има бар један сливник јер бисмо иначе добили контрадикцију са условом коначности скупа чворова. Штавише, свака компонента повезаности графа мора садржати сливник у датој ацикличној оријентацији.

Посматрајмо неки формални степени ред $F(x) = F(x_1, x_2, \ldots)$ са пребројиво много променљивих и рационалним коефицијентима и означимо са $[x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \cdots x_{i_k}^{a_k}]F(x)$ коефицијент уз моном $x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \cdots x_{i_k}^{a_k}$ у F.

4.1 Простор квазисиметричних функција

Дефиниција 4.5. F је квазисиметрична ако је

$$[x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \cdots x_{i_k}^{a_k}]F = [x_{j_1}^{a_1} x_{j_2}^{a_2} \cdots x_{j_k}^{a_k}]F$$

кад год је $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$. Скуп свих хомогених квазисиметричних функција над $\mathbb{Q}$ степена d означавамо са $\mathcal{Q}_d$.

Јасно, симетричне функције су и квазисиметричне. Лако видимо и да је $\mathcal{Q}_d$ векторски простор над $\mathbb{Q}$ димензије 2^{d-1} (број различитих решења једначине $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = d$ за све k не веће од d).

За $n \in \mathbb{N}$, означимо са $[n]$ скуп $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ако нам је дат $S \subseteq [d-1]$, можемо дефинисати такозвану фундаменталну квазисиметричну функцију

$$Q_{S,d}(x) = \sum_{\substack{i_1 \leq \cdots \leq i_d \\ i_j < i_{j+1}, j \in S}} x_{i_1} \cdots x_{i_d}.$$

Скуп $\{Q_{S,d} \mid S \subseteq [d-1]\}$ је једна база за простор квазисиметричних функција степена d. Када је јасно шта је d, изостављамо га из ознаке и пишемо само Q_S.

У наставку ће нам бити неопходно линеарно пресликавање $\varphi : \mathcal{Q}_d \longrightarrow \mathbb{Q}[t]$ дефинисано на бази са:

$$\varphi(Q_S) = \begin{cases} t(t-1)^i, & \text{уколико је } S = \{i+1, \ldots, d-1\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Дефиниција 4.6. Уколико је $P = \{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$ парцијално уређен скуп, тада је његова хроматска функција дефинисана као

$$X_P = \sum_k x_{k(v_1)} x_{k(v_2)} \cdots x_{k(v_d)},$$

где је сумација извршена по свим строго растућим функцијама $k : P \longrightarrow \mathbb{N}$ (односно таквим да $u < v \implies k(u) < k(v)$).

Јасно, X_P је квазисиметрична функција.

Дефиниција 4.7. Уколико је P парцијално уређен скуп са d елемената, тада је линеарно продужење од P свака бијекција $\alpha : P \longrightarrow [d]$ која чува поредак.

Приметимо да сваки коначан парцијално уређен скуп има линеарно продужење (минималним елементима доделимо најмање индексе,...). Уколико је $\omega : P \longrightarrow [d]$ нека фиксирана бијекција која окреће поредак (односно линеарно продужење дуала P^* од P), тада за линеарно продужење α од P, можемо посматрати $(\omega(\alpha^{-1}(1)), \ldots, \omega(\alpha^{-1}(d))) = (a_1, \ldots, a_d)$ као пермутацију од $[d]$. Са $\mathcal{L}(P, \omega)$ означавамо скуп свих линеарних продужења од P, које посматрамо као пермутације од $[d]$ у односу на ω. Дефинишимо силазни скуп од линеарног продужења α (у односу на ω) као $D(\alpha) = \{j \mid a_j > a_{j+1}\}$.

Рецимо, уколико је $\omega = d + 1 - \alpha$, тада је ова пермутација $(d, \ldots, 1)$, а силазни скуп читаво $[d]$.

С обзиром на то да је X_P једна квазисиметрична функција, занима нас какав је развој од X_P у фундаменталној бази за $\mathcal{Q}$.

Лема 4.8. Уколико имамо парцијално уређен скуп P са d елемената и са линеарним продужењем дуала $\omega : P \longrightarrow [d]$, тада свака строго растућа функција $k : P \longrightarrow \mathbb{N}$ индукује јединствено линеарно продужење $\alpha : P \longrightarrow [d]$ такво да је

(а) $k(\alpha^{-1}(1)) \leq k(\alpha^{-1}(2)) \leq \cdots \leq k(\alpha^{-1}(d))$

(б) Ако је $\omega(\alpha^{-1}(i)) > \omega(\alpha^{-1}(i+1))$, тада је $k(\alpha^{-1}(i)) < k(\alpha^{-1}(i+1))$.

Доказ. Уколико са B_i означимо скуп свих елемената из P који се са k сликају у i, добијамо једну партицију скупа P на блокове $B_1, B_2, \ldots$. С обзиром на услов (а), видимо да је распоред блокова у датој пермутацији јединствено одређен. Да не бисмо нарушили услов (б), елементе унутар истог блока B_i (који су међусобно неупоредиви јер је k строго растућа) морамо сортирати у ω-растућем поретку. Стога, видимо да је пермутација која задовољава ова два услова јединствено оређена. $\square$

За α и k који задовољавају услов претходне леме кажемо да су компатибилни. Ако сада, за $\alpha \in \mathcal{L}(P, \omega)$ са X_α означимо $\sum_k x_{k(\alpha^{-1}(1))} x_{k(\alpha^{-1}(2))} \cdots x_{k(\alpha^{-1}(d))}$

где се сумација врши по свим строго растућим $k : P \longrightarrow [d]$ које су компатибилне са α, видимо да је $X_\alpha = Q_{D(\alpha)}$. Стога:

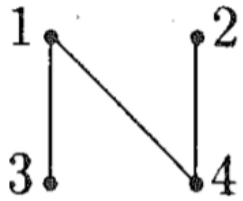
$$X_P = \sum_k x_{k(v_1)} x_{k(v_2)} \cdots x_{k(v_d)} = \sum_{\alpha \in \mathcal{L}(P,\omega)} \sum_{k \text{ компатибилно са } \alpha} x_{k(\alpha^{-1}(1))} x_{k(\alpha^{-1}(2))} \cdots x_{k(\alpha^{-1}(d))}$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathcal{L}(P,\omega)} X_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{L}(P,\omega)} Q_{D(\alpha)}.$$

Теорема 4.9. Ако је P парцијално уређен скуп са линеарним продужењем дуала ω, тада је:

$$X_P = \sum_{\alpha \in \mathcal{L}(P,\omega)} Q_{D(\alpha)}.$$

Пример: Ако је (P, ω) задато на следећем дијаграму, тада је $\mathcal{L}(P,\omega) = \{(3,4,1,2),(3,4,2,1),(4,3,1,2),(4,3,2,1),(4,2,3,1)\}$, док су силазни скупови ових пермутација редом $\{2\},\{2,3\},\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,3\}$.



Лема 4.10. Уколико је P парцијално уређен скуп са d елемената, тада је $\varphi(X_P) = t^m$, где је m број минималних елемената у P.

Доказ. Уколико је ω линеарно продужење дуала P^*, једини начин да добијемо пермутацију $(a_1, a_2, \ldots, a_d)$ која има силазни скуп $\{i+1, \ldots, d\}$ јесте следећи:

Одаберимо минимални елемент v тако да је $\omega(v)$ највеће. Изаберимо било којих i минималних елемената $u_1, \ldots, u_i$ различитих од v и излистајмо их у растућем поретку у односу на ω. Затим смештамо v, док преостале елементе распоређујемо у опадајућем поретку у односу на ω. Како постоји $\binom{m-1}{i}$ начина да одаберемо i минималних елемената различитих од v, то је

$$\varphi(X_P) = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} t(t-1)^i = t(t-1+1)^{m-1} = t^m.$$

$\square$

4.2 Сливници

Теорема 4.11. Уколико је

$$X_G = \sum_{\lambda \vdash |V|} c_\lambda e_\lambda$$

тада је

$$\operatorname{sink}(G, j) = \sum_{\substack{\lambda \vdash |V| \\ l(\lambda) = j}} c_\lambda,$$

где је $\operatorname{sink}(G, j)$ број ацикличних оријентација графа G са j сливника.

Доказ. Уколико је $\mathcal{O}$ ациклична оријентација, а k бојење, кажемо да је k $\mathcal{O}$-компатибилно уколико је $k(v) > k(u)$ кад год је $\mathcal{O}(uv) = (v, u)$. Већ смо видели да сваком бојењу одговара тачно једна ациклична оријентација, те уколико са K_G означимо скуп свих правилних бојења графа G, а са $K_{\mathcal{O}}$ скуп свих $\mathcal{O}$-компатибилних бојења од G, тада

$$K_G = \bigsqcup_{\mathcal{O} \text{ ациклична}} K_{\mathcal{O}}.$$

Стога, уколико са $X_{\mathcal{O}}$ означимо $\sum x^k$, где је сума по свим $\mathcal{O}$-компатибилним бојењима, имамо

$$X_G = \sum_{\mathcal{O} \text{ ациклична}} X_{\mathcal{O}}.$$

Означимо са $\overline{\mathcal{O}}$ транзитивно затворење релације $\mathcal{O}(E)$, односно пресек свих транзитивних релација које су веће од $\mathcal{O}(E)$. Како је $\mathcal{O}$ ациклична, то је $\overline{\mathcal{O}}$ парцијално уређење скупа V. По дефиницији хроматске функције за парцијално уређен скуп, имамо да је $X_{\mathcal{O}} = X_{\overline{\mathcal{O}}}$, те је

$$X_G = \sum_{\mathcal{O} \text{ ациклична}} X_{\overline{\mathcal{O}}}. \tag{4.1}$$

Приметимо да је број сливника ацикличне оријентације $\mathcal{O}$ заправо број минималних елемената од $\overline{\mathcal{O}}$. Стога, ако применимо φ на (4.1), претходна лема нам даје:

$$\varphi(X_G) = \sum_j \operatorname{sink}(G, j) t^j.$$

Израчунајмо сада $\varphi(e_\lambda)$: дефинишимо посет P_λ као дисјунктну унију $l(\lambda)$ ланаца са $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ елемената. Очигледно, $X_{P_\lambda} = e_\lambda$, те је по претходној леми

$\varphi(e_\lambda) = t^{l(\lambda)}$. Из развоја за X_G преко e_λ и претходне формуле, добијамо

$$\sum_\lambda c_\lambda t^{l(\lambda)} = \sum_j \operatorname{sink}(G, j) t^j.$$

Изједначавањем коефицијената уз t^j, добијамо тврђење. □

Последица 4.12. Уколико је $G = (V, E)$ граф са N ацикличних оријентација, тада је $\chi_G(-1) = (-1)^{|V|} N$.

Доказ. Приметимо да је $e_\lambda(1^n) = \binom{n}{\lambda_1}\binom{n}{\lambda_2}\dots$ По ставу 3.2, имамо да је

$$\chi_G(n) = \sum_{\lambda \vdash |V|} c_\lambda \binom{n}{\lambda_1}\binom{n}{\lambda_2}\cdots. \tag{4.2}$$

Уколико сместимо $n = -1$ у претходну формулу и искористимо чињеницу да је $\binom{-1}{j} = (-1)^j$, добијамо

$$\chi_G(-1) = (-1)^{|V|} \sum_{\lambda \vdash |V|} c_\lambda.$$

Међутим, претходна теорема нам даје да је сума $\sum_\lambda c_\lambda$ једнака броју ацикличних оријентација графа G. □

Уколико је $P(n)$ неки полином, означимо са $[n^k]P(n)$ коефицијент уз n^k у $P(n)$.

Последица 4.13. Број ацикличних оријентација графа $G = (V, E)$ са јединственим сливником једнак је $(-1)^{|V|-1}|V|[n]\chi_G(n)$.

Доказ. Број ацикличних оријентација са тачно једним сливником је заправо $\operatorname{sink}(G, 1)$. На основу формуле (4.2), имамо

$$\chi_G(n) = \sum_{\lambda \vdash |V|} c_\lambda \binom{n}{\lambda_1}\binom{n}{\lambda_2}\cdots.$$

Уколико је $l(\lambda) \geq 2$, тада је полином $\binom{n}{\lambda_1}\binom{n}{\lambda_2}\dots$ дељив са n^2, те је по теореми 4.11, за $j = 1$:

$$[n]\chi_G(n) = c_{(|V|)}[n]\binom{n}{|V|} = \operatorname{sink}(G, 1)[n]\binom{n}{|V|} = \operatorname{sink}(G, 1)\frac{(-1)^{|V|-1}}{|V|}.$$

Множењем леве и десне стране претходне једнакости са $|V|(-1)^{|V|-1}$ завршавамо доказ. □

С обзиром на то да у графу који је неповезан не можемо имати ациклична оријентацију са само једним сливником, директно добијамо да је у хроматском полиному неповезаног графа коефицијент уз линеарни члан једнак нули.

Испоставља се да хроматска функција графа не мора бити е-позитивна, односно коефицијенти c_λ у развоју X_G у бази елементарних симетричних функција могу бити и негативни. Најмањи пример таквог графа јесте такозвана „канџа", односно бипартитни граф $K_{1,3}$ за који је

$$X_G = e_4 + 5e_{3,1} - 2e_{2,2} + e_{2,1,1}.$$

О овој тематици биће више речи у поглављу 7.

Назовимо партицију $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ неког природног броја $r \leq |V|$ допустивом у односу на граф $G = (V, E)$ уколико постоји стабилна партиција неког скупа $W \subseteq V$ која је типа μ. На скупу свих допустивих партиција уводимо природно уређење као у дефиницији 1.2. За партицију $\mu \vdash r$ кажемо да је максимална уколико је максимална у односу на природно уређење свих допустивих партиција од r.

Уколико је дата ациклична оријентација $\mathcal{O}$ графа G, можемо дефинисати низ сливника $ss(\mathcal{O}) = (s_1, s_2, \ldots, s_j)$ на следећи начин: s_1 је број сливника у $\mathcal{O}$. Када из G уклонимо све сливнике, заједно са свим њиховим гранама, добијамо нови граф са s_2 сливника. Процедуру понављамо док не дођемо до графа чија је свака компонента повезаности једночлана (па и тривијални сливник) и то је број s_j. Приметимо да, уколико елементе од $ss(\mathcal{O})$ испишемо у опадајућем поретку, добијамо допустиву партицију од $|V|$ јер никоја два сливника не могу бити суседна.

Уколико је P парцијално уређен коначан скуп, можемо му доделити ациклично оријентисан граф у ком су чворови елементи скупа P, а грана (v, u) уколико је $u < v$. Стога, $ss(P)$ је и у овом случају добро дефинисано.

Уколико је μ партиција, дефинишемо хомоморфизам $\varphi_\mu : \mathcal{Q}_d \longrightarrow \mathbb{Q}[t]$, који је задат на фундаменталној бази са:

$$\varphi_\mu(Q_S) = \begin{cases} t(t-1)^i, & \text{уколико је } S = \{\mu_1, \ldots, \mu_l, \mu_l + i + 1, \ldots, d-1\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

За доказ главне теореме овог поглавља, биће нам неопходан аналогон леме 4.10 за модификоване φ_μ хомоморфизме:

Лема 4.14. Нека је P парцијално уређен скуп са d елемената и $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ партиција дужине l.

Уколико је $ss(P) = (\mu_1, \ldots, \mu_l, m, \ldots)$, тада је $\varphi_\mu(X_P) = t^m$.

Уколико је $ss(P) = (v_1, v_2, \ldots)$, тако да је за неко i испуњено $v_1 + \cdots + v_i < \mu_1 + \cdots + \mu_i$, тада је $\varphi_\mu(X_P) = 0$.

Доказ. Нека је $\omega : P \longrightarrow [d]$ неко линеарно продужење дуала P^*. Ако је $ss(P) = (\mu_1, \ldots, \mu_l, m, \ldots)$, једини начин да добијемо линеарно продужење α од P које има опадајући скуп $\{\mu_1, \ldots, \mu_l, \mu_l + i + 1, \ldots, d - 1\}$ је следећи: излистамо μ_1 минималних елемената од P у растућем поретку у односу на ω. Затим, излистамо μ_2 следећих минималних елемената у растућем поретку у односу на ω. Поступак настављамо док не излистамо $\mu_1 + \cdots + \mu_l$ елемената од P на овај начин. Нека је v минимални елемент преосталог дела са највећим $\omega(v)$. Изаберимо произвољних i минималних елемената $u_1, \ldots, u_i$ различитих од v и излистајмо их у растућем поретку у односу на ω. Након тога, у низ смештамо v, па преостале елементе у опадајућем поретку у односу на ω. Како постоји $\binom{m-1}{i}$ одабира i минималних елемената различитих од v, добијамо $\varphi_\mu(X_P) = t^m$ као у доказу леме 4.10.

Даље, уколико претпоставимо да је $ss(P) = (v_1, v_2, \ldots)$, где је $v_1 + \cdots + v_i < \mu_1 + \cdots + \mu_i$ за неко i, тада очигледно не можемо конструисати линеарно продужење α од P које би имало опадајући скуп S за који је $\varphi_\mu(Q_S)$ нетривијално. □

Теорема 4.15. Нека је $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ максимална партиција од $r \leq |V|$ дужине l и нека је $X_G = \sum c_\lambda e_\lambda$. За $j \in \{0, \ldots, |V| - r\}$, број ацикличних оријентација $\mathcal{O}$ од G за које низ сливника $ss(\mathcal{O})$ има облик $(\mu_1, \ldots, \mu_l, j, \ldots)$, у ознаци $\mathrm{sink}(G, \mu, j)$ једнак је:

$$\mathrm{sink}(G, \mu, j) = \sum_\lambda c_\lambda,$$

где се сумација врши по свим партицијама $\lambda \vdash |V|$ чији конјугат λ' задовољава

$$\lambda'_1 = \mu_1,\ \lambda'_2 = \mu_2,\ \ldots,\ \lambda'_l = \mu_l,\ \lambda'_{l+1} = j.$$

Доказ. Како је μ максимална, знамо да не може постојати ациклична оријентација $\mathcal{O}$ са $ss(\mathcal{O}) = (v_1, v_2, \ldots)$ за коју је

(а) $v_1 + \cdots + v_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i$ за свако $i \in [l]$

(б) $v_1 + \cdots + v_i > \mu_1 + \cdots + \mu_i$ за неко $i \in [l]$.

Стога, или је $ss(\mathcal{O}) = (\mu_1, \ldots, \mu_l, m, \ldots)$, када је $\varphi_\mu(X_{\overline{\mathcal{O}}}) = t^m$, или је $ss(\mathcal{O}) = (v_1, v_2, \ldots)$, где је $v_1 + \ldots + v_i < \mu_1 + \ldots + \mu_i$ за неко $i \in [l]$, када је

$\varphi_\mu(X_{\overline{\mathcal{O}}}) = 0$. Дакле, ако применимо φ_μ на везу:

$$X_G = \sum_{\mathcal{O} \text{ ациклична}} X_{\overline{\mathcal{O}}}$$

добијамо

$$\varphi_\mu(X_G) = \sum_j \operatorname{sink}(G, \mu, j) t^j.$$

Сада желимо да израчунамо $\varphi_\mu(e_\lambda)$ за $\lambda \vdash |V|$. На основу става 1.8, e_λ су изражене преко m_λ путем горњетроугаоне матрице. Нека је, као и иначе, $X_G = \sum c_\lambda e_\lambda$.

Ако неко λ задовољава

(а) $c_\lambda \neq 0$

(б) $\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i$ за свако $i \in [l]$

(в) $\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_i > \mu_1 + \cdots + \mu_i$ за свако $i \in [l]$,

тада бисмо такође имали $a_\lambda \neq 0$ (развој из последице 3.5), што је у контрадикцији са максималношћу партиције μ. Стога, λ' може бити облика $(\mu_1, \ldots, \mu_l, \ldots)$, или $(v_1, v_2, \ldots)$, где је за неко $i \in [l]$ испуњено $v_1 + \cdots + v_i < \mu_1 + \cdots + \mu_i$.

Нека је P_λ као у доказу теореме 4.9. На основу претходног разматрања, имамо да је

$$\varphi_\mu(P_\lambda) = \begin{cases} t^m, & \text{уколико је } \lambda' = \{\mu_1, \ldots, \mu_l, m, \ldots\} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Сада је

$$\sum c_\lambda t^m = \varphi_\mu(X_G) = \sum_j \operatorname{sink}(G, \mu, j) t^j,$$

где је прва сума по свим партицијама $\lambda \vdash |V|$ за које је $\lambda' = (\mu_1, \ldots, \mu_l, m, \ldots)$. Узимањем коефицијената уз t^j са обе стране претходне једнакости завршавамо доказ.

$\square$

Глава 5

Разбијени циклуси

Дефиниција 5.1. Ако је $G = (V, E)$ граф са q грана, тада је означавање графа G свака бијекција $\alpha : E \longrightarrow \{1, 2, \ldots, q\}$.

Приметимо да сваки циклус у графу G можемо идентификовати са скупом грана које се у њему појављују.

Дефиниција 5.2. Ако је $G = (V, E)$ граф и α његово означавање, тада под сломљеним циклусом C подразумевамо циклус C графа G чија је највећа грана (у односу на означавање α) уклоњена. Комплекс сломљених циклуса у односу на означавање α, у ознаци B_G, јесте скуп свих подскупова грана графа G који не садрже сломљени циклус

На скупу свих циклуса графа G са означавањем грана α можемо увести строго уређење на следећи начин: за два циклуса C_1 и C_2 пишемо да је $C_1 < C_2$ уколико је испуњено $\max\{\alpha(e) \mid e \in C_1\} < \max\{\alpha(e) \mid e \in C_2\}$.

Теорема 5.3.

$$\chi_G(n) = \sum_{S \in B_G} (-1)^{|S|} n^{|V|-|S|}$$

Доказ. Претпоставимо да у G имамо σ сломљених циклуса $C_1, C_2, \ldots, C_\sigma$ који су поређани у неопадајући низ у односу на означавање α гране коју смо избацили да бисмо добили дати сломљени циклус. Поделићемо подграфове од $G = (V, E)$ који су облика (V, S) за $S \subseteq E$ на $\sigma + 1$ подскупова на следећи начин: у први скуп S_1 смештамо све подграфове који садрже све гране од C_1; у други скуп S_2 смештамо све подграфове који не садрже C_1, али садрже C_2; $\ldots$; у претпоследњи S_σ смештамо све подграфове који не садрже $C_1, C_2, \ldots, C_{\sigma-1}$,

али садрже C_σ, док у последњи скуп $S_{\sigma+1}$ смештамо све подграфове који не садрже ниједан сломљени циклус. Став 2.8 нам даје

$$\chi_G(n) = \sum_{S \subseteq E} (-1)^{|S|} n^{c(S)}. \tag{5.1}$$

Нека је e_1 грана која је избачена да би се добио разбијени циклус C_1. Видимо да сваком подграфу у S_1 који не садржи e_1 одговара јединствен подграф из S_1 добијен додавањем гране e_1 и обратно. Стога, изрази који одговарају овим подграфовима у претходној суми су супротних знакова, али истих степена n јер је e_1 грана која спаја два чвора која се налазе на сломљеном циклусу C_1, те се број компоненти повезаности не мења додавањем e_1. Дакле, изрази који одговарају подграфовима из S_1 се анулирају.

Размотримо сада сабирке који одговарају подграфовима из S_2: ако је e_2 грана која је избачена да би се добио C_2, тада се e_2 не налази ни у C_1, ни у C_2. Стога, сваком подграфу из S_2 који не садржи грану e_2 одговара јединствен подграф из S_2 који је садржи и обратно. Аналогно као малопре, они су у (5.1) супротних знакова, те се и изрази који одговарају S_2 анулирају.

Настављајући претходни поступак, видимо да се сви сабирци који одговарају подграфовима из $S_3, \ldots, S_\sigma$ анулирају. Стога, остају само они који кореспондирају скупу $S_{\sigma+1}$, односно они који не садрже ниједан сломљени циклус.

Посматрајмо један израз у (5.1) који одговара скупу $S \in S_{\sigma+1}$. Дати граф не садржи ниједан циклус, јер би иначе садржао и сломљени циклус. Стога, дати граф је шума, те је број компоненти повезаности једнак $|V| - |S|$. Сумирањем свих ових израза, добијамо

$$\chi_G(n) = \sum_{S \in S_{\sigma+1}} (-1)^{|S|} n^{|V|-|S|} = \sum_{S \in B_G} (-1)^{|S|} n^{|V|-|S|}.$$

□

Желимо, као и у претходним поглављима, да пронађемо одговарајућа аналогна тврђења која се тичу хроматске функције у односу на дати комбинаторни објекат. Приметимо да као директну последицу следеће теореме (за аргумент 1^n) добијамо претходну, али с обзиром на то да ћемо у доказу морати да користимо формулацију претходне теореме, морали смо и независно да је докажемо.

Теорема 5.4.

$$X_G = \sum_{S \in B_G} (-1)^{|S|} p_{\lambda(S)}$$

Доказ. Нека је $\pi \in L_G$ ранга k. Нека је G_π граф (V, E_π), где је $E_\pi = \{uv \mid uv$ је грана у графу G и чворови u и v су у истом блоку од $\pi\}$. Стога, мрежа контракције L_{G_π} је изоморфна сегменту $[0, \pi]$ мреже L_G. По ставу 2.9, имамо

$$\chi_{G_\pi}(n) = \sum_{\sigma \in L_{G_\pi}} \mu(0, \sigma) n^{|\sigma|},$$

док по претходној теореми

$$\chi_{G_\pi}(n) = \sum_{S \in B_{G_\pi}} (-1)^{|S|} n^{|V|-|S|}.$$

Упоређивањем коефицијената уз $n^{|\pi|}$, видимо да је $(-1)^k \mu(0, \pi)$ једнако броју k-елементних подскупова $S \subseteq E_\pi$ који не садрже разбијене циклусе. Приметимо да је граф (V, S) шума са $|V| - k = |\pi|$ компонената повезаности. Међутим, како је свака компонента повезаности ове шуме подскуп неког блока од π којих укупно има $|\pi|$, видимо да су компоненте повезаности ове шуме баш блокови од π. Важи и обратно - сваком $S \in B_G$ одговара тачно једна партиција $\pi \in L_G$ у складу са претходним разматрањем. За $\pi \in L_G$, означимо са A_π скуп свих $S \in B_G$ које јој одговарају. Имамо

$$B_G = \bigsqcup_{\pi \in L_G} A_\pi.$$

По теореми 3.12, коначно је

$$X_G = \sum_{\pi \in L_G} \mu(0, \pi) p_{\mathrm{type}(\pi)} = \sum_{\pi \in L_G} (-1)^{|V|-|\pi|} |A_\pi| p_{\mathrm{type}(\pi)} = \sum_{S \in B_G} (-1)^{|S|} p_{\lambda(S)}.$$

□

Последица 5.5. Нека је α означавање графа $G = (V, E)$ и нека је $\nu \vdash |V|$. Број подскупова $S \subseteq E$ који не садрже разбијени циклус у односу на означавање α и за које је $\lambda(S) = \nu$ не зависи од α.

Доказ. По претходној теореми, тај број је једнак $(-1)^{|S|}$ пута коефицијент уз p_ν у развоју од X_G. □

Глава 6

Реципроцитет

Приметимо да смо у глави 4 свако бојење графа посматрали као строго растућу функцију на посету који је индукован неком ацикличном оријентацијом датог графа. Шта се дешава уколико посматрамо функције које су (нестрого) растуће?

Дефиниција 6.1. Нека је G граф. Тада је модификована хроматска функција графа G дефинисана као

$$\overline{X}_G = \sum_{(\mathcal{O},k)} x^k,$$

где се сумација врши по свим ацикличним оријентацијама $\mathcal{O}$ и бојењима k за које је $k(u) \leq k(v)$ кад год је (v, u) грана од $\mathcal{O}$.

Лема 6.2. Уколико имамо парцијално уређен скуп P са d елемената и са линеарним продужењем дуала $\omega : P \longrightarrow [d]$, тада свака растућа функција $k : P \longrightarrow \mathbb{N}$ индукује јединствено линеарно продужење $\alpha : P \longrightarrow [d]$ такво да је

(а) $k(\alpha^{-1}(1)) \leq k(\alpha^{-1}(2)) \leq \cdots \leq k(\alpha^{-1}(d))$

(б) Ако је $\omega(\alpha^{-1}(i)) \leq \omega(\alpha^{-1}(i+1))$, тада је $k(\alpha^{-1}(i)) < k(\alpha^{-1}(i+1))$.

Доказ. Аналогно као у леми 4.8, посматраћемо блокове скупа P на којима је k константна. С обзиром на услов (а), распоред блокова је једнозначно одређен. Како не бисмо нарушили услов (б), неопходно је да елементе унутар истог блока распоредимо у ω-опадајући низ. Приметимо да је оваква пермутација заиста линеарно продужење с обзиром на то да је k растућа, а ω линеарно продужење дуала, па чак и ако су у истом блоку елементи a и b за које је

$a \leq b$ у P (овде елементи истог блока не морају бити међусобно неупоредиви јер k није строго растућа), исто то ће важити и након пермутовања. $\square$

Приметимо сличност ове леме са лемом (4.8), уз малу модификацију услова (б), која је ту како бисмо обезбедили да у овом случају $i \notin D(\alpha) \iff i \in \overline{D(\alpha)}$. Кажемо да су растућа функција k и линеарно продужење α компатибилни уколико задовољавају услове (а) и (б) претходне леме.

Теорема 6.3. Ако је ω стандардна инволуција на простору симетричних функција, тада је $\omega X_G = \overline{X}_G$.

Доказ. Дефинишимо за парцијално уређен скуп P са d елемената функцију

$$\overline{X}_P = \sum_k x^k,$$

где се сумација врши по свим растућим функцијама $k : P \longrightarrow \mathbb{N}$ (односно таквим да је $k(u) \leq k(v)$ кад год је $u \leq v$). На простору свих квазисиметричних функција степена d природно се уводи линеарни аутоморфизам ω' задат на бази са:

$$\omega'(Q_S) = Q_{\overline{S}}$$

где је $\overline{S} = [d-1] \setminus S$. Желимо да нађемо везу између X_P и $\overline{X}_P$. С обзиром на то да је аутоморфизам ω' задат на фундаменталној бази простора квазисиметричних функција, нађимо развој за $\overline{X}_P$:

Уколико је $\alpha \in \mathcal{L}(P, \omega)$, означимо са $X_\alpha = \sum_k x^k$, где се сумација врши по свим растућим функцијама k које су компатибилне са α (у складу са дискусијом након леме 6.2). Очигледно, $X_\alpha = Q_{\overline{D(\alpha)}}$, па је

$$\overline{X}_P = \sum_k x^k = \sum_{\alpha \in \mathcal{L}(P,\omega)} \sum_{k \text{ компатибилно са } \alpha} x^k = \sum_{\alpha \in \mathcal{L}(P,\omega)} X_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathcal{L}(P,\omega)} Q_{\overline{D(\alpha)}}.$$

Стога, ако применимо ω' на развој из теореме 4.9, добијамо

$$\omega'(X_P) = \omega'(\sum_{\alpha \in \mathcal{L}(P,\omega)} Q_{D(\alpha)}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{L}(P,\omega)} \omega'(Q_{D(\alpha)}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{L}(P,\omega)} Q_{\overline{D(\alpha)}} = \overline{X}_P.$$

Специјално, уколико је $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ нека партиција, а P_λ парцијално уређен скуп који се састоји од дисјунктних ланаца дужине λ_1, λ_2, $\ldots$, тада је $X_{P_\lambda} = e_\lambda$, а $\overline{X}_{P_\lambda} = h_\lambda$. Стога, пресликавање ω' можемо доживети као

продужење пресликавања ω (па га у наставку тако и означавамо). Дакле, уколико применимо ω на везу дату формулом (4.1):

$$X_G = \sum_{\mathcal{O} \text{ ациклична}} X_{\overline{\mathcal{O}}}$$

добијамо

$$\omega(X_G) = \sum_{\mathcal{O} \text{ ациклична}} \omega(X_{\overline{\mathcal{O}}}) = \sum_{\mathcal{O} \text{ ациклична}} \overline{X}_{\overline{\mathcal{O}}} = \sum_{\mathcal{O} \text{ ациклична}} \sum_{k} x^k,$$

где се сумација врши по свим $\mathcal{O}$-растућим $k : V \longrightarrow \mathbb{N}$. Десна страна једнакости је баш $\overline{X}_G$. $\square$

Како је ω инволуција, одмах добијамо да важи и обратно:

Последица 6.4. За сваки граф G важи $\omega\overline{X}_G = X_G$.

Глава 7

Позитивност

Као што смо и видели у досадашњем излагању, коефицијенти у развоју хроматске функције графа у природним базама векторског простора Λ могу имати различите комбинаторне интерпретације. Баш због тога је често питање у алгебарској комбинаторици ненегативност ових коефицијената. Из последице 3.14 и теореме 6.3 добијамо:

Последица 7.1. Модификована хроматска функција $\overline{X}_G$ је p-позитивна.

Већ смо напоменули да хроматска функција произвољног графа не мора бити e-позитивна. Најмањи такав пример је управо комплетан бипартитни граф $K_{1,3}$, односно „канџа".

Дефиниција 7.2. Ако је P коначан посет, тада је његов граф неупоредивости, у ознаци $\mathrm{inc}(P)$, граф са скупом чворова P, где су два $u, v \in P$ спојена граном акко су неупоредиви у посету P.

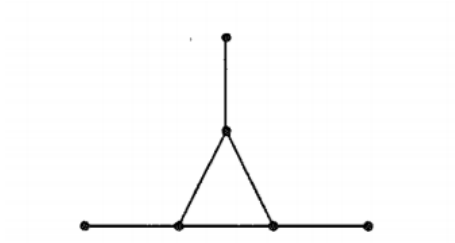
Приметимо да је „канџа" заправо граф неупоредивости четвороелементног посета који се састоји од два дисјунктна неупоредива ланца дужина 1 и 3.

Дефиниција 7.3. За посет кажемо да је $(a+b)$-слободан уколико не садржи индуковани потпосет који је изоморфан са унијом два дисјунктна неупоредива ланца дужина a и b.

Стенли и Стембриџ 1993. године постављају следећу хипотезу, чија је валидност за сада проверена на свим посетима са не више од 8 елемената:

Хипотеза 7.4. Ако је посет P $(3+1)$-слободан, тада је $\mathrm{inc}(P)$ e-позитиван.

Природно се поставља питање да ли је импликација у претходној хипотези заправо еквиваленција. Другим речима, можемо се запитати да ли сваки граф који не садржи $K_{1,3}$ као индуковани подграф мора бити e-позитиван. Нажалост, одговор је негативан:



Са друге стране, граф $K_{1,3}$ је очигледни минор претходног графа. Још увек није пронађен граф који није e-позитиван и не садржи $K_{1,3}$ минор.

Добро је познато да је за сваку партицију λ, функција e_λ s-позитивна (обрат, нажалост, не важи). Стога, из e-позитивности неке симетричне функције директно добијамо и њену s-позитивност. Слабији резултат хипотезе 7.4 је доказао Гашаров:

Теорема 7.5. (Гашаров [10]) Ако је посет P $(3+1)$-слободан, тада је $\mathrm{inc}(P)$ s-позитиван.

Дефиниција 7.6. За граф G са d чворова кажемо да је добар уколико за сваку $\lambda \vdash d$ за коју постоји стабилна партиција графа G типа λ и за сваку партицију $\mu \leq \lambda$ постоји стабилна партиција графа G типа μ.

Став 7.7. Ако је граф G s-позитиван, тада је и добар.

Доказ. G поседује стабилну партицију типа μ акко је коефицијент у развоју X_G у бази мономијалних симетричних функција уз m_μ ненегативан. Из доказа става 1.15, знамо да је коефицијент уз m_μ у развоју за s_λ ненула ако и само ако је $\mu \leq \lambda$. □

Директном применом претходног става, добијамо резултат:

Последица 7.8. Ако је G бипартитни граф са d чворова који садржи чвор v са више од $\lceil \frac{d}{2} \rceil$ суседа, тада G није s-позитиван.

Доказ. Како је G бипартитни, постоји партиција од G на независне скупове чворова (V_1, V_2) и нека је то партиција типа $(m, d-m)$. Уколико претпоставимо да чвор $v \in V_2$, добијамо да $m > \lceil \frac{d}{2} \rceil$.

Како сви суседи чвора v морају бити у истој партицији, то G не садржи стабилну партицију типа $(\lceil \frac{d}{2} \rceil, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor) \leq (m, d-m)$. $\square$

Следећа последица је мали „доказ" валидности хипотезе 7.4:

Последица 7.9. Граф G и сви његови индуковани подграфови су добри ако и само ако G не садржи индуковани пограф изоморфан са $K_{1,3}$.

Доказ. Како $K_{1,3}$ није добар, јер садржи стабилну партицију типа $(3,1)$, а не садржи стабилну партицију типа $(2,2)$, то директни смер добијамо одмах.

Да бисмо доказали обратни смер, приметимо да је довољно да докажемо да ако постоји стабилна партиција типа λ и λ наткрива μ, онда постоји и стабилна партиција типа μ. Очигледно, μ је добијено од λ одузимањем 1 од неког дела λ_i партиције λ и додавањем 1 неком другом делу $\lambda_j \leq \lambda_i - 2$. Нека је π стабилна партиција од G типа λ и A и B блокови кардиналности λ_i и λ_j респективно. Граф $G[A \cup B]$ је бипартитни, а како је G такав да не садржи индуковани подграф изоморфан са $K_{1,3}$, то је сваки чвор у $G[A \cup B]$ степена највише 2, те је $G[A \cup B]$ заправо унија путева и циклуса. Како је $|A| > |B|$, то постоји пут P (можда и једночлан) који почиње и завршава се у A. Стабилну партицију типа μ добијамо ако блокове A и B у π заменимо блоковима $(A - P) \cup (B \cap P)$ и $(A \cap P) \cup (B - P)$. $\square$

Техником комбинаторних Хопфових алгебри, могуће је доказати:

Теорема 7.10. (Волфганг [11]) Ако је повезан граф G који има d чворова e-позитиван, тада за сваку партицију $\lambda \vdash d$ постоји повезана партиција од G која је типа λ.

Користећи претходну теорему, „врло лако" можемо проверити да неки граф није e-позитиван - довољно је наћи партицију λ од $|V|$ за коју не постоји повезана партиција тог графа типа λ. За партиције типа $(2, 2, \ldots, 2)$, односно $(2, 2, \ldots, 2, 1)$, добијамо:

Последица 7.11. Нека је G повезан граф са d чворова. Ако G нема савршено упаривање (за d парно), односно скоро-савршено упаривање (за d непарно), тада G није e-позитиван.

Ако се присетимо теорема доказаних у глави 4, лако долазимо и до следећих занимљивих резултата:

Последица 7.12. Уколико је μ максимална партиција од $|V|$ у односу на граф $G = (V, E)$, а $X_G = \sum c_\lambda e_\lambda$, тада је $c_{\mu'} > 0$.

Доказ. Уколико применимо теорему 4.15 за $j = 0$, добијамо

$$\mathrm{sink}(G, \mu, 0) = c_{\mu'}.$$

Како је μ максимална допустива, то постоји ациклична оријентација $\mathcal{O}$ са $ss(\mathcal{O}) = \mu$, те је величина са леве стране позитивна (чворовима који одговарају блоку μ_i доделимо боју индекса i и посматрамо оријентацију индуковану тим бојењем). □

Последица 7.13. Ако за скуп чворова V графа G постоји партиција $V = A \sqcup B$ таква да су $G[A]$ и $G[B]$ комплетни графови (еквивалентно, уколико је $\overline{G}$ бипартитни граф), тада је за свако λ коефицијент c_λ у развоју $X_G = \sum c_\lambda e_\lambda$ ненегативан.

Доказ. Допустиве партиције од G су облика $\lambda = (1^a 2^b)$, где је $a + 2b = d$. Стога, уколико је (2^b) допустива, тада је и максимална.

Ако је $a > 0$, изаберимо $\mu = (2^b)$ и $j = 1$. Ако је $a = 0$, изаберимо $\mu = (2^b)$ и $j = 0$. Када ово сместимо у резултат из теореме 4.15, видимо да је једина партиција која се појављује у суми са десне стране баш λ. Стога, $c_\lambda \geq 0$.

□

7.1 Специјални графови

1. Комплетни графови

Уколико посматрамо комплетан граф са n чворова K_n (односно граф са n чворова и свим могућим гранама), примећујемо да све боје у правилном бојењу тог графа морају бити међусобно различите. Како за фиксираних n боја, постоји $n!$ различитих начина да се обоје чворови графа K_n, лако закључујемо

$$X_{K_n} = n! e_n.$$

Одавде директно следи да је сваки граф K_n један e-позитиван граф.

2. Путеви

Под путем P_n (за $n \geq 2$) подразумевамо стабло од n чворова од којих су $n-2$ степена 2, а 2 степена 1. Сам Стенли је сматрао да ни графови, па чак ни стабла, не поштују никакав шаблон, или правило, по ком бисмо аутоматски знали да су неки од њих e-позитивни. Међутим, испоставља се да сви путеви јесу e-позитивни:

Лема 7.14.

$$\sum_{d\geq 0} X_{P_d} t^d = \frac{\sum_{i\geq 0} e_i t^i}{1 - \sum_{i\geq 1}(i-1)e_i t^i}$$

Доказ. Нека P_d има скуп чворова $V = \{v_1, \ldots, v_d\}$ са гранама $v_i v_{i+1}$ за $1 \leq i \leq d-1$. Фиксирајмо $n \in \mathbb{N}$ и нека је $X_d^i = \sum_k x^k$, где се сумација врши по свим правилним бојењима $k : V \longrightarrow [n]$ таквим да је $k(v_d) = i$. Нека је

$$F^i(t) = \sum_{d\geq 1} X_d^i t^d.$$

Јасно, за $1 \leq i \leq n$ је:

$$F^i(t) = x_i t + \sum_{j\neq i} F^j(t) x_i t,$$

где први сабирак потиче од пута P_1, док је сума добијена од правилног бојења пута P_{d-1} за $d \geq 2$, додавањем крајњег чвора и бојењем истог у боју i.

Решавајући претходни систем од n линеарних једначина по n непознатих $F^1(t), \ldots, F^n(t)$ (рецимо Крамеровим правилом), добијамо

$$F^j(t) = \frac{x_j \sum_{i\geq 0} e_i(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_n) t^{i+1}}{1 - \sum_{i\geq 1}(i-1)e_i(x_1, \ldots, x_n) t^i},$$

где ознака $\hat{x}_j$ значи да изостављамо променљиву x_j. Сада је

$$\sum_{d\geq 0} X_{P_d}(x_1, \ldots, x_n) t^d = 1 + \sum_{j=1}^{n} F^j(t) = \frac{\sum_{i\geq 0} e_i(x_1, \ldots, x_n) t^i}{1 - \sum_{i\geq 1}(i-1)e_i(x_1, \ldots, x_n) t^i}.$$

Уколико пустимо да $n \to \infty$, добијамо баш оно што треба. □

Теорема 7.15. Сваки пут P_d је e-позитиван.

Доказ. Развојем десне стране једнакости из претходне леме добијамо

$$\sum_{d\geq 0} X_{P_d} t^d = \sum_{i\geq 0} e_i t^i \sum_{j\geq 0} (\sum_{i\geq 1} (i-1) e_i t^i)^j.$$

Како су сви коефицијенти уз степене t са десне стране ненегативни, упоређивањем коефицијената уз t^d леве и десне стране добијамо тражени резултат. □

3. Циклуси

Иако смо у уводном разматрању за дефиницију графа узели појам графа који је без вишеструких грана и без петљи, смислено је посматрати циклус од једног чвора C_1 као петљу у том чвору, односно циклус од два чвора C_2 као дуплу грану између тих чворова. Како је у првом случају хроматска функција очигледно 0, док је други случај са становишта хроматске функције изоморфан путу P_2, закључујемо да C_1 и C_2 јесу e-позитивни.

Слично као код путева, можемо доказати да је и произвољан циклус C_d такође e-позитиван граф:

Лема 7.16.

$$\sum_{d\geq 2} X_{C_d} t^d = \frac{\sum_{i\geq 0} i(i-1)e_i t^i}{1-\sum_{i\geq 1}(i-1)e_i t^i}$$

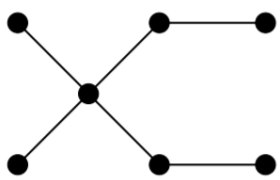
Развојем израза са десне стране једнакости из претходне леме, добијамо и:

Теорема 7.17. Сваки циклус C_d је e-позитиван.

4. Паукови

Уколико је $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \vdash n-1$, где је $d \geq 3$, под пауком $S(\lambda)$ подразумевамо стабло од n чворова које се састоји од d дисјунктних путева $P_{\lambda_1}, \ldots, P_{\lambda_d}$ (које називамо ногама) и чвора (који називамо центар) који је суседан са тачно једним листом сваког пута. Под i-том ногом паука $S(\lambda)$ за $1 \leq i \leq d$ подразумевамо ногу са λ_i чворова и те чворове обележавамо са $s_{i,1}, \ldots, s_{i,\lambda_i}$, где је $s_{i,1}$ чвор повезан са центром.

Пример: Паук $S(2,2,1,1)$:



Разлог због ког је математичарима занимљиво да изучавају e-позитивност паукова је тај што нам наредне две леме омогућавају да проучавање e-позитивности повезаних графова сведемо баш на паукове:

Лема 7.18. Нека је T стабло са чвором v степена $d \geq 3$ и $(t_1, \ldots, t_d)$ партиција чији делови одговарају величинама компонената повезаности $(T_1, \ldots, T_d)$ од $T \setminus v$. Уколико T има повезану партицију типа μ, тада и $S = S(t_1, \ldots, t_d)$ има повезану партицију типа μ.

Доказ. Нека је $C = \{V_1, \ldots, V_k\}$ повезана партиција од T која је типа μ. Без умањења општости, нека је $v \in V_1$. Како је T стабло, не постоји подскуп у C (осим, наравно V_1) који садржи чворове из две различите компоненте повезаности од $T \setminus v$. Стога, нека V_1 садржи по n_i чворова из подстабла T_i за $1 \leq i \leq d$ и нека се у $\mathcal{T}_i \subset C$ налазе сви скупови из партиције C који садрже само чворове из подстабла T_i. Приметимо да $\mathcal{T}_i$ садржи $t_i - n_i$ чворова.

Конструишимо повезану партицију $\{W_1, \ldots, W_k\}$ паука S типа μ. Нека је $W_1 = \{v\} \cup \{s_{i,j} \mid 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n_i\}$, где је v центар паука S. Приметимо да је $S \setminus W_1$ унија d дисјунктних путева дужина $t_i - n_i$ за $1 \leq i \leq d$. Како пут дужине l може бити разбијен на повезану партицију било ког типа $\nu \vdash l$, то остале скупове W_j конструишемо тако да одговарају величинама скупова из $\mathcal{T}_j$. $\square$

Претходна лема се врло лако уопштава на одређену класу повезаних графова:

Лема 7.19. Нека је G повезан граф са чвором v таквим да $G \setminus v$ има бар 3 компоненте повезаности $(C_1, \ldots, C_d)$ и нека је $(c_1, \ldots, c_d)$ партиција чији делови одговарају величинама ових компоненти. Уколико G има повезану партицију типа μ, тада и $S = S(c_1, \ldots, c_d)$ има повезану партицију типа μ.

С обзиром на то да ћемо у наставку желети да искористимо резултат теореме 7.10 и последице 7.11, биће нам неопходна следећа лема:

Лема 7.20. Нека је $S = S(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ паук.

(а) S има савршено упаривање акко је тачно једна нога непарне дужине.

(б) S има скоро савршено упаривање акко нема ногу непарне дужине, или има 2 ноге непарне дужине.

Доказ. (а) Очигледно, с обзиром на то да се у савршеном упаривању центар мора наћи као чвор тачно једне гране.

(б) Нека S има скоро савршено упаривање и нека је v' чвор који је изостављен у овом упаривању, те $S \setminus v'$ има савршено упаривање. Уколико је v'

баш центар, тада све ноге од S морају бити парне дужине. Иначе, чвор v' је у некој нози L и у том случају, имамо две могућности:

1) Уколико је v' суседан са центром v, а $d(v) = 3$, тада брисањем чвора v' добијамо унију два пута (притом, други пут свакако може бити празан, односно имати 0 чворова). Како овај граф по претпоставци има савршено упаривање, ти путеви су парне дужине. Стога, нога која полази из чвора v' мора бити непарне дужине у S. Како је и пут који садржи центар v парне дужине, видимо и да једна од преосталих ногу мора бити парне, а друга непарне дужине.

2) У свим осталим ситуацијама, брисањем чвора v', од паука S добијамо унију паука S' и једног пута P(односно остатка ноге L). Како овај граф има савршено упаривање, видимо да је S' паук са једном ногом непарне дужине, док је P пут парне дужине. Уколико је у S' почетак ноге L непарне дужине, тада је у S нога L парне дужине, те је S паук који не садржи ногу непарне дужине. Иначе, у S' нека друга нога има непарну дужину, те је почетак ноге L парне дужине. Стога, L је у S непарне дужине, па S има две такве ноге.

Обратно, уколико S нема ниједну ногу непарне дужине, тада $S \setminus v$, где је v центар од S, има савршено упаривање. Ако S има 2 ноге непарне дужине, тада можемо обрисати лист једне ноге и тако добити паука који је типа (а) ове леме. □

Последица 7.21. Сваки паук са бар 3 ноге непарне дужине нема савршено упаривање, те није e-позитиван.

Међутим, парност дужина ногу није једина ствар која може детерминисати e-позитивност паука:

Лема 7.22. Нека је $\lambda \vdash (n-1)$ партиција за коју је $l(\lambda) \geq 3$ и нека је m највећи део од λ. Уколико је $m < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, тада паук $S = S(\lambda)$ није e-позитиван.

Доказ. Доказаћемо да S нема повезану партицију типа $(n-m-1, m+1)$. Како је m дужина најдуже ноге у S, јасно је да повезану партицију типа $(n-i, i)$ од S можемо конструисати акко је $1 \leq i \leq m$. Како је $m < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, имамо да је $n-(m+1) \geq m+1$. □

Лема 7.23. Нека је $i \geq 0$, а $\lambda \vdash N$ партиција за коју је $l(\lambda) \geq 2$ и чији је највећи део m. Уколико $S(i, \lambda)$ нема повезану партицију типа $\mu \vdash (N+i+1)$,

где је $m+1 \leq \mu_k \leq N$ за сваки део μ_k од μ, тада $S = S(i+N, \lambda)$ нема повезану партицију типа (N, μ), те није ни e-позитиван.

Доказ. Претпоставимо супротно, да постоји повезана партиција од $S(i+N, \lambda)$ типа (N, μ). Нека је V_1 повезана компонента ове партиције са N чворова. Означимо са L' скуп чворова који су део ноге дужине $i+N$, а са L_k чворове који су део ноге дужине λ_k.

Ако V_1 не садржи ниједан чвор из L', тада V_1 мора садржати центар v овог паука јер су све остале ноге дужине не веће од $m \leq N-1$. Притом, V_1 очигледно не може садржати све остале чворове у подграфу $S(\lambda)$ од S којих има $N+1$. Стога, $S \setminus V_1$ садржи изоловани чвор. Како смо претпоставили да је сваки део партиције μ строго већи од 1, ова ситуација није могућа.

Стога, V_1 мора садржати неке чворове из L'. Уколико V_1 садржи и чворове из неке друге ноге, тада V_1 мора садржати и центар v од S. Аналогно као у претходном делу, V_1 не може садржати свих $N+1$ чворова из подграфа $S(\lambda)$, те $S \setminus V_1$ има бар две компоненте повезаности од којих је бар једна пут дужине не веће од m, па како је сваки део партиције μ строго већи од m, ни ова ситуација не долази у обзир.

Дакле, V_1 сме садржати само чворове из L'. Стога, $S \setminus V_1$ је дисјунктна унија паука $S(j, \lambda)$ и пута дужине $i-j$ за неко j такво да је $0 \leq j \leq i$. Међутим, уколико би овај граф имао повезану партицију типа μ за неко j, тада би и $S(i, \lambda)$ имао повезану партицију типа μ. □

Помоћу претходно доказаних лема, можемо конструисати фамилију паукова који нису e-позитивни:

Теорема 7.24. Нека је $\lambda \vdash N$ и нека је m највећи део партиције λ. Уколико је $\max\{2m-N+1, 0\} \leq i < N$, тада паук $S(i+Na, \lambda)$ није e-позитиван ни за једно $a \geq 0$.

Доказ. Доказаћемо да пауку $S(i+Na, \lambda)$ недостаје повезана партиција типа

$$\mu = \begin{cases} (N^{a+1}, i+1), & m \leq i < N \\ (N^a, N+i-m, m+1), & i < m \end{cases}$$

Приметимо прво да, уколико је $\lambda = (N)$, тада је и $m = N$, па не постоји i за које је $N+1 \leq i < N$. Стога, $l(\lambda) \geq 2$. Даљи доказ делимо на два случаја, у зависности од односа i и m:

1) $1 \leq m \leq i < N$:

Како је $m \leq N-1$, имамо и да је $2m-N+1 \leq m$, те је услов за i свакако испуњен. Приметимо да су све ноге паука $S(i,\lambda)$ дужине не веће од $i < \left\lfloor \frac{i+N+1}{2} \right\rfloor$, те по леми 7.22, овом пауку недостаје повезана партиција типа $(N, i+1)$. С обзиром на то да је $m+1 \leq i+1 \leq N$, по леми 7.23, имамо да пауку $S(i+N,\lambda)$ недостаје повезана партиција типа $(N, N, i+1)$.

Последично, $S(i+Na,\lambda)$ нема повезану партицију типа $(N^{a+1}, i+1)$. Уколико бисмо претпоставили да има, тада би $(a-1)$ повезана компонента од N чворова морала бити садржана у нози дужине $i+Na$ (јер би иначе једна од ових компоненти садржала централни чвор и $N-1$ других чворова, те како је $i \geq m$, не бисмо могли да добијемо повезану партицију типа $(N^{a+1}, i+1)$). Међутим, ово би за последицу имало то да $S(i+N,\lambda)$ има партицију типа $(N, N, i+1)$, што је контрадикција.

2) $i < m$:

Ако претпоставимо да је $0 \leq 2m-N+1 \leq i < m$, тада је $2m+1 \leq N+i$, те је

$$\left\lfloor \frac{N+i+1}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{2m+2}{2} \right\rfloor = m+1 > m > i,$$

па паук $S(i,\lambda)$ нема повезану партицију типа $(N+i-m, m+1)$ по леми 7.22. Стога, како је $m+1 = N+(2m-N+1)-m \leq N+i-m < N$, имамо да $S(i+N,\lambda)$ по леми 7.23 нема повезану партицију типа $(N, N+i-m, m+1)$.

Алтернативно, уколико претпоставимо да је $2m-N+1 < 0 \leq i < m$, из прве неједнакости имамо да је $m < \frac{N-1}{2}$, те је

$$\left\lfloor \frac{i+N+1}{2} \right\rfloor > m.$$

Даље, по леми 7.22, $S(i,\lambda)$ нема повезану партицију типа $(N+i-m, m+1)$, те како је $m+1 \leq N+i-m < N$, имамо да $S(i+N,\lambda)$ нема повезану партицију типа $(N, N+i-m, m+1)$.

Аналогно као у случају 1), паук $S(i+Na,\lambda)$ нема повезану партицију типа $(N^a, N+i-m, m+1)$ јер би иначе $S(i+N,\lambda)$ имао повезану партицију типа $(N, N+i-m, m+1)$, што је контрадикција. □

Као директну последицу претходно доказаног добијамо:

Теорема 7.25. Ако је $\lambda \vdash N$, m највећи део партиције λ и $m < \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$, а $N > i \geq 0$, тада паук $S(i,\lambda)$ није e-позитиван.

Доказ. По претходној леми, довољно је доказати да је $2m - N + 1 \leq 0$, што директно следи из чињенице да је $m < \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ $\square$

Сада ћемо прећи на алтернативни начин тражења повезане партиције која недостаје одређеном пауку.

Лема 7.26. Нека је $S = S(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ паук са n чворова такав да је $\lambda_1 \geq \lambda_2 + \cdots + \lambda_d$, а $2 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 + \cdots + \lambda_d$. Нека је и $n = q(\lambda_2 + 1) + r$, где је $0 \leq r < \lambda_2 + 1$, а $r = qd' + r'$ за $0 \leq r' < q$. Уколико је $\lambda_2 \geq 3$, или ако је $\lambda_2 = 2$ и $q \geq 3$, тада S нема повезану партицију типа $(\lambda_2 + d' + 2)^{r'}(\lambda_2 + d' + 1)^{q-r'}$.

Доказ. Претпоставимо супротно, да S има повезану партицију типа $(\lambda_2 + d' + 2)^{r'}(\lambda_2 + d' + 1)^{q-r'}$. Посматрајмо блок V_1 ове партиције који садржи лист ноге дужине λ_2. Како сваки блок дате партиције мора имати бар $\lambda_2 + 1$ чворова, у V_1 се мора наћи и центар овог паука, те самим тим и све ноге паука S чија је дужина не већа од λ_2.

Како је $\lambda_2 \leq \lambda_3 + \cdots + \lambda_d$, имамо

$$|V_1| \geq 1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_d \geq 1 + 2\lambda_2. \tag{7.1}$$

Са друге стране, како је $\lambda_1 \geq \lambda_2 + \cdots + \lambda_d$, важи

$$n = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_d \geq 1 + 2(\lambda_2 + \cdots + \lambda_d) > 2(\lambda_2 + 1).$$

Стога, за q из формулације леме увек важи $q \geq 2$. Дакле, уколико је $\lambda_2 \geq 3$, тада је

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1} = 1 + \frac{1}{\lambda_2 - 1} < 2 \leq q,$$

док уколико је $\lambda_2 = 2$ и $q \geq 3$, директном провером утврђујемо да неједнакост $\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - 1} < q$ и даље остаје на снази, те је можемо користити униформно. Стога,

$$r - r' = qd' \leq r \leq \lambda_2 < q(\lambda_2 - 1),$$

одакле је $d' < \lambda_2 - 1$. Уколико на обе стране претходне неједнакости додамо $\lambda_2 + 2$, добијамо $\lambda_2 + d' + 2 < 1 + 2\lambda_2$. Стога, сваки блок ове повезане партиције има мање од $1 + 2\lambda_2$ чворова. Ово је у контрадикцији са формулом (7.1). $\square$

Генерализацијом претходне леме, добијамо:

Лема 7.27. Нека је $d > i \geq 3$, а $S = S(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ паук са n чворова такав да је $2 \leq \lambda_i \leq \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_d$, а $\lambda_j > \lambda_{j+1} + \cdots + \lambda_d$ за све $j < i$. Уколико је $n = q(\lambda_i + 1) + r$, за $0 \leq r < \lambda_i + 1$, а $r = qd' + r'$, за $0 \leq r' < q$, тада S нема повезану партицију типа $(\lambda_i + d' + 2)^{r'}(\lambda_i + d' + 1)^{q-r'}$.

Доказ. Претпоставимо супротно, да S има повезану партицију датог типа. Посматрајмо блок V_1 ове партиције који садржи лист ноге дужине λ_i. Како сваки блок ове партиције мора садржати бар λ_i+1 чворова, то блок V_1 садржи и центар паука S, али и све ноге дужине не веће од λ_i. Стога, како је $\lambda_i \leq \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_d$, имамо

$$|V_1| \geq 1 + \lambda_i + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_d \geq 1 + 2\lambda_i. \tag{7.2}$$

Међутим, како је $\lambda_i \geq 2$, имамо и да је $\frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1} \leq 2$, па користећи услов $\lambda_j > \lambda_{j+1} + \cdots + \lambda_d$ за све $j < i$, добијамо

$$\begin{aligned} n &= 1 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_d \\ &> 1 + 2(\lambda_2 + \cdots + \lambda_d) \\ &> 1 + 4(\lambda_3 + \cdots + \lambda_d) \\ &\vdots \\ &> 1 + 2^{i-1}(\lambda_i + \cdots + \lambda_d). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Стога, $(q+1)(\lambda_i + 1) = q(\lambda_i + 1) + \lambda_i + 1 > q(\lambda_i + 1) + r = n > 2^{i-1}(\lambda_i + 1)$. Одавде је $q + 1 > 2^{i-1}$, те, како је $i \geq 3$, имамо $q \geq 2^{i-1} \geq 4 > 2$.

Одавде, аналогно као у доказу претходне леме, закључујемо да је $1+2\lambda_i > \lambda_i + d' + 2$, што је у контрадикцији са величином блока V_1 коју смо проценили формулом (7.2). □

Лема 7.28. Нека је $S = S(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ паук са n чворова

а) Уколико је $\lambda_1 \geq \lambda_2 + \cdots + \lambda_d$, а $\lambda_i > \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_d$ за све $2 \leq i < d$, тада је $n > 2^{d-1}$.

б) Уколико је $d \geq 4$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 + \cdots + \lambda_d$, а $\lambda_i > \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_d$ за $2 \leq i < d-1$ и $\lambda_{d-1} = \lambda_d = 1$, тада је $n > 2^{d-1}$.

Доказ. а) Тврдимо да партиција λ задовољава услов $\lambda_{d-i} > 2^{i-1}\lambda_d$ за све $1 \leq i \leq d-1$. Ово је тачно за $i = 1$ по претпоставци. Уколико претпоставимо да тврђење важи за све $1 \leq j < i$, добијамо

$$\lambda_{d-i} \geq \sum_{j=0}^{i-1} \lambda_{d-j} > \lambda_d + \sum_{j=1}^{i-1} 2^{j-1}\lambda_d = 2^{i-1}\lambda_d.$$

Стога,

$$n = 1 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_d > \lambda_d + \sum_{i=1}^{d-1} 2^{i-1}\lambda_d = 2^{d-1}\lambda_d \geq 2^{d-1}.$$

б) Сада тврдимо да партиција λ задовољава услов $\lambda_{d-i} \geq 3 \cdot 2^{i-2}$ за $2 \leq i \leq d-2$. По претпоставци, ово је тачно за $i = 2$. Уколико претпоставимо да важи за све j такве да је $2 \leq j < i$, имамо да је

$$\lambda_{d-i} \geq \sum_{j=2}^{i-1} \lambda_{d-j} + \lambda_{d-1} + \lambda_d + 1 \geq 3 + \sum_{j=2}^{i-1} 3 \cdot 2^{j-2} = 3 \cdot 2^{i-2}.$$

Стога, како је $d \geq 3$,

$$n = 1 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_d \geq \sum_{j=0}^{d-3} 3 \cdot 2^j - 1 + 3 = 3 \cdot 2^{d-2} - 1 > 2^{d-1}.$$

□

Коначно смо у стању да докажемо главну теорему о e-позитивности паукова:

Теорема 7.29. Нека је $S = S(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ паук са n чворова за који важи $d \geq \log_2 n + 1$. Тада S није e-позитиван.

Доказ. По делу а) претходне леме, мора важити $\lambda_1 < \lambda_2 + \cdots + \lambda_d$, или $\lambda_i \leq \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_d$ за неко $2 \leq i < d$. У првом случају, лема 7.22 нам даје да S није e-позитиван. Уколико није $\lambda_1 < \lambda_2 + \cdots + \lambda_d$ (односно важи $\lambda_1 \geq \lambda_2 + \cdots + \lambda_d$), имамо два подслучаја:

1) Ако је $3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 + \cdots + \lambda_d$, лема 7.26 нам даје да S није e-позитиван.

2) Ако је $2 = \lambda_2 \leq \lambda_3 + \cdots + \lambda_d$, тада, због $d \geq 3$, закључујемо да λ_3 постоји и $\lambda_3 \leq 2$. Стога, $n \geq 9$, па су услови леме 7.26 опет испуњени.

3) Ако је $1 = \lambda_2 \leq \lambda_3 + \cdots + \lambda_d$, поново због $d \geq 3$ имамо да је $\lambda_3 = 1$, те је $n \geq 5$. Како је $d \geq \log_2 n + 1 > 3$, имамо да је $d \geq 4$, те је и $\lambda_4 = 1$. Како имамо 3 ноге непарне дужине, последица 7.21 завршава овај случај.

4) Како смо у претходна 3 случаја покрили све могућности у којима је $i = 2$, у последњем случају ћемо размотрити ситуацију у којој је $i \geq 3$ најмањи индекс за који је $\lambda_i \leq \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_d$. Очигледно, $d \geq 4$. Ако је $\lambda_i \geq 2$, лема 7.27 нам даје тражену повезану партицију која не постоји код S. Иначе је $\lambda_i = 1$. По делу б) претходне леме, мора бити $i < d-1$, јер уколико би важило

$i = d - 1$, имали бисмо и да је $d < \log_2 n + 1$. Поново, центар паука је повезан са бар три листа, па нам последица 7.21 даје да ни у овом случају S није e-позитиван. □

5. Повезани графови

У претходном поглављу смо навели две леме које нам омогућавају да разматрање e-позитивности повезаних графова сведемо на разматрање паукова. У овом поглављу ћемо ту примену и илустровати, користећи најзначајније доказане резултате.

Теорема 7.30. Уколико је G повезан граф са n чворова који садржи чвор v такав да граф $G \setminus v$ има бар $d \geq 3$ компонената повезаности, где је $d \geq \log_2 n + 1$, тада G није e-позитиван.

Доказ. По леми 7.19, овај граф не може имати повезане партиције сваког типа јер би онда то важило и за паук придружен графу $G \setminus v$ (у складу са формулацијом леме 7.19), што је у контрадикцији са теоремом 7.29. □

Последица 7.31. Уколико је T стабло од n чворова и са чвором степена d, где је $d \geq \log_2 n + 1$, тада T није e-позитиван граф.

Теорема 7.32. Уколико је G повезан граф са n чворова који садржи чвор v такав да граф $G \setminus v$ има $d \geq 3$ компонената повезаности $C_1, \ldots, C_d$ које су све величине строго мање од $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, тада G није e-позитиван.

Доказ. По лемама 7.19 и 7.22, сваки такав граф не садржи повезану партицију одређеног типа. □

Библиографија

[1] Ian G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford University Press, New York, 1995.

[2] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[3] Richard P. Stanley, *A Symmetric Function Generalization of the Chromatic Polynomial of a Graph*, Advances in Mathematics, 111 (1995), 166-194.

[4] Gian Carlo Rota, *On the foundations of combinatorial theory I*, Z. Wahrseheinlichkeitstheorie 2 (1964), 340-368.

[5] Hassler Whitney, *A logical expansion in mathematics*, Bulletin of the American Mathematical Society 38 (1932), 572-580.

[6] Reinhard Diestel, *Graph Theory*, Springer, 2006.

[7] Richard P. Stanley, *Graph colorings and related symmetric functions : ideas and applications*, Discrete Mathematics 193 (1998), 267-286.

[8] Rosa Orellana, Geoffrey Scott, *Graphs with equal chromatic symmetric functions*, Discrete Mathematics 320 (2014), 1-14.

[9] Samantha Dahlberg, Adrian She, Stephanie van Willigenburg, *Schur and e-positivity of trees*, The Electronic Journal of Combinatorics 27 (2020), 1-22.

[10] Vesselin Gasharov, *Theory and Applications of Symmetric Functions*, Brandeis University, 1994.

[11] Harry Lewis Wolfgang, *Two interactions between combinatorics and representation theory : Monomial immanants and Hochschild cohomology*, Massachusetts Institute of Technology, 1997.