



УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Мастер рад

Једнодимензионо случајно лутање- уопштење и примене

Аутор:

Матија Стефановић (1069/2018)

Ментор:

доц. др Јелена Јоцковић

Београд, октобар 2021.

Садржај

Увод	1
1 Случајни процеси	2
1.1 Основни појмови случајних процеса	2
1.1.1 Коначнодимензионе расподеле случајног процеса	3
1.1.2 Трајекторије случајног процеса	4
1.1.3 Векторски случајни процес	5
1.2 Процеси са независним прираштајима	5
1.3 Ланци Маркова	6
1.3.1 Вероватноће преласка у n корака	8
1.3.2 Марковљев моменат и јако Марковљево својство	9
1.3.3 Повратна и пролазна стања	11
1.3.4 Средње време чекања повратка у дато стање	13
1.3.5 Стационарне расподеле	14
1.4 Мартингали-основна својства	15
2 Случајно лутање као ланац Маркова	17
2.1 Једнодимензионо случајно лутање	17
2.1.1 Симулација	20
2.2 Уопштено једнодимензионо случајно лутање	21
2.2.1 Симулација	23
2.3 Једноставно случајно лутање у две димензије	24
3 Случајно лутање као мартингал	28
3.1 Примери	28
3.2 Принцип рефлексije	31
4 Примена случајног лутања	38
4.1 Еренфестов модел урне	38
4.2 Задатак о пропасти играча	40
4.2.1 Симулација	42
4.3 Случајно лутање у финансијској математици	44
4.3.1 Основни појмови у финансијама	44
4.3.2 Опције	45
4.3.3 Геометријско случајно лутање	47
4.3.4 Биномни модел са једним кораком за европске кол опције	48
4.3.5 Биномни модел са више корака за европске кол опције	50
4.3.6 Биномни модел за европске пут опције	51
5 Закључак	53

Увод

Једнодимензионо случајно лутање односи се на кретање замишљене честице по реалној правој, при чему су у питању јединични кораци у позитивном или негативном смеру. Овај основни модел има бројна и различита уопштења, као што су лутање у више димензија, случајно лутање по решетки, графу, уз додатна ограничења, итд, која такође налазе своју примену у пракси.

У првој глави рада изложени су основни појмови из теорије случајних процеса, дефиниције и основне особине ланаца Маркова, као и дефиниција и основна својства мартингала.

У другој глави се уводи појам случајног лутања, анализира се једнодимензионо случајно лутање у контексту теорије ланаца Маркова и наводе нека његова уопштења. Поред тога, уводи се и случајно лутање у две димензије и његова основна својства.

У трећој глави се наводе неки примери мартингала и анализира се под којим условима је случајно лутање мартингал, односно субмартингал, односно супермартингал. Такође, у овој глави се уводи и принцип рефлексије и уз помоћ њега се доказују разна тврђења у вези са случајним лутањем

У четвртој глави се наводе неки примери примене случајног лутања, поред осталих и пример примене случајног лутања у финансијској математици.

1 Случајни процеси

1.1 Основни појмови случајних процеса

Дефиниција 1.1. Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ мерљив простор, где је $\mathcal{B}$ Борелов скуп. Фамилија $\{X_t, t \in T\}$ функција $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисаних на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и мерљивих у односу на сигма алгебре $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, у смислу да за сваки скуп $B \in \mathcal{B}$ важи $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, зове се *случајни процес*. Скуп T се зове *параметарски скуп*, а простор $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ се зове *фазни простор*.

Ако је $T = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $T = [0, +\infty)$ или $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$, онда се параметар $t \in T$ углавном интерпретира као време, а случајни процес $\{X_t, t \in T\}$ зове се *случајан процес са непрекидним временом*. Ако је $T \subset \mathbb{Z}$, где је $\mathbb{Z}$ скуп целих бројева, онда се случајни процес $\{X_t, t \in T\}$ зове *случајан процес са дискретним временом*, или *случајан низ*. Ако је $T \subset \mathbb{R}^d$, где је $d \geq 2$, онда се случајни процес $\{X_t, t \in T\}$ зове *случајно поље*.

При разматрању случајних процеса са непрекидним параметром радије ћемо користити ознаку $\{X(t), t \in T\}$ уместо $\{X_t, t \in T\}$. Такође ћемо за случајни процес користити и ознаку $\mathbb{X} = \{X_t, t \in T\}$.

Својства случајних процеса битно зависе од структуре параметарског скупа T и од простора $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t \in T}$, у којима случајни елементи X_t узимају вредности.

Навешћемо сад неке примере случајних процеса:

Пример 1.1. Претпоставимо да авион треба да лети константном брзином v_0 у току временског интервала $T = [a, b]$. Под дејством разних случајних фактора (нпр: колебања брзине ветра, колебања температуре, пролаз кроз слојеве са различитим густинама) чији интензитет и деловања на брзину авиона се не могу унапред знати, брзина авиона у времену T неће бити стално једнака v_0 , већ само блиска v_0 . Стварну вредност у неком моменту $t \in [a, b]$ можемо сматрати једном од могућих вредности неке случајне величине, која је различита (у општем случају) за различите вредности t . Дакле, у моменту t брзина је $V = V(t)$, где је $V(t)$ случајна величина. Зато ћемо рећи да је брзина авиона случајна функција времена: $V = V(t), t \in [a, b]$.

Пример 1.2. Напон V и јачина електричне струје I на крају проводника пулсирају у времену: $V = V(t), I = I(t)$. То долази отуда што топлотна кретања појединих електрона изазивају промене ових величина. Међутим, те промене нису детерминистичког, већ случајног карактера. Зато се може сматрати да су напон струје $\{V = V(t), t \in T\}$ и јачина струје $\{I = I(t), t \in T\}$ случајне функције времена, тј. случајни процеси.

Пример 1.3. Не мора обавезно да аргумент случајне функције буде време. На пример, температура ваздуха се може посматрати као случајна функција висине: $Z = Z(h)$. Поред тога, има и примера случајних функција које зависе не од једног већ од више аргумената. Рецимо, температура ваздуха, притисак ваздуха, брзина ветра- све су то примери случајних функција од четири аргумента: трију просторних координата x, y и z и времена t .

Пример 1.4. Нека је $(X_n)_{n \geq 1}$ низ независних случајних величина и нека је $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, n \geq 1$, низ парцијалних збирова. Јасно је да су чланови низа (S_n) зависне случајне величине. У вези са овим низом приметимо следеће: Ако су $s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ природни бројеви, онда су случајне величине $S_{t_1} - S_{s_1}$ и $S_{t_2} - S_{s_2}$ независне, тј. прираштаји збира на интервалима $(s_1, t_1]$ и $(s_2, t_2]$ су независне случајне величине. Ако случајне величине $X_1, X_2, \dots$ узимају, на пример, вредности у скупу целих бројева са вероватноћом 1, онда су такви и сви чланови низа (S_n) . Ако су случајне величине $X_1, X_2, \dots$ апсолутно непрекидне случајне величине, онда су такви и парцијални зборови.

Пример 1.5. Проучава се нека физичка величина која се мења током времена, на пример, температура ваздуха на одређеном месту. Вредност те величине у тренутку t је случајна величина $X(t)$, па се овде природно појављује фамилија случајних величина $\{X(t) : t \geq 0\}$ са апсолутно непрекидним расподелама.

Пример 1.6. Број исплата одштета које током времена, почињући од неког тренутка, исплаћује осигуравајуће друштво описује се фамилијом случајних величина $\{N(t), t \geq 0\}$, које зависе од параметра $t \in [0, +\infty)$. При томе, свака случајна величина $X(t)$, која представља број исплаћених одштета до тренутка t , узима вредности у скупу ненегативних целих бројева.

1.1.1 Коначнодимензионе расподеле случајног процеса

Нека је $\{X(t), t \in T\}$ дат случајни процес. За свако фиксирано $t \in T$, $X(t)$ је случајна величина коју зовемо *засек* или *сечење* процеса X у тачки t . Та случајна величина има свој закон расподеле који је одређен одговарајућом функцијом расподеле:

$$F_t(x) = P\{X(t) \leq x\}.$$

Фамилија тих функција у односу $t \in T$ $\{F_t, t \in T\}$ је *фамилија једнодимензионалних функција расподеле*.

Ако фиксирамо n временских тренутака $t_1, t_2, \dots, t_n$, добијамо n случајних величина $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$, које можемо посматрати као координате n -димензионалног случајног вектора $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$. То је један n -димензионални *засек* случајног процеса X . Расподела n -димензионалног засека одређена је n -димензионалном функцијом расподеле

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\}.$$

Ако пустимо да $(t_1, \dots, t_n)$ прође кроз скуп T^n , онда добијамо *фамилију n -димензионалних функција расподеле* случајног процеса X .

Коначнодимензионалне расподеле случајног процеса задовољавају следећа два услова:

(1) *Услов симетрије*

За произвољну пермутацију $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ важи

$$F_{t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_n}}(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

тј. кад променимо редослед индексирања, функција расподеле се не мења.

(2) *Услов сагласности*

Ако нам је позната фамилија n -димензионих функција расподеле процеса ($n \geq 2$), онда нам је позната и фамилија свих k -димензионих функција расподеле, где је $1 \leq k \leq n - 1$, тј.

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = F_{t_1, t_2, \dots, t_k}(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Из Колмогоровљеве теореме знамо да за сваку фамилију коначнодимензионалних функција расподеле која задовољава услове симетрије и сагласности постоји вероватносни простор $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и случајни процес $\{X_t, t \in T\}$ дефинисан на том простору коме одговара дата фамилија коначнодимензионалних функција расподела.

1.1.2 Трајекторије случајног процеса

Нека је $\{X_t, t \in T\}$ реалан случајни процес дефинисан на неком простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Случајни процес $X : T \times \Omega \rightarrow S$ је, заправо, функција два аргумента: $t \in T$ и $\omega \in \Omega$. Када фиксирамо временски тренутак t добијамо функцију $X(t, \bullet)$ мерљиву у односу на $\mathcal{A}$, тј. добијамо случајну величину.

Дефиниција 1.2. При фиксираном $\omega \in \Omega$ функција $X_t(\omega), t \in T$, зове се *трајекторија случајног процеса* $\{X_t, t \in T\}$.

Према томе, трајекторија $X_t(\omega), t \in T$, реалног случајног процеса је конкретна функција која скуп T пресликава у скуп реалних бројева, тј. елемент скупа $\mathbb{R}^T$.

Наведимо неке примере:

Пример 1.7. Замислимо да се ради о мерењима једне карактеристике X која је по својој природи случајна функција времена: $X = X(t)$. Нпр. врше се мерења напона електричне струје у једној тачки електричног кола. Замислимо да се региструју вредности те карактеристике у сваком тренутку једног временског интервала. Графички приказ напона ће дати једну линију-трајекторију. Принципијално, исти случај је и када се региструју вредности карактеристике X у моментима $t_1, \dots, t_k$ неког временског интервала. У свакој од тачака $t_1, \dots, t_k$ као вредност величине X добија се одређена нумеричка вредност $x(t_1), \dots, x(t_k)$. Скуп тачака $\{(t_1, x(t_1)), \dots, (t_k, x(t_k))\}$ је такође трајекторија случајног процеса.

Пример 1.8. Дат је случајни процес $X(t) = A + Bt, t \in \mathbb{R}$, где су A и B међусобно независне случајне величине са нормалним расподелама $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ и $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ респективно. Трајекторије тог случајног процеса су праве у равни.

Пример 1.9. Дат је случајни процес $X(t) = A + Bt, t \in \mathbb{R}$, где су A и B међусобно независне и $A : \mathcal{U}[0, 2], B : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Скуп трајекторија је скуп правих у равни које пролазе кроз одсечак $[0, 2]$ на

ординатној оси. Ако је $A : \mathcal{B}(2, \frac{1}{3})$, $P\{B = -1\} = \frac{1}{5}$, $P\{B = 0\} = P\{B = 2\} = \frac{2}{5}$, тада је skup трајекторија $\{y : y = a + bt, a \in \{0, 1, 2\}, b \in \{-1, 0, 2\}\}$.

1.1.3 Векторски случајни процес

Могуће је разматрати и векторски случајни процес $\{X(t), t \in T\}$. Он се одређује фамилијом случајних вектора

$$X_t = (X_{t1}, \dots, X_{tm}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad t \in T, m \geq 2,$$

који су дефинисани на истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, при чему претпостављамо да је T бесконачан skup. У зависности од тога шта је skup T (посебно интересантни случајеви $T \subset \mathbb{R}$ и $T \subset \mathbb{Z}$), уводи се слична класификација и терминологија за случајне векторе, као што је уведена за случајне процесе.

1.2 Процеси са независним прираштајима

Постоје разне класе случајних процеса као што су случајни процеси са коначним моментима другог реда, процеси са ортогоналним прираштајима, Гаусови процеси, Марковски процеси, процеси са независним вредностима, итд. Једна од најважнијих класа случајних процеса јесте класа процеса са независним прираштајима, која се код процеса са дискретним параметром појављује у вези са сумирањем независних случајних величина.

Дефиниција 1.3. За случајан процес $\{X_t, t \in T\}$ за који важи да су случајне величине $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ међусобно независне за било које $n \in \mathbb{N}$, и било који избор $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, кажемо да је *случајан процес са независним прираштајима*.

За познавање процеса $\{X(t), t \in T\}$ са независним прираштајима довољно је знати функције расподеле случајних величина $X(t)$ и $X(t) - X(s)$, тј. довољно је знати функције

$$\begin{aligned} F_t(x) &= P\{X(t) < x\}, \\ G_{t,s}(x) &= P\{X(t) - X(s) < x\} \end{aligned}$$

Два врло важна процеса са независним прираштајима, који се из многих разлога сматрају основним у теорији случајних процеса, јесу Пуасонов и Винеров процес. Пуасонов процес користи се као основни

модел у теорији масовног опслуживања, актуарској математици, итд. Винеров процес се посебно користи у моделирању временских серија у финансијској математици.

Дефиниција 1.4. Случајни процес $\{N(t), t \geq 0\}$ је *Пуасонов процес*, ако има следећа својства:

- (а) $N(0) = 0$ с.с.
- (б) Случајни процес N има независне прираштаје, тј. за све природне бројеве n и све реалне бројеве $t_1, \dots, t_n$, где је $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, независне су следеће случајне величине:

$$N(t_k) - N(t_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

- (в) Постоји неоппадајућа функција $\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, која је непрекидна с десне стране, $\mu(0) = 0$ и таква да за произвољне $0 < s < t$ важи $N(t) - N(s) \in \mathcal{P}(\mu(t) - \mu(s))$. Функција μ зове се *функција средње вредности* Пуасоновог процеса N .
- (г) Са вероватноћом 1 трајекторије $\{N(t, \omega), t \geq 0\}$ случајног процеса N непрекидне су са десне стране за $t \geq 0$ и имају леву граничну вредност за $t > 0$.

Дефиниција 1.5. Случајан процес $\{W(t), t \geq 0\}$ дефинисан на неком простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ је *Винеров процес* или **Брауново кретање**, ако важи:

- (а) $W(0) = 0$ с.с;
- (б) случајан процес W има независне прираштаје;
- (в) за све реалне бројеве $0 \leq s < t < +\infty$ важи $W(t) - W(s) \in \mathcal{N}(0, t - s)$, тј. случајна величина $W(t) - W(s)$ има нормалну расподелу са математичким очекивањем 0 и дисперзијом $t - s$.

1.3 Ланци Маркова

Још једна врло важна класа случајних процеса јесу ланци Маркова. Многе реалне појаве и процеси поседују извесну инерцију, због чега њихови математички модели често не могу бити случајни процеси са независним вредностима, већ процеси сложенијег типа. Један од таквих модела јесу ланци Маркова. То је случајни процес са дискретним временом код кога закон расподеле засека у било ком будућем моменту зависи од вредности процеса у садашњем моменту, а не зависи од тога које су вредности процеса биле у прошлости.

Дефиниција 1.6. За случајни низ $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ кажемо да је *хомоген ланац Маркова* ако за свако $t \in \mathbb{N}_0$ и све $i, j, i_0, \dots, i_{t-1} \in \mathbb{Z}$ важи једнакост

$$(1) \quad p_{ij} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}, X_t = i\}.$$

Једнакост (1) се назива *Марковљево својство*, а број p_{ij} *вероватноћом преласка* из стања i у стање j , а матрица $P = [p_{ij}]_{|\mathbb{Z}| \times |\mathbb{Z}|}$ се зове *матрица вероватноћа преласка*, и има следећи облик:

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Приметимо да је матрица вероватноћа преласка стохастичка, тј. да има својства:

- 1) $p_{ij} \geq 0$, за све $k, j \in \mathbb{Z}$;
- 2) $\sum_j p_{ij} = 1$ за свако $i \in \mathbb{Z}$.

Ако вероватноћа преласка система из стања i у стање j зависи од тренутка t , онда се ради о *нехомогеном ланцу Маркова* и тада вероватноћу преласка обележавамо следећом нотацијом:

$$(2) \quad p_{ij}^{t,t+1} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}.$$

У раду ћемо, уколико није другачије наглашено, разматрати хомогене ланце Маркова и звати их кратко Марковљеви ланци.

Остало нам је још да уведемо ознаке за вероватноће почетних стања, тј. за вероватноће догађаја да се систем у почетном тренутку налази у неком од стања:

$$p_i^{(0)} = P\{X_0 = i\}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

И за ове вероватноће очигледно важи једнакост $\sum_i p_i^{(0)} = 1$.

Навешћемо сад неке примере хомогених ланаца Маркова:

Пример 1.10. (*Једнодимензионо случајно лутање*) Нека је $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ и замислимо да имамо материјалну честицу која се за јединично време из положаја $j \in S$ помера у положај $(j+1)$ са вероватноћом p_j , у положај $(j-1)$ са вероватноћом q_j или остаје у положају j са вероватноћом $r_j = 1 - p_j - q_j$, при чему је $j \geq 1$. Поред тога, нека је $p_{01} = p_0$, $p_{00} = r_0 = 1 - p_0$. Нека је X_t положај честице у тренутку t . Тада је $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ хомоген ланац Маркова са матрицом вероватноћа преласка

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \cdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Хомоген ланац Маркова се добија и када је скуп стања скуп свих целих бројева и

$$p_{j,j+1} = p_j, p_{j,j-1} = q_j, p_{jj} = r_j,$$

где је $p_j + q_j + r_j = 1$ за свако целобројно j . Ако је $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ и $p_0 = 1, r_0 = q_0 = 0$, ради се о

случајном померању са одбојним зидом у тачки $x = 0$. Ако је $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ и $r_0 = 1$, $q_0 = p_0 = 0$, онда се ради о случајном померању са апсорбујућим зидом у тачки $x = 0$.

Пример 1.11. (*Еренфестов модел дифузије*)

У питању је случајно померање са скупом стања $\{0, 1, \dots, m\}$, вероватноћама прелаза

$$p_{i,i+1} = \frac{2m-i}{2m}, p_{i,i-1} = \frac{i}{2m}, i = 0, 1, \dots, m$$

и одбојним зидовима у тачкама $x = 0$ и $x = m$.

Физичка интерпретација овог модела је следећа: Имамо $2m$ честица које су смештене у два резервоара A и B , при чему је i честица у резервоару A , а остале су у резервоару B . При сваком опиту се се бира једна честица из једног резервоара и премешта у други резервоар. Стање система у сваком моменту је број честица у резервоару A . Ако је у неком моменту у A било i честица, онда ће у следећем ту бити $i + 1$ или $i - 1$ честица, зависно од тога да ли је избор честица вршен у резервоару B или у A . Вероватноће тих избора су $\frac{2m-i}{2m}$ и $\frac{i}{2m}$ респективно.

Карактеристика ових померања је у томе што се иде из резервоара са већом концентracијом ка резервоару са мањом концентracијом, са тенденцијом кретања ка стању $i = m$. Такву ситуацију имамо код дифузије.

Пример 1.12. Посматрајмо серију Бернулијевих опита са два могућа исхода: успех (U) и неуспех (N). Нека је у сваком опиту $P(U) = p$, $P(N) = 1 - p = q$. Кажемо да се у моменту n реализовала серија успеха дужине r ако смо имали следеће резултате: $A_1 A_2 \dots A_{n-r-1} A_{n-r} A_{n-r+1} \dots A_{n-1} A_n$, где је $A_{n-r} = N$, $A_{n-r+1} = U, \dots, A_{n-1} = U, A_n = U$. Стање система у тренутку n је дужина серије успеха која се реализује у n -том тренутку. Из стања r се може прећи у стање $r + 1$ или у стање 0 . Зато матрица вероватноћа прелаза за један корак изгледа овако:

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & 0 & p & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

1.3.1 Вероватноће преласка у n корака

При разматрању Марковљевих ланаца јавља се потреба и за разматрањем вероватноћа преласка из једног стања у неко друго стање у већем броју корака. Како се потреба за рачунањем ове вероватноће јавља и приликом изучавања случајног лутања у овом поглављу ћемо се позабавити тиме.

Дефиниција 1.7. Матрица $P_n = [p_{ij}(n)]_{|\mathbb{Z}| \times |\mathbb{Z}|}$ чији су чланови одређени једнакостима

$$p_{ij}(n) = P\{X_{m+n} = j | X_m = i\}, \quad i, j \in \mathbb{Z},$$

зове се *матрица вероватноћа преласка у n корака*.

Очигледно је да важи $P_1 = P$. За одређивање вероватноћа преласка у већем броју корака користи се следећа теорема:

Теорема 1.1. За произвољне природне бројеве m и n важе следеће *једначине Чепмен-Колмогорова*:

$$(3) \quad p_{ij}(m+n) = \sum_k p_{ik}(m)p_{kj}(n), \quad i, j, k \in \mathbb{Z}.$$

Важе и једнакости $P_{m+n} = P_m P_n$ и $P_n = P^n$, где је P^n ознака за n -ти степен матрице P .

Доказ. За произвољне догађаје A, B и C важи једнакост:

$$P(AB|C) = P(A|BC)P(B|C).$$

Користећи ову једнакост и Марковљево својство добијамо да за вероватноћу $p_{ij}(m+n)$ важе једнакости

$$\begin{aligned} p_{ij}(m+n) &= P\{X_{m+n} = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_k P\{X_{m+n} = j, X_m = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_k P\{X_{m+n} = j | X_m = k, X_0 = i\} P\{X_m = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_k P\{X_{m+n} = j | X_m = k\} P\{X_m = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_k p_{ik}(m) p_{kj}(n). \end{aligned}$$

Тиме је доказана једнакост (3), а једнакости $P_{m+n} = P_m P_n$ и $P_n = P^n$ су једноставне последице. $\square$

Означимо $p_i^{(n)} = P\{X_n = i\}, n \in \mathbb{N}_0$. Тада за произвољне природне бројеве m и n важи једнакост

$$\begin{aligned} p_j^{(m+n)} &= P\{X_{m+n} = j\} \\ &= \sum_i P\{X_{m+n} = j | X_m = i\} P\{X_m = i\} \\ &= \sum_i p_i^{(m)} p_{ij}(n). \end{aligned}$$

1.3.2 Марковљев моменат и јако Марковљево својство

Дефиниција 1.8. Нека је $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ произвоља Марковљев ланац са скупом стања $\mathbb{Z}$. Случајни моменат $\tau \in \mathbb{N}_0$ зове се *Марковљев моменат* или *време заустављања* ако не зависи од будућности, тј. ако се догађај $\{\tau = t\}$ једнозначно одређује случајним величинама $\{X_s, s \leq t\}$. [1]

Ова дефиниција се може интерпретирати и на следећи начин: свака еволуција система до тренутка t закључно, тј. низ догађаја $X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_t = i_t$, једнозначно одређује да ли је $\tau = t$ или $\tau \neq t$. Примери Марковљевих момената су: тренутак првог доласка система у стање i , тренутак првог повратка у почетно стање, тренутак k -тог повратка у почетно стање, итд. Пример случајног тренутка који није Марковљев моменат је последња посета одређеног скупа.

Подсетимо се да Марковљево својство каже да је, за свако n , будући процес $\{X_n, X_{n+1}, \dots\}$ независан од прошлог процеса $\{X_0, \dots, X_n\}$ ако знамо садашњост X_n . Сада ћемо показати да ово тврђење остаје тачно и кад детерминистички тренутак n заменимо случајним Марковљевим моментом τ . Ово јаче својство зваћемо *јаким својством Маркова* или *јаким Марковљевим својством*.

Теорема 1.2. (*Јако Марковљево својство*) Претпоставимо да је $\{X_n, n \geq 0\}$ хомоген ланац Маркова. Нека је τ Марковљев моменат. Тада, ако је $\tau < \infty$ и $X_\tau = i$, будући процес $\{X_{\tau+n}, n \geq 0\}$ је независан од прошлог процеса $\{X_0, \dots, X_\tau\}$ и има исти закон расподеле као и оригинални процес који започет из стања i .

Доказ. Нека је τ Марковљев моменат. Нека је A било који догађај одређен прошлостју $\{X_0, \dots, X_\tau\}$ ако је $\tau < \infty$. Пошто је $(X_0, \dots, X_\tau)I\{\tau < \infty\} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (X_0, \dots, X_n)I\{\tau = n\}$, свако такво A мора имати својство да, за свако $n \in \mathbb{Z}_+$, $A \cap \{\tau = n\}$ је одређено са $(X_0, \dots, X_n)$. Показаћемо да за свако такво A ,

$$P\{X_{\tau+1} = j_1, X_{\tau+2} = j_2, \dots; A | X_\tau, \tau < \infty\} = P\{X_{\tau+1} = j_1, X_{\tau+2} = j_2, \dots | X_\tau, \tau < \infty\} P\{A | X_\tau, \tau < \infty\}$$

и да је

$$P\{X_{\tau+1} = j_1, X_{\tau+2} = j_2, \dots | X_\tau = i, \tau < \infty\} = p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \dots$$

Имамо:

$$\begin{aligned} P\{X_{\tau+1} = j_1, X_{\tau+2} = j_2, \dots; A, \tau = n\} &\stackrel{(a)}{=} P\{X_{n+1} = j_1, X_{n+2} = j_2, \dots; A, X_n = i, \tau = n\} \\ &\stackrel{(b)}{=} P\{X_{n+1} = j_1, X_{n+2} = j_2, \dots | X_n = i, A, \tau = n\} P\{X_n = i, A, \tau = n\} \\ &\stackrel{(v)}{=} P\{X_{n+1} = j_1, X_{n+2} = j_2, \dots | X_n = i\} P\{X_n = i, A, \tau = n\} \\ &\stackrel{(g)}{=} p_{i,j_1} p_{j_1,j_2} \dots P\{X_n = i, A, \tau = n\}, \end{aligned}$$

где је (a) тривијално, (b) важи по дефиницији условне вероватноће, (v) због чињенице да је $A \cup \{\tau = n\}$ одређено са $(X_0, \dots, X_n)$ и (d) због тога што је (X_n) хомоген Марковљев ланац са вероватноћама прелаза p_{ij} . Наше тврдње се сад лако добијају сабирањем по свим n (одакле се појављује $\tau < \infty$) и онда дељењем обе стране са $P\{X_\tau = i, \tau < \infty\}$. $\square$

1.3.3 Повратна и пролазна стања

Дефиниција 1.9. Нека је $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ Марковљев ланац. Стање i је *повратно* ако је

$$P\{X_n = i \text{ за неко } n \geq 1 | X_0 = i\} = 1,$$

тј. ако је вероватноћа повратка система у стање i при услову да је он у почетном тренутку у том стању једнака 1. Стање i је *пролазно* ако важи строга неједнакост

$$P\{X_n = i \text{ за неко } n \geq 1 | X_0 = i\} < 1.$$

Поставља се питање одређивања потребног и довољног услова да је неко стање i повратно. Због тога уводимо и следеће ознаке:

Дефиниција 1.10. Нека је

$$v_{ij}(n) = P\{X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j | X_0 = i\},$$

тј. нека је $v_{ij}(n)$ вероватноћа догађаја да систем први пут дође у стање j у тренутку n , ако је у почетном тренутку био у стању i .

Тада је вероватноћа догађаја да ће систем било кад доћи у стање j ако је i почетно стање дата са

$$v_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} v_{ij}(n).$$

По дефиницији сматрамо да је $v_{ij}(0) = 0$ за све i и j .

Дефиниција 1.11. Нека је $\{a_n\}$ низ реалних бројева такав да степени ред $G(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n s^n$ ковергира у неком интервалу $(-s_0, s_0)$, $s_0 > 0$. Овако дефинисану функцију $G(s)$ називамо *генераторном функцијом* низа $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Сада можемо да дефинишемо генераторне функције низова $\{p_{ij}(n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ и $\{v_{ij}(n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$:

$$(4) \quad P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}(n) s^n,$$

$$(5) \quad V_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} v_{ij}(n) s^n = \sum_{n=1}^{\infty} v_{ij}(n) s^n,$$

где је

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ако је } i = j, \\ 0 & \text{ако је } i \neq j \end{cases}.$$

Теорема 1.3. Важе следеће једнакости:

$$(6) \quad P_{ii}(s) = 1 + V_{ii}(s)P_{ii}(s),$$

$$(7) \quad P_{ij}(s) = V_{ij}(s)P_{jj}(s), \quad \text{ако је } i \neq j.$$

Доказ. Нека су i и j фиксирана стања. За свако $n \in \mathbb{N}$ означимо

$$A_n = \{X_n = j\}, \quad B_n = \{X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\}.$$

Тада важи $A_n = A_n B_1 \cup \dots \cup A_n B_n$, при чему су $A_n B_1, \dots, A_n B_n$ међусобно дисјунктни догађаји, па добијамо

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= P\{X_n = j | X_0 = i\} = \sum_{k=1}^n P\{A_n B_k | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=1}^n P\{B_k | X_0 = i\} P\{A_n | B_k, X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=1}^n P\{B_k | X_0 = i\} P\{A_n | B_k\} \quad \text{Марковљево својство} \end{aligned}$$

и коначно

$$(8) \quad p_{ij}(n) = \sum_{k=1}^n v_{ij}(k) p_{jj}(n-k).$$

Користећи (4), (5) и (8), добијамо да је

$$\begin{aligned} V_{ij}(s)P_{jj}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_{ij}(n)s^n \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}(n)s^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \{v_{ij}(1)p_{jj}(n-1) + \dots + v_{ij}(n-1)p_{jj}(1) + v_{ij}(n)p_{jj}(0)\} s^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n)s^n = \begin{cases} P_{ij}(s) & \text{ако је } i \neq j, \\ P_{ii}(s) - 1 & \text{ако је } i = j \end{cases}. \quad \square \end{aligned}$$

Последица 1.1. Стање i је повратно ако и само ако је

$$(9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = +\infty.$$

Доказ. $\Rightarrow$ Нека је i повратно стање. Тада је

$$v_{ii} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_{ii}(n) = 1.$$

Према Абеловој теореме,

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} V_{ii}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_{ii}(n) = v_{ii} = 1.$$

Из једнакости (6), следи да је $P_{ii}(s)(1 - V_{ii}(s)) = 1$, па одатле следи да је $\lim_{s \rightarrow 1^-} P_{ii}(s) = +\infty$. Пошто је, према Абеловој теорему, $\lim_{s \rightarrow 1^-} P_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}(n)$, то је $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}(n) = +\infty$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Слично је и у обрнутом смеру. Претпоставимо да је $\sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}(n) = +\infty$. Тада, на основу Абелове теореме, важи $\lim_{s \rightarrow 1^-} P_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{ii}(n) = +\infty$. Из једнакости следи да је $\lim_{s \rightarrow 1^-} V_{ii}(s) = 1$. Поново применимо Абелову теорему, и добијемо $1 = \lim_{s \rightarrow 1^-} V_{ii}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_{ii}(n) = v_{ii}$. Дакле, $v_{ii} = 1$, чиме смо доказали да је i повратно стање. $\square$

Напомена. Абелова теорема која се овде помиње гласи: Ако је $a_n \geq 0$ за $n \in \mathbb{N}_\times$ и ако ред $G(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$ конвергира за $|s| < 1$, онда важи $\lim_{s \rightarrow 1} G(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, независно од тога да ли је збир $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ коначан или бесконачан.

1.3.4 Средње време чекања повратка у дато стање

Означимо са τ_j тренутак првог доласка система у стање j , тј.

$$\tau_j = \min\{n \geq 1, X_n = j\}.$$

По дефиницији сматрамо да је $\tau_j = \infty$ ако систем никада не достигне стање j .

При томе $P\{\tau_i = \infty | X_0 = i\} > 0$ важи ако и само ако је стање i пролазно и у том случају сматрамо да је $E(\tau_i | X_0 = i) = \infty$.

Дефиниција 1.12. Средње време чекања повратка стања i дефинише се следећим једнакостима:

$$(10) \quad m_i = E(\tau_i | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} n v_{ii}(n) \quad \text{ако је } i \text{ повратно стање,}$$

$$(11) \quad m_i = E(\tau_i | X_0 = i) = \infty \quad \text{ако је } i \text{ пролазно стање.}$$

Приметимо да збир који фигурише на десној страни у једнакости (10) може бити и коначан и бесконачан.

1.3.5 Стационарне расподеле

У општем случају се не може очекивати да ланац Маркова $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ конвергира ка неком фиксираним стању, али би при одређеним условима могло да се очекује да у неком смислу постоји гранична расподела.

Дефиниција 1.13. Расподела вероватноћа $(\pi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, где је $\sum_i \pi_i = 1$, је *стационарна расподела* за хомоген Марковљев ланац $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ са скупом стања $\mathbb{Z}$, ако при услову да је почетна расподела вероватноћа по стањима

$$(12) \quad p_i^{(0)} = \pi_i, \quad \text{за све } i \in \mathbb{Z},$$

расподела у наредним тренуцима времена остаје непромењена, тј. ако за све $n \in \mathbb{N}$ важи

$$(13) \quad p_i^{(n)} = P\{X_n = i\} = \pi_i, \quad \text{за све } i \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1.4. Расподела $(\pi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ је стационарна за ланац Маркова ако и само ако је

$$(14) \quad \pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}, \quad \text{за све } j \in \mathbb{Z},$$

и, генерално, ако и само ако за сваки природан број n важи

$$(15) \quad \pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}(n), \quad \text{за све } j \in \mathbb{Z}.$$

Доказ. Нека је $(\pi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ стационарна расподела. То значи да је $p_i^{(n)} = \pi_i$ за све $i \in \mathbb{Z}$. На основу теореме Колмогоров-Чепмена знамо да је $p_j^{(n)} = P\{X_n = j\} = \sum_{i \in S} p_i p_{ij}(n)$. Из претходног следи да је $\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij}(n)$.

Сада претпоставимо да је почетна расподела вероватноћа по стањима дата са (12) и да важи једнакост (15). Користећи опет чињеницу да је $p_j^{(n)} = P\{X_n = j\} = \sum_{i \in S} p_i^{(0)} p_{ij}(n)$ као и једнакости (12) и (15), добијамо да је:

$$p_j^{(n)} = \sum_{i \in S} p_i^{(0)} p_{ij}(n) = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}(n) = \pi_j.$$

Ако са π означимо расподелу $\pi = (\pi_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, при чему P представља матрицу вероватноћа преласка, тада једнакост (14) можемо да напишемо у матричном облику

$$\pi = \pi \cdot P. \quad \square$$

1.4 Мартингали-основна својства

Један од начина на који се може анализирати случајно лутање, којим се бавимо у овом раду, јесте у контексту теорије мартингала. У овом поглављу ћемо увести мартингале, а онда ћемо у трећој глави анализирати случајно лутање као мартингал.

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноћа.

Дефиниција 1.14. Фамилија $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ σ -подалгебри σ -алгебре $\mathcal{F}$ таквих да за свако $n \geq 0$ важи $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ зове се *филтрација*. [3]

Дефиниција 1.15. Низ случајних величина $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ је *адаптиран* на филтрацију $\mathcal{F}$ ако је за свако $n \geq 0$ случајна променљива Y_n $\mathcal{F}_n$ -мерљива, тј. ако је $\sigma(Y_n) \subset \mathcal{F}_n$. [3]

Дефиниција 1.16. Низ $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ се назива *мартингал* ако важи

1. $E(|Y_n|) < \infty$ за свако $n \geq 0$,
2. $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ је адаптиран на $\mathcal{F}$,
3. $E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) = Y_n$ за свако $n \geq 0$.

Дефиниција 1.17. Низ $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ се назива *субмартингал* ако важи

1. $E(Y_n^+) < \infty$ за свако $n \geq 0$,
2. $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ је адаптиран на $\mathcal{F}$,
3. $E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq Y_n$ за свако $n \geq 0$.

Дефиниција 1.18. Низ $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ се назива *супермартингал* ако важи

1. $E(Y_n^-) < \infty$ за свако $n \geq 0$,
2. $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ је адаптиран на $\mathcal{F}$,
3. $E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq Y_n$ за свако $n \geq 0$.

Дефиниција 1.19. Низ случајних величина $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ је *предвидив* ако је $S_0 = 0$ и S_n $\mathcal{F}_{n-1}$ -мерљива за свако $n \geq 1$.

Дефиниција 1.20. Низ случајних величина $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ је *неоппадајући* ако је $P\{Y_n \leq Y_{n+1}\} = 1$ за свако $n \geq 0$.

Теорема 1.5. (*Дообова декомпозиција*) Субмартингал $(X_n, \mathcal{F}_n)$ са коначним очекивањем се може представити у облику $X_n = M_n + S_n$, где је $(M_n, \mathcal{F}_n)$ мартингал и $(S_n, \mathcal{F}_n)$ неоппадајући предвидив процес. Ова декомпозиција је јединствена.

Доказ.

Дефинишемо $S_0 := 0, M_0 := Y_0$, и за свако $n \geq 0$

$$\begin{aligned} S_n : &= S_{n-1} + E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}, \\ M_n : &= X_n - S_n. \end{aligned}$$

Пошто је

$$E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1},$$

следи да је

$$S_n \geq S_{n-1}, n \in \mathbb{N}$$

што значи да је $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ неоппадајући низ.

Пошто је $S_{n-1} \mathcal{F}_{n-2} \subset \mathcal{F}_{n-1}$ мерљив, а $E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1} \mathcal{F}_{n-1}$ мерљив, то је $S_n \mathcal{F}_{n-1}$ мерљив. Тиме смо доказали да је низ $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ предвидив, па нам остаје да докажемо да је $(M_n, \mathcal{F}_n)$ мартингал. Зато рачунамо

$$\begin{aligned} E(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= E(X_n - S_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - S_n \\ &= (X_{n-1} + S_n - S_{n-1}) - S_n \\ &= X_{n-1} - S_{n-1} \\ &= M_{n-1}. \end{aligned}$$

Преостало нам је још да покажемо јединственост ове декомпозиције. Претпоставимо супротно, да постоји још једна декомпозиција која задовољава услове теореме $X = M' + S'$. Тада је

$$X_{n+1} - X_n = M'_{n+1} - M'_n + S'_{n+1} - S'_n = M_{n+1} - M_n + S_{n+1} - S_n,$$

одакле следи да је

$$E(M'_{n+1} - M'_n + S'_{n+1} - S'_n | \mathcal{F}_n) = E(M_{n+1} - M_n + S_{n+1} - S_n | \mathcal{F}_n),$$

тј.

$$S'_{n+1} - S'_n = S_{n+1} - S_n.$$

Како је $S_0 = S'_0 = 0$, то итеративно добијамо да је $S_n = S'_n$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$, па пошто је, $X = M + S = M' + S'$, то следи да је и $M = M'$, тј. да је декомпозиција јединствена. $\square$

2 Случајно лутање као ланац Маркова

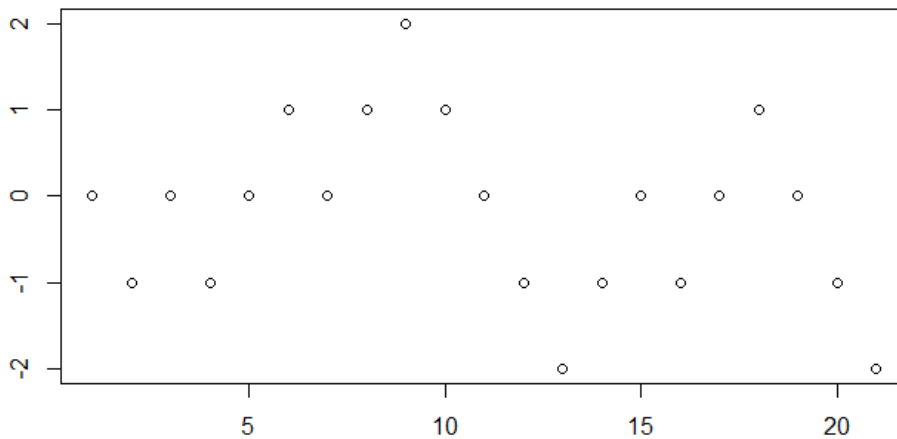
2.1 Једнодимензионо случајно лутање

Нека је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ независних једнако расподељених случајних величина са расподелом вероватноћа:

$$P\{X_k = 1\} = p, \quad P\{X_k = -1\} = 1 - p, \quad p \in (0, 1).$$

Низ случајних величина $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ таквих да је $S_0 = 0$ скоро сигурно и $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ за $n \in \mathbb{N}$ назива се *једнодимензионо случајно лутање*. Уколико је $p = \frac{1}{2}$, онда је у питању *једнодимензионо симетрично случајно лутање*.

Геометријски гледано, случајна величина S_n представља положај честице која полази из тачке 0, и која у јединици времена прави јединични корак у позитивном смеру са вероватноћом p и у негативном смеру са вероватноћом $1 - p$.



Слика 1: Део реализације једнодимензионог случајног лутања

Приметимо да је низ $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ хомоген ланац Маркова. Вероватноће преласка одређене су једнако-стима

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \text{ако је } j = i + 1, \\ 1 - p, & \text{ако је } j = i - 1, \\ 0, & \text{ако је } j \notin \{i - 1, i + 1\}. \end{cases}$$

Почетна расподела вероватноћа по стањима је дата са: $p_0^{(0)} = 1$, $p_i^{(0)} = 0$ за $i \neq 0$.

Вероватноћа $p_{ij}(n)$ преласка из тачке i у тачку j у n корака лако се одређује. Нека је честица при кретању из i до j направила x корака у позитивном смеру и y корака у негативном смеру. Тада је $x + y = n$ и $x - y = j - i$, одакле добијамо да је $x = (n + j - i)/2$, $y = (n - j + i)/2$. Дакле, број $n + j - i$ мора бити паран. За $p_{ij}(n)$ добијамо: $p_{ij}(n) = 0$ ако је $n + j - i$ непаран број и

$$p_{ij}(n) = \binom{n}{(n+j-i)/2} p^{(n+j-i)/2} (1-p)^{(n-j+i)/2}, \quad \text{ако је } n \text{ паран број.}$$

Сада ћемо испитати да ли је произвољно стање $i \in \mathbb{Z}$ повратно или пролазно у зависности од вредности p . Из једнакости добијамо вероватноћу повратка у тачку i после $2n$ корака:

$$p_{ii}(2n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

Користећи Стирлингову формулу $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, при $n \rightarrow \infty$, добијамо да при $n \rightarrow \infty$ важи

$$p_{ii}(2n) = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n (1-p)^n \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^2} p^n (1-p)^n = \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Сада ћемо испитати конвергентност реда $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)$ за произвољно $i \in \mathbb{Z}$.

1) Ако је $p = \frac{1}{2}$:

$$p_{ii}(2n) \sim \frac{4p(1-p)}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(2n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = +\infty,$$

па на основу теореме закључујемо да је стање i повратно. Дакле, за $p = \frac{1}{2}$ сва стања $i \in \mathbb{Z}$ су повратна.

2) Ако је $p \neq \frac{1}{2}$:

$$4p(1-p) < 1 \Rightarrow p_{ii}(2n) \sim \frac{4p(1-p)}{\sqrt{\pi n}} < \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(2n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < +\infty,$$

па на основу теореме закључујемо да је стање i пролазно. Дакле, за $p \neq \frac{1}{2}$ сва стања $i \in \mathbb{Z}$ су пролазна.

Одредићемо још вероватноћу v_{ij} догађаја да ће честица полазећи из стања i стићи у стање j . Размотрићемо 3 случаја: кад је $i < j$, кад је $i > j$ и кад је $i = j$.

1. Нека је $i < j$. Очигледно важи $v_{ij} = v_{01}^{j-i}$. На основу формуле потпуне вероватноће добијамо да важи

$$v_{01} = p + (1-p)v_{01}^2,$$

одакле следи да је

$$v_{01} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2(1-p)} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2(1-p)}.$$

Дакле, $v_{01} = \frac{p}{1-p}$ или $v_{01} = 1$. Како је v_{01} вероватноћа, знамо да важи $v_{01} \in [0, 1]$. Пошто је $\frac{p}{1-p} > 1$ за $p > \frac{1}{2}$, то за ове вредности добијамо да је $v_{01} = 1$. Дакле, добијамо да је за $i < j$:

$$v_{01} = \begin{cases} \frac{p}{1-p}, & \text{ако је } 0 \leq p < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{ако је } \frac{1}{2} \leq p \leq 1. \end{cases}$$

Из претходног следи да је

$$(16) \quad v_{ij} = \begin{cases} (\frac{p}{1-p})^{j-i}, & \text{ако је } 0 \leq p < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{ако је } \frac{1}{2} \leq p \leq 1. \end{cases}$$

2. Нека је $i > j$. Тада је $v_{ij} = v_{10}^{i-j}$. На основу формуле потпуне вероватноће добијамо да важи

$$v_{10} = 1 - p + pv_{10}^2,$$

одакле следи да је

$$v_{10} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4p(1-p)}}{2p} = \frac{1 \pm (2p-1)}{2p}.$$

Дакле, $v_{10} = \frac{1-p}{p}$ или $v_{10} = 1$. Како је v_{10} вероватноћа, знамо да важи $v_{10} \in [0, 1]$. Пошто је $\frac{1-p}{p} > 1$ за $p < \frac{1}{2}$, то за ове вредности добијамо да је $v_{10} = 1$. Дакле, добијамо да је за $i > j$:

$$v_{10} = \begin{cases} \frac{1-p}{p}, & \text{ако је } \frac{1}{2} < p \leq 1, \\ 1, & \text{ако је } 0 \leq p \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Из претходног следи да је

$$(17) \quad v_{ij} = \begin{cases} (\frac{1-p}{p})^{i-j}, & \text{ако је } \frac{1}{2} < p \leq 1, \\ 1, & \text{ако је } 0 \leq p \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

3. Остао нам је још случај кад је $i = j$. На основу формуле потпуне вероватноће важи

$$v_{ii} = pv_{i+1,i} + (1-p)v_{i-1,i}.$$

Користећи формуле (16) и (17), добијамо да је

$$\begin{aligned}
v_{ii} &= \begin{cases} p \cdot 1 + (1-p)\left(\frac{p}{1-p}\right)^{i-(i-1)}, & \text{ако је } 0 \leq p \leq \frac{1}{2}, \\ p\left(\frac{1-p}{p}\right)^{i+1-i} + (1-p) \cdot 1, & \text{ако је } \frac{1}{2} < p \leq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2p, & \text{ако је } 0 \leq p \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-p), & \text{ако је } \frac{1}{2} < p \leq 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

тј. $v_{ii} = 1 - |2p - 1|$.

Овде смо опет видели да је свако стање i повратно ако и само ако је $p = \frac{1}{2}$.

2.1.1 Симулација

Сада ћемо симулирати у R -у једно једнодимензионо симетрично случајно лутање. Прво ћемо написати функцију `slucajno_lutanje(x,n)`. Први аргумент те функције, x , представља почетни положај честице, а други аргумент, n , представља број корака у случајном лутању. Ова функција враћа положаје честице у првих n корака случајног лутања.

```
slucajno_lutanje <- function(x,n){
  s <- numeric(n)
  a <- sample(c(-1,1),n,replace=TRUE)
  s[1]=x
  for(i in 1:n)
    s[i+1]=s[i]+a[i]
  return(s)
}
```

Када позовемо ту функцију са аргументима 0 и 20,

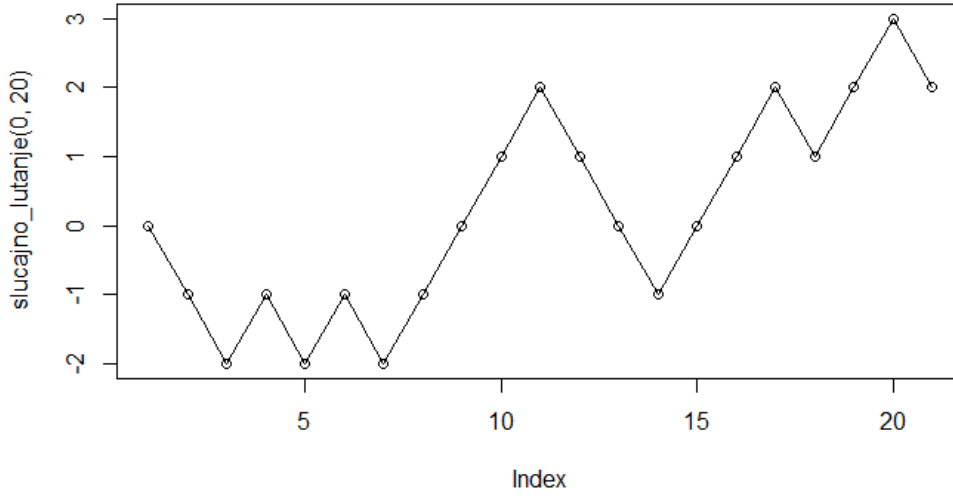
```
set.seed(6)
slucajno_lutanje(0,20)
```

она нам враћа положаје честице која је кренула из стања 0 у првих 20 корака

```
[1] 0 -1 0 -1 0 1 2 3 2 1 2 3 4 5 6 5 4 3 4 3 4.
```

Поред тога, можемо и нацртати трајекторију за првих 20 корака случајног лутања које полази из тачке 0.

```
plot(slucajno_lutanje(0,20),type="o")
```



Слика 2: Трајекторија за првих 20 корака случајног лутања

2.2 Уопштено једнодимензионо случајно лутање

У претходном делу смо претпостављали да се честица у сваком кораку може померити за тачно један корак у било коју од две стране, а сада ћемо претпоставити да се честица у сваком тренутку може померити у било коју од две стране и за неки други цео број корака. Навешћемо сад неке примере уопштеног једнодимензионалног случајног лутања.

Пример 2.1. У овом примеру претпостављамо да се честица у свакој јединици времена са вероватноћом p_k помера за k корака, при чему је $k \in \mathbb{Z}$. Дакле, честица у сваком кораку може да се помери у било коју страну за било који цео број корака укључујући и 0, тј. може и да остане у истом месту.

Дакле, разматрамо случајно лутање честице која полази из тачке 0 и у јединици времена прави корак дужине k са вероватноћом p_k где је $k \in \mathbb{Z}$. Кораци у лутању представљају низ случајних величина $X_1, X_2, \dots$ са истом расподелом вероватноћа $P\{X_i = k\} = p_k, k \in \mathbb{Z}$, тј.

$$X_i : \begin{pmatrix} \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \\ \cdots & p_{-2} & p_{-1} & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Положај честице после $n \in \mathbb{N}_0$ корака је случајна величина S_n дефинисана једнакостима

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \\ S_n &= \sum_{i=0}^n X_i, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Низ $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ представља случајно лутање. Матрица вероватноћа преласка је

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & p_{-2} & p_{-1} & p_0 & p_1 & p_2 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & p_{-2} & p_{-1} & p_0 & p_1 & p_2 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & p_{-2} & p_{-1} & p_0 & p_1 & p_2 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Пример 2.2. Овај пример је специјалан случај претходног, где ћемо претпоставити да је $p_k = p_{-k}$ за сваки природан број k . Дакле, овде ће бити

$$X_i : \begin{pmatrix} \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \\ \cdots & p_2 & p_1 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}.$$

У овом случају низ $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ који је дефинисан са

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \\ S_n &= \sum_{i=0}^n X_i, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

представља симетрично случајно лутање. Матрица вероватноћа преласка је

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & p_2 & p_1 & p_0 & p_1 & p_2 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & p_2 & p_1 & p_0 & p_1 & p_2 & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & p_2 & p_1 & p_0 & p_1 & p_2 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Пример 2.3. У овом примеру ћемо такође претпоставити да се честица у свакој јединици времена може померити у било коју страну за било који цео број корака, с тим што су овде вероватноће p_k дате са

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, \\ p_k &= p_{-k} = \frac{1}{2^{(k+2)}}. \end{aligned}$$

Пошто је

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k &= p_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k+2)}} \\ &= \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

то су

$$X_i : \begin{pmatrix} \cdots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots \\ \cdots & p_2 & p_1 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

расподеле вероватноћа случајних величина X_i , $i \in \mathbb{N}$, које представљају кораке у случајном лутању. Низ $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ који је дефинисан са

$$\begin{aligned} S_0 &= 0, \\ S_n &= \sum_{i=0}^n X_i, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

представља симетрично случајно лутање. Матрица вероватноћа преласка је

$$P = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ddots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \ddots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Пример 2.4. Још једно уопштење случајног лутања би добили ако би претпоставили да се честица у свакој јединици времена може померити за ограничен број корака, тј. да је $p_k = p_{-k} = 0$ за $k > k_0$ где је k_0 неки природан број. Ако још претпоставимо да је $p_k = p_{-k}$, добијамо још једно симетрично случајно лутање. Овде матрица вероватноћа преласка има следећи облик

$$P = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & p_k & \cdots & p_1 & p_0 & p_1 & \cdots & p_k & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & p_k & \cdots & p_1 & p_0 & p_1 & \cdots & p_k & 0 \\ \ddots & \ddots & 0 & p_k & \cdots & p_1 & p_0 & p_1 & \cdots & p_k \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

2.2.1 Симулација

Сада ћемо симулирати у R -у једно уопштење једнодимензионог симетричног случајног лутања из Примера 2.4. За потребе ове симулације ћемо претпоставити да је $p_0 = p_1 = \cdots = p_{k_0} = \frac{1}{2k_0+1}$.

Прво ћемо написати функцију `uopsteno_slucajno_lutanje(x,n,k_0)`. Први аргумент те функције, `x`, представља почетни положај честице, други аргумент, `n`, представља број корака у случајном лутању, а трећи аргумент, `k_0`, представља максималан број корака који честица може да направи у јединици времена. Функција враћа положаје честице у првих n корака случајног лутања.

```
uopsteno_slucajno_lutanje<-function(x,n,k_0){
  s<-numeric(n)
```

```

a<-sample(seq(-k_0,k_0),n,replace=TRUE)

s[1]<-x
for(i in 1:n)
  s[i+1]<-s[i]+a[i]

return(s)
}

```

Када позовемо ту функцију са аргументима 0, 20 и 3,

```

set.seed(2)
uopsteno_slucajno_lutanje(0,20,3)

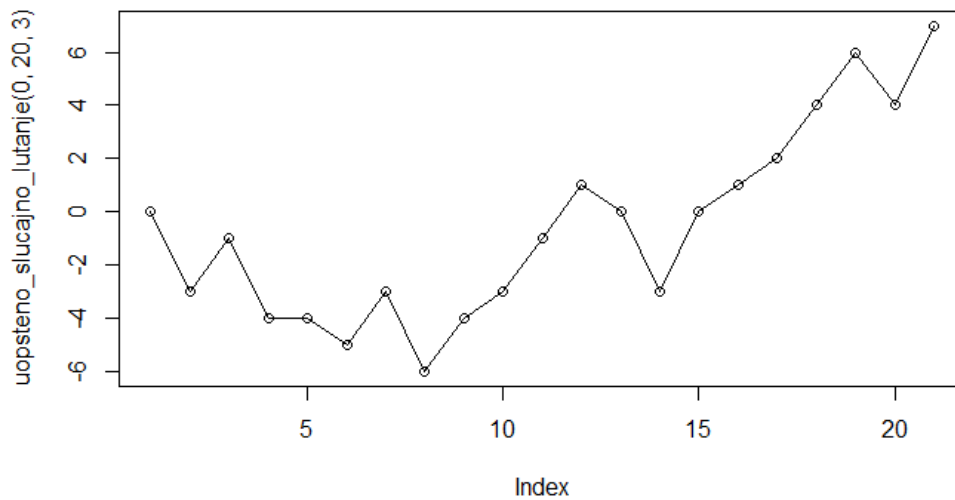
```

она нам враћа положаје честице која је кренула из стања 0 у првих 20 корака

```
[1] 0 1 4 6 8 5 6 3 3 4 1 -1 -2 -5 -6 -4 -6 -7 -4 -1 2.
```

Поред тога, можемо и нацртати трајекторију за првих 20 корака случајног лутања које полази из тачке 0, и у сваком тренутку може направити корак максималне дужине 3

```
plot(uopsteno_slucajno_lutanje(0,20,3),type="o")
```



Слика 3: Трајекторија за првих 20 корака случајног лутања

2.3 Једноставно случајно лутање у две димензије

Поред једнодимензионог случајног лутања могуће је увести и случајно лутање у две димензије.

Нека је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ независних једнако расподељених случајних величина дефинисаних на $\mathbb{Z}^2$ са расподелом вероватноћа:

$$P\{X_k = (0, 1)\} = p, \quad P\{X_k = (0, -1)\} = q, \quad P\{X_k = (1, 0)\} = r, \quad P\{X_k = (-1, 0)\} = 1 - (p + q + r).$$

Низ случајних величина $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ таквих да је $S_0 = 0$ скоро сигурно и $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ за $n \in \mathbb{N}$ назива се *једноставно случајно лутање*. Уколико је $p = q = r = 1 - (p + q + r) = \frac{1}{4}$, онда је у питању *једноставно симетрично случајно лутање у две димензије*. [5]

Геометријски гледано, случајна величина S_n представља положај честице која полази из тачке $(0, 0)$ и која у јединици времена прави јединични корак у позитивном или негативном смеру по једној од две координатне осе (са једнаком вероватноћом, у случају симетричног случајног лутања).

Ако је $x \in \mathbb{Z}^2$, онда ћемо са x^1 означавати хоризонталну, а са x^2 вертикалну координату. То значи да је $S_n = (S_n^1, S_n^2) = (\sum_{i=1}^n X_i^1, \sum_{i=1}^n X_i^2)$.

У наставку ћемо се бавати једноставним симетричним случајним лутањем у две димензије.

Покажимо да важи:

Теорема 2.1. $(S_n^1)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ је случајно лутање. $(S_n^2)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ је, такође, случајно лутање. Та два случајна лутања нису независна.

Доказ. Пошто су случајне величине X_n , $n \in \mathbb{N}$ међусобно независне, онда су независне и случајне величине X_n^1 , $n \in \mathbb{N}$. Поред тога, оне су и једнако расподељене са расподелом вероватноћа:

$$\begin{aligned} P\{X_n^1 = 0\} &= P\{X_n = (0, 1)\} + P\{X_n = (0, -1)\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ P\{X_n^1 = 1\} &= P\{X_n = (1, 0)\} = \frac{1}{4} \\ P\{X_n^1 = -1\} &= P\{X_n = (-1, 0)\} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Дакле, $(S_n^1)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ је сума независних једнако расподељених случајних величина, па самим тим и случајно лутање. Није у питању једноставно случајно лутање јер случајна величина X_n^1 може узети и вредност 0.

Аналогно се показује и да је $(S_n^2)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, такође, случајно лутање.

Међутим, случајне величине X_n^1 и X_n^2 нису независне, јер, ако једна узме вредност 0, друга мора узети ненула вредност. Одатле следи и да случајна лутања $(S_n^1)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ и $(S_n^2)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ нису независне. $\square$

Размотримо сада промену координатног система. Ротирајмо координатне осе за 45° . Нека је

$$R_n = (R_n^1, R_n^2) := (S_n^1 + S_n^2, S_n^1 - S_n^2).$$

Тада важе следеће теореме:

Теорема 2.2. $(R_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ је случајно лутање у две димензије. $(R_n^1)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ и $(R_n^2)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ су једнодимензионална

случајна лутања. Случајни процеси $(R_n^1)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ и $(R_n^2)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ су међусобно независни.

Доказ. Знамо да је $R_n^1 = \sum_{i=1}^n (X_i^1 + X_i^2)$, $R_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i^1 - X_i^2)$. Дакле, $R_n = \sum_{i=1}^n Y_n$, где је $Y_n = (X_n^1 + X_n^2, X_n^1 - X_n^2)$. Знамо да је $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ низ независних једнако расподељених случајних величина, па одатле седи да је и $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, такође, низ независних једнако расподељених случајних величина. Одатле следи да је $(R_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ случајно лутање у две димензије.

Слично томе, закључујемо да су $(R_n^1)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ и $(R_n^2)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ једнодимензионална случајна лутања.

Да бисмо доказали да су случајна лутања $(R_n^1)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ и $(R_n^2)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ независни случајни процеси, прво ћемо показати да су случајне величине $Y_n^1 = X_n^1 + X_n^2$ и $Y_n^2 = X_n^1 - X_n^2$ независне за свако n . Вредности које узимају случајне величине Y_n^1 и Y_n^2 су 1 и -1. Дакле, имамо

$$\begin{aligned} P\{Y_n^1 = 1, Y_n^2 = 1\} &= P\{X_n = (1, 0)\} = \frac{1}{4}, \\ P\{Y_n^1 = -1, Y_n^2 = -1\} &= P\{X_n = (-1, 0)\} = \frac{1}{4}, \\ P\{Y_n^1 = 1, Y_n^2 = -1\} &= P\{X_n = (0, 1)\} = \frac{1}{4}, \\ P\{Y_n^1 = -1, Y_n^2 = 1\} &= P\{X_n = (0, -1)\} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Одавде следи да је

$$P\{Y_n^1 = 1\} = P\{Y_n^1 = -1\} = \frac{1}{2} \text{ и } P\{Y_n^2 = 1\} = P\{Y_n^2 = -1\} = \frac{1}{2},$$

па је

$$P\{Y_n^1 = y_1, Y_n^2 = y_2\} = P\{Y_n^1\} \cdot P\{Y_n^2 = y_2\} \text{ за свако } y_1, y_2 \in \{-1, 1\}. \quad \square$$

Лема 2.1. Важи

$$P\{S_{2n} = 0\} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}.$$

Доказ. Приметимо да је

$$\begin{aligned} P\{S_{2n} = 0\} &= P\{R_{2n} = 0\} \\ &= P\{R_{2n}^1 = 0, R_{2n}^2 = 0\} \\ &= P\{R_{2n}^1 = 0\} \cdot P\{R_{2n}^2 = 0\}. \end{aligned}$$

(R_{2n}^1) и (R_{2n}^2) су једноставна симетрична случајна лутања, па је

$$P\{R_{2n}^1 = 0\} = P\{R_{2n}^2 = 0\} = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}},$$

одакле следи да је

$$P\{S_{2n} = 0\} = \binom{2n}{n}^2 \frac{1}{2^{4n}}. \quad \square$$

Теорема 2.3. Симетрично случајно лутање у две димензије је повратно.

Доказ. Као што знамо, случајно лутање у две димензије је повратно ако је свако стање $i \in \mathbb{Z}^2$ повратно. Из последице 2.1. знамо да је стање i повратно ако и само ако је $\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}(n) = +\infty$.

Нека је $i \in \mathbb{Z}^2$ произвољно. Како је $p_{ii}(n) = 0$ за сваки непаран број n , онда важи

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}(2n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\{S_{2n} = 0\}.$$

Користећи Стирлингову формулу из леме 2.1. добијамо да је

$$\begin{aligned} P\{S_{2n} = 0\} &= \binom{2n}{n}^2 \frac{1}{2^{4n}} \\ &= \left(\frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \right)^2 \cdot \frac{1}{2^{4n}} \\ &= \left(\frac{\left(\frac{2n}{e} \right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{\left(\left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \right)^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2^{4n}} \\ &= \left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2^{4n}} \\ &= \frac{2^{4n}}{\pi n} \cdot \frac{1}{2^{4n}} \\ &= \frac{1}{\pi n}. \end{aligned}$$

Дакле, за произвољно $i \in \mathbb{Z}^2$ добили смо да важи

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi n} = +\infty,$$

па смо доказали оно што је тражено. $\square$

3 Случајно лутање као мартингал

3.1 Примери

Након што смо се у првој глави упознали са мартингалима и њиховим својствима, сада ћемо навести неке примере мартингала, проверити да ли је симетрично случајно лутање мартингал, као и под којим условима су уопштења случајног лутања мартингали.

Пример 3.1. Ако је X_n низ независних случајних променљивих које задовољавају $E(X_n) = 0$ за $n \geq 1$, онда је низ $S_0 = 0, S_n = X_1 + \dots + X_n$ за $n \geq 1$ мартингал за низ $\{X_n : 1 \leq n < \infty\}$.

Пример 3.2. Ако је X_n низ независних случајних променљивих које задовољавају $E(X_n) = 0$ и $D(X_n) = \sigma^2$ за све $n \geq 1$, онда је низ $M_0 = 0, M_n = S_n^2 - n\sigma^2$ за $n \geq 1$ мартингал за $\{X_n : 1 \leq n < \infty\}$.

Како је $S_n^2 - n\sigma^2$ за $n \geq 1$ адаптиран на $\{X_n : 1 \leq n < \infty\}$, проверићемо још да ли важе и преостала два услова из дефиниције 1.16:

1)

$$\begin{aligned} E(|S_n^2 - n\sigma^2|) &= E(|(X_1 + \dots + X_n)^2 - n\sigma^2|) \\ &= E(|X_1^2 + \dots + X_n^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j - n\sigma^2|) \\ &= 0 < \infty, \text{ за } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} E(M_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) &= E((S_{n-1} + X_n)^2 - n\sigma^2 | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) \\ &= E(S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}X_n + X_n^2 - n\sigma^2 | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) \\ &= M_{n-1} \text{ за } n \geq 1. \end{aligned}$$

Како је S_{n-1}^2 функција од $\{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}$, то је условно очекивање првог сабирка S_{n-1}^2 . За други сабирак важи

$$E(S_{n-1}X_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) = S_{n-1}E(X_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}).$$

Даље је $E(X_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) = E(X_n) = 0$ јер X_n не зависи од $X_1, \dots, X_{n-1}$. Очекивање трећег сабирка рачунамо слично

$$E(X_n^2 | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) = E(X_n^2) = \sigma^2.$$

Из претходног следи да је

$$E(M_n | X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) = S_{n-1}^2 + \sigma^2 - n\sigma^2 = S_{n-1}^2 - (n-1)\sigma^2 = M_{n-1}.$$

Пример 3.3. Размотримо случајно лутање $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, где је $P\{X_i = -1\} = p$, $P\{X_i = 1\} = q$ за $i \in \mathbb{N}$, $p, q \in (0, 1)$, и $S_0 = k$. Тада је $S_n - n(p - q)$ мартингал.

Како је $S_n - n(p - q)$ за $n \geq 1$ адаптиран на $\{X_n : 1 \leq n < \infty\}$, проверићемо још да ли важе и преостала два услова из дефиниције 1.16:

$$E(|S_n - n(p - q)|) = 0 < \infty, \text{ за } n \in \mathbb{N},$$

и

$$\begin{aligned} E(S_{n+1} - (n+1)(p - q) | X_1, \dots, X_n) &= E(S_n + X_{n+1} - (n+1)(p - q) | X_1, \dots, X_n) \\ &= S_n + E(X_{n+1}) - (n+1)(p - q) \\ &= S_n + (p - q) - (n+1)(p - q) \\ &= S_n - n(p - q). \end{aligned}$$

Дакле, доказали смо да је $S_n - n(p - q)$ мартингал.

Пример 3.4. Симетрично случајно лутање је мартингал.

Проверавамо да ли важе сва три својства из дефиниције 1.16.:

- 1) $E(|S_n|) = 0 < \infty$,
- 2) $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је адаптиран на $\{X_n : 1 \leq n < \infty\}$,
- 3)

$$\begin{aligned} E(S_{n+1} | X_1, \dots, X_n) &= E(S_n + X_{n+1} | X_1, \dots, X_n) \\ &= E(S_n | X_1, \dots, X_n) + E(X_{n+1} | X_1, \dots, X_n) \\ &= S_n + E(X_{n+1}) \\ &= S_n. \end{aligned}$$

Дакле, симетрично случајно лутање јесте мартингал.

Сада ћемо проверити да ли су уопштења случајног лутања мартингали и под којим условима.

Пример 3.5. Размотримо да ли је случајно лутање из примеара 2.1 мартингал.

Како је $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ за $n \geq 1$ адаптиран на $\{X_n : 1 \leq n < \infty\}$, проверићемо још да ли важе и преостала два услова из дефиниције 1.16:

$$\begin{aligned} E(|S_n|) &= E(|X_1 + \dots + X_n|) \\ &\leq \sum_{i=1}^n E(|X_i|) < +\infty, \text{ за } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
E(S_{n+1}|X_1, \dots, X_n) &= E(S_n + X_{n+1}|X_1, \dots, X_n) \\
&= E(S_n|X_1, \dots, X_n) + E(X_{n+1}|X_1, \dots, X_n) \\
&= S_n + E(X_{n+1}).
\end{aligned}$$

Разликујемо три случаја:

- 1) Ако је $E(X_{n+1}) = 0$, онда је $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *мартингал*.
- 2) Ако је $E(X_{n+1}) \geq 0$, онда је $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *субмартингал*.
- 3) Ако је $E(X_{n+1}) \leq 0$, онда је $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *супермартингал*.

Пошто је $EX_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{+\infty} k(p_k - p_{-k})$ за свако $n \in \mathbb{N}$, онда важи

- 1) Ако је $p_k = p_{-k}$ за свако $k \in \mathbb{N}$, тј. ако је случајно лутање симетрично, онда је $EX_n = 0$ за сваки природан број n , па је $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ мартингал.
- 2) Ако је $p_k \geq p_{-k}$ за свако $k \in \mathbb{N}$, онда је $EX_n \geq 0$ за сваки природан број n , па је $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ субмартингал.
- 3) Ако је $p_k \leq p_{-k}$ за свако $k \in \mathbb{N}$, онда је $EX_n \leq 0$ за сваки природан број n , па је $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ супермартингал.

Пример 3.6. Размотримо да ли је случајно лутање из примера 2.2 мартингал.

Како је $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ за $n \geq 1$ адаптиран на $\{X_n : 1 \leq n < \infty\}$ и $E(S_n) < +\infty$ проверићемо још да ли важи трћи услов из дефиниције 1.16:

$$\begin{aligned}
E(S_{n+1}|X_1, \dots, X_n) &= E(S_n + X_{n+1}|X_1, \dots, X_n) \\
&= E(S_n|X_1, \dots, X_n) + E(X_{n+1}|X_1, \dots, X_n)
\end{aligned}$$

Како је S_n функција од $X_1, X_2, \dots, X_n$, то је $E(S_n|X_1, \dots, X_n) = S_n$. Осим тога, случајна величина X_{n+1} је независна од случајних величина $X_1, X_2, \dots, X_n$, па је $E(X_{n+1}|X_1, \dots, X_n) = EX_{n+1}$. Подсетимо се да је овај пример специјални случај претходног, где су вероватноће позитивних и негативних корака једнаке, тј. случајно лутање је симетрично. Због тога важи да је $EX_n = 0$ за свако n из $\mathbb{N}$. Из претходног следи да је

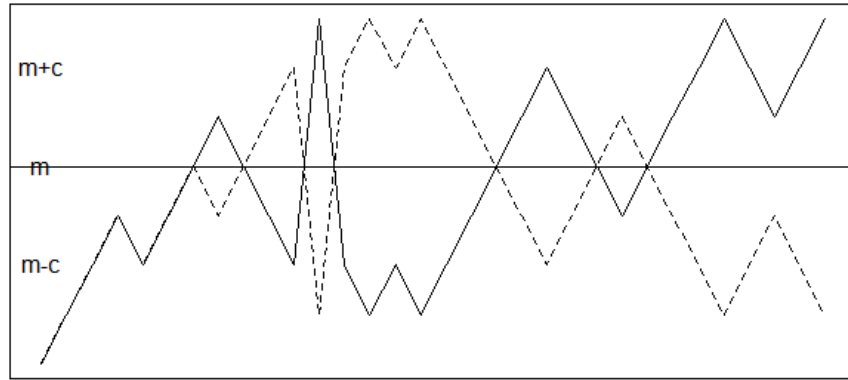
$$\begin{aligned}
E(S_{n+1}|X_1, \dots, X_n) &= S_n + E(X_{n+1}) \\
&= S_n + 0 \\
&= S_n,
\end{aligned}$$

па је ово случајно лутање мартингал.

Пример 3.7. У примерима 2.3. и 2.4. случајно лутање је исто симетрично, па су то, такође, примери мартингала.

3.2 Принцип рефлексии

Нека је $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ једноставно симетрично случајно лутање. Разматра се део трајекторије једноставног симетричног случајног лутања до тренутка n , који достиже ниво $m \in \mathbb{N}$ у неком тренутку $\tau_m \leq n$. Од тог тренутка, прави се рефлексована трајекторија која иде корак горе сваки пут кад оригинал иде корак доле, и обрнуто. Ако се оригинална трајекторија завршава изнад нивоа m у тренутку n , онда се рефлексована трајекторија завршава испод нивоа m у тренутку n , и обрнуто. Ако се оригинална трајекторија завршава у нивоу m у тренутку n , онда се и рефлексована трајекторија завршава у нивоу m у тренутку n . [6]



Слика 4: Рефлексована трајекторија

Нека је $m \in \mathbb{N}$ и $\tau_m = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n = m\}$.

Теорема. 3.1. (Принцип рефлексии) За $m, c \in \mathbb{N}$ важи

$$P\{S_n = m - c, \tau_m \leq n\} = P\{S_n = m + c\}.$$

Доказ. Посматра се део трајекторије једноставног симетричног случајног кретања до тренутка n . Број трајекторија које су достигле ниво m пре тренутка n , а у тренутку n су у нивоу $m - c$, једнак је броју трајекторија које су у нивоу $m + c$ у тренутку n . Доказ следи на основу претходне чињенице и на основу тога што је вероватноћа сваке трајекторије $\frac{1}{2^n}$. $\square$

Теорема. 3.2. За $m, n \in \mathbb{N}$ важи

- а) $P\{\tau_m \leq n\} = P\{S_n \notin [-m, m-1]\};$
- б) $P\{\tau_m = n\} = \frac{1}{2}[P\{S_{n-1} = m-1\} - P\{S_{n-1} = m+1\}].$

Доказ.

а) На основу принципа рефлексije и симетричности случајног кретања следи

$$\begin{aligned}
P\{\tau_m \leq n\} &= \sum_{b \in \mathbb{Z}} P\{S_n = b, \tau_m \leq n\} \\
&= \sum_{b \in \mathbb{Z}, b \geq m} P\{S_n = b\} + \sum_{b \in \mathbb{Z}, b < m} P\{S_n = b, \tau_m \leq n\} \\
&= P\{S_n \geq m\} + \sum_{b > m} P\{S_n = b\} \\
&= P\{S_n \geq m\} + P\{S_n > m\} \\
&= P\{S_n \geq m\} + P\{S_n < -m\} \\
&= P\{S_n \notin [-m, m-1]\}.
\end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}
P\{\tau_m = n\} &= P\{\tau_m \leq n\} - P\{\tau_m \leq n-1\} \\
&= P\{S_n \geq m\} + P\{S_n < -m\} - P\{S_{n-1} \geq m\} - P\{S_{n-1} < -m\} \\
&= P\{S_n \geq m\} + P\{S_n > m\} - P\{S_{n-1} \geq m\} - P\{S_{n-1} > m\} \\
&= \sum_{b \geq m} P\{S_n = b | S_{n-1} = b-1\} P\{S_{n-1} = b-1\} \\
&\quad + \sum_{b \geq m} P\{S_n = b | S_{n-1} = b+1\} P\{S_{n-1} = b+1\} \\
&\quad + \sum_{b > m} P\{S_n = b | S_{n-1} = b-1\} P\{S_{n-1} = b-1\} \\
&\quad + \sum_{b > m} P\{S_n = b | S_{n-1} = b+1\} P\{S_{n-1} = b+1\} \\
&\quad - P\{S_{n-1} \geq m\} - P\{S_{n-1} > m\} \\
&= \sum_{b \geq m} P\{X_n = 1\} P\{S_{n-1} = b-1\} + \sum_{b \geq m} P\{X_n = -1\} P\{S_{n-1} = b+1\} \\
&\quad + \sum_{b > m} P\{X_n = 1\} P\{S_{n-1} = b-1\} + \sum_{b > m} P\{X_n = -1\} P\{S_{n-1} = b+1\} \\
&\quad - P\{S_{n-1} \geq m\} - P\{S_{n-1} > m\} \\
&= \frac{1}{2} [P\{S_{n-1} \geq m-1\} + P\{S_{n-1} \geq m+1\}] \\
&\quad + \frac{1}{2} [P\{S_{n-1} > m-1\} + P\{S_{n-1} > m+1\}] - P\{S_{n-1} \geq m\} - P\{S_{n-1} > m\} \\
&= P\{S_{n-1} > m-1\} + \frac{1}{2} P\{S_{n-1} = m-1\} \\
&\quad + P\{S_{n-1} > m\} + \frac{1}{2} P\{S_{n-1} = m+1\} - P\{S_{n-1} \geq m\} - P\{S_{n-1} > m\} \\
&= \frac{1}{2} P\{S_{n-1} = m-1\} + \frac{1}{2} P\{S_{n-1} = m+1\} - P\{S_{n-1} = m+1\} \\
&= \frac{1}{2} [P\{S_{n-1} = m-1\} - P\{S_{n-1} = m+1\}]. \quad \square
\end{aligned}$$

Последица 3.1. За $m, n \in \mathbb{N}$ важи

$$P\{\tau_m = n\} = \frac{m}{n} P\{S_n = m\}.$$

Доказ. Подсетимо се идентитета које ћемо користити у овом доказу

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}, \quad \binom{n-1}{k} = \frac{n-k}{n} \binom{n}{k}.$$

Користећи претходне идентитете добијамо да је

$$\begin{aligned} P\{S_{n-1} = m-1\} &= 2^{-(n-1)} \binom{n-1}{\frac{n+m}{2}-1} \\ &= 2^{-(n-1)} \frac{\frac{n+m}{2}}{n} \binom{n}{\frac{n+m}{2}} \\ &= 2^{\frac{n+m}{2}-n} \binom{n}{\frac{n+m}{2}} \\ &= 2^{\frac{n+m}{2}-n} P\{S_n = m\}, \end{aligned}$$

док је

$$\begin{aligned} P\{S_{n-1} = m+1\} &= 2^{-(n-1)} \binom{n-1}{\frac{n+m}{2}} \\ &= 2^{-(n-1)} \frac{n - \frac{n+m}{2}}{n} \binom{n}{\frac{n+m}{2}} \\ &= 2^{\frac{n-m}{2}-n} \binom{n}{\frac{n+m}{2}} \\ &= 2^{\frac{n-m}{2}-n} P\{S_n = m\}. \end{aligned}$$

На основу теореме следи да је

$$\begin{aligned} P\{\tau_m = n\} &= \frac{1}{2} [P\{S_{n-1} = m-1\} - P\{S_{n-1} = m+1\}] \\ &= \frac{1}{2} [2^{\frac{n+m}{2}-n} P\{S_n = m\} - 2^{\frac{n-m}{2}-n} P\{S_n = m\}] \\ &= \frac{1}{2} 2^{\frac{n+m}{2}-n} \frac{n - \frac{n+m}{2}}{n} P\{S_n = m\} \\ &= \frac{n+m-n}{2n} P\{S_n = m\} \\ &= \frac{m}{n} P\{S_n = m\}. \quad \square \end{aligned}$$

Нека је $M_n = \max\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$. У наставку одређујемо расподелу случајне величине M_n .

Лема 3.1. За симетрично случајно лутање $\{S_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ важи

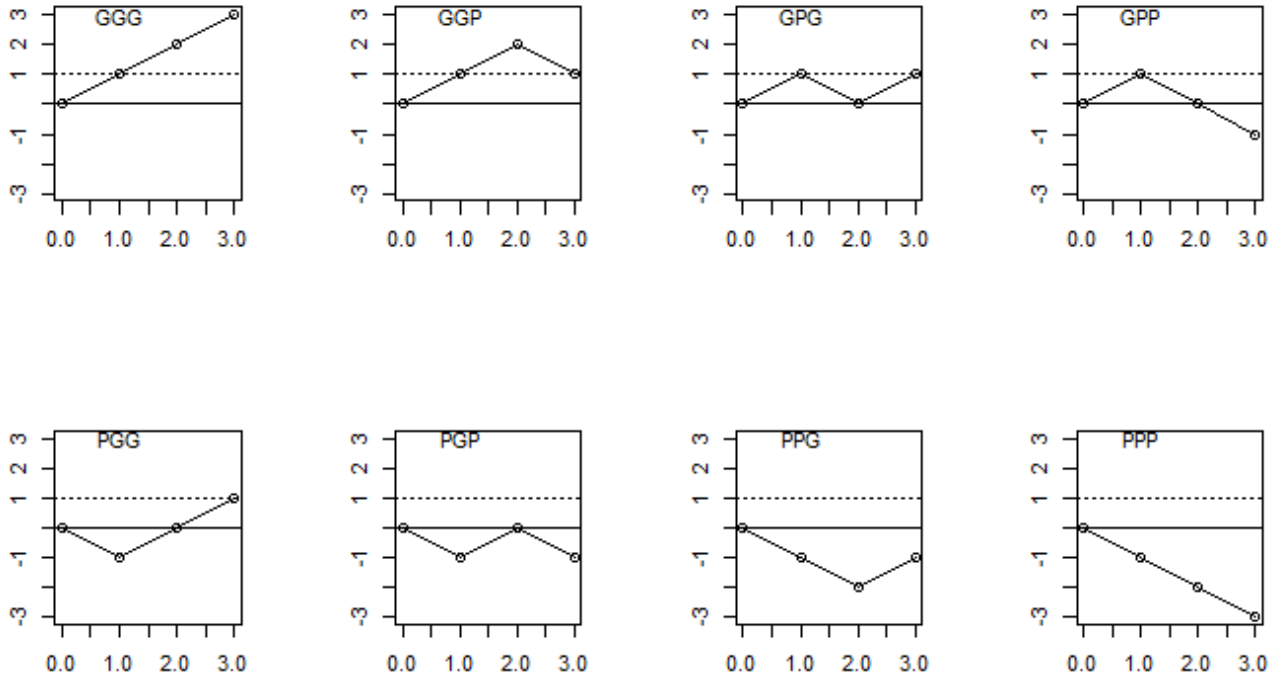
$$P\{M_n \geq r, S_n = b\} = \begin{cases} P\{S_n = b\}, & b \geq r \\ P\{S_n = 2r - b\}, & b < r \end{cases}$$

Доказ. Нека је $b \geq r$. Како је $M_n = \max\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$, то је $M_n \geq S_n$, одакле следи да је $P\{M_n \geq r, S_n = b\} = P\{S_n = b\}$,

Ако је, пак, $b < r$, број трајекторија које достигну ниво r у неком тренутку пре тренутка n , а у тренутку n су у нивоу b је исти као број трајекторија које су у тренутку n достигле ниво $r + (r - b) = 2r - b$. $\square$

Сада ћемо рачунати вероватноћу $P\{\tau_1 = 2j - 1\}$.

Баца се симетричан новчић непаран број пута ($2j - 1$ пута), одакле се добија једноставно симетрично случајно кретање. Неке трајекторије тог случајног кретања ће достићи ниво 1 за првих $2j - 1$ корака, а неке неће. У случају три бацања, тј. за $j = 2$, постоји осам могућих трајекторија од којих само пет достижу ниво 1. (Слика 6.)



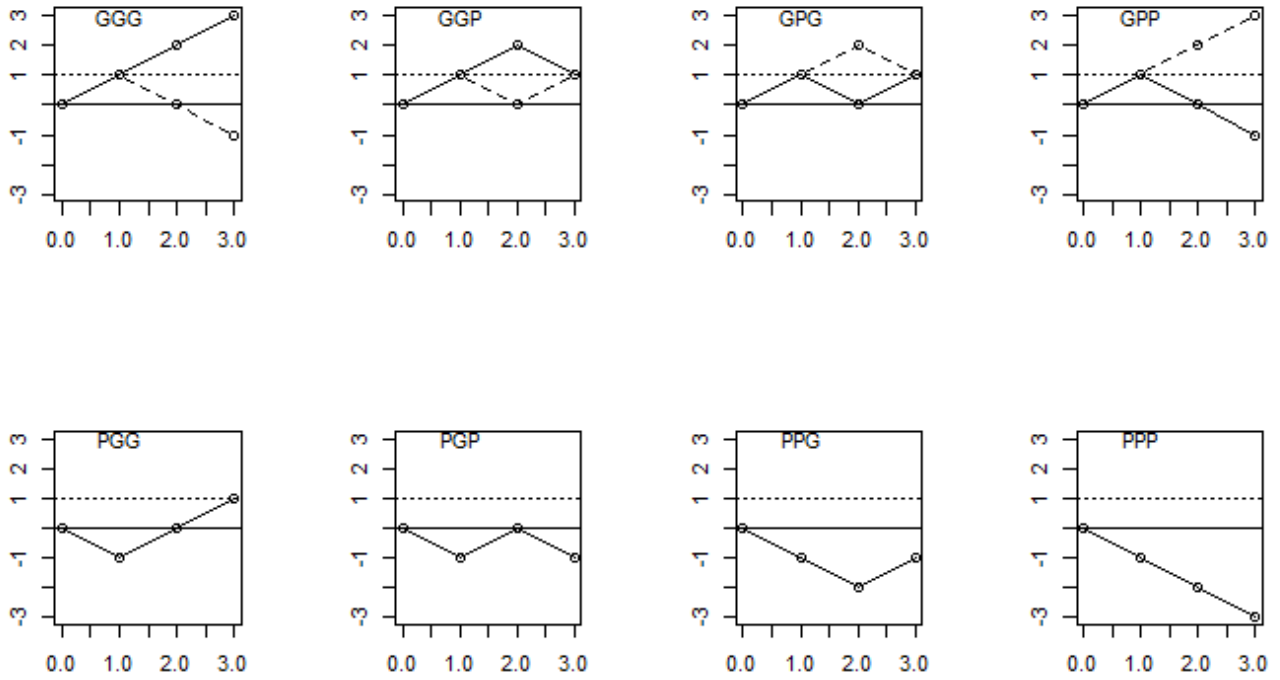
Слика 6: Изворне трајекторије

Разматра се трајекторија која достигне ниво 1 у неком тренутку $\tau_1 \leq 2j - 1$. Од тог тренутка, прави се рефлектована трајекторија (Слика 7.), која иде корак горе сваки пут кад оригинал иде корак доле и обрнуто. Ако се оригинална трајекторија завршава изнад 1 у тренутку $2j - 1$, онда се рефлектована трајекторија завршава испод 1 у тренутку $2j - 1$, и обрнуто. Поред тога, ако се оригинална трајекторија завршава у 1 у тренутку $2j - 1$, онда се и рефлектована трајекторија завршава у 1 у тренутку $2j - 1$.

Под трајекторијама које достигну ниво 1 у неком тренутку $\tau_1 \leq 2j - 1$ подразумевају се трајекторије које су изнад 1 у тренутку $2j - 1$, затим које су у нивоу 1 и оне које су пре тренутка $2j - 1$ прошле кроз ниво 1, а у тренутку $2j - 1$ су испод нивоа 1.

Рефлектоване трајекторије које су изнад нивоа 1 у тренутку $2j - 1$ одговарају трајекторијама које су пре тренутка $2j - 1$ прошле кроз ниво 1, а у тренутку $2j - 1$ су испод нивоа 1. Постоји онолико рефлектованих трајекторија које су изнад нивоа 1 у тренутку $2j - 1$ колико и оригиналних трајекторија које су изнад нивоа 1 у тренутку $2j - 1$.

Постоји тачно једна трајекторија која је изнад нивоа 1 у тренутку 3 (након три бацања), и то је ГГГ. Постоје три трајекторије које су у нивоу 1 у тренутку 3 и то су ГГП, ГПГ, ПГГ. Постоји једна рефлектована трајекторија изнад нивоа 1 у тренутку 3 (ГПП).



Слика 7: Рефлектоване трајекторије

Дакле, број трајекторија које достигну ниво 1 у неком тренутку $\tau_1 \leq 2j - 1$ добија се тако што се на број трајекторија које су изнад нивоа 1 у тренутку $\tau_1 \leq 2j - 1$ дода двоструки број оних трајекторија које су изнад нивоа 1 у тренутку $2j - 1$. Другим речима, за једноставно симетрично случајно лутање важи

$$P\{\tau_1 \leq 2j - 1\} = P\{S_{2j-1} = 1\} + 2P\{S_{2j-1} \geq 3\}.$$

Како је $\{S_n, n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ једноставно симетрично случајно лутање, то је

$$P\{S_{2j-1} \geq 3\} = P\{S_{2j-1} \leq -3\}.$$

Дакле,

$$P\{\tau_1 \leq 2j - 1\} = P\{S_{2j-1} = 1\} + P\{S_{2j-1} \geq 3\} + P\{S_{2j-1} \leq -3\} = 1 - P\{S_{2j-1} = -1\}.$$

Да би S_{2j-1} било -1 , у тих $2j - 1$ бацања мора бити $j - 1$ грбова и j писама. Број трајекторија са овом особином је

$$\binom{2j-1}{j} = \frac{(2j-1)!}{j!(j-1)!},$$

а свака таква трајекторија се реализује са вероватноћом $(\frac{1}{2})^{2j-1}$, тако да је

$$P\{S_{2j-1} = -1\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} \frac{(2j-1)!}{j!(j-1)!}.$$

Аналогно,

$$P\{S_{2j-3} = -1\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-3} \frac{(2j-3)!}{(j-1)!(j-2)!}.$$

Следи да је за $j \geq 2$ важи

$$\begin{aligned}
P\{\tau_1 = 2j - 1\} &= P\{\tau_1 \leq 2j - 1\} - P\{\tau_1 \leq 2j - 3\} \\
&= (1 - P\{S_{2j-1} = -1\}) - (1 - P\{S_{2j-3} = -1\}) \\
&= P\{S_{2j-3} = -1\} - P\{S_{2j-1} = -1\} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-3} \frac{(2j-3)!}{(j-1)!(j-2)!} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} \frac{(2j-1)!}{j!(j-1)!} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} \frac{(2j-3)!}{j!(j-1)!} (4j(j-1) - (2j-2)(2j-1)) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} \frac{(2j-3)!}{j!(j-1)!} (4j(j-1) - 2(j-1)(2j-1)) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} \frac{(2j-3)!}{j!(j-1)!} (2j-2) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} \frac{(2j-2)!}{j!(j-1)!},
\end{aligned}$$

тако да је показано

$$P\{\tau_1 = 2j - 1\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} \frac{(2j-2)!}{j!(j-1)!}. \quad \square$$

4 Примена случајног лутања

4.1 Еренфестов модел урне

У овом поглављу ћемо описати Еренфестов модел урне који представља математички модел који описује дифузију молекула кроз пропустљиву мембрану. Пре тога ћемо кроз један пример увести појам случајног лутања са баријерама.

Пример 4.1. (*Једнодимензионална случајна померања*) Нека је $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ и замислимо да имамо материјалну честицу која се за јединично време из положаја $j \in S$ помера у положај $(j + 1)$ са вероватноћом p_j , у положај $(j - 1)$ са вероватноћом q_j или остаје у положају j са вероватноћом $r_j = 1 - p_j - q_j$, при чему је $j \geq 1$. Поред тога, нека је $p_{01} = p_0$, $p_{00} = r_0 = 1 - p_0$. Нека је X_t положај честице у тренутку t . Тада је $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ хомоген ланац Маркова са матрицом вероватноћа преласка

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Хомоген ланац Маркова се добија и када је скуп стања скуп свих целих бројева и

$$p_{j,j+1} = p_j, p_{j,j-1} = q_j, p_{jj} = r_j,$$

где је $p_j + q_j + r_j = 1$ за свако целобројно j .

Ако је $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ и $p_0 = 1, r_0 = q_0 = 0$, ради се о случајном померању са *рефлектујућом баријером* у тачки $x = 0$. Ако је $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ и $r_0 = 1, q_0 = p_0 = 0$, онда се ради о случајном померању са *апсорбујућом баријером* у тачки $x = 0$.

Пример 4.2. Нека су дате две урне означене са A и B у којима се налази укупно m лоптица. Нека се у урни A налази x , а у урни B $m - x$ лоптица. На случајан начин бирамо једну од лоптица при чему претпостављамо да сваку од лоптица бирамо са истом вероватноћом. Изабрану лоптицу потом пребацујемо из урне у којој је била у другу урну. Означимо са X_n случајну величину која представља број лоптица у урни A након n -тог извлачења. Тада је $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ случајно лутање са скупом стања $S = \{0, 1, \dots, m\}$ и вероватноћама преласка

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{m-i}{m}, & \text{ако је } j = i + 1, \\ \frac{i}{m}, & \text{ако је } j = i - 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Нас занима како се мења количина лоптица у урнама после одређеног времена. Да бисмо то одредили, наћи ћемо стационарну расподелу процеса $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Матрица вероватноћа преласка је облика

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & \frac{m-1}{m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{m} & 0 & \frac{m-2}{m} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{m-1}{m} & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ако је $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m)$ стационарна расподела, онда важи $\pi = \pi \cdot P$, тј.

$$(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m) = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & \frac{m-1}{m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{2}{m} & 0 & \frac{m-2}{m} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{m-1}{m} & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одатле следи да је

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{\pi_1}{m}, \\ \pi_i &= \frac{m-(i-1)}{m} \pi_{i-1} + \frac{i+1}{m} \pi_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ \pi_m &= \frac{1}{m} \pi_{m-1}, \end{aligned}$$

односно имамо

$$\begin{aligned} \pi_1 &= m\pi_0 = \binom{m}{1} \pi_0 \\ \pi_2 &= \frac{m}{2} \pi_1 - \frac{m}{2} \pi_0 = \frac{m(m-1)}{2} \pi_0 = \binom{m}{2} \pi_0 \\ \pi_3 &= \frac{m}{3} \pi_2 + \frac{m-1}{3} \pi_1 = \frac{m}{3} \frac{m(m-1)}{2} \pi_0 - \frac{m-1}{3} m\pi_0 = \frac{m(m-1)(m-2)}{6} \pi_0 = \binom{m}{3} \pi_0 \\ &\vdots \\ \pi_m &= \binom{m}{m} \pi_0. \end{aligned}$$

Добили смо да је

$$(18) \quad \pi_i = \binom{m}{i} \pi_0, \text{ за } i \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Како важи да је $\sum_i \pi_i = 1$ и важе једнакости (18), то добијамо да је

$$\pi_0 = \frac{1}{2^m},$$

тј.

$$\pi_i = \frac{\binom{m}{i}}{2^m}, \text{ за } i \in \{0, 1, \dots, m\}.$$

Дакле, очекујемо да се након много времена у обе урне налази приближно исти број лоптица јер су те вероватноће највеће.

4.2 Задатак о пропасти играча

Разматрамо следећи проблем: Играч игра неку игру на срећу у којој након успешне партије добија један жетон, а након неуспешне губи уложен жетон. Сматра се да је игра фер, тј. да су вероватноће успеха и неуспеха у једној партији једнаке и износе $\frac{1}{2}$. Претпостављамо да играч има x жетона на почетку игре, са којом престаје кад скупи тачно M жетона или кад изгуби све. Ако скупи M жетона кажемо да је победио, а ако изгуби све, кажемо да је пропао.

Обележимо са q_x вероватноћу пропасти играча под условом да је на почетку игре имао x жетона, тј. нека је $q_x = P(W|D_0 = x)$, где је W догађај да играч изгуби све жетоне, а D_n случајна величина која представља број жетона играча након n -те партије. Сада ћемо израчунати q_x .

За почетак, имамо два тривијална случаја. Наиме, ако је $x = 0$, играч је пропао, па је $q_0 = 1$, а ако је $x = M$, онда је играч победио, па је $q_M = 0$.

Претпоставимо сад да је $0 < x < M$. Ако са A обележимо догађај да је играч био успешан у првој партији, а са $\bar{A}$ догађај да је играч био неуспешан у првој партији, онда, на основу формуле потпуне вероватноће имамо:

$$\begin{aligned} q_x &= P(W|D_0 = x) \\ &= P(W \cap A|D_0 = x) + P(W \cap \bar{A}|D_0 = x) \\ &= \frac{P(W \cap A \cap \{D_0 = x\})}{P(D_0 = x)} + \frac{P(W \cap \bar{A} \cap \{D_0 = x\})}{P(D_0 = x)} \\ &= P(A|D_0 = x) \cdot P(W|A \cap \{D_0 = x\}) + P(\bar{A}|D_0 = x) \cdot P(W|\bar{A} \cap \{D_0 = x\}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot P(W|D_1 = x + 1) + \frac{1}{2} \cdot P(W|D_1 = x - 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot P(W|D_0 = x + 1) + \frac{1}{2} \cdot P(W|D_0 = x - 1) \\ &= \frac{1}{2}q_{x+1} + \frac{1}{2}q_{x-1}. \end{aligned}$$

Дакле, добили смо да је $q_x = \frac{1}{2}q_{x+1} + \frac{1}{2}q_{x-1}$. Сад, на основу чињенице да је

$$\frac{1}{2}q_x + \frac{1}{2}q_x = q_x = \frac{1}{2}q_{x+1} + \frac{1}{2}q_{x-1},$$

добијамо да је

$$\frac{1}{2}(q_{x+1} - q_x) = \frac{1}{2}(q_x - q_{x-1}),$$

одакле следи да је

$$q_{x+1} - q_x = q_x - q_{x-1} = \cdots = q_1 - q_0.$$

Из претходне једнакости и услова $q_0 = 1$ и $q_M = 0$ следи да је

$$\begin{aligned} -1 &= q_M - q_0 \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} (q_{k+1} - q_k) \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} (q_1 - q_0) \\ &= M(q_1 - q_0). \end{aligned}$$

Одавде је

$$q_1 - q_0 = -\frac{1}{M}.$$

Сада, за свако $0 < x < M$ важи

$$\begin{aligned} q_x - q_0 &= \sum_{k=0}^{x-1} (q_{k+1} - q_k) \\ &= \sum_{k=0}^{x-1} (q_1 - q_0) \\ &= x \cdot (q_1 - q_0) \\ &= -\frac{x}{M}. \end{aligned}$$

Дакле, за свако $0 < x < M$, вероватноћа да играч пропадне ако је на почетку игре имао x жетона јесте

$$q_x = 1 - \frac{x}{M}.$$

На даље ћемо се бавити дужином игре, тачније условним математичким очекивањем дужине игре. Нека је t_x очекивани крај игре, тј. тренутак победе или пропасти играча, под условом да је играч на почетку игре имао x жетона. Ако је S случајна величина која представља број партија до победе или пропасти играча, онда можемо записати да је $t_x = E(S|D_0 = x)$. Јасно је да је $t_0 = t_M = 0$, пошто је игра завршена чим играч има 0 или M жетона. За $0 < x < M$ важи

$$\begin{aligned} t_x &= E(S|D_0 = x) \\ &= E(S \cap A|D_0 = x) + E(S \cap \bar{A}|D_0 = x) \\ &= E(S|\{D_0 = x\} \cap A) \cdot P(A|D_0 = x) + E(S|\{D_0 = x\} \cap \bar{A}) \cdot P(\bar{A}|D_0 = x) \\ &= \frac{1}{2} \cdot E(S|D_1 = x+1) + \frac{1}{2} \cdot E(S|D_1 = x-1) \\ &= \frac{1}{2}(1 + E(S|D_0 = x+1)) + \frac{1}{2}(1 + E(S|D_0 = x-1)) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_{x+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t_{x-1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}t_{x+1} + \frac{1}{2}t_{x-1}. \end{aligned}$$

Ако t_x напишемо у облику $\frac{1}{2}t_{x+1} + \frac{1}{2}t_{x-1}$, добијамо да је

$$\frac{1}{2}t_x + \frac{1}{2}t_x = 1 + \frac{1}{2}t_{x+1} + \frac{1}{2}t_{x-1},$$

одакле је

$$\frac{1}{2}(t_{x+1} - t_x) = -1 + \frac{1}{2}(t_x - t_{x-1}),$$

тј.

$$t_{x+1} - t_x = -2 + t_x - t_{x-1}.$$

Користећи услове $t_0 = t_M = 0$, добијамо да је

$$\begin{aligned} 0 &= t_M - t_0 \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} (t_{k+1} - t_k) \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} (-2k + t_1 - t_0) \\ &= -2 \frac{M(M-1)}{2} + M(t_1 - t_0) \end{aligned}$$

одакле је $t_1 - t_0 = M - 1$. Даље, за $0 < x < M$ важи

$$\begin{aligned} t_x - t_0 &= \sum_{k=0}^{x-1} (t_{k+1} - t_k) \\ &= \sum_{k=0}^{x-1} (-2k + t_1 - t_0) \\ &= -2 \frac{x(x-1)}{2} + x(M-1) \\ &= x(M-x). \end{aligned}$$

Дакле, вероватноћа пропасти играча је $q_x = 1 - \frac{x}{M}$, а условно математичко очекивање дужине игре је $t_x = x(M-x)$, где је $0 \leq x \leq M$.

4.2.1 Симулација

Искористићемо задатак о пропасти играча за приказивање компјутерске симулације случајног лутања. Жеља нам је да видимо да ли ће број игара у којима је играч пропао бити у складу са вероватноћом пропасти играча коју смо израчунали, и да ли ће просечна дужина игре бити у складу са условним математичким очекивањем дужине игре које смо, такође, израчунали у претходном делу.

Прво ћемо написати функцију `propast(x,M)`. Као што видимо та функција има два аргумента, x и M . Први аргумент, x , представља број жетона које играч има на почетку игре, док други аргумент, M ,

представља број жетона којеи играч треба да има да бисмо га сматрали победником. Ова функција нам враћа вектор чији је први елемент индикатор тога да ли је играч изгубио (враћа 1 ако је изгубио, односно 0 ако је победио), а други елемент представља дужину трајања игре.

```
propast<-function(x,M){
  S<-x
  t<-0
  while(S!=0 & S!=M){
    x=sample(c(-1,1),1)
    S=S+x
    t=t+1
  }
  if(S==0)
    return(c(1,t))
  else
    return(c(0,t))
}
```

Сада ћемо 10000 пута симулирати игру под претпоставком да је играч на почетку игре имао 2 жетона, а да је потребно да има 5 жетона да бисмо га сматрали победником. Након тога ћемо израчунати средњу вредност свих индикатора пораза, као и дужина трајања игре, да бисмо их упоредили са вероватноћом пропасти, односно условним математичким очекивањем дужине игре.

```
set.seed(5)
R<-replicate(10000,propast(2,5))
mean(R[,1])
mean(R[,2])
```

Добијамо да је средња вредност свих индикатора пораза 0.6038, а средња вредност дужина трајања игре 6.0006. На основу теоријског дела знамо да вероватноћа пропасти играча износи $q_x = 1 - \frac{x}{M} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0.6$, а условно математичко очекивање дужине игре $t_x = x(M - x) = 2(5 - 2) = 6$. Одатле видимо да је вероватноћа пропасти играча приближно иста средњој вредности свих индикатора пораза и да је условно математичко очекивање дужине игре приближно исто средњој вредности дужине трајања игре.

Дакле, закључујемо да је број игара у којима је играч пропао у складу са вероватноћом пропасти играча, и да је просечна дужина игре у складу са условним математичким очекивањем дужине игре.

4.3 Случајно лутање у финансијској математици

4.3.1 Основни појмови у финансијама

У овој глави ћемо се бавити применом случајног лутања у финансијској математици, тачније видећемо како се користи случајно лутање у одређивању будућих цена опција. Прво ћемо дефинисати основне појмове из финансијске математике које ћемо користити.

Финансијско средство је нефизичко средство чија се вредност изводи из уговореног потраживања.

Вредносни папири (или *хартције од вредности*) су финансијска средства којима се може трговати. Вредносни папири се деле на вредносне папире са фиксним приходом (обични и орочени улози у банци, обвезнице, хипотеке, ануитети, итд.) и вредносне папире са приходом који није фиксан. Најважнији вредносни папири са приходом који није фиксан су акције. *Акције* су вредносни папири који представљају власништво над делом компаније.[2]

Портфолио је колекција вредносних папира које неко поседује. Вредност портфолија је линеарна комбинација вредности појединих вредносних папира. [2]

Ток новца је произвољан скуп финансијских трансакција. Ток новца чине уређени парови реалних бројева, где први број представља време, а други износ трансакције.

Камата представља надокнаду за коришћење капитала. Камаћење се дели на дискретно и непрекидно, при чему дискретно камаћење може бити просто и сложено.

Код простог камаћења камата је пропорционална времену за које се камата обрачунава. На пример, ако уложимо A новчаних јединица на t година при каматној стопи i , онда ћемо након t времена имати $A(1 + it)$ новчаних јединица.

Код сложеног камаћења се након обрачунског периода зарађена камата додаје главници и тиме се добија главница за наредни обрачунски период. Ако се камата обрачунава на годишњем нивоу, онда ће вредност уложених A новчаних јединица при каматној стопи i , након t година бити $A(1 + i)^t$. Камата се не мора обрачунавати на годишњем нивоу, већ се најчешће година подели на m једнаких периода, па се обрачун врши на крају сваког од тих периода, при чему је камата за сваки од тих периода $\frac{i^{(m)}}{m}$ где је $i^{(m)}$ годишња каматна стопа. У том случају, ако уложимо A новчаних јединица, после годину дана ћемо имати $A(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m$ новчаних јединица.

Каматну стопу i која при простом камаћењу после годину дана производи исти резултат као и полазна каматна стопа $i^{(m)}$ при сложеном камаћењу са m једнаких обрачунских периода називамо *ефективна каматна стопа*, док каматну стопу $i^{(m)}$ називамо *номиналном каматном стопом*. Тада важи

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m.$$

Ако пустимо да m тежи бесконачности, онда добијамо непрекидно камаћење. Код непрекидног камаћења се у сваком тренутку обрачунава камата и додаје на главницу. Уложених A новчаних јединица након годину дана непрекидног камаћења са годишњом каматном стопом $i^{(m)}$ има вредност

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{i^{(m)}} = e^r,$$

где је $r = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)}$. Након t година оваквог камаћења уложених A новчаних јединица имаће вредност

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^{mt} = \lim_{m \rightarrow \infty} e^{ti^{(m)}} = e^{rt}.$$

Претходно разматрање нам помаже да рачунамо садашње и будуће вредности новчаних токова. Нека је $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ ток новца. Ако вршимо просто камаћење при годишњој каматној стопи i , онда су садашња и будућа вредност датог новчаног тока

$$PV = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{(1+i)^k} = \sum_{k=0}^n x_k v^k$$

и

$$FV = \sum_{k=0}^n x_k (1+i)^{n-k}.$$

Ако вршимо сложено камаћење m пута годишње са годишњом каматном стопом $i^{(m)}$, онда ће садашња и будућа вредност истог новчаног тока бити

$$PV = \sum_{k=0}^n \frac{x_k}{(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^k} = \sum_{k=0}^n x_k (v^{(m)})^k$$

и

$$FV = \sum_{k=0}^n x_k \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{n-k}.$$

Ако каматну стопу обрачунавамо непрекидно, онда су садашња и будућа вредност новчаног тока $(x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n))$

$$PV = \sum_{k=0}^n x_{t_k} e^{-rt_k} = \sum_{k=0}^n x_{t_k} v^{t_k}$$

и

$$FV = \sum_{k=0}^n x_{t_k} e^{r(t_n - t_k)}.$$

Важно је напоменути да два тока новца имају исту вредност ако су им садашње вредности једнаке и тада кажемо да су та два тока *еквивалентна*.

4.3.2 Опције

Опције спадају у финансијске деривате, што значи да је њихова вредност изведена из других вредносних папира које називамо *подлога*. Подлога за опције су углавном акције. Опција је уговор који ономе ко га поседује даје право, али не и обавезу, да купи или прода неки вредносни папир под договореним условима (под условима се мисли на цену и време).

Уговорену цену, по којој се може купити, односно продати вредносни папир, ћемо означавати са K , а време до истека опције са T .

Основне поделе опција су у односу на то да ли се опција може купити или продати и у односу на време извршења опције. У том погледу, имамо 4 врсте опција

1. *Европске кол опције*-дају право, али не и обавезу куповине вредносног папира по унапред договореној цени K и могу да се активирају само у уговорено време T . Цену европске кол опције означавамо са c .
2. *Европске пут опције*- дају право, али не и обавезу продаје вредносног папира по унапред договореној цени K и могу да се активирају само у уговорено време T . Цену европске пут опције означавамо са p .
3. *Америчке кол опције*- дају право, али не и обавезу куповине вредносног папира по унапред договореној цени K и могу да се активирају у било ком тренутку времена пре уговореног времена T као и у тренутку T .
4. *Америчке пут опције*-дају право, али не и обавезу продаје вредносног папира по унапред договореној цени K и могу да се активирају у било ком тренутку времена пре уговореног времена T као и у тренутку T .

Почетну вредност папира на који се односи опција у тренутку склапања уговора означавамо са S_0 , а цену у тренутку t , $0 \leq t \leq T$ са S_t .

Размотримо сада европску кол опцију са временом истека T и уговореном ценом K . Нека је S_T цена акције на коју се опција односи у тренутку T . Одредићемо колико вреди кол опција у тренутку T . Постоје 2 случаја, када је цена акције мања него цена опције, и када је цена акције већа него цена опције.

- 1) Ако је $S_T < K$, онда је вредност опције нула, јер акцију можемо купити јефтиније на тржишту.
- 2) Ако је $S_T > K$, онда опција има вредност, јер нам омогућава да акцију купимо по уговореној цени K која је нижа од тржишне цене S_T . Купљену акцију по цени K можемо одмах да продамо по цени S_T , и тиме остваримо профит $S_T - K$.

Дакле, вредност кол опције у тренутку истека T је

$$c = \max\{0, S_T - K\}.$$

Ствар ће бити супротна ако размотримо европску пут опцију, такође, по уговореној цени K и у уговорено време T . Поново разматрамо случајеве кад је $S_T < K$ и кад је $S_T > K$.

- 1) Ако је $S_T < K$, онда пут опција има вредност, јер можемо купити на берзи акцију по цени S_T , па је онда продати по цени K , и тиме остварити профит $K - S_T$.
- 2) Ако је $S_T > K$, пут опција нема вредност, јер је бесмислено продавати акцију по цени K , ако је можемо продати на тржишту за $S_T > K$.

Дакле, вредност европске пут опције у тренутку истека T је

$$p = \max\{K - S_T, 0\}.$$

4.3.3 Геометријско случајно лутање

У основи случајног лутања је претпоставка да су сви кораци у случајном лутању, тј. све случајне величине $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ међусобно независне. Међутим, економске временске серије не задовољавају ту претпоставку. На пример, сезонске осцилације месечних продајних података у апсолутним износима су знатно веће ако је просечна годишња продаја висока. Насупрот томе, релативне или процентуалне промене су стабилне током времена и не зависе од тренутне вредности S_n . Због тога уводимо *геометријско биномно случајно лутање* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ помоћу једнакости

$$(19) \quad S_n = X_n \cdot S_{n-1} = S_0 \cdot \prod_{k=1}^n X_k,$$

где су случајне величине $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ међусобно независне и имају следећу расподелу вероватноћа:

$$P\{X_n = u\} = p, \quad P\{X_n = d\} = q = 1 - p, \quad u, d \neq 0, 1, p \in (0, 1)$$

за сваки природан број n . [7]

Тада је

$$EX_n = up + d(1 - p) = (u - d)p + d \text{ за свако } n \in \mathbb{N},$$

па из претпоставке о независности случајних величина $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и једнакости (19) следи да је

$$ES_n = ES_0 \cdot (EX_1)^n = ES_0 \cdot ((u - d)p + d)^n,$$

што значи да ES_n расте или опада експоненцијално ако је $EX_1 > 1$, односно $EX_1 < 1$.

Ако је $EX_1 = 1$, тј. ако је $p = \frac{1-d}{u-d}$, онда је процес $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ стабилан у просеку. Специјално, ако је $d = \frac{1}{u}$, онда је $EX_1 = 1$ за $p = \frac{1}{u+1}$.

Ако логаритмујемо једнакост (19), добијамо да је

$$\ln S_n = \ln S_0 + \sum_{k=1}^n \ln X_k.$$

Случајан процес $\overline{S}_n = \ln S_n$ је обично случајно лутање, где је $\overline{S}_0 = \ln S_0$ и $\overline{X}_n = \ln X_n$, $n \in \mathbb{N}$, при чему случајне величине $\overline{X}_n$, $n \in \mathbb{N}$ имају следећу расподелу вероватноћа

$$P\{\overline{X}_n = u\} = p, \quad P\{\overline{X}_n = d\} = 1 - p.$$

Дакле, овом трансформацијом смо, од геометријског биномног случајног лутања, добили обично случајно лутање (код кога корак није јединични). Геометријско биномно случајно лутање се користи код одређивање цена акција биномним моделом.

4.3.4 Биномни модел са једним кораком за европске кол опције

За налажење цене европске кол опције полазимо од биномог модела. Приликом одређивања цене европске кол опције поштоваћемо принцип који се зове *Risk-Neutral Valuation* (процена која је неутрална од ризика). Тај принцип нам каже да је цена опције садашња вредност математичког очекивања од добити опције.

Размотримо биномни модел са једним кораком. Нека је садашња цена акције S_0 и нека је f цена кол опције са истеком у тренутку T и уговореном ценом K . Претпостављамо да цена опције може или да порасте и буде S_0u , где је $u > 1$, или да опадне, и буде S_0d , где је $d < 1$. Такође, претпоставимо да су вероватноће које одговарају тим двома могућностима p и $1 - p$, респективно. Дакле, цена акције на почетку другог периода је случајна променљива S_1 , са следећом расподелом

$$S_1 : \begin{pmatrix} S_0u & S_0d \\ p & 1 - p \end{pmatrix}.$$

Модел је одређен ако је позната јединица времена у којој се промене цена дешавају, фактори u и d , као и вероватноћа p .

Ако цена акције порасте, добит од кол опције износи $f_u = \max\{S_0u - K, 0\}$, а ако цена падне добит је $f_d = \max\{S_0d - K, 0\}$.

Посматрајмо сад портфолио који се састоји од:

- 1) Δ акција које смо купили и чија је тренутна цена S_0 .
- 2) Продали смо једну европску кол опцију на те акције.

Пиљ нам је да одредимо ону вредност за Δ за коју је овај портфолио безризичан, тј. за коју је вредност портфолиа у тренутку T иста независно од тога да ли вредност акција порасте или опадне.

Ако цена акције порасте у тренутку T , вредност портфолиа је $S_0u\Delta - f_u$, а ако цена акција падне у тренутку T , вредност портфолиа је $S_0d\Delta - f_d$. Да би испоштовали принцип безризичности, тј. да би портфолио био независан од промене цене акција, мора бити

$$S_0u\Delta - f_u = S_0d\Delta - f_d,$$

одакле је

$$(20) \quad \Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d}.$$

У том случају, портфолио треба да заради исто онолико колико би се зарадило да су почетна средства уложена у банку по каматној стопи i . Садашња вредност тог портфолиа је

$$(S_0u\Delta - f_u)e^{-iT}.$$

Цена коју смо платили за портфолио је

$$S_0\Delta - f,$$

па следи да је

$$S_0\Delta - f = (S_0u\Delta - f_u)e^{-iT},$$

одакле је

$$f = S_0\Delta - (S_0u\Delta - f_u)e^{-iT}.$$

Користећи једнакост (20) добијамо да је

$$\begin{aligned} f &= S_0 \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} - (S_0u \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} - f_u)e^{-iT} \\ &= \frac{f_u - f_d}{u - d} - \left(u \frac{f_u - f_d}{u - d} - f_u\right)e^{-iT} \\ &= f_u \left(\frac{1}{u - d} - \frac{u}{u - d}e^{-iT} + e^{-iT}\right) + f_d \left(\frac{u}{u - d}e^{-iT} - \frac{1}{u - d}\right) \\ &= f_u \frac{e^{-iT}}{u - d} (e^{iT} - u + (u - d)) + f_d \frac{e^{-iT}}{u - d} (u - e^{iT}) \\ &= e^{-iT} f_u \frac{e^{-T} - d}{u - d} + e^{-iT} f_d \frac{u - e^{iT}}{u - d} \\ &= e^{-iT} \left(\frac{e^{iT} - d}{u - d} f_u + \frac{u - e^{iT}}{u - d} f_d\right) \\ &= e^{-iT} (pf_u + (1 - p)f_d), \end{aligned}$$

где је $p = \frac{e^{iT} - d}{u - d}$.

Дакле, у случају када се промена цена акције моделира биномним моделом са једним кораком, цена акције је дата формулом

$$(21) \quad f = e^{-iT} (pf_u + (1 - p)f_d), \text{ где је } p = \frac{e^{iT} - d}{u - d}.$$

Пример 4.3. Наћи цену европске кол опције на акцију чија је цена у почетном тренутку $S_0 = 20\$$ са доспећем кроз три месеца (тако да имамо $T = \frac{3}{12} = 0.25$) и уговореном ценом од 21\$. Цена акције може да порасте на 22\$ или да падне на 18\$ до краја уговореног тромесечног периода. Безризична каматна стопа износи 12%.

Решење. Дакле, имамо да је $T = 0.25$, $S_0 = 20$, $K = 21$, $S_0u = 22$ и $S_0d = 18$. Одатле следи да је $u = \frac{22}{20} = 1.1$ и $d = \frac{18}{20} = 0.9$, као и да је

$$\begin{aligned} f_u &= \max\{S_0u - K, 0\} = \max\{22 - 21, 0\} = 1 \\ f_d &= \max\{dS_0 - K, 0\} = \max\{18 - 21, 0\} = 0. \end{aligned}$$

Користећи формулу (20) добијамо да је

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} = \frac{1 - 0}{22 - 18} = 0.25,$$

што значи да се наш безризични портфолио састоји од 0.25 акција и једне кол опције. Тада је

$$p = \frac{e^{iT} - d}{u - d} = \frac{e^{0.12 \cdot 0.25} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6523,$$

па из формуле (21) добијамо да је вредност опције

$$f = e^{-0.12 \cdot 0.25} (0.6523 \cdot 1 + (1 - 0.6523) \cdot 0) = 0.6523 \cdot e^{-0.12 \cdot 0.25} = 0.633.$$

4.3.5 Биномни модел са више корака за европске кол опције

Сада ћемо користити биномни модел за моделирање цене европске кол опције после два периода. Користићемо сличне ознаке као и код биномног модела са једним кораком. Дакле, нека је садашња цена акције S_0 и нека је f вредност опције са истеком T и уговореном ценом K . Цена акције у првом периоду може да порасте и буде S_0u , $u > 1$ или да опадне и буде S_0d , $d < 1$. Слично је и у другом периоду: ако је цена после првог периода S_0u , онда после другог може бити или S_0u^2 или S_0ud , а ако је после првог периода S_0d , онда је после другог или S_0d^2 или S_0du . Са f_{uu} означаћемо вредност опције након два периода ако је цена порасла у оба периода, са f_{ud} ако је цена у једном периоду порасла, а у другом опала, а са f_{dd} ако је у оба периода опала. (слика)

Такође, остаје претпоставка да цена акције у сваком периоду порасте са вероватноћом p , а опадне са вероватноћом $1 - p$.

Тада је

$$\begin{aligned} f_{uu} &= \max\{S_0u^2 - K, 0\}, \\ f_{ud} &= \max\{S_0ud - K, 0\}, \\ f_{dd} &= \max\{S_0d^2 - K, 0\}. \end{aligned}$$

Посматрамо исти портфолио као и у случају биномног модела са једним кораком. Дакле, портфолио се састоји од Δ акција које смо купили и чија је тренутна цена S_0 и једне продате европске кол опције на те акције.

Применом формуле (21) добијамо да је

$$\begin{aligned} f_u &= e^{-iT}(pf_{uu} + (1-p)f_{ud}), \\ f_d &= e^{-iT}(pf_{ud} + (1-p)f_{dd}), \end{aligned}$$

па опет, применом исте формуле, добијамо да је

$$f = e^{-iT}(pf_u + (1-p)f_d),$$

тј,

$$f = e^{-2iT}(p^2f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2f_{dd}).$$

Аналогно се рачунају формуле за израчунавање вредности портфолиа и код биномних модела са више

од два корака.

Пример 4.4. Нека важе исти услови као у претходном примеру с тим што сад моделирамо вредност опције биномним моделом са два корака.

Решење. Подсетимо се да је $T = 0.25$, $K = 21$, $S_0 = 20$, $u = 1.1$, и $d = 0.9$. Тада је

$$\begin{aligned} f_{uu} &= \max\{S_0 u^2 - K, 0\} = \max\{24.2 - 21, 0\} = 3.2, \\ f_{ud} &= \max\{S_0 u d - K, 0\} = \max\{119.8 - 21, 0\} = 0, \\ f_{dd} &= \max\{S_0 d^2 - K, 0\} = \max\{16.2 - 21, 0\} = 0. \end{aligned}$$

и

$$p = \frac{e^{-iT} - d}{u - d} = \frac{e^{-0.12 \cdot 0.25} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6523.$$

Користећи формулу (21) добијамо да је

$$\begin{aligned} f_u &= e^{-iT}(pf_{uu} + (1-p)f_{ud}) = e^{-0.12 \cdot 0.25}(0.6523 \cdot 3.2) = 2.0257, \\ f_d &= e^{-iT}(pf_{ud} + (1-p)f_{dd}) = 0, \end{aligned}$$

па, користећи исту формулу добијамо да је вредност опције

$$f = e^{-iT}(pf_u + (1-p)f_d) = e^{-0.12 \cdot 0.25} \cdot 0.6523 \cdot 2.0257 = 1.2823.$$

4.3.6 Биномни модел за европске пут опције

Вредност европских пут опција се рачуна слично као и вредност европских кол опција. Суштински, разлика је у томе како се рачуна вредност појединачних опција.

Подсетимо се, европске пут опције дају право, али не и обавезу продаје вредносног папира по унапред договореној цени K и могу да се активирају само у уговорено време T . Ако са S_T означимо цену акције у тренутку T , онда разликујемо два случаја:

- 1) Ако је $S_T < K$, онда пут опција има вредност $K - S_T$.
- 2) Ако је $S_T > K$, онда пут опција нема вредност.

Дакле, $p = \max\{K - S_T, 0\}$. Све остало је практично исто као и код европских кол опција. Покажимо то на једном примеру.

Пример 4.5. Наћи цену европске пут опције за 6 месеци на акцију чија је цена у почетном тренутку $S_0 = 20\$$ са доспећем кроз 3 месеца и уговореном ценом од 21\$. Цена акције може за 3 месеца да порасте 10% или да опадне 10%. Безризична каматна стопа износи 12%.

Дакле, имамо да је $T = 0.25$, $S_0 = 20$, $K = 21$, $u = 1.1$, $d = 0.9$ и $i = 0.12$. Тада је

$$\begin{aligned} f_{uu} &= \max\{K - S_0 u^2, 0\} = \max\{21 - 20 \cdot 1.1^2, 0\} = \max\{-3.2, 0\} = 0, \\ f_{ud} &= \max\{K - S_0 u d, 0\} = \max\{21 - 20 \cdot 1.1 \cdot 0.9, 0\} = \max\{1.2, 0\} = 1.2, \\ f_{dd} &= \max\{K - S_0 d^2, 0\} = \max\{21 - 20 \cdot 0.9^2\} = \max\{4.8, 0\} = 4.8, \end{aligned}$$

и

$$p = \frac{e^{iT} - d}{u - d} = \frac{e^{0.12 \cdot 0.25} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6523.$$

Користећи формулу (21) добијамо да је

$$\begin{aligned} f_u &= e^{-iT}(pf_{uu} + (1-p)f_{ud}) = e^{-0.12 \cdot 0.25}(0.6523 \cdot 0 + 0.3477 \cdot 1.2) = 0.4049, \\ f_d &= e^{-iT}(pf_{ud} + (1-p)f_{dd}) = e^{-0.12 \cdot 0.25}(0.6523 \cdot 1.2 + 0.3477 \cdot 4.8) = 2.3793, \end{aligned}$$

па, користећи исту формулу добијамо да је вредност опције

$$f = e^{-iT}(pf_u + (1-p)f_d) = e^{-0.12 \cdot 0.25} \cdot (0.6523 \cdot 0.4049 + 0.3477 \cdot 2.3793) = 1.0591.$$

Дакле, вредност ове пут опције је 1.0591.

5 Закључак

Случајно лутање је важан математички концепт који има велику примену у разним научним областима, јер омогућава реално описивање случајних појава у пракси. Поред математике, случајно лутање налази примену и у наукама као што су економија, биологија, физика, електротехника, итд.

У овом раду смо анализирали особине једнодимензионог случајног лутања у контексту теорије ланаца Маркова и теорије мартингала и описали смо нека његова уопштења. Такође, навели смо и неке примере примене случајног лутања, пре свега, пример примене случајног лутања у финансијској математици, код одређивања цена европских опција.

Литература

- [1] Павле Младеновић, Вероватноћа и статистика, Математички факултет Београд, 2008.
- [2] Слободанка Јанковић, Бојана Милошевић, Елементи финансијске математике, Математички факултет, Београд, 2017.
- [3] Serik Sagitov, Probability and Random Processes, Chalmers University of Technology and Gothenburg University, 2013.
- [4] Марко Крстић, Случајно лутање и уопштења, Математички факултет
- [5] Takis Konstantopoulos, Introductory lecture notes on Markov chains and random walks, 2009.
- [6] Luca Avena, Markus Heydenreich, Frank den Hollander, Evgeny Verbitskiy, Willem van Zuijlen, Random Walks (lecture notes), Mathematical Institute, Leiden University, The Netherlands
- [7] <http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de>