Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Normalna lema o upoređivanju i njene primene

Master rad

Student:
Aleksandra Stanojević
1138/2016

Mentor:
dr Pavle Mladenović

Septembar 2021.

Sadržaj

1 Uvod

Osobina normalnosti zauzima centralno mesto u teoriji verovatnoće i statistici, a nizovi slučajnih veličina sa normalnom raspodelom pripadaju najvažnijoj klasi stacionanih nizova. Njihovoj važnosti doprinosi i činjenica da je n-dimenziona raspodela ovakvog niza određena matematičkim očekivanjem i strukturom kovarijanse niza.

Normalna lema o upoređivanju ima primenu, između ostalog, u istraživanju ekstremnih osobina normalnih stacionarnih nizova, a ocenjuje razliku između dve (standardizovane) n-dimenzione funkcije raspodele, uz pomoć odgovarajuće funkcije njihovih kovarijansi. Njena primena je široka, a razvijali su je na različite načine Slepian (1962), Berman (1964, 1971) i Cramer i Leadbetter (1967).

U prvom delu rada su definisani pojmovi koji su od značaja za ovu temu, a u drugom delu sama lema i njen dokaz, kao i primene. Prikazane su i teoreme koje predstavljaju unapređenje osnovne normalne leme o upoređivanju, kao i njihova primena pri proceni verovatnoće da slučajni polinom nema realnih nula.

2 Kovarijacija

Definišimo pojmove kovarijacije i koeficijenta korelacije, koji mere zavisnost slučajnih veličina i još neke od osnovnih pojmova, kovarijacionu matricu slučajnog vektora i par tvrđenja iz teorije matrica.

Definicija 2.1.

Neka su X i Y slučajne veličine sa konačnim disperzijama koje su strogo veće od nule. **Kovarijacija** slučajnih veličina X i Y je broj $cov(X, Y)$ zadat sa

$$cov(X, Y) = E(X - EX)(Y - EY) = E(XY) - EX \cdot EY.$$

Koeficijent korelacije slučajnih veličina X i Y je broj

$$\rho(X, Y) = \frac{E(XY) - EX \cdot EY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}.$$

Definicija 2.2.

Disperzija slučajne promenljive X je očekivana vrednost kvadrata odstupanja slučajne promenljive od njenog matematičkog očekivanja, odnosno

$$DX = E(X - EX)^2.$$

Disperzija se takođe može posmatrati kao kovarijacija slučajne promenljive X i nje same.

$$DX = cov(X, X).$$

Kovarijaciona matrica slučajnog vektora

Neka je

$$B = [b_{k\,l}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

proizvoljna kvadratna matrica.

Matrica B je **simetrična**, ukoliko je $b_{kl} = b_{lk}$ za sve $k, l \in \{1, ..., n\}$.

Matrica B je **nenegativno definitna** (pozitivno semidefinitna), ako za proizvoljan vektor $(\beta_1, ..., \beta_1) \in \mathbf{R}^n$ važi nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \beta_k \beta_l b_{kl} \geq 0.$$

Matrica B je **pozitivno definitna**, ako za proizvoljan vektor $(\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbf{R}^n$ važi nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \beta_k \beta_l b_{kl} > 0.$$

Matrica B je **nesingularna** (invertibilna) ako postoji matrica $A = [a_{k\,l}]_{n\times n}$ takva da $AB = BA = I_n$, gde je I_n jedinična matrica, a matricu A nazivamo inverzom matrice B.

Definicija 2.3.

Neka je $X = (X_1, ..., X_n)$ slučajan vektor, takav da za sve $k \in \{1, ..., n\}$ važi $EX_k^2 < +\infty$. Matrica $B = [b_{k\,l}]_{n\times n}$, gde su $b_{k\,l} = cov(X_k, X_l)$, zove se **kovarijaciona matrica slučajnog vektora** X.

Teorema 2.1

Matrica $B = [b_{k\,l}]_{n\times n}$ je kovarijaciona matrica nekog slučajnog vektora $(X_1, ..., X_n)$, ako i samo ako je B simetrična i nenegativno definitna matrica (pozitivno semidefinitna).

3 Višedimenziona normalna raspodela

Višedimenziona normalna raspodela (ili višedimenziona Gausova raspodela) predstavlja generalizaciju jednodimenzione normalne raspodele. Po jednoj definiciji slučajni vektor ima n-dimenzionu normalnu raspodelu, ako svaka linearna kombinacija njegovih n komponenti ima jednodimenzionu normalnu raspodelu. Važnost višedimenzione normalne raspodele ogleda se u višedimenzionoj centralnoj graničnoj teoremi. Često se koristi da bi se opisao, barem otprilike, bilo koji skup (mogućih) korelisanih stvarnih vrednosti slučajnih promenljivih.

Definicija 3.1.

Neka je

$$B = [b_{k\,l}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

simetrična, nenegativno definitna i nesingularna matrica, tj. matrica za koju važe uslovi:

1) $b_{ij} = b_{ji}, za\ sve\ i, j \in \{1, 2, ..., n\}$;

2) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_i\beta_j b_{ij} \geq 0\ za\ svaku\ n-torku\ (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathbf{R^n}$;

3) $detB \neq 0$.

Neka je

$$B^{-1} = A = [a_{k\,l}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

inverzna matrica matrici B i $m = (m_1, ..., m_n) \in \mathbf{R}^n$. Funkcija $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ data sa

$$f(x_1, ..., x_n) = \frac{|A|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}(x_k - m_k)(x_l - m_l)}$$

zove se **gustina raspodele n-dimenzione normalne raspodele**.

Matrica $B = A^{-1}$ predstavlja kovarijacionu matricu slučajnog vektora $(X_1, ..., X_n)$.

Specijalno, u **dvodimenzionalnom slučaju**, vektor (X_1, X_2) ima normalnu raspodelu sa gustinom

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left((\frac{x_1-m_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\frac{x_2-m_2}{\sigma_2} + (\frac{x_2-m_2}{\sigma_2})^2\right)}.$$

Koeficijent ρ koji figuriše u izrazu predstavlja koeficijent korelacije komponenti X_1 i X_2, za koje važi $X_1 \in \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ i $X_2 \in \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$.

4 Stacionarni slučajni nizovi

Pri razmatranju problema određivanja asimptotske raspodele maksimuma prvih n članova stacionarnih nizova kod kojih članovi imaju istu raspodelu pri $n \to \infty$, zahteva se da su članovi niza slabo zavisni, ako se indeksi tih članova puno razlikuju. U daljem tekstu razmatramo strogo stacionarne nizove u smislu sledeće definicije.

Definicija 4.1.

Slučajan niz $X_1, X_2, X_3 ...$, je **strogo stacionaran**, ako za sve prirodne brojeve n i k slučajni vektori $(X_1, X_2, ..., X_n)$ i $(X_{1+k}, X_{2+k}, ..., X_{n+k})$ imaju istu raspodelu.

Iz definicije neposredno sledi da svi članovi stacionarnog niza imaju istu raspodelu, što je jedan od uslova koji je pretpostavljen i u klasičnoj teoriji ekstremnih vrednosti.

Uslovi slabe zavisnosti

U teoriji ekstremnih vrednosti zavisnih slučajnih veličina granične teoreme se dokazuju pri određenim pretpostavkama koje se odnose na slabu zavisnost (pomešanost) članova niza čiji se indeksi puno razlikuju. Postoji više definicija slabe zavisnosti, a određene su koeficijentima pomešanosti koji daju meru zavisnosti između članova strogo stacionarnog slučajnog niza. U definicijama koje se navode u daljem tekstu, podrazumevamo da indeks n uzima vrednosti iz skupa prirodnih brojeva. Pri proučavanju ekstremnih vrednosti, događaji oblika $\{X_j \leq u\}$, odnosno $\{X_j > u\}$, od posebnog su interesa, a definicije navedene u daljem tekstu se odnose samo na takve događaje.

Definicija 4.2.

Neka je (X_n) strogo stacionaran slučajan niz, a (u_n) niz realnih brojeva. Uslov $\mathbf{D(u_n)}$ je zadovoljen, ukoliko za sve prirodne brojeve

$$1 \leq j_1 < \cdots < j_k < j_{k+1} < \cdots < j_{k+l} \leq n,$$

gde je $j_{k+1} - j_k \geq l$, važi nejednakost

$$\left| P(\bigcap_{s=1}^{k+l} \{X_{j_s} \leq u_n\}) - P(\bigcap_{s=1}^{k} \{X_{j_s} \leq u_n\}) P(\bigcap_{s=k+1}^{k+l} \{X_{j_s} \leq u_n\}) \right| \leq \alpha_{n,l},$$

i $\alpha_{n,l_n} \to 0$ pri $n \to \infty$ za neki niz $l_n = o(n)$.

Definicija 4.3.

Neka je (X_n) strogo stacionaran slučajan niz, a (u_n) niz realnih brojeva. Uslov $\mathbf{D'(u_n)}$ je zadovoljen ukoliko je

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} n \cdot \sum_{j=2}^{[n/k]} P\{X_1 > u_n,\, X_j > u_n\} = 0.$$

Stacionarni nizovi slučajnih veličina sa normalnom raspodelom

Niz slučajnih veličina $\{\xi_n\}$ nazivamo normalnim ukoliko je za bilo koje $n, i_1, ..., i_n$, n-dimenziona raspodela za $(\xi_1, ..., \xi_n)$ normalna.

Ove konačno - dimenzione raspodele su jasno određene matematičkim očekivanjima pojedinačnih slučajnih veličina ξ_n i kovarijansama između parova ξ_n i ξ_m, za bilo koje m i n.

Za stacionarne normalne nizove matematičko očekivanje i disperzija od ξ_n ne zavise od n i mogu se, bez gubitka opštosti, uzeti vrednosti 0 i 1, redom. U daljem tekstu podrazumevaćemo da su normalni nizovi standardizovani.

Iz stacionarnosti sledi da kovarijanse između parova ξ_n i ξ_m zavise samo od razlike između m i n (njihove apsolutne vrednosti), tj.

$$cov(\xi_n, \xi_m) = r_{n-m} = r_{|n-m|}.$$

gde $\{r_n\}$ označava niz kovarijansi procesa. Pri standardizaciji dobijamo $r_0 = D(\xi_n) = 1$ i $r_n = cov(\xi_j, \xi_{j+n}) = E(\xi_j \xi_{j+n})$.

Sve konačno - dimenzione funkcije raspodele $F_{i_1 \ldots i_n}(x_1, ..., x_n) = P(\xi_{i_1} \leq x_1, ..., \xi_{i_n} \leq x_n)$ niza sa standardnom normalnom raspodelom određene su nizom kovarijansi $\{r_n\}$. Niz kovarijansi ne može biti proizvoljan, s obzirom da kovarijaciona matrica za $\xi_{i_1}, ..., \xi_{i_n}$ mora biti nenegativno definitna (pozitivno semidefinitna).

Berman (1964) u [7] je dao jednostavne uslove za niz kovarijansi $\{r_n\}$, potrebne da bi $M_n = max(\xi_1, ..., \xi_n)$ imalo graničnu raspodelu dvostruko eksponencijalnog tipa,

$$P\{a_n(M_n - b_n) \leq x\} \to e^{-e^{-x}},$$

kada $n \to \infty$, pri čemu su a_n i b_n konstante takve da važi

$$a_n = (2\, log\, n)^{\frac{1}{2}},$$
$$b_n = a_n - \frac{1}{2a_n}(log\, log\, n + log 4\pi).$$

Jedan od Bermanovih rezultata je da je dovoljno da važi uslov

$$r_n log\, n \to 0,$$

kada $n \to \infty$. Ovaj uslov garantuje da važe i uslovi $D(u_n)$ i $D'(u_n)$ za odgovarajući niz $\{u_n\}$.

5 Normalna lema o upoređivanju

Glavni alat koji se koristi pri dokazivanju da su i uslovi $\mathbf{D(u_n)}$ i $\mathbf{D'(u_n)}$ na snazi za odgovarajući niz $\{u_n\}$ ukoliko važi $r_n log\, n \to 0$, kada $n \to \infty$, predstavlja rezultat koji je tema ovog rada, a to je ***normalna lema o upoređivanju***. Ona ocenjuje razliku između dve n-dimenzione funkcije raspodele, uz pomoć funkcije njihovih kovarijansi. U daljem tekstu sledi sama lema i njen dokaz, a zatim nekoliko posledica i primene.

Teorema 5.1. *(Normalna lema o upoređivanju)*

Pretpostavimo da su $\xi_1, ..., \xi_n$ *promenljive sa normalnom raspodelom sa kovarijacionom matricom* $\Lambda^1 = (\Lambda^1_{ij})$, *i* $\eta_1, ..., \eta_n$ *takođe, sa kovarijacionom matricom* $\Lambda^0 = (\Lambda^0_{ij})$ *i neka je* $\rho_{ij} = max(\left|\Lambda^1_{ij}\right|, \left|\Lambda^0_{ij}\right|)$. *Zatim, neka su* $u_1, ..., u_n$ *realni brojevi. Tada*

$$P\{\xi_j \leq u_j;\ j = 1, ..., n\} - P\{\eta_j \leq u_j;\ j = 1, ..., n\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leq i < j \leqslant n} (\Lambda^1_{ij} - \Lambda^0_{ij})^+ (1 - \rho^2_{ij})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2 + u_j^2)}{1+\rho_{ij}}} \tag{1}$$

gde je $x^+ = max(0, x)$.

Specijalno, ako je $max_{i \neq j} |\rho_{ij}| = \delta < 1$, *važi*

$$P\{\xi_j \leq u_j;\ j=1,...,n\} - P\{\eta_j \leq u_j;\ j=1,...,n\} \leqslant$$
$$\leqslant K \sum_{1\leq i<j\leqslant n} (\Lambda^1_{ij} - \Lambda^0_{ij})^+ e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}}, \tag{2}$$

za neku konstantu K, koja zavisi samo od δ.

Dalje je

$$|P\{\xi_j \leq u_j;\ j=1,...,n\} - P\{\eta_j \leq u_j;\ j=1,...,n\}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{1\leq i<j\leqslant n} \left|\Lambda^1_{ij} - \Lambda^0_{ij}\right| (1-\rho_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}} \tag{3}$$

gde faktor $\frac{1}{2\pi}(1-\rho_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}}$ može biti zamenjen sa K, ako je $max_{i\neq j}\rho_{ij} = \delta < 1$.

Dokaz:

Pretpostavimo da su Λ^1 i Λ^0 pozitivno definitne matrice i da $(\xi_1, ..., \xi_n)$ i $(\eta_1, ..., \eta_n)$ imaju zajedničke gustine raspodele f_1 i f_0 redom. (Slučaj kada su ove matrice semi-definitne je lako rešiti uz pomoć neprekidnosti, ako posmatramo $\xi_i + \varepsilon_i$ i $\eta_i + \varepsilon_i$, pri čemu su ε_i nezavisne promenljive sa normalnom raspodelom, matematičkim očekivanjem 0 i kada $D\varepsilon_i \to 0$.)

Dakle,

$$\Lambda^1 = (\Lambda^1_{ij}) = \begin{vmatrix} \Lambda^1_{11} & \Lambda^1_{12} & \cdots & \Lambda^1_{1n} \\ \Lambda^1_{21} & \Lambda^1_{22} & \cdots & \Lambda^1_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda^1_{n1} & \Lambda^1_{n2} & \cdots & \Lambda^1_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Lambda^0 = (\Lambda^0_{ij}) = \begin{vmatrix} \Lambda^0_{11} & \Lambda^0_{12} & \cdots & \Lambda^0_{1n} \\ \Lambda^0_{21} & \Lambda^0_{22} & \cdots & \Lambda^0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda^0_{n1} & \Lambda^0_{n2} & \cdots & \Lambda^0_{nn} \end{vmatrix},$$

pri čemu je $\Lambda^1_{ij} = cov(\xi_i, \xi_j)$ i $\Lambda^0_{ij} = cov(\eta_i, \eta_j)$.

Ako označimo $u = (u_1, ..., u_n)$ biće

$$P\left\{\xi_1 \leq u_1, ..., \ \xi_n \leq u_n\right\} = \int_{-\infty}^{\mathbf{u}} \!\!\cdots\!\! \int f_1(y_1, ..., y_n) d\mathbf{y}$$

$$\left(= \int_{-\infty}^{u_1} \int_{-\infty}^{u_2} \!\!\cdots\!\! \int_{-\infty}^{u_n} f_1(y_1, ..., y_n) dy_n dy_{n-1} ... dy_1\right),$$

$$P\left\{\eta_1 \leq u_1, ..., \ \eta_n \leq u_n\right\} = \int_{-\infty}^{\mathbf{u}} \!\!\cdots\!\! \int f_0(y_1, ..., y_n) d\mathbf{y}$$

$$\left(= \int_{-\infty}^{u_1} \int_{-\infty}^{u_2} \!\!\cdots\!\! \int_{-\infty}^{u_n} f_0(y_1, ..., y_n) dy_n dy_{n-1} ... dy_1\right),$$

pri čemu su f_1 i f_0 gustine normalne raspodele bazirane na kovarijacionim matricama Λ^1 i Λ^0, a integracija na skupu $\{y; \ y_j \leq u_j, \ j = 1, ..., n\}$.

Posmatrajmo matricu $\Lambda_h = h\Lambda^1 + (1-h)\Lambda^0$, $(0 \leq h \leq 1)$ koja je pozitivno definitna,

$$\Lambda^h = h\begin{vmatrix} \Lambda^1_{11} & \Lambda^1_{12} & \cdots & \Lambda^1_{1n} \\ \Lambda^1_{21} & \Lambda^1_{22} & \cdots & \Lambda^1_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda^1_{n1} & \Lambda^1_{n2} & \cdots & \Lambda^1_{nn} \end{vmatrix} + (1-h)\begin{vmatrix} \Lambda^0_{11} & \Lambda^0_{12} & \cdots & \Lambda^0_{1n} \\ \Lambda^0_{21} & \Lambda^0_{22} & \cdots & \Lambda^0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda^0_{n1} & \Lambda^0_{n2} & \cdots & \Lambda^0_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Lambda^h = \begin{vmatrix} h\Lambda^1_{11} + (1-h)\Lambda^0_{11} & h\Lambda^1_{12} + (1-h)\Lambda^0_{12} & \cdots & h\Lambda^1_{1n} + (1-h)\Lambda^0_{1n} \\ h\Lambda^1_{21} + (1-h)\Lambda^0_{21} & h\Lambda^1_{22} + (1-h)\Lambda^0_{22} & \cdots & h\Lambda^1_{2n} + (1-h)\Lambda^0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h\Lambda^1_{n1} + (1-h)\Lambda^0_{n1} & h\Lambda^1_{n2} + (1-h)\Lambda^0_{n2} & \cdots & h\Lambda^1_{nn} + (1-h)\Lambda^0_{nn} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

S obzirom da je $\Lambda^1_{11} = cov(\xi_1, \xi_1) = D(\xi_1) = 1, ..., \Lambda^1_{nn} = cov(\xi_n, \xi_n) = D(\xi_n) = 1$ i $\Lambda^0_{11} = cov(\eta_1, \eta_1) = D(\eta_1) = 1, ..., \Lambda^0_{nn} = cov(\eta_n, \xi_n) = D(\eta_n) = 1$, matrica Λ_h ima jedinice na glavnoj dijagonali $(h \cdot 1 + (1-h) \cdot 1 = 1)$ i elemente $h\Lambda^1_{ij} + (1-h)\Lambda^0_{ij}$ za $i \neq j$.

$$\Lambda^h = \begin{vmatrix} 1 & h\Lambda^1_{12} + (1-h)\Lambda^0_{12} & \cdots & h\Lambda^1_{1n} + (1-h)\Lambda^0_{1n} \\ h\Lambda^1_{21} + (1-h)\Lambda^0_{21} & 1 & \cdots & h\Lambda^1_{2n} + (1-h)\Lambda^0_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h\Lambda^1_{n1} + (1-h)\Lambda^0_{n1} & h\Lambda^1_{n2} + (1-h)\Lambda^0_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Neka je f_n n-dimenziona gustina normalne raspodele bazirana na Λ_h i

$$F(h) = \int_{-\infty}^{\mathbf{u}} \cdots \int f_h(y_1, ..., y_n) d\mathbf{y} \tag{5}$$
$$\left(= \int_{-\infty}^{u_1} \int_{-\infty}^{u_2} \cdots \int_{-\infty}^{u_n} f_h(y_1, ..., y_n) dy_n dy_{n-1} ... dy_1 \right).$$

S obzirom da kada je $h = 1$ imamo $\Lambda_h = h\Lambda^1 + (1-h)\Lambda^0 = 1 \cdot \Lambda^1 + 0 \cdot \Lambda^0 = \Lambda^1$, a za $h = 0$ imamo $\Lambda_h = h\Lambda^1 + (1-h)\Lambda^0 = 0 \cdot \Lambda^1 + 1 \cdot \Lambda^0 = \Lambda^0$, primećujemo da je

$$P\{\xi_1 \le u_1, ..., \ \xi_n \le u_n\} = F(1),$$
$$P\{\eta_1 \le u_1, ..., \ \eta_n \le u_n\} = F(0).$$

Pa je leva stana jednačine (1) iz postavke leme jednaka $F(1) - F(0)$, tj.

$$P\{\xi_1 \le u_1, ..., \ \xi_n \le u_n\} - P\{\eta_1 \le u_1, ..., \ \eta_n \le u_n\} = F(1) - F(0).$$

Dakle,

$$F(1) - F(0) = \int_{-\infty}^{1} F'(h) dh - \int_{-\infty}^{0} F'(h) dh = \int_{0}^{1} F'(h) dh,$$

pri čemu $F'(h)$ dobijamo kada diferenciramo (5), t.j.

$$F'(h) = \int_{-\infty}^{\mathbf{u}} \cdots \int \frac{\partial f_h(y_1, ..., y_n)}{\partial h} d\mathbf{y} \left(= \int_{-\infty}^{u_1} \int_{-\infty}^{u_2} \cdots \int_{-\infty}^{u_n} \frac{\partial f_h(y_1, ..., y_n)}{\partial h} dy_n dy_{n-1} ... dy_1 \right).$$

Gustina f_h zavisi od h samo preko elemenata Λ_{ij}^h matrice Λ_h (s obzirom da je f_h funkcija od Λ_{ij}^h za $i \leq j$), $\Lambda_{ii}^h = 1$ ne zavise od h, dok za $i < j$ važi $\Lambda_{ij}^h = h\Lambda_{ij}^1 + (1-h)\Lambda_{ij}^0$, tako da $\frac{\partial \Lambda_{ij}^h}{\partial h} = \Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0$. Prema tome

$$F'(h) = \sum_{i \leq j} \int_{-\infty}^{\mathbf{u}} \!\!\cdots\!\! \int \frac{\partial f_h}{\partial \Lambda_{ij}^h} \frac{\partial \Lambda_{ij}^h}{\partial h} d\mathbf{y} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\mathbf{u}} \!\!\cdots\!\! \int \frac{\partial f_h}{\partial \Lambda_{11}^h} \frac{\partial \Lambda_{11}^h}{\partial h} d\mathbf{y} + \int_{-\infty}^{\mathbf{u}} \!\!\cdots\!\! \int \frac{\partial f_h}{\partial \Lambda_{12}^h} \frac{\partial \Lambda_{12}^h}{\partial h} d\mathbf{y} + ... +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\mathbf{u}} \!\!\cdots\!\! \int \frac{\partial f_h}{\partial \Lambda_{(n-1)n}^h} \frac{\partial \Lambda_{(n-1)n}^h}{\partial h} d\mathbf{y} + \int_{-\infty}^{\mathbf{u}} \!\!\cdots\!\! \int \frac{\partial f_h}{\partial \Lambda_{nn}^h} \frac{\partial \Lambda_{nn}^h}{\partial h} d\mathbf{y} =$$

$$= \sum_{i \leq j} (\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0) \int_{-\infty}^{\mathbf{u}} \!\!\cdots\!\! \int \frac{\partial f_h}{\partial \Lambda_{ij}^h} d\mathbf{y}.$$

S obzirom da je $\Lambda_{i\,i}^1 = 1$ i $\Lambda_{i\,i}^0 = 1$, biće $(\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0) = 1 - 1 = 0$ za $i = j$, pa je

$$F'(h) = \sum_{i < j} (\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0) \int_{-\infty}^{\mathbf{u}} \!\!\cdots\!\! \int \frac{\partial f_h}{\partial \Lambda_{ij}^h} d\mathbf{y}.$$

Svojstvo normalne n-dimenzione raspodele koje će nam koristiti je da je njen izvod po kovarijansi Λ_{ij} jednak drugom parcijalnom izvodu po promenljivama y_i, y_j redom, odnosno

$$\frac{\partial f_h}{\partial \Lambda_{ij}} = \frac{\partial^2 f_h}{\partial y_i \partial y_j}.$$

Prema tome,

$$F'(h) = \sum_{i<j} (\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0) \int_{-\infty}^{\mathbf{u}} \cdots \int \frac{\partial^2 f_h}{\partial y_i \partial y_j} d\mathbf{y}.$$

Nakon integracije po y_i i y_j dobijamo

$$F'(h) = \sum_{i<j} (\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0) \int_{-\infty}^{\mathbf{u}'} \cdots \int f_h(y_i = u_i, y_j = u_j) d\mathbf{y}', \tag{6}$$

gde $f_h(y_i = u_i, y_j = u_j)$ označava funkciju sa $n-2$ promenljive, formirane zamenom $y_i = u_i$ i $y_j = u_j$, a integracija je po preostalim promenljivama.

Posmatrajmo integral iz jednakosti (6) kada promenjljive uzimaju vrednost od $-\infty$ do ∞. S obzirom da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int f_h(y_i = u_i, y_j = u_j) d\mathbf{y}'$$

zavisi od dve promenljive koje uzimaju vrednosti (u_i, u_j) i koje imaju standardizovanu normalnu raspodelu sa korelacijom Λ_{ij}^h, može se zapisati na sledeći način,

$$\frac{1}{2\pi(1 - (\Lambda_{ij}^h)^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2(1-(\Lambda_{ij}^h)^2)}(u_i^2 - 2\Lambda_{ij}^h u_i u_j + u_j^2)}. \tag{7}$$

S obzirom da važi $\left|\Lambda_{ij}^{h}\right| = \left|h\Lambda_{ij}^{1} + (1-h)\Lambda_{ij}^{0}\right| \leq max(\Lambda_{ij}^{1}, \Lambda_{ij}^{0}) = \rho_{ij}$, biće

$$\frac{1}{2\pi(1-(\Lambda_{ij}^{h})^{2})^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2\pi(1-\rho_{ij}^{2})^{\frac{1}{2}}}. \tag{8}$$

S druge strane, važi i

$$\frac{u^2 - 2\rho uv + v^2}{1-|\rho|} \geq \frac{u^2 - 2\,|\rho|\,|u|\,|v| + v^2}{1-|\rho|},$$

pri čemu desna stana dostiže minimum kada je $\rho = 0$, pa će važiti nejednakosti

$$\frac{u^2 - 2\rho uv + v^2}{1-|\rho|} \geq \frac{u^2 - 2\,|\rho|\,|u|\,|v| + v^2}{1-|\rho|} \geq \frac{u^2+v^2}{1} \geq \frac{u^2+v^2}{1+\rho},$$

kada primenimo poslednju nejednakost na drugi činilac iz izraza (7), dobijamo da važi

$$\frac{u_i^2 - 2\Lambda_{ij}^{h}u_iu_j + u_j^2}{1-(\Lambda_{ij}^{h})^2} \geq \frac{u_i^2+u_j^2}{1+\rho_{ij}},$$

odakle sledi

$$e^{\frac{1}{2}\frac{u_i^2-2\Lambda_{ij}^h u_i u_j+u_j^2}{1-(\Lambda_{ij}^h)^2}} \geq e^{\frac{1}{2}\frac{u_i^2+u_j^2}{1+\rho_{ij}}},$$

odnosno,

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{2}\frac{u_i^2-2\Lambda_{ij}^h u_i u_j+u_j^2}{1-(\Lambda_{ij}^h)^2}}} \leq \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\frac{u_i^2+u_j^2}{1+\rho_{ij}}}}. \tag{9}$$

Iz (8) i (9) sledi da važi sledeća nejednakost

$$\frac{1}{2\pi(1-(\Lambda_{ij}^h)^2)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2(1-(\Lambda_{ij}^h)^2)}(u_i^2-2\Lambda_{ij}^h u_i u_j+u_j^2)} \leq \frac{1}{2\pi(1-\rho_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}}.$$

Zamenom poslednjeg izraza u jednačinu (6), dobijamo

$$F'(h) \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}(\Lambda_{ij}^1-\Lambda_{ij}^0)^+(1-\rho_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}}. \tag{10}$$

S obzirom da je

$$\begin{aligned} &P\{\xi_j \leq u_j;\ j=1,...,n\} - P\{\eta_j \leq u_j;\ j=1,...,n\} = \\ &= F(1)-F(0) = \int_0^1 F'(h)dh, \end{aligned} \tag{11}$$

na osnovu (10) imamo

$$
\begin{aligned}
&P\{\xi_j \le u_j;\ j=1,...,n\} - P\{\eta_j \le u_j;\ j=1,...,n\} \le \\
&\le \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} (\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+ (1-\rho_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}} \right) dh = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} (\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+ (1-\rho_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}} \int_0^1 dh = \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} (\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+ (1-\rho_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}},
\end{aligned}
$$

čime smo dokazali (1).

U specijalnom slučaju, kada $max_{i\neq j}|\rho_{ij}| = \delta < 1$, s obzirom da važi $(1-\rho_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}} \le (1-\delta^2)^{-\frac{1}{2}}$, iz (1) sledi

$$
\begin{aligned}
&P\{\xi_j \le u_j;\ j=1,...,n\} - P\{\eta_j \le u_j;\ j=1,...,n\} \le \\
&\le \frac{1}{2\pi} \sum_{i<j} (\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+ (1-\delta^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}} = \\
&= K \sum_{i<j} (\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+ e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}},
\end{aligned}
$$

za konstantu $K = \frac{1}{2\pi}(1-\delta^2)^{-\frac{1}{2}}$ koja zavisi od δ, pa važi i (2).

Ako u (1) zamenimo mesta verovatnoćama koje se odnose na ξ_j i η_j, imamo

$$\begin{aligned} &P\left\{\eta_j \leq u_j;\ j=1,...,n\right\} - P\left\{\xi_j \leq u_j;\ j=1,...,n\right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}(\Lambda^0_{ij}-\Lambda^1_{ij})^+(1-\rho^2_{ij})^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}}, \end{aligned} \tag{12}$$

a za $(\Lambda^1_{ij}-\Lambda^0_{ij})^+ = max(0,\Lambda^1_{ij}-\Lambda^0_{ij})$ i $(\Lambda^0_{ij}-\Lambda^1_{ij})^+ = max(0,\Lambda^0_{ij}-\Lambda^1_{ij})$ važi

$$\begin{aligned} (\Lambda^1_{ij}-\Lambda^0_{ij})^+ &\leq \left|\Lambda^1_{ij}-\Lambda^0_{ij}\right|, \\ (\Lambda^0_{ij}-\Lambda^1_{ij})^+ &\leq \left|\Lambda^1_{ij}-\Lambda^0_{ij}\right|. \end{aligned}$$

Primećujemo da važe sledeće nejednakosti,

$$\begin{aligned} &P\left\{\xi_j \leq u_j;\ j=1,...,n\right\} - P\left\{\eta_j \leq u_j;\ j=1,...,n\right\} \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}\left|\Lambda^1_{ij}-\Lambda^0_{ij}\right|(1-\rho^2_{ij})^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P\left\{\eta_j \leq u_j;\ j=1,...,n\right\} - P\left\{\xi_j \leq u_j;\ j=1,...,n\right\} \leq \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}\left|\Lambda^1_{ij}-\Lambda^0_{ij}\right|(1-\rho^2_{ij})^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}}, \end{aligned}$$

odakle sledi nejednakost

$$\begin{aligned}&\left|P\left\{\xi_j \le u_j;\ j=1,...,n\right\} - P\left\{\eta_j \le u_j;\ j=1,...,n\right\}\right| \leqslant \\ &\quad \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}\left|\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0\right|(1-\rho_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}}.\end{aligned}$$

Time smo dokazali da važi i (3). □

U daljem tekstu su navedene neke posledice ove leme (bez dokaza) koje se odnose na simplifikaciju izraza sa desne strane nejednakosti iz tvrđenja leme.

Posledica 5.1.

Ako pored ostalih uslova u normalnoj lemi upoređivanja dodamo uslov $u = min(u_1, ..., u_n)$*, onda faktor* $e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}}$ *može biti zamenjen faktorom* $e^{-\frac{u^2}{1+\rho_{ij}}}$ *u svakom od izraza* (1), (2) *i* (3)*. Nakon zamene dobijamo sledeće nejednakosti*

$$\begin{aligned}&P\left\{\xi_j \le u_j;\ j=1,...,n\right\} - P\left\{\eta_j \le u_j;\ j=1,...,n\right\} \leqslant \\ &\quad \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{1\le i<j\leqslant n}(\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+(1-\rho_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{1+\rho_{ij}}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P\left\{\xi_j \le u_j;\ j=1,...,n\right\} - P\left\{\eta_j \le u_j;\ j=1,...,n\right\} \leqslant \\ &\quad \leqslant K\sum_{1\le i<j\leqslant n}(\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+ e^{-\frac{u^2}{1+\rho_{ij}}},\end{aligned}$$

$$\left|P\left\{\xi_j \leq u_j;\ j=1,...,n\right\} - P\left\{\eta_j \leq u_j;\ j=1,...,n\right\}\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{1\leq i<j\leqslant n} \left|\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0\right| (1-\rho_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u^2}{1+\rho_{ij}}}.$$

Posledica 5.2.

Neka su $\xi_1,...,\xi_n,\eta_1,...,\eta_n$ slučajne promenljive sa standardnom normalnom raspodelom i $cov(\xi_i,\xi_j) \leq cov(\eta_i,\eta_j)$ za svako i i j. Tada, za bilo koje realne brojeve $u_1,...,u_n$ važi nejednakost

$$P\left\{\xi_j \leq u_j;\ j=1,...,n\right\} \leqslant P\left\{\eta_j \leq u_j;\ j=1,...,n\right\}.$$

Specijalno,

$$P\left\{max(\xi_1,...,\xi_n) \leq u\right\} \leq P\left\{max(\eta_1,...,\eta_n) \leq u\right\},$$

za sve u.

Prethodna posledica govori da ako su kovarijanse od ξ_i ograničene vrednostima kovarijansi od η_i, onda su ξ_i stohastički veće od η_i i maksimum od ξ_i je stohastički veći od η_i.

Posledica 5.3.

Neka su $\xi_1, ..., \xi_n$ *slučajne veličine sa zajedničkom normalnom (standardizovanom) raspodelom i* $cov(\xi_i, \xi_j) = \Lambda_{ij}$*, pri čemu je* $\delta = max_{i \neq j} |\Lambda_{ij}| < 1$*. Tada za bilo koje realno* u *i cele brojeve* $1 \leq l_1 < \cdots < l_s \leq n$ *važi*

$$\left| P\left\{ \xi_{l_j} \leq u;\, j = 1, ..., s \right\} - \Phi(u)^s \right| \leq K \sum_{1 \leq i < j \leq s} |r_{ij}|\, e^{-\frac{u^2}{1+|r_{ij}|}},$$

gde je $r_{ij} = \Lambda_{l_i l_j}$ *korelacija između* ξ_{l_i} *i* ξ_{l_j}*, a* K *je konstanta koja zavisi od* δ*.*

Ako je dodatno, niz $\{\xi_n\}$ *stacionaran i* $r_i = cov(\xi_1, \xi_{1+i})$*, pri čemu je* $1 \leq l_1 < \cdots < l_s \leq n$*,* $|r_i| \leq \delta < 1$ *za svako* $i = l_j - l_k$*, onda*

$$\left| P\left\{ \xi_{l_j} \leq u;\, j = 1, ..., s \right\} - \Phi(u)^s \right| \leq Kn \sum_{i=1}^{n} |r_i|\, e^{-\frac{u^2}{1+|r_i|}}. \tag{13}$$

Specijalno, za $s = n$*, sledi da za svako* u *važi*

$$\left| P\left\{ M_n \leq u \right\} - \Phi(u)^n \right| \leq Kn \sum_{i=1}^{n} |r_i|\, e^{-\frac{u^2}{1+|r_i|}}. \tag{14}$$

Ova posledica razmatra šta se dešava ukoliko su η_j nezavisne. Primetimo da ako je vrednost desne strane izraza (13) dovoljno mala, onda (kada zamenimo $s = n$) događaji $\{\xi_j \leq u\}$ su skoro nezavisni za $1 \leq j \leq n$. Dalje iz (14) vidimo da je funkcija raspodele maksimuma bliska vrednosti $\Phi(u)^n$, koju bi uzela u slučaju da su ξ_i nezavisne, a sama nejednakost nam zapravo daje ocenu granice za njihovu razliku. U svakom od navedenih slučajeva, što je u veće, aproksimacija je bolja.

6 Primene

Nejednakost iz normalne leme o upoređivanju igra važnu ulogu u teoriji ekstremnih vrednosti, a situacija koja se može desiti u praksi je da imamo $\Lambda_{ij}^1 \geq \Lambda_{ij}^0$ za sve $1 \leq i < j \leq n$ i želimo da izračunamo verovatnoću $P\{\xi_1 \leq u_1, ..., \xi_n \leq u_n\}$, a pritom nam je verovatnoća $P\{\eta_1 \leq u_1, ..., \eta_n \leq u_n\}$ poznata. Nejednakost iz leme implicira nulu kao nižu granicu za razliku verovatnoća koje posmatramo, dok gornja granica ne može biti od koristi ukoliko greška ocene nije bliska nuli. Li i Shao (2002) su se u radu [5] bavili poboljšanjem gornje granice u nejednakosti iz normalne leme upoređivanja. U narednom tekstu biće prikazani neki od rezultata do kojih su pritom došli.

Teorema koja sledi tvrdi da se član $(1-\rho_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}}$ u nejednakosti iz leme može zanemariti.

Teorema 6.1.

Pretpostavimo da su $\xi_1, ..., \xi_n$ slučajne promenljive sa standardnom normalnom raspodelom i kovarijacionom matricom $\Lambda^1 = (\Lambda_{ij}^1)$, kao i $\eta_1, ..., \eta_n$, sa kovarijacionom matricom $\Lambda^0 = (\Lambda_{ij}^0)$ i neka je $\rho_{ij} = max(\left|\Lambda_{ij}^1\right|, \left|\Lambda_{ij}^0\right|)$. Zatim, neka su $u_1, ..., u_n$ realni brojevi. Tada

$$\begin{aligned} P\{\xi_j \leq u_j;\ j=1,...,n\} - P\{\eta_j \leq u_j;\ j=1,...,n\} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leq i<j \leqslant n} (\arcsin(\Lambda_{ij}^1) - \arcsin(\Lambda_{ij}^0))^+ e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}} \end{aligned} \tag{15}$$

gde je $x^+ = max(0, x)$.

Dokaz:

Dokaz ove teoreme svodi se najvećim delom na korake iz dokaza normalne leme o upoređivanju. Pri dokazu leme dobijena je jednačina (10) (str. 20):

$$F'(h) \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}(\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+(1-\rho_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}}.$$

Imajući u vidu

$$\begin{aligned} &P\{\xi_j \leq u_j;\ j=1,...,n\} - P\{\eta_j \leq u_j;\ j=1,...,n\} = \\ &= F(1)-F(0) = \int_0^1 F'(h)dh, \end{aligned} \tag{16}$$

na osnovu (10) dobijamo

$$\begin{aligned} &P\{\xi_j \leq u_j;\ j=1,...,n\} - P\{\eta_j \leq u_j;\ j=1,...,n\} \leq \\ &\leq \int_0^1 \left(\frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}(\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+(1-\rho_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}}\right)dh = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}(\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+ e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}}\int_0^1 (1-\rho_{ij}^2)^{-\frac{1}{2}}dh = \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}(\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+ e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}}\int_0^1 \frac{1}{(1-\rho_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}}dh = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}(\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+ e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}} \int_0^1 \frac{1}{(1-(h\Lambda_{ij}^1 + (1-h)\Lambda_{ij}^0)^2)^{\frac{1}{2}}} dh =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}(\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+ e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}} \int_0^1 \frac{1}{(1-(h\Lambda_{ij}^1 + \Lambda_{ij}^0 - h\Lambda_{ij}^0)^2)^{\frac{1}{2}}} dh =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}(\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+ e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}} \int_0^1 \frac{1}{(1-(h(\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0) + \Lambda_{ij}^0)^2)^{\frac{1}{2}}} dh.$$

Uvedimo smenu $t = h(\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0) + \Lambda_{ij}^0$. S obzirom da je $dt = (\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)dh$ imamo

$$P\{\xi_j \le u_j;\ j = 1, ..., n\} - P\{\eta_j \le u_j;\ j = 1, ..., n\} \le$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}(\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+ e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}} \int_{\Lambda_{ij}^0}^{\Lambda_{ij}^1} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{dt}{\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j}(\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)^+ e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}} \frac{1}{\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0} \int_{\Lambda_{ij}^0}^{\Lambda_{ij}^1} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j} e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}} \int_{\Lambda_{ij}^0}^{\Lambda_{ij}^1} \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{i<j} e^{-\frac{\frac{1}{2}(u_i^2+u_j^2)}{1+\rho_{ij}}} (\arcsin(\Lambda_{ij}^1) - \arcsin(\Lambda_{ij}^0))^+.$$

Ovime je teorema dokazana.□

Posledica 6.1.

Pretpostavimo da su $\xi_1, ..., \xi_n$ *slučajne promenljive sa standardnom normalnom raspodelom i kovarijacijom* $Cov(\xi_i, \xi_j) = \rho_{ij}$. *Tada*

$$\left| P\left\{\xi_j \leq u_j;\ j = 1, ..., n\right\} - \prod_{j=1}^{n} P(\xi_j \leq u_j) \right| \leq \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq n} |\rho_{ij}|\, e^{-\frac{u_i^2 + u_j^2}{2(1+|\rho_{ij}|)}}$$

za svako realno $u_i, i = 1, ..., n.$

Teorema 6.2.

Neka je $n \geq 3$ *i neka su* $\xi_1, ..., \xi_n$ *i* $\eta_1, ..., \eta_n$ *slučajne promenljive sa standardnom normalnom raspodelom i kovarijacionim matricama* $\Lambda^1 = (\Lambda^1_{ij})$ *i* $\Lambda^0 = (\Lambda^0_{ij})$, *redom. Ako je*

$$\Lambda^1_{ij} \geq \Lambda^0_{ij},\ za\ sve\ 1 \leq i, j \leq n,$$

onda važi

$$P\left\{\eta_j \leq u_j;\ j = 1, ..., n\right\} \leqslant P\left\{\xi_j \leq u_j;\ j = 1, ..., n\right\} \leqslant$$
$$\leqslant P\left\{\eta_j \leq u_j;\ j = 1, ..., n\right\} e^{\sum_{1 \leq i < j \leqslant n} \ln\left(\frac{\pi - 2\arcsin(\Lambda^0_{ij})}{\pi - 2\arcsin(\Lambda^1_{ij})}\right) e^{-\frac{u_i^2 + u_j^2}{2(1+\Lambda^1_{ij})}}} \tag{17}$$

za bilo koje $u_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n$ *koje zadovoljava sledeći uslov*

$$(\Lambda^h_{ki} - \Lambda^h_{ij}\Lambda^h_{kj})u_i + (\Lambda^h_{kj} - \Lambda^h_{ij}\Lambda^h_{ki})u_j \geq 0, \tag{18}$$

za $h = 0, 1$ *i za sve* $1 \leq i, j, k \leq n.$

Pre dokazivanja prethodne teoreme, razmotrimo sledeći slučaj. Ukoliko je $u_i = u \geq 0$, za svako i, tada

$$(\Lambda_{ki}^h - \Lambda_{ij}^h \Lambda_{kj}^h) u_i + (\Lambda_{kj}^h - \Lambda_{ij}^h \Lambda_{ki}^h) u_j = u(\Lambda_{ki}^h + \Lambda_{kj}^h)(1 - \Lambda_{ij}^h) \geq 0,$$

važi za sve $1 \leq i, j, k \leq n$. S obzirom da je uslov (18) zadovoljen, imamo sledeću posledicu.

Posledica 6.2.

Neka je $n \geq 3$ i neka su $\xi_1, ..., \xi_n$ slučajne promenljive sa standardnom normalnom raspodelom i kovarijacionom matricom $\Lambda = (\Lambda_{ij})$. Pretpostavimo da je $\Lambda_{ij} \geq 0$. Tada

$$P\{\xi_j \leq u;\ j = 1, ..., m\} P\{\xi_j \leq u;\ j = m+1, ..., n\} \leqslant$$

$$\leqslant P\{\xi_j \leq u;\ j = 1, ..., n\} \leqslant$$

$$\leqslant P(\xi_j \leq u;\ j = 1, ..., m) P\{\xi_j \leq u;\ j = m+1, ..., n\}\, e^{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{n} \ln\left(\frac{\pi}{\pi - 2\arcsin(\Lambda_{ij})}\right) e^{-\frac{u^2}{\Lambda_{ij}}}},$$

za $1 \leqslant m \leqslant n-1$, $u \leqslant 0$ i

$$P(\xi_1 \leq u)^n \leqslant P\{\xi_j \leq u;\ j = 1, ..., n\} \leqslant$$

$$\leqslant P(\xi_1 \leq u)^n e^{\sum_{1 \leq i < j \leqslant n} \ln\left(\frac{\pi}{\pi - 2\arcsin(\Lambda_{ij})}\right) e^{-\frac{u^2}{\Lambda_{ij}}}}, \quad \text{za } u \geq 0.$$

Dokaz Teoreme 6.2.:

Neka je $\Lambda_h = h\Lambda^1 + (1-h)\Lambda^0 = (\Lambda_{ij}^h)$ za $0 \leq h \leq 1$. Neka su $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n) := (\varphi_1^h, ..., \varphi_n^h)$ slučajne promenljive sa normalnom raspodelom i kovarijacionom matricom Λ^h i neka je f_h funkcija gustine od φ i

$$F(h) = \int_{-\infty}^{\mathbf{u}} \cdots \int f_h(y_1, ..., y_n) d\mathbf{y} \tag{19}$$

gde je $\mathbf{u} = (u_1, ...u_n)$ i $d\mathbf{y} = dy_1...dy_n$. Tada je

$$F(1) = P\left\{\xi_j \leq u_j;\ j = 1, ..., n\right\},$$
$$F(0) = P\left\{\eta_j \leq u_j;\ j = 1, ..., n\right\}.$$

Neka je

$$g(h) = e^{\sum_{1\leq i,j\leq n} \ln\left(\frac{\pi - 2\arcsin(\Lambda_{ij}^0)}{\pi - 2\arcsin(\Lambda_{ij}^h)}\right) e^{-\frac{u_i^2 + u_j^2}{2(1+\Lambda_{ij}^1)}}}.$$

Dovoljno je pokazati da je $\frac{F(h)}{g(h)}$ nerastuće, ili, ekvivalentno tome

$$g(h)F'(h) \leq g'(h)F(h),\ za\ 0 \leq h \leq 1.$$

Slično kao i u dokazu normalne leme o upoređivanju (13 - 23. str) dobija se

$$F'(h) = \sum_{1 \leq i,\, j \leq n} (\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0) \int_{-\infty}^{\mathbf{u}'} f_h(y_i = u_i, y_j = u_j) d\mathbf{y}'$$

gde $f_h(y_i = u_i,\, y_j = u_j)$ označava funkciju od $n-2$ promenljive i formirana je zamenom $y_i = u_i$ i $y_j = u_j$, a integracija je po ostalim promenljivama.

S obzirom da važi

$$\frac{g'(h)}{g(h)} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{2(\Lambda_{ij}^1 - \Lambda_{ij}^0)}{(\pi - 2\arcsin(\Lambda_{ij}^h))(1-(\Lambda_{ij}^h)^2)^{\frac{1}{2}}}\, e^{-\frac{u_i^2+u_j^2}{2(1+\Lambda_{ij}^1)}},$$

potrebno je još samo pokazati da važi i

$$\int_{-\infty}^{\mathbf{u}'} f_h(y_i = u_i, y_j = u_j) d\mathbf{y}' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{(\pi - 2\arcsin(\Lambda_{ij}^h))(1-(\Lambda_{ij}^h)^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{u_i^2+u_j^2}{2(1+\Lambda_{ij}^1)}} P\left\{\varphi_m \leq u_m, m = 1, ..., n\right\} (20)$$

za $1 \leq i,\, j \leq n$.

Neka je $\phi(x, y; \Lambda)$ standardna dvodimenziona normalna gustina raspodele sa odgovarajućim koeficijentom korelacije Λ. Tada možemo zapisati

$$\int_{-\infty}^{\mathbf{u}'} f_h(y_i = u_i, y_j = u_j) d\mathbf{y}' = \phi(u_i, u_j; \Lambda_{ij}^h) P \left\{ \varphi' \leq \mathbf{u}' \mid \varphi_i = u_i,\, \varphi_j = u_j \right\}.$$

Zbog jednostavnosti, razmotrimo slučaj kada je $i = 1$ i $j = 2$. S obzirom da je

$$(\Lambda_{i1}^h - \Lambda_{12}^h \Lambda_{i2}^h) u_1 + (\Lambda_{i2}^h - \Lambda_{12}^h \Lambda_{i1}^h) u_2$$

konkavna funkcija od h za $k = 3, ..., n$, uslov (18) implicira sledeće

$$(\Lambda_{k1}^h - \Lambda_{12}^h \Lambda_{k2}^h) u_1 + (\Lambda_{k2}^h - \Lambda_{12}^h \Lambda_{k1}^h) u_2 \geq 0,$$

za $0 \geq h \geq 1$.

S obzirom na prethodno,

$$\left\{ \varphi_k - \frac{(\Lambda_{k1}^h - \Lambda_{12}^h \Lambda_{k2}^h)}{1 - (\Lambda_{12}^h)^2} \varphi_1 - \frac{(\Lambda_{k2}^h - \Lambda_{12}^h \Lambda_{k1}^h)}{1 - (\Lambda_{12}^h)^2} \varphi_2,\ k = 3, ..., n \right\} \ i \ \{\varphi_1, \varphi_2\}$$

su nezavisne, pa važe sledeće nejednakosti.

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\varphi_j \le u_j,\ j=3,...,n \,\middle|\, \varphi_1 = u_1,\ \varphi_2 = u_2\right\} = \\
=&P\left\{\varphi_j - \frac{(\Lambda^h_{j1} - \Lambda^h_{12}\Lambda^h_{j2})}{1-(\Lambda^h_{12})^2}\varphi_1 - \frac{(\Lambda^h_{j2} - \Lambda^h_{12}\Lambda^h_{j1})}{1-(\Lambda^h_{12})^2}\varphi_2 \leqslant \right. \\
&\left. \leqslant u_j - \frac{(\Lambda^h_{j1} - \Lambda^h_{12}\Lambda^h_{j2})}{1-(\Lambda^h_{12})^2}u_1 - \frac{(\Lambda^h_{j2} - \Lambda^h_{12}\Lambda^h_{j1})}{1-(\Lambda^h_{12})^2}u_2,\ j=3,...,n\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\leqslant P\left\{\varphi_j \le u_j + \tfrac{1}{1-(\Lambda^h_{12})^2}\left(\left(\Lambda^h_{j1} - \Lambda^h_{12}\Lambda^h_{j2}\right)\varphi_1 + \left(\Lambda^h_{j2} - \Lambda^h_{12}\Lambda^h_{j1}\right)\varphi_2\right),\ j=3,...,n\right\} =
$$

$$
= \frac{P\left\{\varphi_1 - \Lambda^h_{12}\varphi_2 \le 0, \varphi_2 - \Lambda^h_{12}\varphi_1 \le 0, \varphi_j \le u_j + \frac{1}{1-(\Lambda^h_{12})^2}\left(\Lambda^h_{j1}\left(\varphi_1 - \Lambda^h_{12}\varphi_2\right) + \Lambda^h_{j2}\left(\varphi_2 - \Lambda^h_{12}\varphi_1\right)\right), j=3,...,n\right\}}{P\left\{\varphi_1 - \Lambda^h_{12}\varphi_2 \le 0, \varphi_2 - \Lambda^h_{12}\varphi_1 \le 0\right\}}
$$

$$
\le \frac{P\left\{\varphi_1 - \Lambda^h_{12}\varphi_2 \le 0,\ \varphi_2 - \Lambda^h_{12}\varphi_1 \le 0,\ \varphi_i \le u_j,\ j=3,...,n\right\}}{P\left\{\varphi_1 - \Lambda^h_{12}\varphi_2 \le 0,\ \varphi_2 - \Lambda^h_{12}\varphi_1 \le 0\right\}}
$$

$$
\le \frac{P\left\{\varphi_1 \le 0,\ \varphi_2 \le 0,\ \varphi_i \le u_j,\ j=3,...,n\right\}}{P\left\{\varphi_1 - \Lambda^h_{12}\varphi_2 \le 0,\ \varphi_2 - \Lambda^h_{12}\varphi_1 \le 0\right\}}
$$

$$
\le \frac{P\left\{\varphi_j \le u_j,\ j=1,...,n\right\}}{P\left\{\varphi_1 - \Lambda^h_{12}\varphi_2 \le 0,\ \varphi_2 - \Lambda^h_{12}\varphi_1 \le 0\right\}}.
$$

Slično kao i u dokazu normalne leme o upoređivanju (13 - 23. str), imamo

$$\phi\left(u_1,\, u_2;\, \Lambda_{12}^h\right) \leq \frac{1}{2\pi\left(1-\left(\Lambda_{12}^h\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{u_1^2+u_2^2}{2\left(1+\Lambda_{12}^1\right)}}. \tag{21}$$

S obzirom da važi $cor(\varphi_1 - \Lambda_{12}^h \varphi_2,\, \varphi_2 - \Lambda_{12}^h \varphi_1) = -\Lambda_{12}^h$, dobijamo

$$P\left\{\varphi_1 - \Lambda_{12}^h \varphi_2 \leq 0,\, \varphi_2 - \Lambda_{12}^h \varphi_1 \leq 0\right\} = \frac{\pi - 2\arcsin\left(\Lambda_{12}^h\right)}{4\pi}.$$

Korišćenjem gornjih nejednakosti dobijamo da (20) važi za $i = 1$ i $j = 2$. Slično, (20) važi za sve $1 \leq i < j \leq n$. Ovime je dokaz završen.$\square$

Ova teorema daje bolje ograničenje koje može biti posebno korisno kada vrednost u_i nije velika i predstavlja glavni doprinos u radu Li i Shao (2002) [5].

Verovatnoća da slučajni polinom nema realnih nula

Neka je a_i, $i \geq 0$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom, matematičkim očekivanjem 0 i svim konačnim momentima. Razmotrimo slučajni polinom

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \ -\infty < x < \infty.$$

Dembo, Poonen, Shao i *Zeitouni* (2000) su u radu [6] dokazali da važi

$$P(f_n \ nema \ realnih \ nula) = n^{-b+o(1)},$$

dok $n \to \infty$ i predstavlja paran ceo broj. Konstanta b je definisana na sledeći način

$$b = -4 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln P(\sup_{0\leq t\leq T} X(t) \leq 0),$$

pri čemu je $X(t)$ stacionarni Gausov proces za koji važi

$$EX(s)X(t) = \frac{2e^{-\frac{|t-s|}{2}}}{1+e^{-|t-s|}}.$$

Dembo, Poonen, Shao i *Zeitouni* (2000) su u radu [6] takođe dokazali da važi $0.4 \leq b \leq 2$. Sledeća teorema predstavlja primenu Teoreme 6.2. kojom su Li i Shao (2002) unapredili ograničenja za konstantu b u radu [5].

Teorema 6.3.

Neka je a_i, $i \geq 0$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom, matematičkim očekivanjem 0 i svim konačnim momentima, pri čemu

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \ -\infty < x < \infty.$$

predstavlja slučajni polinom. Ako je $n^{-b+o(1)}$ verovatnoća da f_n nema realnih nula za paran ceo broj $n \to \infty$ i konstanta b definisana na sledeći način

$$b = -4 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln P(\sup_{0\leq t\leq T} X(t) \leq 0),$$

pri čemu je $X(t)$ stacionarni Gausov proces za koji važi

$$EX(s)X(t) = \frac{2e^{-\frac{|t-s|}{2}}}{1+e^{-|t-s|}},$$

tada za konstantu b važi ograničenje $0.5 < b \leq 1$.

Dokaz:

Dovoljno je pokazati da važi sledeće

$$P\left(\max_{1\leq i\leq 3n} X(4i)\leq 0\right)\leq e^{-0.125(12n)}$$

za $n\geq 1$. Neka je $r(x)=\frac{2e^{-2x}}{1+e^{-4x}}$.

Na osnovu (17) u *Teoremi 6.2* imamo

$$P\left(\max_{1\leq i\leq 3n} X(4i)\leq 0\right)\leq$$

$$\leq P\left(\max_{1\leq i\leq 3} X(4i)\leq 0\right)^{n} e^{\sum_{1\leq i<j\leq n}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} ln\left(\frac{\pi}{\pi-2\arcsin(r(3(j-i)+k-l))}\right)}$$

$$\leq P\left(\max_{1\leq i\leq 3} X(4i)\leq 0\right)^{n} e^{3n\sum_{i=1}^{\infty} ln\left(\frac{\pi}{\pi-2\arcsin(r(3i))}\right)+2n\sum_{i=1}^{\infty} ln\left(\frac{\pi}{\pi-2\arcsin(r(3i+1))}\right)+}$$

$$^{+2n\sum_{i=1}^{\infty} ln\left(\frac{\pi}{\pi-2\arcsin(r(3i-1))}\right)+n\sum_{i=1}^{\infty} ln\left(\frac{\pi}{\pi-2\arcsin(r(3i+2))}\right)n\sum_{i=1}^{\infty} ln\left(\frac{\pi}{\pi-2\arcsin(r(3i-2))}\right)}$$

$$:=P\left(\max_{1\leq i\leq 3} X(4i)\leq 0\right)^{n} e^{\lambda 12n}.$$

Dobija se da je $\lambda \approx 0.0205$. S druge strane, u radu [8] David (1953) je pokazao

$$P\left(\max_{1\le i\le 3} X(4i) \le 0\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4\pi}\left(2\arcsin(r(1)) + \arcsin(r(2))\right) <$$
$$< 0.17074 < e^{-0.1473\cdot 12}.$$

Dakle, važiće

$$P\left(\max_{1\le i\le 3n} X(4i) \le 0\right) \le e^{-(0.1473-0.0206)\cdot(12n)} \le e^{-0.1268\cdot(12n)}.$$

Ovime je dokaz završen. $\square$

7 Zaključak

Normalna lema o upoređivanju, dakle, predstavlja glavni alat pri dokazivanju da ukoliko je Bermanov uslov na snazi, biće zadovoljeni i uslovi $D(u_n)$ i $D'(u_n)$ za odgovarajući niz $\{u_n\}$. S obzirom da nejednakost iz leme implicira nulu kao nižu granicu za razliku verovatnoća koje posmatramo, dok gornja granica ne može biti od koristi ukoliko greška ocene nije bliska nuli, javlja se potreba za poboljšanjem gornje granice u skladu sa različitim primenama.

Jedna od primena kojima su se bavili Li i Shao (2002) u radu [5] je ocenjivanje verovatnoće da slučajni polinom nema realnu nulu, čime su se ranije bavili Dembo, Poonen, Shao i Zeitouni (2000) u radu [6]. Proučavanje broja nula slučajnog polinoma ima dugu istoriju i većina se bavila asimptotskim ponašanjem očekivanja slučajne veličine N_n koja predstavlja broj različitih realnih nula polinoma, umesto verovatnoćom $P(N_n = 0)$. Pretpostavlja se da je razlog tome što je očekivanje mnogo lakse oceniti. U radu [5] unapređena je ocena eksponenta u okviru verovatnoće da slučajni polinom nema realnih nula. Zatim, određivanje konstanti u takozvanom zakonu iteriranih logaritama (opisuje magnitudu fluktuacija slučajne šetnje) kojom su se ranije bavili Erdos i Revesz (1990), a kasnije i sam Shao (1994).

Još jedna od važnijih primena je u vezi sa frakcionim Braunovim kretanjem (generalizacija Braunovog kretanja) kojom se bavio Kesten (1992), a kasnije i Li i Shao (2002).

Literatura

[1] Leadbetter M. R, Lindgren G, Rootzen H. (1993): Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes, Springer-Verlag, New York

[2] Cramer H., Leadbetter M. R. (2014): Stationary and Related Stochastic Processes. Sample Function Properties and Their Applications, Dover Publications, New York

[3] Mladenović P. (2002): Ekstremne vrednosti slučajnih nizova, Matematički fakutet, Beograd

[4] Mladenović P. (2005): Verovatnoća i statistika, Matematički fakutet, Beograd

[5] Li W. V., Shao Q. M. (2002): A normal comparison inequality and its applications, Springer-Verlag, New York

[6] Dembo A., Poonen B., Shao Q. M., Zeitouni O. (2002): Random Polynomials having few or no real zeros, American Mathematical Society

[7] Berman S. M. (1964): Limit theorems for the maximum term in stationary sequences, Ann. Math. Stat.

[8] David N. (1953): A note on the evaluation of the multivariate normal integral, Biometrika