

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Данило Тошовић

ОЦЕНЕ L^p -НОРМЕ БЈОРЛИНГОВЕ
ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

мастер рад

Београд, 2021.

Ментор:

др Петар МЕЛЕНТИЈЕВИЋ, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

академик Миодраг МАТЕЉЕВИЋ
Српска академија наука и уметности

проф. др Павле МЛАДЕНОВИЋ, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 29. септембар 2021.

Садржај

Предговор	1
1 Бјорлингова трансформација	3
1.1 Хилбертова трансформација	4
1.2 Сингуларни интегрални оператори	5
1.3 Рисове трансформације	7
1.4 Бјорлингова трансформација	14
1.5 Мотивација и последице	26
2 Биркхолдјева неједнакост	33
3 Оцене норме методом Белманових функција	44
3.1 Топлотно продужење	44
3.2 Оцена норме	47
3.3 Белманова функција	50
3.4 Доказ теореме 3.3	60
3.5 Асимптотско понашање норме	66
4 Оцене норме методама стохастичке анализе	74
4.1 Мартингали и стохастичка интеграција	75
4.2 Веза Рисових трансформација и мартингала	80
4.3 Побољшање оцене коришћењем топлотног продужења	97
4.4 Побољшање оцене применом интерполације	109
Закључак	117
Библиографија	118

Предговор

Једна од битних области функционалне анализе је теорија сингуларних интегралних оператора. Она има велику примену у разним гранама математике, међу којима треба истаћи теорију парцијалних диференцијалних једначина, квазиконформна пресликавања и хармонијску анализу. Норма оператора је једна од његових фундаменталних особина, па не чуди што је при решавању оваквих једначина често неопходно знати нека ограничења одговарајуће норме. Бјорлингова¹ трансформација је један сингуларни интегрални оператор на простору $L^p(\mathbb{C})$. Због својих особина и примена она је незаобилазни „алат” у изучавању функционалне, комплексне и хармонијске анализе.

Тачна норма Бјорлингове трансформације још увек није одређена. То је отворен проблем већ 40 година, тачније од 1982. када је Ивањец², у свом раду [24], поставио хипотезу да је њена тачна L^p -норма једнака $p^* - 1 = \max\left(p - 1, \frac{1}{p - 1}\right)$. Иако ово још није показано, нађене су многе оштре оцене и акценат овог рада биће на њиховом одређивању. Тачност Ивањецове хипотезе имала би велики утицај на теорију елиптичких једначина и квазиконформних пресликавања. Овим проблемом бавили су се многи истакнути математичари и при томе су развијене разне технике које су дале велики допринос математици.

Прво поглавље рада бави се особинама Бјорлингове трансформације, њеном везом са сличним операторима, међу којима треба истаћи Рисове³ трансформације, последицама и применама. Друга глава посвећена је Биркхолдеровој⁴ неједнакости, која је у основи свих приступа при оцењивању норме Бјорлингове трансформације. Трећа и четврта глава баве се оценама норме, као и њеним асимптотским понашањем. У трећој је обрађен приступ који се

¹Arne Beurling, 1905 - 1986, шведски математичар

²Tadeusz Iwaniec, 1947, пољско-амерички математичар

³Marcel Riesz, 1886 - 1969, мађарски математичар

⁴Donald Burkholder, 1927 - 2013, амерички математичар

заснива на веома важној техници Белманових⁵ функција, која је једна од најмоћнијих метода у показивању интегралних неједнакости. Овај део базиран је на радовима Волберга⁶, Назарова⁷ и Драгичевића⁸, [26] и [18]. Последња глава даје оцену нормe применом метода из стохастичке анализе. На тај начин добијамо боље оцене од оних у претходној глави. Овај приступ заснован је на радовима Бањуелоса⁹, Ванга¹⁰, Хернандеза¹¹ и Јанакирамана¹², [12], [9] и [8].

Рад је писан тако да се подразумева да је читалац упознат са основним појмовима функционалне анализе, комплексне анализе и теорије дистрибуција, Фуријеовом¹³ трансформацијом и неким основним класама функција и њиховим особинама (као што су простор Шварцових¹⁴ функција ($\mathcal{S}$), L^p -простори, простори Собољева¹⁵). Такође, користимо и неке појмове из стохастичке анализе, али је део неопходног градива из те области дат на почетку последње главе. Детаљније о овим појмовима можете видети у књигама [29], [19] и [25].

За крај, желео бих да се захвалим свом ментору, професору Петру Мелентијевићу, за то што ме је заинтересовао за ову тему, давао корисне сугестије и помоћ без које овај рад не би био овакав какав јесте. Надам се да ће он представљати користан додатак богатој литератури Математичког факултета и да ће инспирисати и друге математичаре да се баве овом облашћу.

⁵Richard E. Bellman, 1920 - 1984, амерички математичар

⁶Alexander Volberg, 1956, руски математичар

⁷Fedor Nazarov, 1967, руски математичар

⁸Oliver Dragičević, словеначки математичар

⁹Rodrigo Bañuelos, 1954, америчко-мексички математичар

¹⁰Gang Wang, кинески математичар

¹¹Pedro Méndez Hernández, порторикански математичар

¹²Prabhu Janakiraman, индијски математичар

¹³Joseph Fourier, 1768 - 1830, француски математичар и физичар

¹⁴Laurent Schwartz, 1915 - 2002, француски математичар

¹⁵Sergei Sobolev, 1908 - 1989, совјетски математичар

Глава 1

Бјорлингова трансформација

Главна тема овог рада су оцене норме Бјорлингове трансформације, па је природно да се на почетку посветимо мало детаљније неким њеним особинама и применама. Потрудићемо се да то урадимо на што интуитивнији начин. За почетак, кренућемо од Хилбертове¹ трансформације, која је најједноставнија и историјски гледано се прва појавила. Ту ћемо уочити нека кључна својства помоћу којих ћемо увести једну доста општију класу оператора, сингуларне интегралне операторе конволуционог типа. Након тога посветићемо се Рисовим трансформацијама, чије ће нам особине и везе са Бјорлинговом трансформацијом бити од велике помоћи у даљем раду. Поред тога, разлике између њих ће нам дати одговор зашто се тачне норме Хилбертове и Рисових трансформација једноставно рачунају, док још увек није показано колика је тачна норма Бјорлингове трансформације.

У току рада користићемо често неке ознаке које ћемо сада дефинисати. За $1 < p < \infty$ дефинишемо $p^* = \max\left(p, \frac{p}{p-1}\right)$. Фуријеову трансформацију функције f обележаваћемо са $f^\wedge$, а инверзну Фуријеову са $f^\vee$. Комплексне парцијалне изводе, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, некада ћемо обележавати и са $(\cdot)_z$ и $(\cdot)_{\bar{z}}$. Такође, у ситуацијама када је то могуће, нећемо правити суштинску разлику између простора $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$. Стандардну норму на $\mathbb{R}^d$ ћемо обележавати са $|\cdot|$.

¹David Hilbert, 1862 - 1943, немачки математичар

1.1 Хилбертова трансформација

Дефиниција 1.1. Нека је $f \in L^2(\mathbb{R})$. Хилбертову трансформацију ове функције дефинишемо са

$$H(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{\wedge}(\xi) \frac{\operatorname{sgn}(\xi)}{i} e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Она се природно јавља када посматрамо Кошијев² интеграл, дат са

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - z} dt, \quad \operatorname{Im}(z) > 0, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Једноставно се показује да је F добро дефинисана и холоморфна у горњој полуравни. Са друге стране, након краћег рачуна, може се показати да важи

$$F(z) = \int_0^{\infty} f^{\wedge}(\xi) e^{2\pi i z \xi} d\xi, \quad \operatorname{Im}(z) > 0, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Сада, на основу Планшерелове³ теореме, имамо да

$$F(x + iy) \rightarrow P(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{\wedge}(\xi) \chi_{(0,\infty)}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi, \quad \text{кад } y \rightarrow 0, \text{ у } L^2(\mathbb{R}) \text{ норми.}$$

Јасно је да је P заправо ортогонални пројектор простора L^2 на његов потпростор одређен функцијама чија је Фуријеова трансформација једнака нули на скупу $(-\infty, 0)$. Хилбертова трансформација представља конјуговани оператор овом пројектору.

Директно из дефиниције 1.1 имамо да је њена Фуријеова трансформација

$$(Hf)^{\wedge}(\xi) = \frac{\operatorname{sgn}(\xi)}{i} f^{\wedge}(\xi).$$

Једноставно се може показати да се Хилбертова трансформација на $L^2(\mathbb{R})$ може дефинисати и као конволуција са темперованом дистрибуцијом.

Став 1.2. За $f \in L^2(\mathbb{R})$ важи

$$H(f)(x) = \frac{1}{\pi} \left(f * \text{p. v.} \left(\frac{1}{x} \right) \right) (x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|\xi| \geq \varepsilon} \frac{f(\xi)}{x - \xi} d\xi.$$

²Augustin-Louis Cauchy, 1789 - 1857, француски математичар, инжењер и физичар

³Michel Plancherel, 1885 - 1967, швајцарски математичар

Теорема 1.3. Нека је $1 < p < \infty$. Тада Хилбертова трансформација, претходно дефинисана на $L^2 \cap L^p$, задовољава неједнакост

$$\|H(f)\|_p \leq A_p \|f\|_p, \quad \text{за свако } f \in L^2 \cap L^p,$$

при чему константа A_p не зависи од f . Из овога директно закључујемо да Хилбертова трансформација има јединствено продужење на L^p , при чему важи иста неједнакост.

Докази претходних тврђења могу се наћи у [29].

Испоставља се да је могуће одредити тачну L^p -норму Хилбертове трансформације. У случају $1 < p \leq 2$ имамо да је $\|H\|_p = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2p} \right)$, док је за $2 < p < \infty$ она једнака $\|H\|_p = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2p} \right)$. Специјално, видимо да је L^2 норма једнака 1. Више о овоме можете погледати у [23] или у раду Пикоридеса⁴ [28], који је ово показао 1972.

1.2 Сингуларни интегрални оператори

Хилбертова трансформација нам служи као мотивација за проучавање сличних оператора. Да бисмо могли да уочимо одређена уопштења, потребно је да уведемо нову класу дистрибуција.

Дефиниција 1.4. Дистрибуција K је регуларна ако постоји функција $k \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ (кажемо да је функција k C^∞ -ван нуле) тако да важи

$$K(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} k(x) \varphi(x) dx,$$

при чему је $\varphi \in \mathcal{D}$ и носач јој не садржи нулу.

Често ћемо за саму регуларну дистрибуцију K рећи да је C^∞ -ван нуле. Функцију k називамо придруженом функцијом дистрибуције K и јасно је да је она јединствена (ако постоји).

Пример 1.5. Дистрибуција р. в. $\left(\frac{1}{x} \right)$ коју смо срели код Хилбертове трансформације је регуларна и њој придружена функција је $x \mapsto \frac{1}{x}$. $\triangle$

⁴Stylianos Pichorides, 1940 - 1992, грчки математичар

Сада ћемо посматрати једну класу оператора која ће на неки начин бити уопштење Хилбертове трансформације. Ти оператори ће бити представљени преко сингуларних интеграла конволуционог типа, односно у облику

$$T(f) = f * K,$$

где је K дистрибуција (њу ћемо често називати језгром оператора). Применом Фуријеове трансформације на операторе овог типа добијамо

$$(Tf)^\wedge(\xi) = m(\xi)f^\wedge(\xi),$$

где је $m = K^\wedge$ и ту функцију називамо Фуријеовим множиоцем. Неке особине Фуријеовог множиоца биће доста важне за даљу карактеризацију оператора.

Дефиниција 1.6. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ таква да је садржана у јединичној лопти. Кажемо да је φ $C^{(n)}$ -нормализована бипр функција ако за свако $|\alpha| \leq n$ важи

$$\sup_x |\partial_x^\alpha \varphi(x)| \leq 1.$$

Посматрајмо сада регуларну дистрибуцију K и њој придружену функцију k . Увешћемо два својства која она може да задовољава. Прво је

$$|\partial_x^\alpha k(x)| \leq c_\alpha |x|^{-d-|\alpha|}, \quad \text{за свако } \alpha \text{ и свако } x. \quad (1.1)$$

Приметимо да за $\alpha = 0$ добијамо да је K темперована дистрибуција. Друго својство гласи да за неко фиксирано $n \in \mathbb{N}$ постоји $A > 0$ тако да важи

$$\sum_{r>0} |K(\varphi_r)| \leq A, \quad \text{за све } C^{(n)}\text{-нормализоване бипр функције } \varphi, \quad (1.2)$$

где је $\varphi_r(x) = \varphi(rx)$.

Став 1.7. Нека је K произвољна дистрибуција. Следећа тврђења су еквивалентна:

- (1) K је регуларна и задовољава својства 1.1 и 1.2.
- (2) K је темперована, њена Фуријеова трансформација $m = K^\wedge$ је C^∞ -ван нуле и задовољава $|\partial_\xi^\alpha m(\xi)| \leq c'_\alpha |\xi|^{-|\alpha|}$ за свако α .
- (3) K је регуларна дистрибуција која задовољава својство 1.1 и $m = K^\wedge$ је ограничена функција.

Дефиниција 1.8. Сингуларни интегрални оператор са језгром K које задовољава неко од еквивалентних својстава претходног става назива се Калдерон⁵-Зигмундов⁶ оператор (а одговарајућа дистрибуција K Калдерон-Зигмундова дистрибуција).

Ова класа оператора нам је важна због наредне теореме.

Теорема 1.9. Нека је T Калдерон-Зигмундов оператор дат са $T(f) = f * K$, за свако $f \in \mathcal{S}$. Тада за свако $1 < p < \infty$ оператор T можемо проширити на простор $L^p(\mathbb{R}^d)$ тако да он буде ограничен, односно

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p,$$

за свако $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Ова теорема ће нам бити од великог значаја за показивање ограничености Рисове и Бјорлингове трансформације. Такође, једноставно можемо проверити и да је Хилбертова трансформација Калдерон-Зигмундов оператор, па је теорема 1.3 последица теореме 1.9.

1.3 Рисове трансформације

Након што смо дефинисали Хилбертову трансформацију, природно је дефинисати и њена уопштења у вишим димензијама. Испоставља се да у простору $\mathbb{R}^d$ постоји d оператора који имају својства аналогна Хилбертовој трансформацији.

Дефиниција 1.10. За $1 \leq j \leq d$ дефинишемо j -ту Рисову трансформацију са

$$R_j(f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \text{p. v.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{d+1}} f(y) dy, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Из ове дефиниције видимо да је Рисова трансформација сингуларни интегрални оператор конволуционог типа, при чему су одговарајуће дистрибуције, за $1 \leq j \leq d$, дате са

$$\langle W_j, \varphi \rangle = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \text{p. v.} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{y_j}{|y|^{d+1}} \varphi(y) dy, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

⁵Alberto Calderon, 1920 - 1998, аргентински математичар

⁶Antoni Zygmund, 1900 - 1992, пољски математичар

Дакле, $R_j(f) = f * W_j$ за свако $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Једна врло битна карактеристика Рисове трансформације је њена Фуријеова трансформација.

Теорема 1.11. За $1 \leq j \leq d$ и $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ важи

$$(R_j(f))^\wedge(\xi) = -\frac{i\xi_j}{|\xi|} f^\wedge(\xi).$$

Доказ. Како смо већ видели да Рисову трансформацију можемо представити као конволуцију са дистрибуцијом, то представљање ћемо користити у доказу (због особина Фуријеове трансформације конволуције). За почетак ћемо одредити Фуријеову трансформацију претходно дефинисане дистрибуције W_j . Нека је $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ произволна.

$$\begin{aligned} \langle W_j^\wedge, \varphi \rangle &= \langle W_j, \varphi^\wedge \rangle = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\xi| \geq \varepsilon} \varphi^\wedge(\xi) \frac{\xi_j}{|\xi|^{d+1}} d\xi \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |\xi| \leq \frac{1}{\varepsilon}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \frac{\xi_j}{|\xi|^{d+1}} d\xi \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \int_{\varepsilon \leq |\xi| \leq \frac{1}{\varepsilon}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \frac{\xi_j}{|\xi|^{d+1}} d\xi dx \\ &= -i \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \int_{\varepsilon \leq |\xi| \leq \frac{1}{\varepsilon}} \sin(2\pi x \cdot \xi) \frac{\xi_j}{|\xi|^{d+1}} d\xi dx \\ &= -i \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \int_{S^{d-1}} \int_{\varepsilon \leq r \leq \frac{1}{\varepsilon}} \sin(2\pi r x \cdot \theta) \frac{r \theta_j}{r^{d+1}} r^{d-1} dr d\theta dx \\ &= -i \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \int_{S^{d-1}} \theta_j \int_{\varepsilon \leq r \leq \frac{1}{\varepsilon}} \sin(2\pi r x \cdot \theta) \frac{dr}{r} d\theta dx, \end{aligned}$$

при чему смо у четвртном реду искористили то да је функција $\sin(2\pi x \cdot \xi) \frac{\xi_j}{|\xi|^{d+1}}$ непарна, па је и њен интеграл по скупу који је централно-симетричан у односу на координатни почетак једнак нули (у нашем случају скуп $\{\xi : \varepsilon \leq |\xi| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$). Наредна ствар коју желимо да урадимо јесте да заменимо места лимеса и интеграла. Да бисмо то урадили треба да применимо теорему о доминантној конвергенцији. За то нам је довољно да ограничимо само унутрашњи интеграл. Ту ћемо користити следеће једноставно тврђење:

Лема 1.12. Постоји $M > 0$ тако да за све $0 < a < b < \infty$ важи

$$\left| \int_a^b \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq M.$$

Доказ. Показаћемо да је дати интеграл ограничен за $a = 0$, из чега директно следи тражено. За почетак, подинтегрална функција је позитивна на интервалима $(2n\pi, (2n+1)\pi)$, а негативна на $((2n+1)\pi, (2n+2)\pi)$, за $n \in \mathbb{N}_0$. Додатно, из периодичности функције $\sin$ и тога што је $t \rightarrow \frac{1}{t}$ позитивна и

опадајућа, имамо да је $\left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt \right| \geq \left| \int_{(2n+1)\pi}^{(2n+2)\pi} \frac{\sin t}{t} dt \right|$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$. Поред

тога, $\left| \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \right| = M < \infty$ јер је посматрани интеграл одређен. Из овога

директно добијамо тражено. За $b < \pi$ је $\left| \int_0^b \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq M$, док за $x > \pi$ из горе показане неједнакости имамо да је интеграл стално позитиван, али никад већи од M . $\square$

Након што смо показали ово лему, видимо да је $\int_{\varepsilon \leq r \leq \frac{1}{\varepsilon}} \sin(2\pi r x \cdot \theta) \frac{dr}{r} \leq M$, па из ограничености скупа S^{d-1} и функције $\theta \mapsto \theta_j$, као и тога што је $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, можемо да применимо теорему о доминантној конвергенцији.

Користићемо и познат идентитет $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \langle W_j^\wedge, \varphi \rangle &= -i \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \int_{S^{d-1}} \theta_j \int_0^\infty \sin(2\pi r x \cdot \theta) \frac{dr}{r} d\theta dx \\ &= -i \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \left[\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_{S^{d-1}} \operatorname{sgn}(x \cdot \theta) \theta_j d\theta \right] dx \\ &= -i \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \frac{x_j}{|x|} dx = \left\langle -\frac{ix_j}{|x|}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Претпоследња једнакост следи из једнакости

$$\int_{S^{d-1}} \operatorname{sgn}(x \cdot \theta) \theta_j d\theta = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{x_j}{|x|},$$

чији доказ се може наћи у [23] (лема 5.1.15).

Из претходног имамо да је $W_j^\wedge = -\frac{ix_j}{|x|}$ (у смислу дустрибуција), па је

$$(R_j(f))^\wedge(\xi) = (W_j * f)^\wedge(\xi) = (W_j^\wedge f^\wedge)(\xi) = -\frac{i\xi_j}{|\xi|} f^\wedge(\xi).$$

□

Као директну последицу ове особине добијамо два лепа својства Рисових трансформација.

Последица 1.13. За Рисове трансформације на скупу $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ важи

$$-I = \sum_{j=1}^d R_j^2,$$

где је I идентички оператор.

Доказ. Нека је $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ произвољна. На основу претходне теореме имамо

$$(R_j^2(f))^\wedge(\xi) = -\frac{i\xi_j}{|\xi|} (R_j(f))^\wedge(\xi) = \left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\right)^2 f^\wedge(\xi) = -\frac{\xi_j^2}{|\xi|^2} f^\wedge(\xi).$$

Сада, сабирајући ове једнакости за свако j , користећи линеарност Фуријеове трансформације и једноставан идентитет $\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j^2}{|\xi|^2} = 1$, имамо да је

$$\left(\sum_{j=1}^d R_j^2(f)\right)^\wedge = -f^\wedge = (-I(f))^\wedge,$$

из чега директно добијамо тражену једнакост.

□

Последица 1.14. За $1 \leq i, j \leq d$ и $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ важи

$$R_i R_j f = R_j R_i f.$$

Доказ. На основу теореме 1.11 је

$$\begin{aligned} (R_i R_j f)^\wedge(\xi) &= -\frac{i\xi_i}{|\xi|} (R_j f)^\wedge(\xi) = \left(-\frac{i\xi_i}{|\xi|}\right) \left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\right) f^\wedge(\xi) = -\frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} f^\wedge(\xi), \\ (R_j R_i f)^\wedge(\xi) &= -\frac{i\xi_j}{|\xi|} (R_i f)^\wedge(\xi) = \left(-\frac{i\xi_j}{|\xi|}\right) \left(-\frac{i\xi_i}{|\xi|}\right) f^\wedge(\xi) = -\frac{\xi_j \xi_i}{|\xi|^2} f^\wedge(\xi). \end{aligned}$$

Дакле, Фуријеове трансформације од претходних израза су једнаке, па применом инверзне Фуријеове трансформације добијамо да су и они једнаки. □

Корисно је напоменути и како се Рисове трансформације слажу са Лапласијаном⁷.

Став 1.15. Нека је $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $1 \leq i, j \leq d$. Тада за свако $x \in \mathbb{R}^d$ важи

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi(x) = -R_i R_j \Delta \varphi(x).$$

Доказ. Као и до сада, показаћемо да су Фуријеове трансформације од обе стране једнакости једнаке.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi \right)^\wedge(\xi) &= (2\pi i \xi_i)(2\pi i \xi_j) \varphi^\wedge(\xi) = -4\pi^2 \xi_i \xi_j \varphi^\wedge(\xi), \\ (-R_i R_j \Delta \varphi)^\wedge(\xi) &= -\frac{i \xi_i}{|\xi|} \frac{i \xi_j}{|\xi|} (\Delta \varphi)^\wedge(\xi) = \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} (-4\pi^2 |\xi|^2) \varphi^\wedge(\xi) = -4\pi^2 \xi_i \xi_j \varphi^\wedge(\xi). \end{aligned}$$

Из претходног, применом инверзне Фуријеове трансформације, добијамо тражени резултат. $\square$

Покажимо да су Рисове трансформације Калдерон-Зигмундови оператори. За почетак, јасно је да је W_j регуларна дистрибуција, при чему је њена придружена функција $k(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \frac{x_j}{|x|^{d+1}}$. Једноставно се може проверити да ова функција задовољава својство 1.1, док је са друге стране $W_j^\wedge = -\frac{i \xi_j}{\xi}$ очигледно ограничено. Дакле, задовољен је део (3) става 1.7, па је Рисова трансформација Калдерон-Зигмундов оператор и као таква задовољава теорему 1.9, односно може се проширити до ограниченог оператора на $L^p(\mathbb{R}^d)$ за $1 < p < \infty$.

Као и код Хилбертове трансформације, показано је колике су тачне норме Рисових трансформација. Испоставља се да су оне заправо једнаке нормама Хилбертове трансформације, односно да за свако $1 \leq j \leq d$ важи $\|R_j\|_p = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2p}\right)$ за $1 < p \leq 2$, а $\|R_j\|_p = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2p}\right)$ за $2 \leq p < \infty$. До ових резултата долази се методом ротација. Она се примењује за показивање L^p -ограничености и одређивање норме код сингуларних интегралних оператора са непарним језгром, што је случај код Рисових трансформација, али и код Хилбертове. Управо се њом проблем са више димензија редукује на једну. Ово су показали Ивањец и Мартин⁸ у свом раду 1995. С обзиром да је сама

⁷Pierre-Simon Laplace, 1749 - 1827, француски математичар

⁸Gaven Martin, 1958, новозеландски математичар

метода веома корисна, навешћемо доказ да је норма Рисове трансформације у равни ограничена одозго нормом Хилбертове трансформације. У доказу ћемо користити следећи појам.

Дефиниција 1.16. Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$. Радијална Хилбертова трансформација је оператор дат са

$$(H_\alpha(f))(z) = \frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z - e^{i\alpha}t)}{t} dt, \quad f \in S(\mathbb{C}).$$

Теорема 1.17. Нека је $1 < p < \infty$ и $j \in \{1, 2\}$. Тада за Рисове трансформације у равни важи

$$\|R_j\|_p \leq \|H\|_p.$$

Доказ. Прво ћемо показати неке особине радијалне Хилбертове трансформације, а потом и њену везу са Рисовим трансформацијама. Посматрајмо ротацију у комплексној равни, дату са $r_\alpha(z) = e^{i\alpha}z$. Она индукује изометрију $r_\alpha^* : L^p(\mathbb{C}) \rightarrow L^p(\mathbb{C})$, $r_\alpha^*(f) = f \circ r_\alpha$. Једноставно видимо да је оператор инверзан овом заправо $r_{-\alpha}^*$. Његов значај је у томе што важи

$$H_\alpha = r_{-\alpha}^* \circ H_0 \circ r_\alpha^*,$$

(ово се може показати директним рачуном). Претходно представљање нам је корисно јер оно повлачи да је за свако $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|H_\alpha\|_p \leq \|r_{-\alpha}^*\|_p \|H_0\|_p \|r_\alpha\|_p = \|H_0\|_p.$$

Можемо уочити везу између H_0 и H . За произвољне $f \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ и $y \in \mathbb{R}$ дефинишимо функцију $g_y(x) = f(x + iy)$. Јасно је да $g_y \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Сада имамо

$$\begin{aligned} (H(g_y))(x) &= \frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_y(x - \xi)}{\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x + iy - \xi)}{\xi} d\xi = (H_0(f))(x + iy), \end{aligned}$$

па је на основу Фубинијеве⁹ теореме

$$\|H_0 f\|_p^p = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |(H_0 f)(x + iy)|^p dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |(H g_y)(x)|^p dx dy$$

⁹Guido Fubini, 1879 - 1943, италијански математичар

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \|H\|_p^p \int_{-\infty}^{\infty} |g_y(x)|^p dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \|H\|_p^p \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p dx dy \\
&= \|H\|_p^p \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Дакле, $\|H_\alpha\|_p \leq \|H_0\|_p \leq \|H\|_p$.

Показаћемо да теорема важи у случају $j = 1$, јер се оба случаја доказују потпуно аналогно. Нека је, као и до сада, $f \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ произвољно. За произвољне $\varepsilon > 0$ и $w \in \mathbb{C}$, преласком на поларне координате, добијамо

$$\int_{|z| \geq \varepsilon} \frac{x}{|\zeta|^3} f(w-z) dz = \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^\infty \cos \theta \frac{f(w - re^{i\theta})}{r} dr d\theta.$$

Сменом $\theta = \phi + \pi$, имамо и

$$\int_{|z| \geq \varepsilon} \frac{x}{|\zeta|^3} f(w-z) dz = - \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^\infty \cos \phi \frac{f(w + re^{i\phi})}{r} dr d\phi,$$

па сабирањем претходне две једнакости (уз ознаку $\alpha = \theta = \phi$), добијамо

$$\int_{|z| \geq \varepsilon} \frac{x}{|\zeta|^3} f(w-z) dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \alpha \int_\varepsilon^\infty \frac{f(w - re^{i\alpha}) - f(w + re^{i\alpha})}{r} dr d\alpha.$$

Да бисмо дошли до Рисове трансформације, на претходну једнакост треба да применимо $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$. На десној страни би нам одговарало да заменимо лимес и интеграл. То ћемо оправдати теоремом о доминантној конвергенцији. За почетак, применом Лагранжеве¹⁰ теореме на функцију $r \rightarrow f(w + re^{i\alpha})$, имамо

$$|f(w - re^{i\alpha}) - f(w + re^{i\alpha})| \leq 2r \max_{z \in \mathbb{C}} |f'(z)|.$$

Ако је f садржана у диску полупречника R , из претходног је

$$\begin{aligned}
\left| \int_\varepsilon^\infty \frac{f(w - re^{i\alpha}) - f(w + re^{i\alpha})}{r} dr \right| &\leq \int_\varepsilon^R \frac{|f(w - re^{i\alpha}) - f(w + re^{i\alpha})|}{r} dr \\
&\leq 2R \max_{z \in \mathbb{C}} |f'(z)|.
\end{aligned}$$

¹⁰Joseph-Louis Lagrange, 1736 - 1813, италијанско-француски математичар и астроном

Како је додатно и спољашњи интеграл по области коначне мере, а $\cos$ ограничена функција, можемо применити теорему о доминантној конвергенцији. Сада је

$$\begin{aligned}(R_1(f))(w) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos \alpha \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(w - re^{i\alpha}) - f(w + re^{i\alpha})}{r} dr d\alpha \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos \alpha \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|r| \geq \varepsilon} \frac{f(w - re^{i\alpha})}{r} dr d\alpha \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos \alpha (H_\alpha(f))(w) d\alpha\end{aligned}$$

Коначно, применом интегралне неједнакости Минковског¹¹ и Фубинијеве теореме добијамо

$$\|R_1 f\|_p \leq \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} |\cos \alpha| d\alpha \|H_\alpha f\|_p = \|H_\alpha f\|_p \leq \|H\|_p \|f\|_p,$$

из чега следи тражена оцена норме. $\square$

Доказ да је ово такође и доње ограничење норме, као и више детаља о методи ротација, можете наћи у [23](5.2.5).

1.4 Бјорлингова трансформација

У комплексној равни, трансформација аналогна Хилбертовој је управо Бјорлингова. Њу дефинишемо на следећи начин.

Дефиниција 1.18. Бјорлингова трансформација (у литератури се среће и под именом Алфорс¹²-Бјорлингова) је сингуларни интегрални оператор дат са

$$S(f)(z) = -\frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{(z - \zeta)^2} d\zeta, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{C}).$$

Из дефиниције видимо да је ово један сингуларни интегрални оператор дат као конволуција са дистрибуцијом $\text{p. v.} \left(-\frac{1}{\pi z^2} \right)$. Касније ћемо овај оператор

¹¹Hermann Minkowski, 1864 - 1909, немачки математичар

¹²Lars Ahlfors, 1907 - 1996, фински математичар

проширити на већи скуп функција, па ћемо изводити особине као и за до сада поменуте трансформације. Када то урадимо, можемо уочити да је ово једна регуларна дистрибуција, при чему се лако проверава да придружена функција $z \mapsto -\frac{1}{\pi z^2}$ задовољава својство 1.1. Након одређивања Фуријеовог множиоца, констатоваћемо да је ово један Калдерон-Зигмундов оператор, што ће повлачити и L^p -ограниченост.

За почетак, покажимо да је Бјорлингова трансформација добро дефинисана. Нека је $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ произвољна и садржана у диску полупречника $R > 0$. Означимо са $\Omega_{\varepsilon, R}$ прстен ограничен кружницама $|z| = \varepsilon$ и $|z| = R$. Како је $\left(-\frac{1}{z}\right)_z = \frac{1}{z^2}$, на основу Гринове¹³ формуле имамо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\varepsilon, R}} \frac{1}{z^2} dz &= -\frac{1}{2i} \int_{|z|=R} \frac{1}{z} d\bar{z} + \frac{1}{2i} \int_{|z|=\varepsilon} \frac{1}{z} d\bar{z} \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon e^{it}} (-i\varepsilon e^{-it}) - \frac{1}{R e^{it}} (-iR e^{-it}) \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Користећи ово и Лагранжеву теорему, добијамо

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z|>\varepsilon} \frac{\varphi(z)}{z^2} dz \right| &= \left| \int_{\Omega_{\varepsilon, R}} \frac{\varphi(z)}{z^2} dz \right| = \left| \int_{\Omega_{\varepsilon, R}} \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{z^2} dz \right| \leq \int_{\Omega_{\varepsilon, R}} \frac{|\varphi(z) - \varphi(0)|}{|z|^2} dz \\ &\leq \int_{\Omega_{\varepsilon, R}} \frac{\max_{\zeta \in \mathbb{C}} |\varphi'(\zeta)| |z|}{|z|^2} dz = \max_{\zeta \in \mathbb{C}} |\varphi'(\zeta)| \int_{\Omega_{\varepsilon, R}} \frac{1}{|z|} dz \\ &= \max_{\zeta \in \mathbb{C}} |\varphi'(\zeta)| \int_{\varepsilon}^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{t} t d\theta dt \leq \max_{\zeta \in \mathbb{C}} |\varphi'(\zeta)| 2\pi R. \end{aligned}$$

Последњи израз је коначан за све $\varepsilon > 0$ (и ограничење не зависи од ε), па је

$$\left| \left\langle \text{p. v.} \left(-\frac{1}{\pi z^2} \right), \varphi \right\rangle \right| = \left| -\frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(z)}{z^2} dz \right| = \left| \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|z|>\varepsilon} \frac{\varphi(z)}{z^2} dz \right| < \infty,$$

и дистрибуција $\text{p. v.} \left(-\frac{1}{\pi z^2} \right)$ је добро дефинисана. Самим тим је коректна и дефиниција 1.18.

¹³George Green, 1793 - 1841, британски математичар и физичар

Да бисмо успели да оправдамо све особине које смо најавили, неопходно је да покажемо неке основне карактеристике. Оне Бјорлингову трансформацију издвајају од осталих и чине је врло применљивом. Прва ствар коју ћемо навести је веза са још једним сингуларним интегралним оператором.

Дефиниција 1.19. Кошијева трансформација је сингуларни интегрални оператор дат са

$$C(f)(z) = \frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{C}).$$

Као и код Бјорлингове трансформације и овде видимо да је ово оператор конволуционог типа, где је одговарајуће језгро дистрибуција $\text{p. v.} \left(\frac{1}{\pi z} \right)$ (означаваћемо је са H надаље). У овом случају, како је функција $z \mapsto \frac{1}{\pi z}$ локално интеграбилна, ова дистрибуција је добро дефинисана. Овај оператор има доста лепе особине, а оне ће нам бити корисне због њене везе са Бјорлинговом трансформацијом, која је описана наредним ставом.

Став 1.20. За $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ важи $\frac{\partial(C\varphi)}{\partial z} = S\varphi$.

Доказ. Како је $C\varphi = H * \varphi$, на основу особина конволуције је $(C\varphi)_z = H_z * \varphi$ (ово се може проверити рецимо посматрајући Фуријеове трансформације од обе стране). Дакле, довољно је покажемо да је $\langle H_z, \varphi \rangle = \left\langle \text{p. v.} \left(-\frac{1}{\pi z^2} \right), \varphi \right\rangle$, за произвољно $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$. Како је $\left(\frac{\varphi}{z} \right)_z = \frac{\varphi_z}{z} - \frac{\varphi}{z^2}$ ван нуле, имамо

$$\begin{aligned} \langle H_z, \varphi \rangle &= -\langle H, \varphi_z \rangle = -\frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi_z(z)}{z} dz \\ &= -\frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(z)}{z^2} dz - \frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{\mathbb{C}} \left(\frac{\varphi(z)}{z} \right)_z dz. \end{aligned}$$

Сада је довољно да покажемо да је други интеграл једнак нули.

$$\text{p. v.} \int_{\mathbb{C}} \left(\frac{\varphi(z)}{z} \right)_z dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z| \geq \varepsilon} \left(\frac{\varphi(z)}{z} \right)_z dz.$$

На последњи интеграл желимо да применимо Гринову формулу. Како функција $\frac{\varphi}{z}$ има компактан носач, њена вредност на спољашњој граници је једнака

0. Ако унутрашњу границу $\{\varepsilon e^{it} : t \in [0, 2\pi)\}$ означимо са γ , важи

$$\begin{aligned} \int_{|z| \geq \varepsilon} \left(\frac{\varphi(z)}{z} \right)_z dz &= \frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{z} d\bar{z} = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} (-i\varepsilon e^{-it}) dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon e^{it}) e^{-2it} dt. \end{aligned}$$

Како је подинтегрална функција очигледно ограничена за свако ε , а област по којој интегралимо коначне мере, на основу теореме о доминантној конвергенцији можемо заменити места лimesу и интегралу, па је

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z| \geq \varepsilon} \left(\frac{\varphi(z)}{z} \right)_z dz = -\frac{1}{2} \varphi(0) \int_0^{2\pi} e^{-2it} dt = 0.$$

Дакле, интеграл који смо посматрали је једнак нули и важи $H_z = -\text{p. v.} \frac{1}{\pi z^2}$, у смислу дистрибуција. Самим тим важи и тражени израз, с обзиром да су оба оператора добијена као конволуције са одговарајућим дистрибуцијама, за које смо показали да су једнаке. $\square$

Кошијева трансформација се добро слаже са изводима, што ћемо видети у наредном ставу.

Став 1.21. За $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ важи $\frac{\partial(C\varphi)}{\partial z} = C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ и $\frac{\partial(C\varphi)}{\partial \bar{z}} = C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right) = \varphi$.

Доказ. Прве две једнакости једноставно видимо да важе. Наиме, као што смо поменули у претходном доказу, како је $C(\varphi) = H * \varphi$, имамо

$$\begin{aligned} (C\varphi)_z &= (H * \varphi)_z = H_z * \varphi = H * (\varphi_z) = C(\varphi_z), \\ (C\varphi)_{\bar{z}} &= (H * \varphi)_{\bar{z}} = H_{\bar{z}} * \varphi = H * (\varphi_{\bar{z}}) = C(\varphi_{\bar{z}}). \end{aligned}$$

Да бисмо показали последњу једнакост, доказаћемо да је $H_{\bar{z}} = \delta$. Нека је $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ произвољно. Како је $\left(\frac{1}{z} \right)_{\bar{z}} = 0$, важи $\left(\frac{\varphi}{z} \right)_{\bar{z}} = \frac{\varphi_{\bar{z}}}{z}$ и

$$\langle H_{\bar{z}}, \varphi \rangle = -\frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi_{\bar{z}}(z)}{z} dz = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \leq |z| \leq \frac{1}{\varepsilon}} \int \frac{\varphi_{\bar{z}}(z)}{z} dz.$$

Сада ћемо на интеграл унутар лimesа применити Гринову формулу. За довољно мало ε спољашња граница неће припадати носачу функције φ , па ће

интеграл по њој бити нула. Ако, као у претходном доказу, унутрашњу границу означимо са γ (и искористимо исту параметризацију), добијамо

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon \leq |z| \leq \frac{1}{\varepsilon}} \frac{\varphi_{\bar{z}}(z)}{z} dz &= \int_{\varepsilon \leq |z| \leq \frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{\varphi(z)}{z} \right)_{\bar{z}} dz = -\frac{1}{2i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(z)}{z} dz \\ &= -\frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} i \varepsilon e^{it} dt = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon e^{it}) dt. \end{aligned}$$

Заменом последње једнакости у почетни израз имамо

$$\langle H_{\bar{z}}, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon e^{it}) dt = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Овде смо у последњој једнакости користили теорему о доминантној конвергенцији да бисмо оправдали замену лимеса и интеграла. Сада је

$$(C\varphi)_{\bar{z}} = H_{\bar{z}} * \varphi = \delta * \varphi = \varphi,$$

што је и требало показати. $\square$

Претходно показане особине Кошијеве трансформације дају нам веома значајан резултат везан за Бјорлингову трансформацију.

Став 1.22. На скупу $C_0^\infty(\mathbb{C})$ важи $S \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z}$.

Доказ. Из претходна два става имамо да за произвољно $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ важи

$$S(\varphi_{\bar{z}}) = (C(\varphi_{\bar{z}}))_z = \varphi_z,$$

што је и требало показати. $\square$

Став 1.23. Бјорлингова трансформација је симетричан оператор, односно

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)(Sg)(z)dz = \int_{\mathbb{C}} (Sf)(z)g(z)dz, \quad \text{за } f, g \in C_0^\infty(\mathbb{C}).$$

Доказ. Применом Фубинијеве теореме, као и заменом места лимеса и интеграла (може се оправдати аналогно као што смо показали да је Бјорлингова трансформација добро дефинисана), за произвољне $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ имамо

$$\int_{\mathbb{C}} f(z)(Sg)(z)dz = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(z) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z-\zeta|>\varepsilon} \frac{g(\zeta)}{(z-\zeta)^2} d\zeta dz$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}} \int_{|z-\zeta| > \varepsilon} \frac{f(z)g(\zeta)}{(z-\zeta)^2} d\zeta dz \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} g(\zeta) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\zeta-z| > \varepsilon} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^2} dz d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{C}} (Sf)(z)g(z)dz.
\end{aligned}$$

□

Поред претходног става, за наредну последицу су нам неопходне две теореме из комплексне анализе, које ћемо навести без доказа. Доказе можете погледати у [3].

Теорема 1.24 (Вејл¹⁴). Нека је $U \subset \mathbb{C}$ отворен скуп и $f \in L^1_{loc}(\mathbb{C}) \cap W^1(U)$ таква да је $f_{\bar{z}} = 0$, у смислу дистрибуција. Тада је функција f холоморфна.

Теорема 1.25. Нека је $p \geq 1$. Ако је $f \in L^p(\mathbb{C})$ и цела важи $f \equiv 0$.

Последица 1.26. Бјорлингова трансформација је изометрија на простору $L^2(\mathbb{C})$. Специјално, њена L^2 -норма је једнака 1.

Доказ. Посматрајмо произвољну функцију $f \in C_0^\infty(\mathbb{C})$. Из симетричности Бјорлингове трансформације и особина комплексних парцијалних извода, имамо

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} |(Sf_{\bar{z}})(\zeta)|^2 d\zeta &= \int_{\mathbb{C}} |f_z(\zeta)|^2 d\zeta = \int_{\mathbb{C}} f_z(\zeta) (\overline{f})_{\bar{z}}(\zeta) d\zeta = \int_{\mathbb{C}} (Sf_{\bar{z}})(\zeta) (\overline{f})_{\bar{z}}(\zeta) d\zeta \\
&= \int_{\mathbb{C}} f_{\bar{z}}(\zeta) (S(\overline{f})_{\bar{z}})(\zeta) d\zeta = \int_{\mathbb{C}} f_{\bar{z}}(\zeta) (\overline{f})_z(\zeta) d\zeta = \int_{\mathbb{C}} |f_{\bar{z}}(\zeta)|^2 d\zeta.
\end{aligned}$$

Из овога је јасно да је $\|S\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2$, за све φ облика $\varphi = f_{\bar{z}}$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{C})$. Покажимо још и да су овакве функције густе у $L^2(\mathbb{C})$. Претпоставимо да постоји функција $h \in L^2(\mathbb{C})$ која је ортогонална на све $f_{\bar{z}}$, где је $f \in C_0^\infty(\mathbb{C})$. Тада је $0 = \int_{\mathbb{C}} f_{\bar{z}}(\zeta) h(\zeta) d\zeta = - \int_{\mathbb{C}} f(\zeta) h_{\bar{z}}(\zeta) d\zeta$, при чему извод $h_{\bar{z}}$ посматрамо у смислу дистрибуција. Како ово важи за произвољно $f \in C_0^\infty(\mathbb{C})$, имамо да је $h_{\bar{z}} = 0$ (у смислу дистрибуција). Сада је, на основу Вејлове теореме 1.24, функција h холоморфна на $\mathbb{C}$. Како она поред тога припада скупу

¹⁴Hermann Weyl, 1885 - 1955, немачки математичар, физичар и филозоф

$L^2(\mathbb{C})$, теорема 1.25 нам даје да је она идентички једнака нули. Дакле, скуп функција $\{f_{\bar{z}} : f \in C_0^\infty(\mathbb{C})\}$ је густ у $L^2(\mathbb{C})$, па је Бјорлингова трансформација изометрија и на целом $L^2(\mathbb{C})$. $\square$

Из доказа претходне последице видимо да се Бјорлингова трансформација проширује до ограниченог оператора на $L^2(\mathbb{C})$. При томе, како је скуп $C_0^\infty(\mathbb{C})$ густ у $L^2(\mathbb{C})$, све особине које смо показали се преносе и на овај проширени оператор.

Пример 1.27. Одредимо Бјорлингову трансформацију карактеристичне функције јединичне лопте. Да бисмо избегли директан рачун, искористићемо став 1.22. Тражимо функцију f за коју важи $f_{\bar{z}} = \chi_{\mathbb{D}}$. Лако можемо видети да је једна таква функција дата са

$$f(z) = \begin{cases} \bar{z} & , |z| \leq 1, \\ \frac{1}{z} & , |z| > 1. \end{cases}$$

За ову функцију важи да је $f_z(z) = -\frac{1}{z^2}\chi_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}}$, што припада простору $L^2(\mathbb{C})$.

Сада, на основу става 1.22, имамо да је $(S\chi_{\mathbb{D}})(z) = -\frac{1}{z^2}\chi_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}}(z)$.

Овај резултат можемо искористити и да одредимо Бјорлингову трансформацију карактеристичне функције произвољне лопте. Смена $\nu = \frac{\zeta - a}{r}$ нам даје

$$\begin{aligned} (S\chi_{\mathbb{D}(a,r)})(z) &= -\frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{\mathbb{C}} \frac{\chi_{\mathbb{D}(a,r)}(\zeta)}{(z - \zeta)^2} d\zeta = -\frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{\mathbb{C}} \frac{\chi_{\mathbb{D}}(\nu)}{\left(\frac{z-a}{r} - \nu\right)^2} d\nu \\ &= -\frac{1}{\left(\frac{z-a}{r}\right)^2} \chi_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}}\left(\frac{z-a}{r}\right) = -\frac{r^2}{(z-a)^2} \chi_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}(a,r)}(z). \end{aligned}$$

$\triangle$

Када смо проширили Бјорлингову трансформацију на простор $L^2(\mathbb{C})$ добили смо да је за свако $f \in L^2(\mathbb{C})$ и $Sf \in L^2(\mathbb{C})$. При томе, имамо и да је конвергенција интеграла којим смо дефинисали овај оператор, ка функцији Sf , само у L^2 -норми. Покажимо да имамо и скоро свуда конвергенцију. На основу претходног примера и симетричности Бјорлингове трансформације, за $f \in L^2(\mathbb{C})$ је

$$(Sf)(z) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z-\zeta|>\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{\mathbb{C}} (S\chi_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}(z,\varepsilon)})(\zeta) f(\zeta) d\zeta$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{m(\mathbb{D}(z, \varepsilon))} \int_{\mathbb{D}(z, \varepsilon)} (Sf)(\zeta) d\zeta.$$

На основу Лебегове¹⁵ теореме о диференцирању, последњи лимес постоји у свим Лебеговим тачкама функције Sf и једнак је баш $(Sf)(z)$. Како је $Sf \in L^2(\mathbb{C})$, Лебегове тачке ове функције су све осим неког скупа мере 0, па имамо конвергенцију тачка-по-тачка скоро свуда.

До сада смо успели да Бјорлингову трансформацију порширимо на скуп $L^2(\mathbb{C})$, а самим тим и на скуп Шварцових функција $\mathcal{S}(\mathbb{C})$. Због тога можемо одредити његов Фуријеов множилац.

Теорема 1.28. За $f \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ важи

$$(S(f))^\wedge(\xi) = \frac{\bar{\xi}}{\xi} f^\wedge(\xi).$$

Први доказ. Бјорлингова трансформација је оператор конволуционог типа, због чега ће њена Фуријеова трансформација бити дата у облику множиоца. Тачније, за произвољно $f \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ важи

$$(S(f))^\wedge(\xi) = S^\wedge(\xi) f^\wedge(\xi),$$

за неку функцију $S^\wedge$. Нека је $f \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ произвољна. На основу става 1.22 имамо да $S\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{\partial f}{\partial z}$, па посматрајући Фуријеову трансформацију од обе стране добијамо

$$S^\wedge(\xi) \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)^\wedge(\xi) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^\wedge(\xi), \quad \xi \in \mathbb{C}.$$

Користећи особине Фуријеових трансформација парцијалних извода, имамо да за произвољно $\xi = \xi_1 + i\xi_2 \in \mathbb{C}$ важи

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)^\wedge(\xi) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)^\wedge(\xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^\wedge(\xi) + i\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^\wedge(\xi) \\ &= \frac{1}{2}(2\pi i\xi_1)f^\wedge(\xi) + i\frac{1}{2}(2\pi i\xi_2)f^\wedge(\xi) = \pi i\xi f^\wedge(\xi), \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^\wedge(\xi) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)^\wedge(\xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^\wedge(\xi) - i\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^\wedge(\xi) \\ &= \frac{1}{2}(2\pi i\xi_1)f^\wedge(\xi) - i\frac{1}{2}(2\pi i\xi_2)f^\wedge(\xi) = \pi i\bar{\xi}f^\wedge(\xi), \end{aligned}$$

¹⁵Henri Lebesgue, 1875 - 1941, француски математичар

Комбиновањем добијених резултата јасно видимо да је $S^\wedge(\xi) = \frac{\bar{\xi}}{\xi}$, што је и требало показати. $\square$

Навешћемо још један доказ ове теореме, овога пута директан, слично као када смо доказивали теорему 1.11.

Други доказ. Као што смо већ напоменули, Бјорлингову трансформацију можемо видети као конволуцију са дистрибуцијом. Због тога за $f \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$ имамо да је $S(f) = W * f$, где је за произвољно $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$

$$\langle W, \varphi \rangle = -\frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta.$$

Сада ћемо израчунати Фуријеову трансформацију дистрибуције W , из чега једноставно следи тражени резултат.

Нека је $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ произвољно. Имамо

$$\begin{aligned} \langle W^\wedge, \varphi \rangle &= \langle W, \varphi^\wedge \rangle = -\frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi^\wedge(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|\zeta| \geq \varepsilon} \frac{\varphi^\wedge(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta \\ &= -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|\zeta| \geq \varepsilon} \frac{1}{\zeta^2} \int_{\mathbb{C}} \varphi(z) e^{-2i\pi \text{Re}(\bar{z}\zeta)} dz d\zeta \\ &= -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{C}} \varphi(z) \int_{|\zeta| \geq \varepsilon} \frac{e^{-2i\pi \text{Re}(\bar{z}\zeta)}}{\zeta^2} d\zeta dz, \end{aligned}$$

при чему смо у последњем кораку применили Фубинијеву теорему. Како је $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$, да бисмо могли да применимо теорему о доминантној конвергенцији довољно је да покажемо ограниченост унутрашњег интеграла. Преласком на поларне координате са $\zeta = re^{i\theta}$, користећи да је $z = \rho e^{i\psi}$, добијамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| \geq \varepsilon} \frac{e^{-2i\pi \text{Re}(\bar{z}\zeta)}}{\zeta^2} d\zeta &= \frac{1}{\pi} \int_{\psi}^{\psi+2\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi r \cos(\theta-\psi)}}{r^2 e^{2i\theta}} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-i2\psi} \int_0^{2\pi} \int_{\eta}^{\infty} \frac{e^{-it \cos \phi}}{t} e^{-2i\phi} dt d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} e^{-i2\psi} \int_{\eta}^{\infty} \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} e^{-it \cos \phi} e^{-2i\phi} d\phi dt. \end{aligned}$$

Овде смо у преласку на други ред користили смену $(t, \phi) = (\theta - \psi, 2\pi r)$ и ознаку $\eta = 2\pi \rho \varepsilon$ (што тежи 0 кад $\varepsilon \rightarrow 0$), а у преласку на трећи ред

Фубинијеву теорему. Уочимо да је унутрашњи интеграл једнак умношку Беселове¹⁶ функције, тачније да је

$$\int_0^{2\pi} e^{-it \cos \phi} e^{-2i\phi} d\phi = -2\pi J_{-2}(t) = -2\pi J_2(t).$$

Како последњи интеграл конвергира када $\varepsilon \rightarrow 0$, он је равномерно ограничен у некој околини нуле независно од ε , па можемо применити теорему о доминантној конвергенцији. Заменом места интеграла и лимеса, унутрашњи интеграл постаје

$$-2e^{-2i\psi} \int_0^\infty \frac{J_2(t)}{t} dt = -e^{-2i\psi} \int_0^\infty J_1(t) dt - e^{-2i\psi} \int_0^\infty J_2'(t) dt = -e^{-2i\psi} = -\frac{\bar{z}}{z}.$$

Овде смо користили познате особине Беселових функција, као што су $J_2'(t) + \frac{2}{t}J_2(t) = J_1(t)$, $J_2(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} J_2(t) = 0$ и $\int_0^\infty J_2(t) dt = 1$. Када добијени резултат заменимо у почетни израз, добијамо

$$\langle W^\wedge, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{C}} \varphi(z) \frac{\bar{z}}{z} dz,$$

из чега је $W^\wedge = \frac{\bar{z}}{z}$, у смислу дистрибуција. Коначно

$$(S(f))^\wedge(\xi) = (W * f)^\wedge(\xi) = (W^\wedge f^\wedge)(\xi) = \frac{\bar{\xi}}{\xi} f^\wedge(\xi). \quad \square$$

Из овога једноставно видимо да је Фуријеов множилац Бјорлингове трансформације функција ограничена по модулу са 1. Уз коментаре које смо навели на почетку ове секције, имамо да је ово оператор Калдерон-Зигмундовога типа, па се може проширити до ограниченог оператора на $L^p(\mathbb{C})$, за све $1 < p < \infty$, при чему се све показане особине аналогно преносе.

Последица претходне теореме је и веза са Рисовим трансформацијама у $\mathbb{R}^2$, која ће бити веома значајна у процени норме Бјорлингове трансформације.

Теорема 1.29. За Рисове трансформације R_1 и R_2 на $\mathbb{R}^2$ важи

$$S = R_2^2 - R_1^2 + 2iR_1R_2.$$

¹⁶Friedrich Bessel, 1784 - 1846, немачки астроном, математичар и физичар

Доказ. Ово једноставно можемо показати применом теорема 1.28 и 1.11 о Фуријеовим множиоцима ових оператора. Ако означимо $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, имамо да је

$$(R_2^2 - R_1^2 + 2iR_1R_2)^\wedge(\xi) = -\frac{\xi_2^2}{|\xi|^2} + \frac{\xi_1^2}{|\xi|^2} - 2i\frac{\xi_1\xi_2}{|\xi|^2} = \frac{(\xi_1 - i\xi_2)^2}{|\xi|^2} = \frac{\bar{\xi}}{\xi} = S^\wedge(\xi),$$

где смо под Фуријеовим трансформацијама ових оператора мислили на њихове Фуријеове множиоце. Из овога директно следи тражени идентитет. $\square$

Релативно једноставно можемо наћи доњу оцену за L^p -норму Бјорлингове трансформације.

Став 1.30. За $1 < p < \infty$ је $\|S\|_p \geq p^* - 1$.

Доказ. Нека је $\alpha \in \left(0, \frac{1}{p}\right)$. Посматрјмо функцију f_α дату са

$$f_\alpha(z) = \begin{cases} |z|^{-2\alpha} & , |z| \leq 1, \\ \frac{1}{\bar{z}} & , |z| > 1. \end{cases}$$

За овако дефинисану функцију лако рачунамо да је

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial z}(z) &= \begin{cases} (1 - \alpha)|z|^{-2\alpha} & , |z| \leq 1, \\ 0 & , |z| > 1, \end{cases} \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}}(z) &= \begin{cases} -\alpha \frac{|z|^{2(1-\alpha)}}{\bar{z}^2} & , |z| \leq 1, \\ -\frac{1}{\bar{z}^2} & , |z| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Сада имамо

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} \right|^p dz &= (1 - \alpha)^p \int_{|z| \leq 1} |z|^{-2p\alpha} dz \\ &= (1 - \alpha)^p \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{-2p\alpha} \cdot r d\theta dr = \pi(1 - \alpha)^p \frac{1}{1 - p\alpha}, \\ \int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}} \right|^p dz &= \alpha^p \int_{|z| \leq 1} |z|^{-2p\alpha} dz + \int_{|z| > 1} |z|^{-2p} dz \\ &= \alpha^p \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{-2\alpha p} r d\theta dr + \int_1^\infty \int_0^{2\pi} r^{-2p} r d\theta dr \end{aligned}$$

$$= \alpha^p \pi \frac{1}{1 - p\alpha} - \pi \frac{1}{1 - p} = \pi \alpha^p \frac{1 - p - \frac{1-p\alpha}{\alpha^p}}{(1 - p\alpha)(1 - p)}.$$

Ако посматрамо количник претходних израза, добијамо

$$\frac{\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} \right|^p dz}{\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}} \right|^p dz} = \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^p \frac{1 - p}{1 - p - \frac{1-p\alpha}{\alpha^p}} \rightarrow (p - 1)^p \text{ кад } \alpha \rightarrow \frac{1}{p}.$$

Да бисмо претходни резултат повезали са Бјорлинговом трансформацијом, користићемо став 1.22. На основу њега имамо $\left| S \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}} \right) \right| = \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} \right|$, па је

$$\|S\|_p^p \geq \frac{\int_{\mathbb{C}} \left| S \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}} \right) \right|^p dz}{\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}} \right|^p dz} = \frac{\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} \right|^p dz}{\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}} \right|^p dz} \rightarrow (p - 1)^p \text{ кад } \alpha \rightarrow \frac{1}{p}.$$

Са друге стране, користећи $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)}$, имамо

$$\|S\|_p^p \geq \frac{\int_{\mathbb{C}} \left| S \left(\frac{\partial \bar{f}_\alpha}{\partial \bar{z}} \right) \right|^p dz}{\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial \bar{f}_\alpha}{\partial \bar{z}} \right|^p dz} = \frac{\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial \bar{f}_\alpha}{\partial z} \right|^p dz}{\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial \bar{f}_\alpha}{\partial \bar{z}} \right|^p dz} = \frac{\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{z}} \right|^p dz}{\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} \right|^p dz} \rightarrow (p - 1)^{-p} \text{ кад } \alpha \rightarrow \frac{1}{p}.$$

Из претходне две неједнакости директно закључујемо да је

$$\|S\|_p \geq \max \left(p - 1, \frac{1}{p - 1} \right) = p^* - 1,$$

што је и требало показати. $\square$

Као што смо поменули у предговору, за разлику од Хилбертове и Рисових трансформација, још увек није показано колика је тачна норма Бјорлингове трансформације. Методе које су коришћене приликом одређивања тих норми не могу се применити на трансформације чија су језгра парне функције, што је овде случај. Ивањецова хипотеза каже да је тачна L^p -норма Бјорлингове трансформације баш једнака доњем ограничењу које смо управо одредили, односно да је $\|S\|_p = p^* - 1$. Она је најзначајнији отворен проблем у овој области, у шта ћемо моћи да се уверимо у наредној секцији.

1.5 Мотивација и последице

Белтрамијева једначина

До Бјорлингове трансформације, на природан начин, долазимо и приликом решавања Белтрамије¹⁷ једначине. То је парцијална једначина облика

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - \mu \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad \mu \in L^\infty(\mathbb{C}).$$

Пре него што кренемо са њеним решавањем, увешћемо неке појмове и навести тврђења која ће нам бити потребна. С обзиром да их нећемо користити у остатку рада, дајемо их без доказа. За више детаља погледајте прегледни рад [17].

Из саме формулације Белтрамије¹⁷ једначине видимо да би Бјорлингова трансформација могла да има битну улогу у њеном решавању. На то нас највише наводи став 1.22. Сетимо се да је сличне особине имала и Кошијева трансформација, али нам она овде неће одговарати због тога што ћемо тражити да решења буду у $L^p(\mathbb{C})$, а она за такве функције није добро дефинисана. Зато уводимо један сличан оператор који неће имати овај проблем.

Дефиниција 1.31. Нека је $p > 2$. Оператор $P : L^p(\mathbb{C}) \rightarrow L^p(\mathbb{C})$ дефинишемо са

$$(Pf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta.$$

У даљем делу ове секције сматрамо да је $p > 2$, уколико није другачије наглашено.

Овај оператор има доста лепа својства. Наведимо нека од њих.

Став 1.32. За $f \in L^p(\mathbb{C})$ са компактним носачем важи

$$(Pf)(z) = (Cf)(z) - (Cf)(0).$$

Поред тога, за свако $f \in L^p(\mathbb{C})$ је $(Pf)(0) = 0$.

Став 1.33. Pf је непрекидна функција за свако $f \in L^p(\mathbb{C})$.

¹⁷Eugenio Beltrami, 1835 - 1900, италијански математичар

Став 1.34. За свако $f \in L^p(\mathbb{C})$ важи $\frac{\partial(Pf)}{\partial z} = Sf$ и $\frac{\partial(Pf)}{\partial \bar{z}} = f$, при чему су посматрани изводи у смислу дистрибуција.

Пре него што пређемо на решавање једначине, наведимо неколико битних напомена. Већ смо показали да је Бјорлингова трансформација изометрија на простору $L^2(\mathbb{C})$, па је $\|S\|_2 = 1$. Користећи теорему о интерполацији можемо закључити да за $p \approx 2$ важи $\|S\|_p \approx 1$. Једначину ћемо решити само у случају да је μ компактно садржана и норме мање од 1 (што се лако постиже скалирањем). Општи случај се слично решава (погледати теорему V.B.3 у [1]).

Теорема 1.35. Нека је $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ са компактним носачем таква да је $k = \|\mu\|_\infty < 1$ и $p > 2$ такво да важи $k\|S\|_p < 1$. Тада постоји јединствено решење Белтрамијеве једначине $f \in C(\mathbb{C}) \cap W^1(\mathbb{C})$ за које је додатно испуњено да је $f(0) = 0$ и $f_z - 1 \in L^p(\mathbb{C})$.

Доказ. За почетак, установимо неке особине које тражено решење мора да има. Нека f задовољава све услове теореме. Тада је

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z = \mu(f_z - 1) + \mu \in L^p(\mathbb{C}),$$

па је $P(f_{\bar{z}})$ добро дефинисан. Посматрајмо функцију $F = f - P(f_{\bar{z}})$. Применом става 1.34 важи

$$F_{\bar{z}} = f_{\bar{z}} - (P(f_{\bar{z}}))_{\bar{z}} = f_{\bar{z}} - f_{\bar{z}} = 0.$$

Из става 1.33 имамо да је F непрекидна, па је и локално интеграбилна. Вејлова теорема 1.24 нам даје да је функција F холоморфна. Специјално, холоморфна је и $F_z - 1$, за коју, користећи став 1.34, добијамо

$$F_z - 1 = f_z - (P(f_{\bar{z}}))_z - 1 = (f_z - 1) - S(f_{\bar{z}}),$$

што из услова теореме знамо да припада скупу $L^p(\mathbb{C})$. Теорема 1.25 повлачи да $F_z - 1 \equiv 0$, па је

$$f_z = S(f_{\bar{z}}) + 1 = S(\mu f_z) + 1.$$

Ово представљање ћемо искористити да покажемо јединственост решења. Претпоставимо да постоје два решења Белтрамијеве једначине, f и g , која задовољавају услове теореме. Из претходне једнакости имамо

$$f_z - g_z = S(\mu(f_z - g_z)),$$

што повлачи

$$\begin{aligned} \|f_z - g_z\|_p &= \|S(\mu(f_z - g_z))\|_p \leq \|S\|_p \|\mu(f_z - g_z)\|_p \leq \|S\|_p \|\mu\|_\infty \|f_z - g_z\|_p \\ &= k \|S\|_p \|f_z - g_z\|_p < \|f_z - g_z\|_p. \end{aligned}$$

Из овога јасно следи да је $f_z - g_z = 0$ скоро свуда. Како су f и g решења Белтрамијеве једначине, имамо да је $f_{\bar{z}} - g_{\bar{z}} = \mu(f_z - g_z) = 0$ скоро свуда. Последња једнакост повлачи да је $f - g$ холоморфна, док из $\overline{(f - g)}_{\bar{z}} = (f - g)_z = 0$ скоро свуда добијамо да је и $\overline{f - g}$ холоморфна. Ово је могуће једино ако је $f - g \equiv c$ за неко $c \in \mathbb{C}$, али из услова $f(0) = g(0) = 0$ следи да је $f \equiv g$.

Покажимо сада да постоји решење које задовољава услове теореме. Идеја је да на природан начин дођемо до кандидата, а затим покажемо да он има одговарајуће особине. Нека је f једно решење. Како је тада $f_z - 1 \in L^p(\mathbb{C})$, посматрајмо функцију $g = f - z$. Јасно је да је $g_z \in L^p(\mathbb{C})$, а из Белтрамијеве једначине имамо и $g_{\bar{z}} = f_{\bar{z}} = \mu f_z \in L^p(\mathbb{C})$. Другим речима, $g \in W^{1,2}(\mathbb{C})$. Применом става 1.22 добијамо

$$g_{\bar{z}} = f_{\bar{z}} = \mu f_z = \mu(g_z + 1) = \mu(S(g_{\bar{z}}) + 1) = \mu S(g_{\bar{z}}) + \mu.$$

Ако ово запишемо на лепши начин, имамо $\mu = (I - \mu S)g_{\bar{z}}$, где смо са I обележили идентички оператор. Како је $\|\mu S\|_p \leq k \|S\|_p < 1$, оператор $I - \mu S$ је инвертибилан у $L^p(\mathbb{C})$ и $g_{\bar{z}} = (I - \mu S)^{-1}\mu$. Из става 1.34 видимо да је $g = P((I - \mu S)^{-1}\mu)$ једна функција која ово испуњава, па је кандидат за f

$$f = P((I - \mu S)^{-1}\mu) + z.$$

Остаје да проверимо да ли ова функција задовољава све услове. За почетак, како је μ ограничена са компактним носачем, она припада скупу $L^p(\mathbb{C})$, па је $(I - \mu S)^{-1}\mu \in L^p(\mathbb{C})$. На основу става 1.33, функција $P((I - \mu S)^{-1}\mu)$ је непрекидна, па је таква и f . Из става 1.34 имамо да су слаби изводи једнаки

$$\begin{aligned} f_z &= S((I - \mu S)^{-1}\mu) + 1, \\ f_{\bar{z}} &= (I - \mu S)^{-1}\mu, \end{aligned}$$

па је $f \in W^1(\mathbb{C})$. Како смо већ показали да је $(I - \mu S)^{-1}\mu \in L^p(\mathbb{C})$, услови $f_z - 1, f_{\bar{z}} \in L^p(\mathbb{C})$ су задовољени. Остало је још да проверимо да је f решење Белтрамијеве једначине.

$$\begin{aligned} \mu f_z &= \mu + \mu S((I - \mu S)^{-1}\mu) = (I - \mu S)(I - \mu S)^{-1}\mu + \mu S((I - \mu S)^{-1}\mu) \\ &= ((I - \mu S) + \mu S)(I - \mu S)^{-1}\mu = (I - \mu S)^{-1}\mu = f_{\bar{z}}, \end{aligned}$$

што је и требало показати. Дакле, функција f коју смо конструисали јесте баш тражено решење Белтрамијеве једначине. $\square$

Напомена. Решење из претходне теореме се назива нормално решење Белтрамијеве једначине. На основу теореме 1.24, оно ће бити холоморфно ван неког компакта. Може се показати да је свако нормално решење додатно и хомеоморфизам (погледати теорему V.B.2 у [1]). До овог решења Белтрамијеве једначине дошао је Бојарски¹⁸ у раду [13].

Из претходног доказа можемо извести неколико битних резултата. Пре него што их формулишемо, увешћемо нови појам.

Дефиниција 1.36. Нека су $U, V \subset \mathbb{C}$ отворени и $K \geq 1$. Дефинишимо

$$k = \frac{K-1}{K+1} \in [0, 1).$$

За пресликавање $f : U \rightarrow V$ кажемо да је K -квазиконформно ако је хомеоморфизам, припада простору $W_{loc}^{1,2}(U)$ и важи $|f_{\bar{z}}| \leq k|f_z|$ скоро свуда (на U), где изводе посматрамо у смислу дистрибуција.

Дефиниција 1.37. За пресликавање f кажемо да је квазиконформно ако је K -квазиконформно за неко $K \geq 1$. Најмање такво K назива се квазиконформна константа функције f и означава са $K(f)$.

Приметимо да је свако K -квазиконформно пресликавање решење Белтрамијеве једначине за неко $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ такво да је $\|\mu\|_\infty \leq k$. Наравно, важи и обрнуто, односно да је свако решење Белтрамијеве једначине квазиконформно. Додатно, последњи услов за 1-квазиконформно пресликавање еквивалентан је Коши-Римановом¹⁹ систему, из чега се помоћу теореме 1.24 може показати да је такво пресликавање конформно ([3] страна 27).

Из претходног доказа видимо неколико корисних ствари. Прво, решење f можемо представити у облику $f = z + P(f_{\bar{z}})$. Друго, за $\|\mu S\|_p < 1$ имамо да је функција $f - z \in W^{1,p}(\mathbb{C})$. Приметимо да смо у почетку очекивали да ће решење бити у $W^{1,2}(\mathbb{C})$, али се оно у току самог доказа „самопобољшало”. Ову особину можемо и прецизно формулисати. Како она важи и у случају да μ није компактно садржано, посматраћемо локална решења. Доказ можете наћи у [3] (теорема 5.4.2).

¹⁸Bogdan Bojarski, 1931 - 2019, пољски математичар

¹⁹Bernhard Riemann, 1826 - 1866, немачки математичар

Теорема 1.38 (Бојарски). Нека је $f \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{C})$ решење Белтрамијеве једначине. Тада постоји $p > 2$ тако да је $f \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$.

Једно битно питање које се овде поставља је наћи највеће $p > 2$ које задовољава услове претходне теореме, ако је $\|\mu\|_\infty = k < 1$. Одговор на ово тешко питање је дао Астала²⁰ у раду [2], где је показао да је оптимално $p = 1 + \frac{1}{k}$, али се оно у општем случају не може достићи. Аналогно теореме Бојарског, можемо поставити питање за које $q < 2$ важи да решење Белтрамијеве једначине, првобитно у $W_{loc}^{1,q}$, може да се „самопобољша” до простора $W_{loc}^{1,2}$, а самим тим и до $W_{loc}^{1,1+\frac{1}{k}}$, на основу Асталиног резултата (као и пре, $\|\mu\|_\infty = k < 1$). Испоставља се да је најмање овако $q = 1 + k$ и, за разлику од прошлог проблема, оно се може достићи. Једноставно можемо приметити да одговор на оба питања даје Ивањецова хипотеза. Нажалост, ова два проблема не могу нам помоћи у показивању хипотезе, али нам указују на њен значај у теорији квазиконформних пресликавања.

Дисторзија код квазиконформних пресликавања

Може се показати да, као и код конформних пресликавања, слике при квазиконформним пресликавањима имају лепе особине. Геринг²¹ и Лехто²² су у [21] показали да је хомеоморфизам квазиконформан ако и само ако му је дисторзија (истезање) ограничена.

Из доказа теореме 1.35 можемо доћи до тврђења које нам даје неку интуицију о томе како изгледа слика при квазиконформном пресликавању.

Теорема 1.39. Нека је $\mu \in L^\infty(\mathbb{C})$ садржано у $B(0, R)$ за неко $R > 0$ и такво да је $\|\mu\|_\infty = k < 1$. Нека је f нормално решење Белтрамијеве једначине и $p > 2$ тако да је $k\|S\|_p < 1$. Тада, за свако $E \subset B(0, R)$, постоји константа $C(R, k, p)$ тако да важи

$$m(f(E)) \leq C(R, k, p)m(E)^{1-\frac{2}{p}}.$$

Доказ. Директном сменом променљиве имамо

$$m(f(E)) = \int_{f(E)} dz = \int_E J(f) dz = \int_E (|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2) dz \leq \int_E |f_z|^2 dz.$$

²⁰Kari Astala, 1953, фински математичар

²¹Frederick Gehring, 1925 - 2012, амерички математичар

²²Olli Lehto, 1925 - 2020, фински математичар

Из доказа теореме 1.35 имамо да је $f_z = 1 + S((I - \mu S)^{-1}\mu)$. Уведимо ознаку $g = S((I - \mu S)^{-1}\mu)$. Неједнакост Минковског нам даје оцену

$$\begin{aligned} \int_E |f_z|^2 dz &= \|f_z\|_{L^2(E)}^2 \leq (\|1\|_{L^2(E)} + \|g\|_{L^2(E)})^2 \\ &\leq 2 \left(\|1\|_{L^2(E)}^2 + \|g\|_{L^2(E)}^2 \right) = 2 \left(m(E) + \|g^2\|_{L^1(E)} \right). \end{aligned}$$

Други сабирак у последњој неједнакости можемо оценити применом Хелде-рове²³ неједнакости за параметре $\frac{p}{2}$ и $\frac{p}{p-2}$:

$$\|g^2\|_{L^1(E)} \leq \|g^2\|_{L^{\frac{p}{2}}(E)} \|1\|_{L^{\frac{p}{p-2}}(E)} = \|g\|_{L^p(E)}^2 m(E)^{1-\frac{2}{p}}.$$

Први чинилац у последњем изразу можемо додатно ограничити константом користећи његово представљање преко Бјорлингове трансформације

$$\|g\|_{L^p(E)} \leq \|g\|_p \leq \|S\|_p \frac{1}{1 - k\|S\|_p} \|\mu\|_p \leq \frac{k\|S\|_p}{1 - k\|S\|_p} (R^2\pi)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Са друге стране, како је $\frac{m(E)}{R^2\pi} \leq 1$ и $1 - \frac{2}{p} < 1$, имамо $\frac{m(E)}{R^2\pi} \leq \left(\frac{m(E)}{R^2\pi} \right)^{1-\frac{2}{p}}$ и

$$m(E) \leq (R^2\pi)^{\frac{2}{p}} m(E)^{1-\frac{2}{p}}.$$

Комбинујући све претходне процене, добијамо

$$m(f(E)) \leq 2 \left((R^2\pi)^{\frac{2}{p}} + \left(\frac{k\|S\|_p}{1 - k\|S\|_p} \right)^2 (R^2\pi)^{\frac{2}{p}} \right) m(E)^{1-\frac{2}{p}},$$

што је и требало показати. $\square$

За функцију $z \mapsto z|z|^{\frac{1}{K}-1}$ добијамо да је претходна неједнакост задовољена за експонент $\frac{1}{K}$. Геринг и Рајх²⁴ су због тога у раду [22] поставили хипотезу да је највећи могући експонент у претходној теорему баш $\frac{1}{K}$. Ово је дуго био централни отворен проблем у области квазиконформних пресликавања у равни. Њега је такође решио Астала, у раду [2].

Приметимо да у граничном случају $1 - \frac{2}{p} = \frac{1}{K}$ имамо

$$\frac{1}{k} = \frac{K+1}{K-1} = \frac{1+\frac{1}{K}}{1-\frac{1}{K}} = \frac{2-\frac{2}{p}}{\frac{2}{p}} = p-1.$$

²³Otto Holder, 1859 - 1937, немачки математичар

²⁴Edgar Reich, 1927 - 2009, амерички математичар

Из овога видимо да је овај проблем у суштини еквивалентан проблему о Собољевим експонентима решења Белтрамијеве једначине (више о овоме можете наћи у 13. поглављу [3]). Дакле, и ово је директна последица Ивањецове хипотезе.

Поред ових, показивање тачне норме Бјорлингове трансформације имало би и многе друге важне последице, од којих је битно издвојити примену на варијациони рачун и проблеме Мореја²⁵, што можете видети у радовима [4] и [5].

²⁵Charles B. Morrey Jr, 1907 - 1984, амерички математичар

Глава 2

Биркхолдерова неједнакост

Иако није директно везана за Бјорлингову трансформацију, Биркхолдерова неједнакост ће нам бити неопходна приликом тражења оцене њене норме. Сама неједнакост је општија од онога што ћемо користити, али доказ користи доста важну технику Белманових функција и битан појам мартингала, на којима се базира добар део овог рада. За ово, а и наредна поглавља, неопходно је познавање основних особина мартингала. У секцији 4.1 дат је преглед одређеног дела теорије из ове области, али се више детаља може наћи у књигама [19] и [25].

Посматрајмо произвољан реалан или комплексан сепарабилан Хилбертов простор H са нормом $|\cdot| : H \rightarrow [0, \infty)$ и унутрашњим производом $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$, чији је реални део означен са $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$. Поред овога, нека је дат и простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ са растућим низом σ -алгебри $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ које су подскупови од $\mathcal{F}$. Означимо очекивање на овом простору са $\mathbb{E}$. Нека су дати дискретни мартингали $f = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ и $g = \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ подређени низу $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ са вредностима у простору H . Уведимо још и L^p -норму мартингала са $\|f\|_p = \sup_n \|f_n\|_p$, при чему је $\|f_n\|_p = (\mathbb{E}(|f_n|^p))^{\frac{1}{p}}$. Овим смо увели неопходне појмове за главну теорему.

Теорема 2.1 (Биркхолдерова неједнакост). Нека је $1 < p < \infty$. Посматрајмо H -вредносне мартингале f и g дефинисане изнад. Уколико је за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $\omega \in \Omega$ задовољено

$$\begin{aligned} |g_0(\omega)| &\leq |f_0(\omega)|, \\ |g_n(\omega) - g_{n-1}(\omega)| &\leq |f_n(\omega) - f_{n-1}(\omega)|, \end{aligned}$$

важи неједнакост

$$\|g\|_p \leq (p^* - 1)\|f\|_p.$$

При томе, константа $p^* - 1$ је најбоља могућа, у смислу да за свако $0 < r < p^* - 1$ постоји простор вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, филтрација $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ и мартингали f и g који задовољавају услове теореме, а за које важи $\|g\|_p > r\|f\|_p$. Додатно, ако је $0 < \|f\|_p < \infty$, једнакост важи ако и само ако је $p = 2$ и у неједнакостима из услова важи једнакост за скоро свако $\omega \in \Omega$.

Доказ. Пре него што кренемо са доказом, увешћемо пар ознака. Нека је $d_n = f_n - f_{n-1}$ за $n \in \mathbb{N}$ и $d_0 = f_0$, односно $e_n = g_n - g_{n-1}$ за $n \in \mathbb{N}$ и $e_0 = g_0$. Јасно је да сада услов теореме постаје да за свако $n \in \mathbb{N}_0$ и свако $\omega \in \Omega$ важи

$$|e_n(\omega)| \leq |d_n(\omega)|. \quad (2.1)$$

Уколико је $\|f\|_p = \infty$, једнакост тривијално следи. Зато узмимо да је $\|f\|_p < \infty$. Користећи нове ознаке, видимо да је $f_n = \sum_{k=0}^n d_k$ и $g_n = \sum_{k=0}^n e_k$. За произвољно $n \in \mathbb{N}_0$, на основу неједнакости троугла и услова 2.1, имамо

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=0}^n \|e_k\|_p \leq \sum_{k=0}^n \|d_k\|_p \leq (n+1)\|f\|_p < \infty,$$

при чему смо у претпоследњој неједнакости користили да за $k \geq 1$ важи $\|d_k\|_p = \|f_k - f_{k-1}\|_p \leq \|f_k\|_p + \|f_{k-1}\|_p \leq 2\|f\|_p$, као и да је $\|d_0\|_p = \|f_0\|_p \leq \|f\|_p$. Дакле, за свако $n \in \mathbb{N}_0$, $\|f_n\|_p$ и $\|g_n\|_p$ су коначне.

Посматрајмо функцију $v : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ дату са

$$v(x, y) = |y|^p - (p^* - 1)^p |x|^p.$$

Тада је $\mathbb{E}(v(f_n, g_n)) = \|g_n\|_p^p - (p^* - 1)^p \|f_n\|_p^p$, па да бисмо показали тражену неједнакост довољно је да покажемо да важи

$$\mathbb{E}(v(f_n, g_n)) \leq 0, \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.2)$$

Сада долазимо до главне идеје доказа. Показаћемо неједнакост 2.2 за функцију $u : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ која ће бити мајоранта функције v . Функцију u дефинишемо са

$$u(x, y) = \alpha_p (|y| - (p^* - 1)|x|) (|x| + |y|)^{p-1},$$

где је $\alpha_p = p \left(1 - \frac{1}{p^*}\right)^{p-1}$. Она се назива Биркхолдерова Белманова функција.

Остатак доказа ћемо поделити на три дела.

$$(1) \quad \mathbb{E}(v(f_n, g_n)) \leq \mathbb{E}(u(f_n, g_n)), \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.3)$$

$$(2) \quad \mathbb{E}(u(f_n, g_n)) \leq \mathbb{E}(u(f_{n-1}, g_{n-1})), \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

$$(3) \quad \mathbb{E}(u(f_0, g_0)) \leq 0. \quad (2.5)$$

Јасно је да, ако бисмо показали ова три корака, показали бисмо и 2.2, а самим тим и почетну неједнакост.

Први корак ће следити из

$$v(x, y) \leq u(x, y), \quad \text{за свако } x, y \in H. \quad (2.6)$$

Да бисмо доказали ово, користићемо једну елементарну неједнакост:

$$\frac{(p-1)^{p-1}}{p^{p-2}} \leq 1, \quad \text{за } 1 < p \leq 2, \quad (2.7)$$

$$\frac{(p-1)^{p-1}}{p^{p-2}} \geq 1, \quad \text{за } 2 < p. \quad (2.8)$$

Означимо леву страну претходних израза са $\varphi(p)$. Анализирањем ове функције показаћемо неједнакости. За почетак, видимо да је функција позитивна, $\varphi(2) = 1$, $\lim_{p \rightarrow 1} \varphi(p) = 1$ и $\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(p) = \infty$. Једноставним рачуном добијамо

$$\begin{aligned} \log \varphi(p) &= (p-1) \log(p-1) - (p-2) \log p, \\ (\log \varphi)'(p) &= \log(p-1) - \log p + \frac{2}{p}, \\ (\log \varphi)''(p) &= \frac{2-p}{p^2(p-1)}. \end{aligned}$$

Из овога је за $1 < p \leq 2$ функција $\log \varphi$ конвексна, па је ту конвексна и функција φ . То нам, уз $\lim_{p \rightarrow 1} \varphi(p) = 1 = \varphi(2)$, даје неједнакост 2.7. За $p > 2$, прво видимо да је $(\log \varphi)''(p) < 0$, из чега следи да је $(\log \varphi)'$ опадајућа. Како је $\lim_{p \rightarrow \infty} (\log \varphi)'(p) = 0$, имамо да је $(\log \varphi)'(p) > 0$ за свако $p > 2$. Са друге стране, $(\log \varphi)'(p) = \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)}$, па из $\varphi(p) > 0$ добијамо да је $\varphi'(p) > 0$ за свако $p > 0$, односно да је φ растућа на $(2, \infty)$. Уз $\varphi(2) = 1$, ово повлачи 2.7.

Вратимо се сада на 2.6. Уколико важи $|x| + |y| = 0$, неједнакост је тривијално задовољена. Дакле, можемо претпоставити $|x| + |y| > 0$, а на основну

хомогености и да је додатно $|x| + |y| = 1$. Увођењем ознаке $s = |x|$, неједнакост 2.6 постаје

$$(1 - s)^p - (p^* - 1)^p s^p \leq \alpha_p (1 - p^* s).$$

Сада је довољно показати да је функција

$$F(s) = \alpha_p (1 - p^* s) - (1 - s)^p + (p^* - 1)^p s^p$$

ненегативна за свако $0 \leq s \leq 1$. Разликоваћемо случајеве у зависности од вредности p . За $p = 2$, имамо да је $\alpha_p = 1$ и $p^* = p = 2$, па је $F \equiv 0$. Нека је сада $p > 2$. Тада је $p^* = p$ и важи

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{(p-1)^{p-1}}{p^{p-2}} (1 - ps) - (1 - s)^p + (p-1)^p s^p, \\ F'(s) &= -\frac{(p-1)^{p-1}}{p^{p-3}} + p(1-s)^{p-1} + p(p-1)^p s^{p-1}, \\ F''(s) &= -p(p-1)(1-s)^{p-2} + p(p-1)^{p+1} s^{p-2}. \end{aligned}$$

Једноставним рачуном добијамо да је $F\left(\frac{1}{p}\right) = F'\left(\frac{1}{p}\right) = 0$ и $F''\left(\frac{1}{p}\right) > 0$, па функција F има локални минимум у $\frac{1}{p}$. Испитајмо и конвексност функције F .

На основу формуле за F'' , видимо да је $F''(s) \geq 0$ акко $(p-1)^p \geq \left(\frac{1}{s} - 1\right)^{p-2}$. Десна страна претходне неједнакости је очигледно опадајућа функција по s , па из $F''(0) < 0 < F''\left(\frac{1}{p}\right)$ закључујемо да постоји $s_0 \in \left(0, \frac{1}{p}\right)$ тако да је F конвексна на $[s_0, 1]$ и конкавна на $[0, s_0]$. Како смо већ установили да је локални минимум функције F у $\frac{1}{p} \in [s_0, 1]$ (и да је при томе он једнак нули), из конвексности добијамо да је $F(s) \geq 0$ на $[s_0, 1]$. Са друге стране, $F(0) = \frac{(p-1)^{p-1}}{p^{p-2}} - 1$, што је на основу неједнакости 2.8 ненегативно. Поред тога је и $F(s_0) \geq 0$, па из конкавности на $[0, s_0]$ следи да је $F(s) \geq 0$ и на $[0, s_0]$. Случај $1 < p < 2$ се ради аналогно, само што се тада, уместо у $\frac{1}{p}$, нула узима у $\frac{p-1}{p}$. Приметимо да за обе тачке можемо користити исту ознаку $\frac{1}{p^*}$, тако да је доказ потпуно аналоган. Уместо неједнакости 2.8, овде користимо 2.7, што је и било очекивано. Овим смо показали први корак.

Сада прелазимо на други. Да бисмо њега показали, користимо једно помоћно тврђење.

Лема 2.2. Нека су $x, y, h, k \in H$ такви да је $|k| \leq |h|$ и за свако $t \in \mathbb{R}$ важи $|x + th|, |y + tk| > 0$. Тада је

$$u(x + h, y + k) \leq u(x, y) + (\phi(x, y), h) + (\psi(x, y), k), \quad (2.9)$$

где су $\phi, \psi : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ дате са

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \alpha_p \frac{x}{|x|} ((p - p^*)|y| - p(p^* - 1)|x|) (|x| + |y|)^{p-2}, \\ \psi(x, y) &= \alpha_p \frac{y}{|y|} (p|y| + (p + p^* - pp^*)|x|) (|x| + |y|)^{p-2}. \end{aligned}$$

Доказ. Посматрајмо функцију $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дату са

$$G(t) = u(x + th, y + tk) = \alpha_p (|y + tk| - (p^* - 1)|x + th|) (|x + th| + |y + tk|)^{p-1}.$$

Приметимо да је, због услова леме, ова функција бесконачно пута диференцијабилна. Наиме,

$$(|x + th|)' = \left(\sqrt{\langle x + th, x + th \rangle} \right)' = \frac{\langle h, x + th \rangle + \langle x + th, h \rangle}{2\sqrt{\langle x + th, x + th \rangle}} = \frac{(h, x + th)}{|x + th|},$$

и аналогно $(|y + tk|)' = \frac{(k, y + tk)}{|y + tk|}$. Како смо претпоставили да су $|x + th|, |y + tk| > 0$ за свако t , сви изводи функције G ће бити добро дефинисани и непрекидни (јер нећемо имати дељење нулом). Након краћег рачуна, добијамо

$$\begin{aligned} G'(t) &= \alpha_p (|x + th| + |y + tk|)^{p-2} \left[\left(k, (y + tk) \left(p + (p + p^* - pp^*) \frac{|x + th|}{|y + tk|} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(h, (x + th) \left(-p(p^* - 1) + (p - p^*) \frac{|y + tk|}{|x + th|} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Специјално, за $t = 0$ је

$$\begin{aligned} G'(0) &= \alpha_p (|x| + |y|)^{p-2} \left[(p|y| + (p + p^* - pp^*)|x|) \left(k, \frac{y}{|y|} \right) \right. \\ &\quad \left. + ((p - p^*)|y| - p(p^* - 1)|x|) \left(h, \frac{x}{|x|} \right) \right]. \end{aligned}$$

Овде видимо одређену сличност са функцијама ϕ и ψ . Заиста, лако можемо добити да је $G'(0) = (\phi(x, y), h) + (\psi(x, y), k)$, чиме 2.9 сводимо на

$$G(1) \leq G(0) + G'(0). \quad (2.10)$$

Показаћемо да је функција G конкавна, из чега претходна неједнакост брзо следи. Приметимо да је довољно да покажемо да је $G''(0) \leq 0$. Ово можемо закључити из чињенице да, ако за неко $s \in \mathbb{R}$ важи $G''(s) \leq 0$, онда је и $G_s''(0) \leq 0$ и обрнуто, где је $G_s(t) = u((x+sh)+th, (y+sk)+tk)$. За овако дефинисано G_s важе исти услови као и за G . Једина разлика је у „базним” тачкама, које су код G x и y , а код G_s $x+sh$ и $y+sk$. У току анализирања другог извода у нули показаћемо да ове разлике не утичу на знак, што нам и треба при провери конкавности. Посматраћемо одвоједно случајеве $p \geq 2$ и $1 < p < 2$. Овде ћемо изоставити формулу другог извода у произвољној тачки, јер је она доста компликована.

Прво ћемо обрадити случај $p \geq 2$. Након мало сређивања, други извод у нули можемо записати у следећем облику:

$$G''(0) = -\alpha_p(A + B + C),$$

где су

$$\begin{aligned} A &= p(p-1)(|h|^2 - |k|^2)(|x| + |y|)^{p-2}, \\ B &= p(p-2) \left(|k|^2 - \left(\frac{y}{|y|}, k \right)^2 \right) \frac{1}{|y|} (|x| + |y|)^{p-1}, \\ C &= p(p-1)(p-2) \left(\left(\frac{x}{|x|}, h \right) + \left(\frac{y}{|y|}, k \right) \right)^2 |x| (|x| + |y|)^{p-3}. \end{aligned}$$

Показаћемо да је сваки од ових сабирака ненегативан. Како је $p \geq 2$, имамо да је $C \geq 0$. У поставци леме смо претпоставили да је $|k| \leq |h|$, из чега следи да је $A \geq 0$. Што се тиче сабирка B , треба проверити ненегативност члана $|k|^2 - \left(\frac{y}{|y|}, k \right)^2$. На основу неједнакости Коши-Шварца¹ имамо

$$|k|^2 |y|^2 \geq |\langle y, k \rangle|^2 \geq (y, k)^2,$$

из чега дељењем са $|y|^2$ следи да је и издвојени чинилац сабирка B ненегативан, па је такав и цео B . Дакле, $G''(0) \leq 0$, па је на основу коментара од пре G конкавна на целом $\mathbb{R}$, за $p \geq 2$. Приметимо да нам ниједна оцена није зависила од x и y , што оправдава наш коментар.

Случај $1 < p < 2$ ћемо свести на управо показани. У случају $p \geq 2$ важи да је $p^* = p$, што смо користили у запису формула. Сада је $p^* = \frac{p}{p-1}$, па

¹Hermann Schwarz, 1843 - 1921, немачки математичар

ћемо посматрати функцију $(p-1)u(x, y) = -\alpha_p(|x| - (p-1)|y|)(|y| + |x|)^{p-1}$. Претходни идентитет важи јер је $(p-1)(p^*-1) = 1$ за $1 < p < 2$. Како на знак другог извода неће утицати позитивна константа $p-1$, он ће у овом случају бити умножак истих сабирака као и у претходном, при чему ће само x и y , као и h и k , заменити места. Дакле,

$$(p-1)G''(0) = \alpha_p(A' + B' + C'),$$

где су

$$\begin{aligned} A' &= p(p-1)(|k|^2 - |h|^2)(|y| + |x|)^{p-2}, \\ B' &= p(p-2) \left(|h|^2 - \left(\frac{x}{|x|}, h \right)^2 \right) \frac{1}{|x|} (|y| + |x|)^{p-1}, \\ C' &= p(p-1)(p-2) \left(\left(\frac{y}{|y|}, k \right) + \left(\frac{x}{|x|}, h \right) \right)^2 |y| (|y| + |x|)^{p-3}. \end{aligned}$$

Како је $|k| \leq |h|$, имамо да је $A \leq 0$, док је једини негативни чинилац у B' и C' $p-2$, па су и они непозитивни. Дакле, $(p-1)G''(0) \leq 0$, па је и $G''(0) \leq 0$ и на основу коментара од пре, G је конкавна на целом $\mathbb{R}$ и за $1 < p < 2$.

Како је G диференцијабилна на целом $\mathbb{R}$, на основу Лагранжеве теореме имамо да је $G(1) - G(0) = G'(\xi)$, за неко $\xi \in (0, 1)$. Функција G је конкавна, па како је и два пута диференцијабилна важи да је G'' негативна функција на целом $\mathbb{R}$. То повлачи да је G' опадајућа, па је $G'(0) \geq G'(\xi) = G(1) - G(0)$, чиме је задовољено 2.10, па и њој еквивалентна неједнакост 2.9, што је и требало показати. $\square$

Наставимо сада са доказом главног тврђења. Нека је H_0 потпростор простора H који садржи елементе $f_n(\omega)$ и $g_n(\omega)$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$ и свако $\omega \in \Omega$. Можемо претпоставити да је H_0 прави потпростор од H , јер у супротном H можемо проширити тако да то буде случај. Нека је $a \in H$ у ортогоналном комплементу скупа H_0 и $0 < a \leq 1$. За свако $n \in \mathbb{N}_0$ дефинишимо $F_n = f_n + a$ и $G_n = g_n + a$. Применимо лему 2.2 за $n \in \mathbb{N}$, $x = F_{n-1}$, $y = G_{n-1}$, $h = d_n$ и $k = e_n$. Услов да је $|k| \leq |h|$ је задовољен због претпоставке теореме, док други услов важи јер

$$\begin{aligned} |x + th|^2 &= \langle F_{n-1} + td_n, F_{n-1} + td_n \rangle = \langle f_{n-1} + td_n + a, f_{n-1} + td_n + a \rangle \\ &= \langle f_{n-1} + td_n, f_{n-1} + td_n \rangle + \langle f_{n-1} + td_n, a \rangle + \langle a, f_{n-1} + td_n \rangle + \langle a, a \rangle \\ &= |f_{n-1} + td_n|^2 + |a|^2 > 0, \end{aligned}$$

и аналогно за $|y + tk|$, при чему смо искористили ортогоналност a на потпростор H_0 . Сада на основу леме имамо

$$u(F_n, G_n) \leq u(F_{n-1}, G_{n-1}) + (\phi(F_{n-1}, G_{n-1}), d_n) + (\psi(F_{n-1}, G_{n-1}), e_n). \quad (2.11)$$

Приметимо да важе следеће неједнакости:

$$\begin{aligned} |u(F_n, G_n)| &\leq \alpha_p(p^* - 1)(|F_n| + |G_n|)^p \leq c_p(2|a| + |f_n| + |g_n|)^p \\ &\leq c_p 3^p(2^p + |f_n|^p + |g_n|^p), \\ |u(F_{n-1}, G_{n-1})| &\leq c_p 3^p(2^p + |f_{n-1}|^p + |g_{n-1}|^p), \end{aligned}$$

па како су десне стране ових неједнакости интеграбилне, такве су и леве. Дакле, прва два члана неједнакости 2.11 су интеграбилна. Са друге стране, применом особина мартингала на друга два сабирка добијамо да су оба једнака нули. Да бисмо то показали, уочимо неколико ствари. Прво, како је $\{f_n\}$ мартингал, $\mathbb{E}(f_n) = \mathbb{E}(f_{n-1})$ за све $n \in \mathbb{N}$, па је $\mathbb{E}(d_n) = 0$. Аналогно је и $\mathbb{E}(e_n) = 0$. Посматрајмо сада неку ортонормирану базу простора H . Нека је она, без умањења општости, коначна ($\dim(H) = r$). Сада је специјало и $\mathbb{E}(d_n^k) = 0$ за све $1 \leq k \leq r$. Користећи особине условног очекивања и мартингала, имамо да је

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\langle \phi(F_{n-1}, G_{n-1}), d_n \rangle) &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^r \phi_k(F_{n-1}, G_{n-1}) \overline{d_n^k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^r \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\phi_k(F_{n-1}, G_{n-1}) \overline{d_n^k} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^r \mathbb{E} \left(\phi_k(F_{n-1}, G_{n-1}) \mathbb{E} \left(\overline{d_n^k} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right) \right) \\ &= \sum_{k=1}^r \mathbb{E}(\phi_k(F_{n-1}, G_{n-1})) \overline{\mathbb{E}(d_n^k)} = 0. \end{aligned}$$

Овде смо, редом, користили линеарност очекивања, очекивање условљавањем, чињеницу да је $\phi_k(F_{n-1}, G_{n-1})$ $\mathcal{F}_{n-1}$ -мерљива, а d_n^k независна од те σ -алгебре. Из овога је директно и $\mathbb{E}(\langle \phi(F_{n-1}, G_{n-1}), d_n \rangle) = 0$. Потпуно аналогно се показује да је и очекивање следећег сабирка једнако нули. Сада можемо посматрати очекивање неједнакости 2.11, при чему добијамо

$$\mathbb{E}(u(F_n, G_n)) \leq \mathbb{E}(u(F_{n-1}, G_{n-1})). \quad (2.12)$$

Неједнакости којима смо показали интеграбилност чланова у 2.11 можемо поново искористити. Наиме, оцене које смо ту извели су итеграбилне функције које не зависе од a . Када на неједнакост 2.12 применимо $\lim_{|a| \rightarrow 0}$, те оцене нам могу послужити као интегралне доминанте, па можемо искористити лимес и очекивање. Из тога и непрекидности функције u директно следи 2.4.

Остало је још да покажемо трећи корак. Приметимо да за $|y| \leq |x|$ важи

$$|y| - (p^* - 1)|x| \leq (2 - p^*)|x| \leq 0. \quad (2.13)$$

Из услова теореме знамо да је $|g_0| \leq |f_0|$, па имамо

$$u(f_0, g_0) = \alpha_p(2 - p^*)|f_0|(|f_0| + |g_0|)^{p-1} \leq \alpha_p(2 - p^*)|f_0|^p \leq 0,$$

што повлачи 2.5.

Директном комбинацијом корака 2.3, 2.4 и 2.5 добијамо Биркхолдерову неједнакост.

Проверимо сада када важи једнакост за $0 < \|f\|_p < \infty$

У случају $p \neq 2$ је $p^* > 2$. Нека је $n_0 \in \mathbb{N}_0$ најмањи број за који је $\|f_n\|_p > 0$. Јасно је да је тада $f_{n_0-1}, \dots, f_0 = 0$ скоро свуда, што повлачи и да је $d_{n_0-1}, \dots, d_0 = 0$ скоро свуда. Из услова теореме је онда $e_{n_0-1}, \dots, e_0 = 0$ скоро свуда, па је и $g_{n_0-1}, \dots, g_0 = 0$ скоро свуда. Сада имамо да скоро свуда важи $|g_{n_0}| = |e_{n_0}| \leq |d_{n_0}| = |f_{n_0}|$, па неједнакости 2.3, 2.4 и 2.13, за свако $n \geq n_0$, дају

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(v(f_n, g_n)) &\leq \mathbb{E}(u(f_n, g_n)) \leq \mathbb{E}(u(f_{n_0}, g_{n_0})) \\ &\leq \mathbb{E}(\alpha_p(2 - p^*)|f_{n_0}|^p) = \alpha_p(2 - p^*)\|f_{n_0}\|_p^p < 0. \end{aligned}$$

Заменом формуле за $\mathbb{E}(v(f_n, g_n))$ добијамо

$$\|g_n\|_p^p \leq (p^* - 1)^p \|f_n\|_p^p + \alpha_p(2 - p^*)\|f_{n_0}\|_p^p.$$

Ако посматрамо супремум по $n \geq n_0$, имамо да је

$$\|g\|_p^p \leq (p^* - 1)^p \|f\|_p^p + \alpha_p(2 - p^*)\|f_{n_0}\|_p^p < (p^* - 1)^p \|f\|_p^p,$$

па важи строга неједнакост (за $n < n_0$ је $\|f_n\|_p = \|g_n\|_p = 0$, па је свакако $\|f\|_p > \|f_n\|_p$ (јер смо претпоставили да је $\|f\|_p > 0$)).

Остаје још случај $p = 2$. Тада је и $p^* = 2$. Приметимо да за $i < j$ важи

$$\mathbb{E}(\langle d_i, d_j \rangle) = \sum_{k=1}^r \mathbb{E}(d_i^k \overline{d_j^k}) = \sum_{k=1}^r \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(d_i^k \overline{d_j^k} | \mathcal{F}_i \right) \right) = \sum_{k=1}^r \mathbb{E} (d_i^k) \overline{\mathbb{E} (d_j^k)} = 0.$$

Овде смо користили аналогне аргументе као при показивању да друга два члана неједнакости 2.11 имају очекивање 0. Из овога, за све $n \in \mathbb{N}$ имамо

$$\begin{aligned} \|f_n\|_2^2 &= \mathbb{E}(|f_n|^2) = \mathbb{E}(\langle f_n, f_n \rangle) = \mathbb{E}\left(\left\langle \sum_{k=0}^n d_k, \sum_{k=0}^n d_k \right\rangle\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E}(\langle d_k, d_k \rangle) = \sum_{k=0}^n \|d_k\|_2^2. \end{aligned}$$

Дакле, $\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|d_n\|_2^2$, а аналогно је и $\|g\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\|_2^2$. Сада Биркхолдєрова неједнакост постаје еквивалентна са

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\|_2^2 \leq (p^* - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \|d_n\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|d_n\|_2^2.$$

Како из 2.1 следи да је $\|e_n\|_2 \leq \|d_n\|_2$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$, једнакост се у овом случају достиже акко $\|e_n\|_2 = \|d_n\|_2$ за свако $n \in \mathbb{N}_0$ акко $e_n = d_n$ скоро сигурно за свако $n \in \mathbb{N}_0$, што је и требало показати. Доказ да је $p^* - 1$ најбоља оцена (у смислу који смо навели у поставци теореме) може се наћи у [15]. $\square$

Неједнакост коју смо управо показали је само једна од многих које је Биркхолдер показао на врло сличан начин, користећи своју Белманову функцију. Једну од њих ћемо показати у глави 4. Више о овоме можете погледати у раду [16].

Доказ Биркхолдєрове неједнакости је веома важан пример примене технике Белманових функција у показивању неједнакости. Тај метод је веома општи и за његово боље разумевање добро је видети како се користи у различитим примерима, што можете наћи у [33], [27] и [37]. Главна идеја је у тражењу Белманове функције која ће бити мајоранта (или миноранта, зависно од проблема) функције за коју желимо да покажемо неку неједнакост. Након тога обично следе кораци слични неједнакостима 2.3, 2.4 и 2.5, којима се проблем рекурентно своди на неки једноставнији.

У наредним поглављима, поред саме неједнакости, користићемо и једну последицу доказа који смо управо извели.

Став 2.3. Нека су функције $u, v : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисане исто као у теорему 2.1. Тада важи:

$$(1) \quad v(x, y) \leq u(x, y) \text{ за све } x, y \in H,$$

(2) $u(x, y) \leq 0$ за све $x, y \in H$ за које важи $|y| \leq |x|$,

(3) За $p \geq 2$ и све $x, y, h, k \in H$ такве да је $|x|, |y| \neq 0$ важи

$$\begin{aligned} \langle u_{xx}(x, y)h, h \rangle + 2\langle u_{xy}(x, y)h, k \rangle + \langle u_{yy}(x, y)k, k \rangle \\ = -\alpha_p(A + B + C) \leq -\alpha_p(A + B), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где су A, B, C и α_p као у доказу леме 2.2.

(4) За $1 < p < \infty$ и све $x, y, h, k \in H$ такве да је $|x|, |y| \neq 0$ важи

$$\langle u_{xx}(x, y)h, h \rangle + 2\langle u_{xy}(x, y)h, k \rangle + \langle u_{yy}(x, y)k, k \rangle \leq -\alpha_p D, \quad (2.15)$$

где је α_p као у доказу леме 2.2 и $D = p^*(p-1)(|h|^2 - |k|^2)(|x| + |y|)^{p-2}$.

Доказ. Део (1) је већ доказан у теорему 2.1. Део (2) следи директно, пошто је $(p^* - 1) \geq 2 - 1 = 1$, па је $|y| - (p^* - 1)|x| \leq |y| - |x| \leq 0$, а остали чиниоци у $u(x, y)$ су ненегативни. Да бисмо показали (3), довољно је да уочимо да је лева страна једнакости 2.14 баш једнака $G''(0)$, где је $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дато са $G(t) = u(x + th, y + tk)$ (исто као у леми 2.2), из чега тражена једнакост директно следи. Што се тиче дела (4), на основу доказа леме 2.2 имамо да је $(p-1)G''(0) = \alpha_p(A' + B' + C')$. Једноставно се види да је $D = -\frac{1}{p-1}A'$, а како смо тамо показали да су B' и C' ненегативни, имамо тражену неједнакост. $\square$

Глава 3

Оцене норме методом Белманових функција

Резултати које смо обрадили у претходним главама представљају основу за главни проблем овог рада, а то је оцена норме Бјорлингове трансформације. У овој и наредној глави обрадићемо два различита приступа у његовом решавању. У корену оба је Биркхолдјева неједнакост, као и одговарајуће продужење функција. Оно што издваја први је техника Белманових функција, помоћу које ћемо показати кључне неједнакости у процени норме. Први део ове главе базиран је на раду [26], а други на [18].

3.1 Топлотно продужење

Дефиниција 3.1. Нека је $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ произвољна функција. Њено топлотно продужење је функција $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ дата са

$$\tilde{\varphi}(y, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dx.$$

Овако дефинисана функција $\tilde{\varphi}$ је заправо решење топлотне једначине

$$\begin{aligned} \Delta_y u(y, t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(y, t), \quad (y, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \\ u(y, 0) &= \varphi(y), \quad y \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Често ћемо користити ознаку $\varphi_t(y) = \tilde{\varphi}(y, t)$. Из дефиниције је јасно да топлотно продужење можемо представити и преко конволуције. Имамо да је

$\varphi_t = \varphi * h_t$, при чему функцију h_t називамо топлотним језгром и она је дата са

$$h_t(x) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Из оваквог преставаљања видимо да топлотно продужење можемо окарактерисати и преко Фуријеовог множиоца.

$$\begin{aligned} h_t^\wedge(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} h_t(\xi) e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{4t}} e^{-2\pi i (x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\xi_1^2}{4t} - 2\pi i x_1 \xi_1} d\xi_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\xi_2^2}{4t} - 2\pi i x_2 \xi_2} d\xi_2 \\ &= \frac{1}{4\pi t} e^{-4\pi^2 t x_1^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{\xi_1}{2\sqrt{t}} + 2\pi i t x_1\right)^2} d\xi_1 e^{-4\pi^2 t x_2^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{\xi_2}{2\sqrt{t}} + 2\pi i t x_2\right)^2} d\xi_2 \\ &= \frac{1}{4\pi t} e^{-4\pi^2 t |x|^2} (2\sqrt{t}\sqrt{\pi})(2\sqrt{t}\sqrt{\pi}) = e^{-4\pi^2 t |x|^2}. \end{aligned}$$

На основу претходног имамо да је Фуријеова трансформација топлотног продужења једнака

$$\varphi_t^\wedge(x) = h_t^\wedge(x) \varphi^\wedge(x) = e^{-4\pi^2 t |x|^2} \varphi^\wedge(x).$$

Наредна лема повезује Рисове трансформације и топлотна продужења и биће нам неопходна у даљем раду.

Лема 3.2. Нека су $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ и $i, j \in \{1, 2\}$ произвољни. Тада важи

$$\int_{\mathbb{R}^2} R_i R_j f(x) g(x) dx = -2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f_t}{\partial x_i}(y) \frac{\partial g_t}{\partial x_j}(y) dy dt. \quad (3.1)$$

Доказ. Прво ћемо применити Планшерелов идентитет на леву страну једнакости, при чему ћемо користити то да је $g^\vee(x) = g^\wedge(-x)$ и $(\bar{g})^\wedge = \overline{(g^\vee)}$. Уведимо функцију $h = g \circ (-id_{\mathbb{R}^2})$. Ово нам даје

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} R_i R_j f(x) g(x) dx &= \langle R_i R_j f, \bar{g} \rangle = \langle (R_i R_j f)^\wedge, \bar{g}^\wedge \rangle = \left\langle (R_i R_j f)^\wedge, \overline{(g^\vee)} \right\rangle \\ &= \left\langle (R_i R_j f)^\wedge, \overline{(h^\wedge)} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (R_i R_j f)^\wedge(\xi) h^\wedge(\xi) d\xi = - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\xi_i \xi_j}{\xi_1^2 + \xi_2^2} f^\wedge(\xi) h^\wedge(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Сада ћемо искористити једноставан идентитет $a \int_0^\infty e^{-at} dt = 1$. У нашем случају, $a = 8\pi^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)$, па добијамо

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\xi_i \xi_j}{\xi_1^2 + \xi_2^2} f^\wedge(\xi) h^\wedge(\xi) d\xi &= -8\pi^2 \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty \xi_i \xi_j e^{-8\pi^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)t} f^\wedge(\xi) h^\wedge(\xi) dt d\xi \\ &= 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} (2\pi i \xi_i f^\wedge(\xi)) e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} (2\pi i \xi_j h^\wedge(\xi)) e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} d\xi dt, \end{aligned}$$

при чему смо у последњем кораку заменили редослед интеграције применом Фубинијеве теореме (која је оправдана јер интеграл апсолутно конвергира (све подинтегралне функције су Шварцове)) и погодно груписали сабирке за следећи корак. Користећи да је $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi_i \varphi^\wedge(\xi)$, формулу за Фуријеову трансформацију топлотног језгра и Планшерелов идентитет, имамо

$$\begin{aligned} &2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} (2\pi i \xi_i f^\wedge(\xi)) e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} (2\pi i \xi_j h^\wedge(\xi)) e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} d\xi dt \\ &= 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^\wedge(\xi) e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} \left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)^\wedge(\xi) e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} d\xi dt \\ &= 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_t\right)^\wedge(\xi) \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)_t\right)^\wedge(\xi) d\xi dt \\ &= 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_t(\xi) \left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)_t(-\xi) d\xi dt. \end{aligned}$$

Једноставним рачуном можемо видети везу између топлотног продужења парцијалних извода функција g и h .

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)_t(-\xi) &= \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) e^{-\frac{|x+\xi|^2}{4t}} dx = -\frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial g}{\partial x_j}(-x) e^{-\frac{|x+\xi|^2}{4t}} dx \\ &= -\frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial g}{\partial x_j}(y) e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4t}} dy = -\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)_t(\xi), \end{aligned}$$

при чему смо у првом реду користили да је $\frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = -\frac{\partial g}{\partial x_j}(-x)$, а у другом смену променљиве $y = -x$. Да бисмо завршили доказ, потребно је да нађемо

везу између топлотног продужења парцијалног извода и парцијалног извода топлотног продужења. Са једне стране имамо

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_t (\xi) &= \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} dx \\
 &= \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_{i'}-\xi_{i'})^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e^{-\frac{(x_i-\xi_i)^2}{4t}} dx_i dx_{i'} \\
 &= \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_{i'}-\xi_{i'})^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{x_i - \xi_i}{2t} e^{-\frac{(x_i-\xi_i)^2}{4t}} dx_i dx_{i'} \\
 &= \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{x_i - \xi_i}{2t} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} dx,
 \end{aligned}$$

где смо у трећем реду користили парцијалну интеграцију, уз чињеницу да функција f има компактан носач. Додатно, са i' смо означили индекс различит од i . Са друге стране,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_t}{\partial x_i}(\xi) &= \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\mathbb{R}^2} f(y) e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4t}} dy = \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} f(y) \frac{\partial}{\partial x_i} e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4t}} dy \\
 &= \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} f(y) \frac{y_i - \xi_i}{2t} e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4t}} dy,
 \end{aligned}$$

где је замена интеграла и извода оправдана теоремом о доминантној конвергенцији, при чему је интегрална доминанта функција $y \mapsto \max f(x) e^{-\frac{|y-\xi|^2}{4t}}$. Из добијених једнакости имамо да је $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_t = \frac{\partial f_t}{\partial x_i}$, и аналогно за g . Комбинијући све претходне резултате, добијамо

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_t (\xi) \left(\frac{\partial h}{\partial x_j} \right)_t (-\xi) d\xi dt &= -2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_t (\xi) \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \right)_t (\xi) d\xi dt \\
 &= -2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f_t}{\partial x_i}(\xi) \frac{\partial g_t}{\partial x_j}(\xi) d\xi dt,
 \end{aligned}$$

што је и требало показати. $\square$

3.2 Оцена норме

У претходној секцији видели смо везу између Рисових трансформација и топлотног продужења. То је био први корак у процени L^p -норме Бјорлингове трансформације, с обзиром да је веза између ових оператора, описана у

теореме 1.29, основа многих метода, па и овог. Следећи кључни корак представља наредна теорема, у којој дајемо процену десне стране неједнакости у лема 3.2.

Теорема 3.3. Нека су $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ произвољне комплексно-вредносне функције, $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тада важи

$$2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial g_t}{\partial x_1} \right| dx dt + 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \right| \left| \frac{\partial g_t}{\partial x_2} \right| dx dt \leq (p^* - 1) \|f\|_p \|g\|_q. \quad (3.2)$$

Доказ ове теореме биће дат у секцији 3.4, али ћемо овде користити њен резултат да добијемо важне последице.

Из теореме 1.29 имамо везу $S = R_2^2 - R_1^2 + 2iR_1R_2$, па видимо да је наш циљ да проценимо L^p -норме оператора $R_1^2 - R_2^2$ и $2R_1R_2$. Пре него што пређемо на то, уочићемо једну везу између њих. Посматрајмо функцију $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ дату са $\rho(x, y) = \left(\frac{y+x}{\sqrt{2}}, \frac{y-x}{\sqrt{2}} \right)$. Ово је заправо ротација за угао $-\frac{\pi}{4}$ у равни. Дефинишимо оператор $U : L^p(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$ са $U(f) = f \circ \rho$.

Лема 3.4. Нека је $1 < p < \infty$. Важи $2R_1R_2 = U^{-1}(R_2^2 - R_1^2)U$ и $\|U\|_p = \|U^{-1}\|_p = 1$.

Доказ. Да бисмо показали прву једнакост довољно је да покажемо да за свако $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^2)$ важи $U(2R_1R_2\varphi) = (R_2^2 - R_1^2)U\varphi$. Ово ћемо показати применом Фуријеове трансформације на обе стране једнакости. За почетак, имамо

$$\begin{aligned} (U\varphi)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^2} (U\varphi)(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \left(\frac{x_2 + x_1}{\sqrt{2}}, \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}} \right) e^{-2\pi i (x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(y_1, y_2) e^{-2\pi i \left(x_1 \frac{\xi_2 + \xi_1}{\sqrt{2}} + x_2 \frac{\xi_2 - \xi_1}{\sqrt{2}} \right)} dx = \varphi^\wedge(\rho(\xi)) = (U\varphi^\wedge)(\xi). \end{aligned}$$

У преласку на други ред смо користили смену променљиве $y_1 = \frac{x_2 + x_1}{\sqrt{2}}$, $y_2 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}$, чији Јакобијан је 1. Сада, користећи теорему 1.11, добијамо

$$\begin{aligned} ((R_2^2 - R_1^2)(U\varphi))^\wedge(\xi) &= \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \varphi^\wedge(\rho(\xi)), \\ (U(2R_1R_2\varphi))^\wedge(\xi) &= 2(R_1R_2\varphi)^\wedge(\rho(\xi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \frac{\left(\frac{\xi_2 + \xi_1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{\xi_2 + \xi_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\sqrt{2}}\right)^2} \varphi^\wedge(\rho(\xi)) \\
 &= \frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \varphi^\wedge(\rho(\xi)).
 \end{aligned}$$

Како су Фуријеове трансформације од обе стране једнаке, важи тражена једнакост.

Што се тиче другог дела леме, за произвољно $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^2)$ је

$$\begin{aligned}
 \|U\varphi\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^2} |(U\varphi)(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \varphi\left(\frac{x_2 + x_1}{\sqrt{2}}, \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{2}}\right) \right|^p dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(y)|^p dy = \|\varphi\|_p^p.
 \end{aligned}$$

Овде смо користили исту смену као и пре. Дакле, U је изометрија, па је и U^{-1} изометрија и норме су им 1. $\square$

Последица 3.5. Нека је $1 < p < \infty$. За Рисове трансформације R_1 и R_2 у равни важи

$$\|R_1^2 - R_2^2\|_p \leq p^* - 1, \quad \|2R_1R_2\|_p \leq p^* - 1.$$

Доказ. Нека су $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ произвољне. На основу леме 3.2 за $i = j = 1$ и $i = j = 2$ имамо

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\mathbb{R}^2} (R_1^2 - R_2^2)f(x)g(x)dx \right| &= \left| 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \frac{\partial g_t}{\partial x_1} dx dt + 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \frac{\partial g_t}{\partial x_2} dx dt \right| \\
 &\leq 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial g_t}{\partial x_1} \right| dx dt + 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \right| \left| \frac{\partial g_t}{\partial x_2} \right| dx dt \leq (p^* - 1) \|f\|_p \|g\|_q,
 \end{aligned}$$

где смо у последњем кораку применили теорему 3.3. Ако посматрамо супремум по свим $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ од обе стране претходне неједнакости, добијамо

$$\|(R_1^2 - R_2^2)f\|_p \leq (p^* - 1) \|f\|_p,$$

из чега, посматрајући супремум по свим $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, имамо

$$\|R_1^2 - R_2^2\|_p \leq p^* - 1.$$

Што се друге неједнакости тиче, применимо лему 3.4. Тада је

$$\|2R_1R_2\|_p = \|U^{-1}(R_2^2 - R_1^2)U\|_p \leq \|U^{-1}\|_p \|R_2^2 - R_1^2\|_p \|U\|_p \leq p^* - 1,$$

што је и требало показати. $\square$

Када спојимо све досадашње резултате, добијамо оцену L^p -норме Бјорлингове трансформације.

Теорема 3.6. За $1 < p < \infty$ и Бјорлингову трансформацију S важи

$$\|S\|_p \leq 2(p^* - 1).$$

Доказ. Користећи теорему 1.29 и последицу 3.5, имамо

$$\|S\|_p = \|R_2^2 - R_1^2 + 2iR_1R_2\|_p \leq \|R_1^2 - R_2^2\|_p + \|2R_1R_2\|_p \leq 2(p^* - 1).$$

$\square$

3.3 Белманова функција

Сада ћемо се посветити доказу теореме 3.3. Као што смо поменули на почетку, он ће бити базиран на техници Белманових функција. Наредна теорема ће се бавити управо особинама и постојањем одговарајуће Белманове функције.

Теорема 3.7. Нека је $1 < p < \infty$ и q такво да важи $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Посматрајмо скуп

$$\Omega = \{(\xi, \eta, X, Y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |\xi|^p < X, |\eta|^q < Y\}.$$

Постоји функција $B : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ тако да важи:

$$0 \leq B(\xi, \eta, X, Y) \leq (p^* - 1)X^{\frac{1}{p}}Y^{\frac{1}{q}}, \quad \text{за све } (\xi, \eta, X, Y) \in \Omega, \quad (3.3)$$

$$B\left(\frac{a_+ + a_-}{2}\right) - \frac{B(a_+) + B(a_-)}{2} \geq \left|\frac{\xi_+ - \xi_-}{2}\right| \left|\frac{\eta_+ - \eta_-}{2}\right|,$$

$$\text{за све } a_{\pm} = (\xi_{\pm}, \eta_{\pm}, X_{\pm}, Y_{\pm}) \in \overline{\Omega}. \quad (3.4)$$

Нека је сада $K \subset \Omega$ компактан и $0 < \varepsilon < \min(1, d(K, \partial\Omega))$. Дефинишимо скуп $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Тада постоји глатка функција $B_{K,\varepsilon} : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ и константа $C > 0$ тако да важи:

$$0 \leq B_{K,\varepsilon}(\xi, \eta, X, Y) \leq (1 + C\varepsilon)(p^* - 1)X^{\frac{1}{p}}Y^{\frac{1}{q}}, \quad \text{за све } (\xi, \eta, X, Y) \in \Omega_\varepsilon, \quad (3.5)$$

$$-d^2 B_{K,\varepsilon}(\xi, \eta, X, Y) \geq 2|d\xi||d\eta|, \quad \text{за све } (\xi, \eta, X, Y) \in \Omega_\varepsilon. \quad (3.6)$$

Напомена. Неједнакост 3.6 заправо каже да за произвољне $(\xi, \eta, X, Y) \in \Omega_\varepsilon$ и $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ($a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$) важи

$$\langle -d^2 B_{K,\varepsilon}(\xi, \eta, X, Y)(a, b, c, d)^T, (a, b, c, d)^T \rangle_{\mathbb{R}^6} \geq 2|a||b| = 2\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Пре него што кренемо са доказом ове теореме, увешћемо неке појмове који су нам неопходни за даљи рад.

Дефиниција 3.8. Нека је $I \subset \mathbb{R}$ интервал. Функција $h_I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, дата са

$$h_I = \frac{\chi_{I_+} - \chi_{I_-}}{\sqrt{m(I)}},$$

где су I_- и I_+ редом лева и десна половина интервала I , а m Лебегова мера на $\mathbb{R}$, назива се Хаарова¹ функција интервала I .

Означимо са $\mathcal{D}$ скуп свих диадских интервала на $\mathbb{R}$ (интервали облика $(\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n})$, где је $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}_0$).

Дефиниција 3.9. Нека је $1 < p < \infty$ и $J \in \mathcal{D}$. Дефинишимо скуп свих диадских подинтервала од J са $\mathcal{D}_J = \{I \in \mathcal{D} : I \subset J\}$. Нека је $\sigma = \{\sigma_I \in \mathbb{C} : I \in \mathcal{D}_J, |\sigma_I| = 1\}$. Оператор $T_\sigma : L^p(J) \rightarrow L^p(J)$, дат са

$$T_\sigma f = \sum_{I \in \mathcal{D}_J} \sigma_I \langle f, h_I \rangle h_I,$$

где је $\langle f, g \rangle = \int_J f(x) \overline{g(x)} dx$, називамо мартингалском трансформацијом.

Наредни став ће нам бити потребан за доказивање теореме 3.7. Његов доказ базиран је на Биркхолдеровој неједнакости 2.1. Користићемо ознаку $\langle f \rangle_I = \frac{1}{m(I)} \int_I f(x) dx$.

¹Alfréd Haar, 1885 - 1933, мађарски математичар

Став 3.10. Нека је $J \in \mathcal{D}$ произвољан, $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тада за све $f \in L^p(J)$ и $g \in L^q(J)$ важи

$$\frac{1}{4m(J)} \sum_{I \in \mathcal{D}_J} m(I) |\langle f \rangle_{I_+} - \langle f \rangle_{I_-}| |\langle g \rangle_{I_+} - \langle g \rangle_{I_-}| \leq (p^* - 1) \langle |f|^p \rangle_J^{\frac{1}{p}} \langle |g|^q \rangle_J^{\frac{1}{q}}. \quad (3.7)$$

Доказ. Без умањења општости, нека је $m(J) = 1$. Посматраћемо Хилбертов простор $H = \mathbb{C}$ и простор вероватноћа $(J, \mathcal{F}, m)$, где је m Лебегова мера, а $\mathcal{F}$ σ -алгебра генерисана скупом $\mathcal{D}_J$. Нека је $\mathcal{F}_n$ σ -алгебра генерисана елементима скупа $\mathcal{D}_J$ чија је мера бар 2^{-n} . Јасно је да је низ $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ растући низ подалгебри од $\mathcal{F}$. Нека је σ као у дефиницији 3.9. За произвољно $\omega \in J$ и $n \in \mathbb{N}_0$ дефинишимо

$$Y_n(\omega) = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}_J \\ m(I) > 2^{-n}}} \langle f, h_I \rangle h_I(\omega),$$

$$X_n(\omega) = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}_J \\ m(I) > 2^{-n}}} \sigma_I \langle f, h_I \rangle h_I(\omega).$$

Једноставно се види да су $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ мартингали у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n\}$. Наиме, за $m \leq n$, имамо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_m) &= \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}_J \\ m(I) > 2^{-n}}} \sigma_I \langle f, h_I \rangle \mathbb{E}(h_I | \mathcal{F}_m) \\ &= \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}_J \\ m(I) > 2^{-m}}} \sigma_I \langle f, h_I \rangle h_I + \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}_J \\ 2^{-m} \geq m(I) > 2^{-n}}} \sigma_I \langle f, h_I \rangle \mathbb{E}(h_I) \\ &= \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}_J \\ m(I) > 2^{-m}}} \sigma_I \langle f, h_I \rangle h_I = X_m. \end{aligned}$$

Користили смо то да је h_I мерљива у односу на σ -алгебру $\mathcal{F}_m$ за $m(I) > 2^{-m}$, јер тада $I_+, I_- \in \mathcal{F}_m$. Поред тога, за $m(I) \leq 2^{-m}$ из истих разлога имамо да је h_I независна у односу на $\mathcal{F}_m$, па је $\mathbb{E}(h_I | \mathcal{F}_m) = \mathbb{E}(h_I) = 0$. Потпуно аналогно се показује и да је $\{Y_n\}$ мартингал.

Једноставно видимо да је $X_0 = Y_0 = 0$. За $n \in \mathbb{N}$ имамо

$$Y_n - Y_{n-1} = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}_J \\ m(I) = 2^{-n+1}}} \langle f, h_I \rangle h_I,$$

$$X_n - X_{n-1} = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}_J \\ m(I) = 2^{-n+1}}} \sigma_I \langle f, h_I \rangle h_I.$$

Како су сви диадски интервали који имају исту меру дисјунктни, имамо да за произвољно $\omega \in J$ постоји тачно један интервал I_0 мере 2^{-n+1} тако да $\omega \in I_0$. Сада је

$$\begin{aligned} |(X_n - X_{n-1})(\omega)| &= \left| \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}_J \\ m(I)=2^{-n+1}}} \sigma_I \langle f, h_I \rangle h_I(\omega) \right| = |\sigma_{I_0} \langle f, h_{I_0} \rangle h_{I_0}(\omega)| \\ &\leq |\langle f, h_{I_0} \rangle h_{I_0}(\omega)| = \left| \sum_{\substack{I \in \mathcal{D}_J \\ m(I)=2^{-n+1}}} \langle f, h_I \rangle h_I(\omega) \right| = |(Y_n - Y_{n-1})(\omega)|, \end{aligned}$$

па су испуњени услови теореме 2.1 и за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\|X_n\|_p \leq (p^* - 1) \|Y_n\|_p.$$

Како Хаарове функције чине ортонормирану базу простора $L^p(J)$, имамо да $X_n \rightarrow T_\sigma f$ и $Y_n \rightarrow f$ у L^p -норми, кад $n \rightarrow \infty$. Због тога је $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n\|_p = \|T_\sigma f\|_p$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Y_n\|_p = \|f\|_p$, па применом граничне вредности претходна неједнакост постаје

$$\|T_\sigma f\|_p \leq (p^* - 1) \|f\|_p.$$

Она је еквивалентна са тим да за произвољно $g \in L^q(J)$ важи

$$|\langle T_\sigma f, g \rangle| \leq (p^* - 1) \|f\|_p \|g\|_q.$$

Ако ово распишемо користећи дефиницију мартингалске трансформације и $\langle \cdot \rangle_J$, имамо

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m(J)} \left| \sum_{I \in \mathcal{D}_J} \sigma_I \langle f, h_I \rangle \overline{\langle g, h_I \rangle} \right| \\ &\leq (p^* - 1) \frac{1}{m(J)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_J |f|^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{m(J)^{\frac{1}{q}}} \left(\int_J |g|^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (p^* - 1) \langle |f|^p \rangle_J^{\frac{1}{p}} \langle |g|^q \rangle_J^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Приметимо да бројеве σ_I можемо изабрати тако да за све $I_1, I_2 \in \mathcal{D}_J$ важи

$$\arg \left(\sigma_{I_1} \langle f, h_{I_1} \rangle \overline{\langle g, h_{I_1} \rangle} \right) = \arg \left(\sigma_{I_2} \langle f, h_{I_2} \rangle \overline{\langle g, h_{I_2} \rangle} \right).$$

У том случају, у неједнакости троугла примењеној на леву страну претходне неједнакости важи једнакост, па је

$$\begin{aligned} \frac{1}{m(J)} \left| \sum_{I \in \mathcal{D}_J} \sigma_I \langle f, h_I \rangle \overline{\langle g, h_I \rangle} \right| &= \frac{1}{m(J)} \sum_{I \in \mathcal{D}_J} \left| \sigma_I \langle f, h_I \rangle \overline{\langle g, h_I \rangle} \right| \\ &= \frac{1}{m(J)} \sum_{I \in \mathcal{D}_J} |\langle f, h_I \rangle| |\langle g, h_I \rangle|. \end{aligned}$$

За крај, уочимо да је

$$\begin{aligned} \langle f, h_I \rangle &= \int_J f(x) \overline{h_I(x)} dx = \int_J f(x) \frac{\chi_{I_+}(x) - \chi_{I_-}(x)}{\sqrt{m(I)}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{m(I)}} \left(\int_{I_+} f(x) dx - \int_{I_-} f(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{m(I)}} (m(I_+) \langle f \rangle_{I_+} - m(I_-) \langle f \rangle_{I_-}) \\ &= \frac{\sqrt{m(I)}}{2} (\langle f \rangle_{I_+} - \langle f \rangle_{I_-}), \end{aligned}$$

и аналогно за g . Када то заменимо у претходно добијене резултате, имамо

$$\begin{aligned} (p^* - 1) \langle |f|^p \rangle_J^{\frac{1}{p}} \langle |g|^q \rangle_J^{\frac{1}{q}} &\geq \frac{1}{m(J)} \left| \sum_{I \in \mathcal{D}_J} \sigma_I \langle f, h_I \rangle \overline{\langle g, h_I \rangle} \right| = \frac{1}{m(J)} \sum_{I \in \mathcal{D}_J} |\langle f, h_I \rangle| |\langle g, h_I \rangle| \\ &= \frac{1}{m(J)} \sum_{I \in \mathcal{D}_J} \frac{\sqrt{m(I)}}{2} |\langle f \rangle_{I_+} - \langle f \rangle_{I_-}| \frac{\sqrt{m(I)}}{2} |\langle g \rangle_{I_+} - \langle g \rangle_{I_-}| \\ &= \frac{1}{4m(J)} \sum_{I \in \mathcal{D}_J} m(I) |\langle f \rangle_{I_+} - \langle f \rangle_{I_-}| |\langle g \rangle_{I_+} - \langle g \rangle_{I_-}|, \end{aligned}$$

што је и требало показати. $\square$

Доказ теореме 3.7. Нека су $(\xi, \eta, X, Y) \in \overline{\Omega}$ и $J \in \mathcal{D}$ произвољни. Дефини- шимо функцију $B : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$B(\xi, \eta, X, Y) = \sup \frac{1}{4m(J)} \sum_{I \in \mathcal{D}_J} m(I) |\langle f \rangle_{I_+} - \langle f \rangle_{I_-}| |\langle g \rangle_{I_+} - \langle g \rangle_{I_-}|,$$

при чему супремум посматрамо по скупу свих интеграбилних функција $f, g \in L^p(J)$ за које важи $\langle f \rangle_J = \xi$, $\langle g \rangle_J = \eta$, $\langle |f|^p \rangle_J = X$ и $\langle |g|^q \rangle_J = Y$. Прво ћемо показати да је овај скуп непразан, и то тако што ћемо за дате ξ и X конструисати интеграбилну функцију $f \in L^p(J)$ за коју важи да је $\langle f \rangle_J = \xi$ и

$\langle |f|^p \rangle_J = X$. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $J = (0, 1)$, јер у супротном овако конструисану функцију можемо само транслирати и рескалирати на тражени интервал. Други услов ће важити за функцију за коју је $|f(t)| = X^{\frac{1}{p}}$ за свако $t \in J$ (ово је добро дефинисано јер је $X \geq 0$ за $(\xi, \eta, X, Y) \in \overline{\Omega}$). Нека је $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$. Како је $(\xi, \eta, X, Y) \in \overline{\Omega}$, важи $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = |\xi| \leq X^{\frac{1}{p}}$. Зато, узмимо да је $x_1 = |\xi_1|$ и $x_2 = \sqrt{X^{\frac{2}{p}} - \xi_1^2}$. За овако дефинисан комплексан број $a = x_1 + ix_2$ важи $|a| = X^{\frac{1}{p}}$, $x_1 \geq |\xi_1|$ и $x_2 \geq |\xi_2|$. Да би био задовољен услов $\langle f \rangle_J = \xi$, треба да буде $\operatorname{Re} \langle f \rangle_J = \xi_1$ и $\operatorname{Im} \langle f \rangle_J = \xi_2$. Наша идеја је да тражимо бројеве $y_1, y_2 \in [0, 1]$ тако да се у тим тачкама мења вредност функције f , и то тако да у y_1 реални део промени знак, а у y_2 имагинарни део промени знак. Дакле, треба да буде задовољено

$$\begin{aligned} -x_1 y_1 + (1 - y_1) x_1 &= \xi_1, \\ -x_2 y_2 + (1 - y_2) x_2 &= \xi_2. \end{aligned}$$

Решење претходног система једначина, у случају да су $x_1, x_2 \neq 0$ (ако је неки једнак нули, нема потребе да тражимо одговарајуће y), је

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1 - \xi_1}{2\xi_1}, \\ y_2 &= \frac{x_2 - \xi_2}{2\xi_2}. \end{aligned}$$

Из услова $x_1 \geq |\xi_1|$ и $x_2 \geq |\xi_2|$ јасно је да $y_1, y_2 \in [0, 1]$. Такође, за $\xi_1 > 0$ је $y_1 = 0$, а за $\xi_1 < 0$ је $y_1 = 1$. Претпоставимо да је $\xi_1 > 0$. Тада функција f , дата са

$$f(t) = \begin{cases} x_1 - ix_2 & , t \in (0, y_2), \\ x_1 + ix_2 & , t \in [y_2, 1), \end{cases}$$

задовољава тражене услове.

Да би B била добро дефинисана треба да покажемо и да је она независна од избора диадског интервала J , односно да супремум из дефиниције не зависи од J . То ћемо урадити тако што ћемо за сваку функцију на интервалу J_1 , наћи одговарајућу функцију на интервалу J_2 тако да је вредност под супремумом за обе једнака. Овај проблем можемо поједноставити са неколико запажања. Уколико су мере интервала J_1 и J_2 једнаке, функцију на J_2 добијемо једноставном транслацијом функције са J_1 . Зато ћемо посматрати само

оне интервале којима је леви крај у 0. Специјално, показаћемо да је супремум исти у случају да је $J_1 = (0, 1)$ и $J_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, из чега остали случајеви иду индуктивно. Нека је $f_1 \in L^p((0, 1))$ таква да важи $\langle f_1 \rangle_{(0,1)} = \xi$ и $\langle |f_1|^p \rangle_{(0,1)} = X$. Дефинишимо функцију $f_2 : \left(0, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ са $f_2(t) = f_1(2t)$. Имамо да је

$$\begin{aligned}\langle f_2 \rangle_{(0, \frac{1}{2})} &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f_2(t) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f_1(2t) dt = \int_0^1 f_1(s) ds = \langle f_1 \rangle_{(0,1)} = \xi, \\ \langle |f_2|^p \rangle_{(0, \frac{1}{2})} &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} |f_2|^p(t) dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} |f_1|^p(2t) dt = \int_0^1 |f_1(s)|^p ds = \langle |f_1|^p \rangle_{(0,1)} = X,\end{aligned}$$

па је и функција f_2 једна по којој се посматра супремум за интервал $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Са друге стране, за произвољан $I_1 \in \mathcal{D}_{(0, \frac{1}{2})}$ уочимо одговарајући $I_2 = 2I_1 \in \mathcal{D}_{(0,1)}$. Тада је

$$\begin{aligned}\left| \langle f_2 \rangle_{I_{2+}} - \langle f_2 \rangle_{I_{2-}} \right| &= \left| \frac{1}{m(I_{2+})} \int_{I_{2+}} f_2(t) dt - \frac{1}{m(I_{2-})} \int_{I_{2-}} f_2(t) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{m(I_{2+})} \int_{I_{2+}} f_1(2t) dt - \frac{1}{m(I_{2-})} \int_{I_{2-}} f_1(2t) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{m(I_{1+})} \int_{I_{1+}} f_1(s) ds - \frac{1}{m(I_{1-})} \int_{I_{1-}} f_1(s) ds \right| \\ &= \left| \langle f_1 \rangle_{I_{1+}} - \langle f_1 \rangle_{I_{1-}} \right|.\end{aligned}$$

Посматрајмо сада функције f_1 , f_2 , g_1 и g_2 , дефинисане као што је описано. Користећи резултате од пре, добијамо

$$\begin{aligned}& \frac{1}{4m((0, 1))} \sum_{I_1 \in \mathcal{D}_{(0,1)}} m(I_1) \left| \langle f_1 \rangle_{I_{1+}} - \langle f_1 \rangle_{I_{1-}} \right| \left| \langle g_1 \rangle_{I_{1+}} - \langle g_1 \rangle_{I_{1-}} \right| \\ &= \frac{1}{4m((0, 1))} \sum_{I_2 \in \mathcal{D}_{(0, \frac{1}{2})}} 2m(I_2) \left| \langle f_2 \rangle_{I_{2+}} - \langle f_2 \rangle_{I_{2-}} \right| \left| \langle g_2 \rangle_{I_{2+}} - \langle g_2 \rangle_{I_{2-}} \right| \\ &= \frac{1}{4m\left((0, \frac{1}{2})\right)} \sum_{I_2 \in \mathcal{D}_{(0, \frac{1}{2})}} m(I_2) \left| \langle f_2 \rangle_{I_{2+}} - \langle f_2 \rangle_{I_{2-}} \right| \left| \langle g_2 \rangle_{I_{2+}} - \langle g_2 \rangle_{I_{2-}} \right|.\end{aligned}$$

Како смо показали да за сваку f_1 постоји одговарајућа f_2 , а аналогно се показује и обрнуто, видимо да су супремуми од обе стране једнаки. Дакле, функција B је добро дефинисана.

Нека су сада $a_{\pm} = (\xi_{\pm}, \eta_{\pm}, X_{\pm}, Y_{\pm}) \in \bar{\Omega}$ и $J \in \mathcal{D}$. Посматрајмо произвољне функције $f_{\pm} \in L^p(J_{\pm})$ и $g_{\pm} \in L^q(J_{\pm})$ за које важи $\langle f_{\pm} \rangle_{J_{\pm}} = \xi_{\pm}$, $\langle |f_{\pm}|^p \rangle_{J_{\pm}} = X_{\pm}$, $\langle g_{\pm} \rangle_{J_{\pm}} = \eta_{\pm}$ и $\langle |g_{\pm}|^q \rangle_{J_{\pm}} = Y_{\pm}$. Дефинишимо $a = \frac{a_+ + a_-}{2} = (\xi, \eta, X, Y)$. Како су $p, q > 1$, из конвексности функција $x \mapsto x^p$ и $x \mapsto x^q$ на $[0, \infty)$ имамо

$$\begin{aligned} \left| \frac{\xi_+ + \xi_-}{2} \right|^p &\leq \frac{|\xi_+|^p + |\xi_-|^p}{2} \leq \frac{X_+ + X_-}{2}, \\ \left| \frac{\eta_+ + \eta_-}{2} \right|^q &\leq \frac{|\eta_+|^q + |\eta_-|^q}{2} \leq \frac{Y_+ + Y_-}{2}, \end{aligned}$$

па је и $a \in \bar{\Omega}$. Дефинишимо и функције $f \in L^p(J)$ и $g \in L^q(J)$ са $f = f_+ \chi_{J_+} + f_- \chi_{J_-}$, односно $g = g_+ \chi_{J_+} + g_- \chi_{J_-}$. За њих важи

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_J &= \frac{1}{m(J)} \int_J f(t) dt = \frac{1}{m(J)} \int_J f_+(t) \chi_{J_+}(t) + f_-(t) \chi_{J_-}(t) dt \\ &= \frac{1}{2m(J_+)} \int_{J_+} f_+(t) dt + \frac{1}{2m(J_-)} \int_{J_-} f_-(t) dt \\ &= \frac{\langle f_+ \rangle_{J_+} + \langle f_- \rangle_{J_-}}{2} = \frac{\xi_+ + \xi_-}{2} = \xi, \\ \langle |f|^p \rangle_J &= \frac{1}{m(J)} \int_J |f(t)|^p dt = \frac{1}{m(J)} \int_J |f_+(t)|^p \chi_{J_+}(t) + |f_-(t)|^p \chi_{J_-}(t) dt \\ &= \frac{1}{2m(J_+)} \int_{J_+} |f_+(t)|^p dt + \frac{1}{2m(J_-)} \int_{J_-} |f_-(t)|^p dt \\ &= \frac{\langle |f_+|^p \rangle_{J_+} + \langle |f_-|^p \rangle_{J_-}}{2} = \frac{X_+ + X_-}{2} = X. \end{aligned}$$

Аналогне формуле се добијају и за g . Поред тога, за $I \in \mathcal{D}_{J_{\pm}}$ је

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_I &= \frac{1}{m(I)} \int_I f(t) dt = \frac{1}{m(I)} \int_I f_+(t) \chi_{J_+}(t) + f_-(t) \chi_{J_-}(t) dt \\ &= \frac{1}{m(I)} \int_I f_{\pm}(t) dt = \langle f_{\pm} \rangle_I, \end{aligned}$$

и аналогно за g . Користећи ове резултате, имамо

$$B(a) \geq \frac{1}{4m(J)} \sum_{I \in \mathcal{D}_J} m(I) |\langle f \rangle_{I_+} - \langle f \rangle_{I_-}| |\langle g \rangle_{I_+} - \langle g \rangle_{I_-}|$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4m(J)} \left(\sum_{I \in \mathcal{D}_{J_+}} + \sum_{I \in \mathcal{D}_{J_-}} \right) (m(I) |\langle f \rangle_{I_+} - \langle f \rangle_{I_-}| |\langle g \rangle_{I_+} - \langle g \rangle_{I_-}|) \\
 &+ \frac{1}{4m(J)} m(J) |\langle f \rangle_{J_+} - \langle f \rangle_{J_-}| |\langle g \rangle_{J_+} - \langle g \rangle_{J_-}| \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{4m(J_+)} \sum_{I \in \mathcal{D}_{J_+}} m(I) |\langle f_+ \rangle_{I_+} - \langle f_+ \rangle_{I_-}| |\langle g_+ \rangle_{I_+} - \langle g_+ \rangle_{I_-}| \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{1}{4m(J_-)} \sum_{I \in \mathcal{D}_{J_-}} m(I) |\langle f_- \rangle_{I_+} - \langle f_- \rangle_{I_-}| |\langle g_- \rangle_{I_+} - \langle g_- \rangle_{I_-}| \\
 &+ \frac{1}{4} |\xi_+ - \xi_-| |\eta_+ - \eta_-|.
 \end{aligned}$$

На претходно добијени израз применимо супремум прво по свим функцијама које имају особине као f_+ и g_+ , а затим по свим облика f_- и g_- . Како смо показали да функција B не зависи од интервала на ком се посматра, добијамо

$$B(a) \geq \frac{B(a_+) + B(a_-)}{2} + \frac{|\xi_+ - \xi_-|}{2} \frac{|\eta_+ - \eta_-|}{2},$$

чиме смо показали неједнакост 3.4. Неједнакост 3.3 следи директно из конструкције функције B и става 3.10.

Покажимо сада други део теореме. Нека је $K \subset \Omega$ произвољан компактан скуп и $0 < \varepsilon < \min(1, d(K, \partial\Omega))$. Посматрајмо неку ненегативну глатку функцију $\nu : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ садржану у јединичној лопти, тако да важи $\int_{\mathbb{R}^6} \nu(x) dx = 1$.

Уведимо и ν_ε са $\nu_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^6} \nu\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Једноставно се види да је и она глатка, садржана у лопти $B(0, \varepsilon)$ и да важи $\int_{\mathbb{R}^6} \nu_\varepsilon(x) dx = 1$. Функцију $B_{K, \varepsilon}$ дефинишимо са $B_{K, \varepsilon} = B * \nu_\varepsilon$. Јасно је да је она глатка на $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

Неједнакост 3.5 једноставно важи. $B_{K, \varepsilon}$ је ненегативна као конволуција две такве функције. Да бисмо нашли горње ограничење, посматрајмо произвољно $a = (\xi, \eta, X, Y) \in \Omega_\varepsilon$. Применом неједнакости 3.3 имамо

$$\begin{aligned}
 B_{K, \varepsilon}(a) &= \int_{B(0, \varepsilon)} B(a - b) \nu_\varepsilon(b) db = \int_{B(0, \varepsilon)} B(a - b) \frac{1}{\varepsilon^6} \nu\left(\frac{b}{\varepsilon}\right) db \\
 &= \int_{B(0, 1)} B(a - \varepsilon t) \nu(t) dt \leq (p^* - 1) \int_{B(0, 1)} (X - \varepsilon t_5)^{\frac{1}{p}} (Y - \varepsilon t_6)^{\frac{1}{q}} \nu(t) dt.
 \end{aligned}$$

Како су X и Y позитивни, за свако $t \in B(0, 1)$, на основу Јангове² неједнако-

²William Henry Young, 1863 - 1942, енглески математичар

сти, важи

$$\begin{aligned} (X - \varepsilon t_5)^{\frac{1}{p}}(Y - \varepsilon t_6)^{\frac{1}{q}} &\leq (X + \varepsilon)^{\frac{1}{p}}(Y + \varepsilon)^{\frac{1}{q}} = X^{\frac{1}{p}}Y^{\frac{1}{q}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{X}\right)^{\frac{1}{p}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{Y}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq X^{\frac{1}{p}}Y^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1 + \frac{\varepsilon}{X}}{p} + \frac{1 + \frac{\varepsilon}{Y}}{q}\right) \leq X^{\frac{1}{p}}Y^{\frac{1}{q}} \left(1 + \varepsilon \left(\frac{1}{pX} + \frac{1}{qY}\right)\right) \leq X^{\frac{1}{p}}Y^{\frac{1}{q}}(1 + C\varepsilon), \end{aligned}$$

за неко $C > 0$, па заменом овога у претходну неједнакост, користећи особине функције ν , добијамо 3.5.

Приметимо да за функцију $B_{K,\varepsilon}$ такође важи неједнакост 3.4 на Ω_ε .

$$\begin{aligned} &B_{K,\varepsilon} \left(\frac{a_+ + a_-}{2} \right) - \frac{B_{K,\varepsilon}(a_+) + B_{K,\varepsilon}(a_-)}{2} \\ &= \int_{B(0,\varepsilon)} \nu_\varepsilon(z) \left(B \left(\frac{a_+ + a_-}{2} - z \right) - \frac{B(a_+ - z) + B(a_- - z)}{2} \right) dz \\ &\geq \int_{B(0,\varepsilon)} \nu_\varepsilon(z) \left| \frac{(\xi_+ - z_1) - (\xi_- - z_1)}{2} \right| \left| \frac{(\eta_+ - z_2) - (\eta_- - z_2)}{2} \right| dz \\ &= \int_{B(0,\varepsilon)} \nu_\varepsilon(z) \left| \frac{\xi_+ - \xi_-}{2} \right| \left| \frac{\eta_+ - \eta_-}{2} \right| dz = \left| \frac{\xi_+ - \xi_-}{2} \right| \left| \frac{\eta_+ - \eta_-}{2} \right|, \end{aligned}$$

где смо користили ознаку $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Покажимо да, применом Тејлорове³ формуле за функцију $B_{K,\varepsilon}$ у претходној неједнакости, добијамо 3.6. Нека је $v = \frac{a_+ - a_-}{2}$. Тада важи

$$\begin{aligned} &B_{K,\varepsilon}(a) - \frac{B_{K,\varepsilon}(a + v) + B_{K,\varepsilon}(a - v)}{2} \\ &= B_{K,\varepsilon}(a) - \frac{B_{K,\varepsilon}(a) + \langle \nabla B_{K,\varepsilon}(a), v \rangle + \frac{1}{2} \langle d^2 B_{K,\varepsilon}(a) v, v \rangle}{2} \\ &\quad - \frac{B_{K,\varepsilon}(a) - \langle \nabla B_{K,\varepsilon}(a), v \rangle + \frac{1}{2} \langle d^2 B_{K,\varepsilon}(a) v, v \rangle}{2} + o(|v|^3) \\ &= -\frac{1}{2} \langle d^2 B_{K,\varepsilon}(a) v, v \rangle + o(|v|^3). \end{aligned}$$

Директном заменом претходне једнакости у неједнакост 3.4 за функцију $B_{K,\varepsilon}$, добијамо 3.6. $\square$

У општем случају не можемо наћи експлицитан алгебарски израз за ову Белманову функцију. Један од изузетака је случај $p = 2$, где једноставно можемо проверити да $B(\xi, \eta, X, Y) = \sqrt{(X - |\xi|^2)(Y - |\eta|^2)}$ испуњава услове теореме 3.7. Неке примере одговарајућих функција за случај $p \neq 2$ можете видети у раду [11].

³Brook Taylor, 1685 - 1731, енглески математичар

3.4 Доказ теореме 3.3

Фиксирајмо две произвољне функције $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. За $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ дефинишимо

$$v(x, t) = (f(x, t), g(x, t), |f|^p(x, t), |g|^q(x, t)),$$

при чему су компоненте функције v заправо топлотна продужења функција f , g , $|f|^p$ и $|g|^q$, редом. Приметимо да $v(x, t) \in \Omega$ за свако $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$, где је Ω дефинисано у теорему 3.7. Ово можемо видети директном применом Хелдереове неједнакости:

$$\begin{aligned} |f(x, t)|^p &= \left| \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \right|^p \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(y) \left(\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \right)^{\frac{1}{q}} dy \right|^p \\ &\leq \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} |f(y)|^p e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \right)^{\frac{p}{q}} = |f|^p(x, t). \end{aligned}$$

Да би важила једнакост, неопходно је да $|f(y)|^p \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ и $\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ буду линеарно зависни. Како је један компактно садржан а други није, то није могуће, па је неједнакост строга. Аналогно се показује и да је $|g(x, t)|^q < |g|^q(x, t)$, што повлачи $v(x, t) \in \Omega$.

Нека је $l > 1$ фиксирано. Посматрајмо цилиндар $Q = Q_l = B(0, l) \times (0, l) \subset \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ и означимо његов омотач са $\partial'Q = \partial B(0, l) \times (0, l)$. Дефинишимо на њему Гринову функцију G_Q , тако да задовољава следећа својства:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta \right) G_Q &= -\delta_{(0,1)} \quad \text{на } Q, \\ G_Q &= 0 \quad \text{на } \partial'Q, \\ G_Q &= 0 \quad \text{на } \overline{B(0, l)} \times l, \end{aligned}$$

где је $\delta_{(0,1)}$ Диракова⁴ дистрибуција у тачки $(0, 1)$. Лапласијан који посматрамо је само по прве две променљиве (аналогно важи и за остале у овој секцији).

⁴Paul Dirac, 1902 - 1984, енглески физичар

За $R > 0$, са Q_R означимо цилиндар $Q(R, R^2) = B(0, lR) \times (0, lR^2)$. Као и пре, користимо ознаку $\partial' Q_R = \partial B(0, lR) \times (0, lR^2)$. Аналогно уводимо и Гринову функцију G_Q^R на Q_R :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta \right) G_Q^R &= -\delta_{(0, R^2)} \quad \text{на } Q_R, \\ G_Q^R &= 0 \quad \text{на } \partial' Q_R, \\ G_Q^R &= 0 \quad \text{на } \overline{B(0, lR)} \times lR^2. \end{aligned}$$

Користићемо и ознаку $Q_{R,\delta} = Q_R \cap \{t > \delta\}$, где је $0 < \delta < 1$.

Ове две Гринове функције су повезане. Наиме, за свако $(x, t) \in Q_R$ важи

$$G_Q^R(x, t) = \frac{1}{R^2} G_Q \left(\frac{x}{R}, \frac{t}{R^2} \right). \quad (3.8)$$

Ово ћемо показати тако што ћемо проверити да функција задата као десна страна претходне једнакости испуњава услове Гринове функције на Q_R . Граничне једнакости директно следе, тако да ћемо проверити само први услов. За произвољну функцију $\varphi \in C_0^\infty(Q_R)$ имамо

$$\begin{aligned} & \int_{Q_R} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta \right) \left(\frac{1}{R^2} G_Q \left(\frac{x}{R}, \frac{t}{R^2} \right) \right) \varphi(x, t) dx dt \\ &= \frac{1}{R^2} \int_{Q_R} \frac{1}{R^2} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta \right) G_Q \right) \left(\frac{x}{R}, \frac{t}{R^2} \right) \varphi(x, t) dx dt \\ &= \frac{1}{R^4} \int_Q R^4 \left(\left(\frac{\partial}{\partial s} + \Delta \right) G_Q \right) (y, s) \varphi(Ry, R^2 s) dy ds = \varphi(0, R^2). \end{aligned}$$

Прво смо применили формулу за извод композиције функција више променљивих, а потом смену променљиве $(x, t) = (Ry, R^2 s)$, која скуп Q_R слика у Q , а има Јакобијан једнак R^4 . Последња једнакост је директна последица особина функције G_Q . Више о Гриновим функцијама које овде користимо можете наћи у [20].

Посматрајмо сада произвољан компактан скуп $M \subset \mathbb{R}^2 \times (\delta, \infty)$. Јасно је да постоје $R > 0$ и $l > 0$ тако да је $M \subset Q_{R,\delta}$. Како су f и g непрекидне, таква је и функција v , па је и $K = v(\overline{Q_{R,\delta}})$ компактан у Ω . Самим тим, постоји и $0 < \varepsilon < \min \left(1, \frac{1}{R}, d(K, \partial\Omega) \right)$ тако да важи $K \subset \Omega_\varepsilon$, где је $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Уведимо и скуп $U = v^{-1}(\Omega_\varepsilon)$. Тада је добро дефинисана

функција $b = B_{K,\varepsilon} \circ v : U \rightarrow [0, \infty)$, где је $B_{K,\varepsilon}$ Белманова функција из теореме 3.7. Овако задата b даће нам везу између неколико раније показаних неједнакости.

За почетак, применићемо дефиницију функције G_Q^R . Тада добијамо

$$\begin{aligned}
 b(0, R^2) &= - \int_{Q_{R,\delta}} b(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta \right) G_Q^R(x, t) dx dt \\
 &= - \int_{B(0, lR)} \int_{\delta}^{lR^2} b(x, t) \frac{\partial G_Q^R}{\partial t}(x, t) dt dx - \int_{\delta}^{lR^2} \int_{B(0, lR)} b(x, t) \Delta G_Q^R(x, t) dx dt \\
 &= \int_{B(0, lR)} \int_{\delta}^{lR^2} G_Q^R(x, t) \frac{\partial b}{\partial t}(x, t) dt dx + \int_{B(0, lR)} b(x, \delta) G_Q^R(x, \delta) dx \\
 &\quad - \int_{\delta}^{lR^2} \int_{B(0, lR)} \Delta b(x, t) G_Q^R(x, t) dx dt \\
 &\quad + \int_{\delta}^{lR^2} \int_{\partial B(0, lR)} \left(\frac{\partial b}{\partial n}(x, t) G_Q^R(x, t) - b(x, t) \frac{\partial G_Q^R}{\partial n}(x, t) \right) dS(x) dt \\
 &= \int_{Q_{R,\delta}} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) b(x, t) G_Q^R(x, t) dx dt + \int_{B(0, lR)} b(x, \delta) G_Q^R(x, \delta) dx \\
 &\geq \int_{Q_{R,\delta}} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) b(x, t) G_Q^R(x, t) dx dt.
 \end{aligned}$$

Овде смо прво применили Фубинијеву теорему. У првом интегралу у другом реду смо користили парцијалну интеграцију (на унутрашњи интеграл) и користили то да се функција G_Q^R анулира на $\partial B(0, lR) \times \{lR^2\}$. На други интеграл смо применили другу Гринову формулу. Како се G_Q^R анулира и на $\partial' Q_{R,\delta}$, и њен извод у правцу нормале је нула, па је четврти сабирак у средњем изразу једнак нули. Коначно, последња неједнакост следи из ненегативности функција b и G_Q^R .

Са друге стране, како је $b(0, R^2) \in Q_{R,\delta} \subset U$, то је $v(0, R^2) \in \Omega_\varepsilon$, па на основу другог дела теореме 3.7 имамо

$$b(0, R^2) = B_{K,\varepsilon}(v(0, R^2)) \leq (1 + C\varepsilon)(p^* - 1) \left(|f|^p(0, R^2) \right)^{\frac{1}{p}} \left(|g|^q(0, R^2) \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 + C\varepsilon)(p^* - 1) \left(\frac{1}{4R^2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^p e^{-\frac{|x|^2}{4R^2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{4R^2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |g(x)|^q e^{-\frac{|x|^2}{4R^2}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= \frac{(1 + C\varepsilon)(p^* - 1)}{4R^2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^p e^{-\frac{|x|^2}{4R^2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |g(x)|^q e^{-\frac{|x|^2}{4R^2}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &\leq \frac{(1 + C\varepsilon)(p^* - 1)}{4R^2\pi} \|f\|_p \|g\|_q,
 \end{aligned}$$

при чему смо у последњем реду користили да је $0 < e^{-\frac{|x|^2}{4R^2}} \leq 1$. Комбиновањем ових неједнакости добијамо

$$\int_{Q_{R,\delta}} G_Q^R(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) b(x, t) dx dt \leq \frac{(1 + C\varepsilon)(p^* - 1)}{4R^2\pi} \|f\|_p \|g\|_q. \quad (3.9)$$

Да бисмо боље проценили леву страну, требаће нам наредна лема.

Лема 3.11. За произвољно $(x, t) \in U$ важи

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) b(x, t) = \left\langle (-d^2 B_{K,\varepsilon}) \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\rangle_{\mathbb{R}^6} + \left\langle (-d^2 B_{K,\varepsilon}) \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\rangle_{\mathbb{R}^6}.$$

Доказ. Како је кодомен функције v подскуп од $\mathbb{R}^6$, можемо је посматрати у облику $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$, где су $v_1, \dots, v_6$ реално-вредносне. Ради једноставније нотације, и позиције у домену функције $B_{K,\varepsilon}$ ћемо означавати са $v_1, \dots, v_6$. Одаберимо произвољно $x_0 = (x, t) \in U$ и означимо $v_0 = v(x_0)$. Имамо да је

$$\frac{\partial b}{\partial x_1}(x_0) = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial B_{K,\varepsilon}}{\partial v_j}(v_0) \frac{\partial v_j}{\partial x_1}(x_0) = \left\langle \nabla B_{K,\varepsilon}(v_0), \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_0) \right\rangle_{\mathbb{R}^6},$$

и аналогно за изводе по x_2 и t . Користећи претходну формулу, добијамо

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 b}{\partial x_1^2}(x_0) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sum_{j=1}^6 \frac{\partial B_{K,\varepsilon}}{\partial v_j} \circ v \cdot \frac{\partial v_j}{\partial x_1} \right)(x_0) \\
 &= \sum_{j=1}^6 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial B_{K,\varepsilon}}{\partial v_j} \circ v \right)(x_0) \frac{\partial v_j}{\partial x_1}(x_0) + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial B_{K,\varepsilon}}{\partial v_j}(v_0) \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_1^2}(x_0) \\
 &= \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 \frac{\partial^2 B_{K,\varepsilon}}{\partial v_j \partial v_k}(v_0) \frac{\partial v_j}{\partial x_1}(x_0) \frac{\partial v_k}{\partial x_1}(x_0) + \left\langle \nabla B_{K,\varepsilon}(v_0), \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}(x_0) \right\rangle_{\mathbb{R}^6} \\
 &= \left\langle (d^2 B_{K,\varepsilon}(v_0)) \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial v}{\partial x_1}(x_0) \right\rangle_{\mathbb{R}^6} + \left\langle \nabla B_{K,\varepsilon}(v_0), \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}(x_0) \right\rangle_{\mathbb{R}^6}.
 \end{aligned}$$

Аналогну формулу имамо и за $\frac{\partial^2 b}{\partial x_2^2}(x_0)$. Њихово сабирање нам даје

$$\Delta b(x_0) = \sum_{i=1}^2 \left\langle (d^2 B_{K,\varepsilon}(v_0)) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_0), \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_0) \right\rangle_{\mathbb{R}^6} + \langle \nabla B_{K,\varepsilon}(v_0), \Delta v(x_0) \rangle_{\mathbb{R}^6}.$$

Приметимо да су све компоненте функције v топлотна продужења, па задовољавају топлотну једначину $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$. Самим тим, и функција v има то својство. Због тога је

$$\begin{aligned} & \left\langle \nabla B_{K,\varepsilon}(v_0), \frac{\partial v}{\partial t}(x_0) \right\rangle_{\mathbb{R}^6} - \langle \nabla B_{K,\varepsilon}(v_0), \Delta v(x_0) \rangle_{\mathbb{R}^6} \\ &= \left\langle \nabla B_{K,\varepsilon}(v_0), \frac{\partial v}{\partial t}(x_0) - \Delta v(x_0) \right\rangle_{\mathbb{R}^6} = \langle \nabla B_{K,\varepsilon}(v_0), 0 \rangle_{\mathbb{R}^6} = 0. \end{aligned}$$

Коначно, имамо да је

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) b(x_0) = - \sum_{i=1}^2 \left\langle (d^2 B_{K,\varepsilon}(v_0)) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_0), \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_0) \right\rangle_{\mathbb{R}^6},$$

што је и требало показати. □

Комбинујући резултате теореме 3.7 и леме 3.11 добијамо

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) b &= \left\langle (-d^2 B_{K,\varepsilon}) \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\rangle_{\mathbb{R}^6} + \left\langle (-d^2 B_{K,\varepsilon}) \frac{\partial v}{\partial x_2}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\rangle_{\mathbb{R}^6} \\ &\geq 2 \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| + 2 \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right|. \end{aligned}$$

Када претходну неједнакост заменимо у 3.9, а затим применимо 3.8, имамо

$$\begin{aligned} \frac{(1 + C\varepsilon)(p^* - 1)}{4R^2\pi} \|f\|_p \|g\|_q &\geq 2 \int_{Q_{R,\delta}} G_Q^R(x, t) \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| \right) dx dt \\ &\geq 2 \int_{Q_{R,\delta}} \frac{1}{R^2} G_Q \left(\frac{x}{R}, \frac{t}{R^2} \right) \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| \right) dx dt. \end{aligned}$$

Обе стране претходне неједнакости можемо помножити са R^2 . Такође, компакт M који смо на почетку фиксирали је подскуп од $Q_{R,\delta}$, па из ненегативности подинтегралне функције видимо да важи

$$2 \int_M G_Q \left(\frac{x}{R}, \frac{t}{R^2} \right) \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| \right) dx dt \leq \frac{(1 + C\varepsilon)(p^* - 1)}{4\pi} \|f\|_p \|g\|_q.$$

Како је $\lim_{R \rightarrow \infty} G_Q \left(\frac{x}{R}, \frac{t}{R^2} \right) = G_Q(0, 0)$, применом лимеса на претходну неједнакост, при чему замену граничне вредности и интеграла можемо оправдати теоремом о доминантној конвергенцији (подинтегрална функција је ограничена, а домен интеграције компакт), добијамо

$$2G_Q(0, 0) \int_M \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| \right) dx dt \leq \frac{(1 + C\varepsilon)(p^* - 1)}{4\pi} \|f\|_p \|g\|_q.$$

Сада посматрајмо $\lim_{l \rightarrow \infty}$. Једина ствар која у претходној неједнакости зависи од параметра l је G_Q . Због тога ћемо у овом делу Q обележавати са Q^l . Нека је φ^l глатка функција садржана у Q^l која је једнака 1 на $\{x \in Q^l : d(x, \partial Q^l) > \varepsilon\}$, где је $\varepsilon > 0$ произвољно мало. Ако, као и до сада, топлотно језгро означимо са h , имамо

$$\begin{aligned} h(0, 1) &= \langle \delta_{(0,1)}, h \rangle = -\langle -\delta_{(0,1)}, \varphi^l h \rangle = -\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta \right) G_{Q^l}, \varphi^l h \right\rangle \\ &= \left\langle G_{Q^l}, \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \varphi^l h \right\rangle = \int_{Q^l} G_{Q^l}(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) (\varphi^l h)(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Због особина од h , подинтегрална функција у последњем интегралу има доминанту која не зависи од l . Према томе, ако посматрамо $\lim_{l \rightarrow \infty}$ од обе стране претходне једнакости, добијамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} &= h(0, 1) = \lim_{l \rightarrow \infty} h(0, 1) = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{Q^l} G_{Q^l}(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) (\varphi^l h)(x, t) dx dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \lim_{l \rightarrow \infty} G_{Q^l}(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) h(x, t) dx dt \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) h, \lim_{l \rightarrow \infty} G_{Q^l} \right\rangle = \left\langle \delta, \lim_{l \rightarrow \infty} G_{Q^l} \right\rangle = \lim_{l \rightarrow \infty} G_{Q^l}(0, 0), \end{aligned}$$

при чему смо користили да је фундаментално решење топлотне једначине на $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ баш топлотно језгро (у смислу дистрибуција). Наша неједнакост сада постаје

$$2 \int_M \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| \right) dx dt \leq (1 + C\varepsilon)(p^* - 1) \|f\|_p \|g\|_q.$$

За крај, како смо компакт M и ε бирали произвољно (и при томе независно једно од другог), посматрајући прво супремум леве стране по свим компактима $M \subset \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$, а затим инфимум десне по свим $\varepsilon > 0$, добијамо

тражену неједнакост

$$2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| \right) dx dt \leq (p^* - 1) \|f\|_p \|g\|_q.$$

□

3.5 Асимптотско понашање норме

Оцену норме коју смо добили у овом поглављу можемо поправити када $p \rightarrow \infty$. Да бисмо ово урадили, треба да ојачамо неједнакост из теореме 3.3. У томе ће нам помоћи наредна лема из линеарне алгебре. Њу наводимо без доказа, с обзиром да он нема битан значај на даљи део рада. Можете га наћи у [18](Addendum).

Лема 3.12. Нека су $m, n, k \in \mathbb{N}$ и $d = m + n + k$. Произвољно $v \in \mathbb{R}^d$ запишимо у облику $v = v_m \oplus v_n \oplus v_k$, где је $v_i \in \mathbb{R}^i$ за свако $i \in \{m, n, k\}$. Нека је $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ матрица тако да је за све $v \in \mathbb{R}^d$ задовољено

$$\langle Av, v \rangle \geq 2 \|v_m\| \|v_n\|.$$

Тада постоји $\tau > 0$ тако да за све $v \in \mathbb{R}^d$ важи

$$\langle Av, v \rangle \geq \tau \|v_m\|^2 + \frac{1}{\tau} \|v_n\|^2.$$

Теорема 3.13. Нека су $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ произвољне комплексно-вредносне функције, $1 < p < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тада важи

$$2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left(\left| \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left| \frac{\partial g_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial g_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dt \leq (p^* - 1) \|f\|_p \|g\|_q.$$

Доказ. Доказ ове теореме је скоро исти као доказ теореме 3.3. Једина разлика је у томе што ћемо ми применити лему 3.12 у комбинацији са лемом 3.11 на неједнакост 3.9. Претходну лему ћемо применити у случају $m = n = k = 2$ и $A = -d^2 B_{K, \varepsilon}$. Теорема 3.7 нам гарантује да су испуњени услови леме 3.12, па имамо да постоји $\tau > 0$ тако да за свако $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ важи

$$\langle -d^2 B_{K, \varepsilon}(a, b, c, d)^T, (a, b, c, d)^T \rangle \geq \tau |a|^2 + \frac{1}{\tau} |b|^2.$$

У комбинацији са лемом 3.11 имамо

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) b(x, t) &\geq \tau \left| \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \right|^2 + \frac{1}{\tau} \left| \frac{\partial g_t}{\partial x_1} \right|^2 + \tau \left| \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \right|^2 + \frac{1}{\tau} \left| \frac{\partial g_t}{\partial x_2} \right|^2 \\ &= \tau \left(\left| \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \right|^2 \right) + \frac{1}{\tau} \left(\left| \frac{\partial g_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial g_t}{\partial x_2} \right|^2 \right) \\ &\geq 2 \left(\left| \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left| \frac{\partial g_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial g_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

при чему смо у последњој неједнакости користили неједнакост између аритметичке и геометријске средине. Заменом у 3.9 добијамо

$$\begin{aligned} &2 \int_{Q_{R,\delta}} G_Q^R(x, t) \left(\left| \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left| \frac{\partial g_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial g_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dt \\ &\leq \frac{(1 + C\varepsilon)(p^* - 1)}{4R^2\pi} \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Остатак доказа је идентичан као и код теореме 3.3. $\square$

С обзиром да смо добили оштрију неједнакост него у теорему 3.3, и последице ће бити јаче.

Последица 3.14. Нека је $1 < p < \infty$. За Рисове трансформације R_1 и R_2 у равни и произвољно $\theta \in [0, 2\pi)$ важи

$$\|(R_1^2 - R_2^2) \cos \theta + 2R_1 R_2 \sin \theta\|_p \leq p^* - 1.$$

Доказ. Посматрајмо произвољне функције $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. За свако $\theta \in [0, 2\pi)$ дефинишимо оператор $S_\theta : L^p(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$ са

$$S_\theta = (R_1^2 - R_2^2) \cos \theta + 2R_1 R_2 \sin \theta.$$

Применом леме 3.2 имамо

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} S_\theta f(x) g(x) dx \\ &= -2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left[\left(\frac{\partial f_t}{\partial x_1} \frac{\partial g_t}{\partial x_1} - \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \frac{\partial g_t}{\partial x_2} \right) \cos \theta + 2 \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \frac{\partial g_t}{\partial x_2} \sin \theta \right] dx dt \\ &= -2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left\langle \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial g_t}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_t}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^2} dx dt. \end{aligned}$$

Модул подинтегралне функције можемо ограничити применом Коши-Шварцове неједнакости, користећи чињеницу да је норма матрице $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ мања или једнака од 1.

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial g_t}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_t}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^2} \right| \\ & \leq \left\| \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{C}^2} \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial g_t}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_t}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{C}^2} \\ & \leq \left\| \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \right\|_2 \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{C}^2} \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial g_t}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_t}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{C}^2} \\ & \leq \left(\left| \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left| \frac{\partial g_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial g_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Заменом овога у претходну једнакост, добијамо неједнакост на коју можемо применити теорему 3.13, што даје

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} S_\theta f(x) g(x) dx \right| & \leq 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left(\left| \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial f_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left| \frac{\partial g_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial g_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dt \\ & \leq (p^* - 1) \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Даље, стандардним поступком (већ описан у некој од претходних теорема), закључујемо да је $\|S_\theta\|_p \leq p^* - 1$, што је и требало показати. $\square$

Напомена. Приметимо да из претходне последице, за $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ добијамо последицу 3.5.

Претходне теореме и последице даће нам још једну оцену L^p -норме Бјорлингове трансформације, која ће за довољно велико p бити боља од оцене коју смо добили у теорему 3.6.

Са $L_r^p(\mathbb{C})$ означимо скуп свих реално-вредносних функција скупа $L^p(\mathbb{C})$. У остатку рада често ћемо, поред норме на $L^p(\mathbb{C})$, посматрати и норму на овом простору. Разлог за то су недавни резултати који су показали да је норма Бјорлингове трансформације на радијалним функцијама за $1 < p < 2$ баш једнака $p^* - 1$, док су за $p > 2$ нађене оцене које су чак и боље од ове константе. Детаљније о овим резултатима можете видети у радовима [30], [10] и [36]. Ове оцене иду у прилог претпоставци да је и норма на реално-вредносним функцијама мања од константе из Ивањецове хипотезе.

Теорема 3.15. Посматрајмо рестрикцију Бјорлингове трансформације $S_r : L_r^p(\mathbb{C}) \rightarrow L^p(\mathbb{C})$. Постоји функција $\alpha : (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ тако да важи

$$\|S_r\|_p \leq \alpha(p)p, \quad \text{где је } \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(p) = 1.$$

Доказ. Ова теорема ће бити директна последица следеће леме, када уместо оператора A и B посматрамо $R_2^2 - R_1^2$ и $2R_1R_2$.

Лема 3.16. Нека је (X, μ) мерљив простор и $A, B : L_r^p(X, \mu) \rightarrow L_r^p(X, \mu)$. Тада постоји функција $\alpha : (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ тако да је $\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(p) = 1$ и за свако $u \in L_r^p(X, \mu)$ важи

$$\left(\int_X (|Au|^2 + |Bu|^2)^{\frac{p}{2}} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \alpha(p) \max_{\theta \in [0, 2\pi)} \|A \cos \theta + B \sin \theta\|_p \|u\|_p.$$

Доказ. Фиксирајмо произвољне $u \in L_r^p(X, \mu)$ и $\omega \in X$. Како су $Au(\omega)$ и $Bu(\omega)$ реални, постоји $\delta = \delta(\omega) \in [0, 2\pi)$ тако да је $Au(\omega) = \sqrt{|Au(\omega)|^2 + |Bu(\omega)|^2} \cos \delta$ и $Bu(\omega) = \sqrt{|Au(\omega)|^2 + |Bu(\omega)|^2} \sin \delta$. Применом адиционе формуле за косинус разлике, за произвољно $\theta \in [0, 2\pi)$ добијамо

$$(A \cos \theta + B \sin \theta)u(\omega) = \sqrt{|Au(\omega)|^2 + |Bu(\omega)|^2} \cos(\theta - \delta(\omega)).$$

Сада је

$$\begin{aligned} & \int_X (|Au(\omega)|^2 + |Bu(\omega)|^2)^{\frac{p}{2}} |\cos(\theta - \delta(\omega))|^p d\mu(\omega) \\ &= \int_X |(A \cos \theta + B \sin \theta)u(\omega)|^p d\mu(\omega) \\ &\leq \|A \cos \theta + B \sin \theta\|_p^p \|u\|_p^p \\ &\leq \max_{\theta \in [0, 2\pi)} \|A \cos \theta + B \sin \theta\|_p^p \|u\|_p^p. \end{aligned}$$

Уколико претходну неједнакост интегралимо у односу на нормирану Лебегову меру $\frac{1}{2\pi} dm(\theta)$ на $[0, 2\pi)$, применом Фубинијеве теореме добијамо

$$\int_X (|Au(\omega)|^2 + |Bu(\omega)|^2)^{\frac{p}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(\theta - \delta(\omega))|^p dm(\theta) d\mu(\omega)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \theta|^p dm(\theta) \int_X (|Au(\omega)|^2 + |Bu(\omega)|^2)^{\frac{p}{2}} d\mu(\omega) \\
 &\leq \max_{\theta \in [0, 2\pi)} \|A \cos \theta + B \sin \theta\|_p^p \|u\|_p^p,
 \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}
 &\left(\int_X (|Au(\omega)|^2 + |Bu(\omega)|^2)^{\frac{p}{2}} d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \theta|^p dm(\theta) \right)^{-\frac{1}{p}} \max_{\theta \in [0, 2\pi)} \|A \cos \theta + B \sin \theta\|_p \|u\|_p.
 \end{aligned}$$

Да бисмо завршили доказ, довољно је да проверимо да је

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \theta|^p dm(\theta) \right)^{-\frac{1}{p}} = 1.$$

Ово следи директно, ако уочимо да је израз од кога посматрамо граничну вредност заправо $\|\cos\|_{L^p([0, 2\pi), \frac{dm}{2\pi})}^{-1}$. Функција $\cos$ је ограничена, а простор на коме се посматра норма има коначну меру, па важи

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|\cos\|_{L^p([0, 2\pi), \frac{dm}{2\pi})} = \|\cos\|_{L^\infty([0, 2\pi), \frac{dm}{2\pi})} = 1.$$

□

Као што смо већ наговорили на почетку доказа, применићемо ову лему на операторе $A = R_2^2 - R_1^2$ и $B = 2R_1R_2$. Комбинујући теорему 1.29 и последицу 3.14, за произвољно $u \in L_r^p(\mathbb{C})$ имамо

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{\mathbb{C}} |S_r u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_{\mathbb{C}} (|(R_1^2 - R_2^2)u(x)|^2 + |2R_1R_2u(x)|^2)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \alpha(p) \max_{\theta \in [0, 2\pi)} \|(R_1^2 - R_2^2) \cos \theta + 2R_1R_2 \sin \theta\|_p \|u\|_p \\
 &\leq \alpha(p)(p^* - 1) \|u\|_p.
 \end{aligned}$$

Из овога директно следи тражено, пошто кад $p \rightarrow \infty$ важи $p^* = p$, а

$\alpha(p)(p - 1) = \beta(p)p$, при чему $\lim_{p \rightarrow \infty} \beta(p) = 1$. □

Сличан резултат имамо и у случају комплексно-вредносних функција.

Теорема 3.17. Постоји функција $\alpha : (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ тако да важи

$$\|S\|_p \leq \sqrt{2}\alpha(p)p, \quad \text{где је } \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha(p) = 1.$$

Доказ. За разлику од претходне теореме, у овој ћемо се скоро од самог старта ослонити на особине Рисових трансформација. Уведимо ознаке које смо користили и пре. Нека је $A = R_2^2 - R_1^2$ и $B = 2R_1R_2$. Приметимо да ова два оператора сликају реално-вредносне функције у реално-вредносне функције. Из теореме 1.29 је јасно да је $S = A + iB$. Нека је $\varphi = u + iv \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ произвољна функција. Желимо да нађемо горње ограничење од

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |S\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} |(A + iB)(u + iv)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} (|Au(x) - Bv(x)|^2 + |Bu(x) + Av(x)|^2)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

То ћемо урадити на сличан начин као и у претходној леми. За произвољно $\theta \in [0, 2\pi)$ посматрајмо (реално-вредносу) функцију $(Au - Bv) \cos \theta + (Bu + Av) \sin \theta$. Такође, нека је $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ произвољна реално-вредносна функција. Једноставно видимо да је

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} ((Au - Bv) \cos \theta + (Bu + Av) \sin \theta)(x) \psi(x) dx \\ &= \operatorname{Re} \int_{\mathbb{R}^2} (A + iB)(u + iv)(x) e^{-i\theta} \psi(x) dx \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-i\theta} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial(u + iv)_t}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_t}{\partial x_1} - \frac{\partial(u + iv)_t}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_t}{\partial x_2} \\ &\quad + i \frac{\partial(u + iv)_t}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_t}{\partial x_2} + i \frac{\partial(u + iv)_t}{\partial x_2} \frac{\partial \psi_t}{\partial x_1} dx dt \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-i\theta} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (u + iv)_t \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \psi_t dx dt, \end{aligned}$$

при чему смо у другој једнакости користили лему 3.2 и последицу 1.14. Сада можемо проценити модул почетног интеграла.

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} ((Au - Bv) \cos \theta + (Bu + Av) \sin \theta)(x) \psi(x) dx \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left| \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-i\theta} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (u_t + iv_t) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \psi_t dx dt \right| \\
 &\leq 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} |e^{-i\theta}| \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) (u_t + iv_t) \right| \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \psi_t \right| dx dt \\
 &\leq 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left| \left(\frac{\partial u_t}{\partial x_1} - \frac{\partial v_t}{\partial x_2} \right) + i \left(\frac{\partial v_t}{\partial x_1} + \frac{\partial u_t}{\partial x_2} \right) \right| \left| \frac{\partial \psi_t}{\partial x_1} + i \frac{\partial \psi_t}{\partial x_2} \right| dx dt \\
 &= 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left(\left| \frac{\partial u_t}{\partial x_1} \right|^2 - 2 \left| \frac{\partial u_t}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial v_t}{\partial x_2} \right| + \left| \frac{\partial v_t}{\partial x_2} \right|^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left| \frac{\partial v_t}{\partial x_1} \right|^2 + 2 \left| \frac{\partial v_t}{\partial x_1} \right| \left| \frac{\partial u_t}{\partial x_2} \right| + \left| \frac{\partial u_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left| \frac{\partial \psi_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dt \\
 &\leq 2\sqrt{2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left(\left| \frac{\partial u_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_t}{\partial x_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left| \frac{\partial \psi_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dt \\
 &= 2\sqrt{2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left(\left| \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left| \frac{\partial \psi_t}{\partial x_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi_t}{\partial x_2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx dt \\
 &\leq \sqrt{2}(p^* - 1) \|\varphi\|_p \|\psi\|_q.
 \end{aligned}$$

Овде смо прво користили да је $(u + iv)_t = u_t + iv_t$, што следи директно из дефиниције топлотног продужења. Константа $\sqrt{2}$ се појављује због неједнакости

$$a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2 \leq 2(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2),$$

примењене на одговарајуће реалне бројеве у изразима изнад. Последња неједнакост је последица теореме 3.13. Како је функција $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ произвољна реално-вредносна, а уз то је и $(Au - Bv) \cos \theta + (Bu + Av) \sin \theta$ реално-вредносна, из претходног низа неједнакости закључујемо

$$\|(Au - Bv) \cos \theta + (Bu + Av) \sin \theta\|_p \leq \sqrt{2}(p^* - 1) \|u + iv\|_p.$$

Сада ћемо поновити идеју из доказа леме 3.16. Како су за свако $x \in \mathbb{R}^2$ вредности $(Au - Bv)(x)$ и $(Bu + Av)(x)$ реалне, имамо да постоји $\delta(x) \in [0, 2\pi)$ за које важи

$$\begin{aligned}
 &(Au - Bv)(x) \cos \theta + (Bu + Av)(x) \sin \theta \\
 &= \left(|(Au - Bv)(x)|^2 + |(Bu + Av)(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta - \delta(x)).
 \end{aligned}$$

Сада је

$$\begin{aligned} & \| (Au - Bv) \cos \theta + (Bu + Av) \sin \theta \|_p^p \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (|(Au - Bv)(x)|^2 + |(Bu + Av)(x)|^2)^{\frac{p}{2}} |\cos(\theta - \delta(x))|^p dx, \end{aligned}$$

па уз исте аргументе као у леми 3.16 добијамо

$$\begin{aligned} \|S\varphi\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} (|(Au - Bv)(x)|^2 + |(Bu + Av)(x)|^2)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \theta|^p dm(\theta) \right)^{-\frac{1}{p}} \| (Au - Bv) \cos \theta + (Bu + Av) \sin \theta \|_p \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \theta|^p dm(\theta) \right)^{-\frac{1}{p}} \sqrt{2}(p^* - 1) \|u + iv\|_p \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \theta|^p dm(\theta) \right)^{-\frac{1}{p}} \sqrt{2}(p^* - 1) \|\varphi\|_p. \end{aligned}$$

Из последње неједнакости, уз коментар на почетку доказа, видимо да ћемо за функцију α узети исту функцију као и у леми 3.16, па аналогним аргументима завршавамо доказ. $\square$

Глава 4

Оцене норме методама стохастичке анализе

Ивањецова хипотеза је врло познат проблем, и као такав привукао је пажњу великог броја математичара. Због тога не чуди да постоји доста покушаја да се овај проблем реши. Упоредо са приступом који смо видели у претходној глави, неколико математичара успело је да дође до истих оцена на мало другачији начин. Они су представили Бјорлингову и Рисове трансформације преко мартингала и уз помоћ Биркхолдерове неједнакости дошли тражених ограничења. Процене које добијамо на крају су боље од оних из главе 3 (и за свако појединачно p и асимптотски). Приступ који ћемо приказати базиран је на радовима [12], [9] и [8]. Резултате ћемо наводити хронолошки, при чему ће сваки наредни бити побољшање претходног и надовезиваће се на њега.

За читање ове главе неопходно је познавање основних појмова из вероватноће, особина Брауновског¹ кретања, условног очекивања, мартингала, основа стохастичке интеграције и Итоове² формуле. Како многе од ових ствари нису превише елементарне, а не могу се у литературу лако наћи на једном месту, посветићемо прву секцију томе. Више детаља о свим овим појмовима можете наћи у [19] и [25].

¹Robert Brown, 1773 - 1858, шкотски биолог

²Kiyosi Itô, 1915 - 2008, јапански математичар

4.1 Мартингали и стохастичка интеграција

Овде ћемо дати преглед основних појмова и теорема које су нам неопходне у даљем раду, као и неке ознаке које ћемо користити.

Надаље сматрамо да је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор са вероватноћом. Случајни процес X ћемо некад обележавати и са X_t или $X(t)$, ако желимо да истакнемо „временску” променљиву. Густина d -димензионалне стандардне нормалне расподеле $\mathcal{N}(0, tI)$ биће означена са p_t . За реалне бројеве x и y користимо ознаку $x \wedge y = \min(x, y)$. Математичко очекивање (у односу на посматрани простор са вероватноћом) ћемо обележавати са $\mathbb{E}$. У секцијама након ове, та ознака ће некад бити резервисана за неке друге појмове, али ће то бити напоменуто.

Дефиниција 4.1. Случајни процес B који узима вредности у $\mathbb{R}$ је (једнодимензионално) Брауновско кретање ако важи:

- (1) $P(\{\omega : B(0, \omega) = 0\}) = 1$,
- (2) За све $0 \leq s \leq t$ важи $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$,
- (3) За произвољне $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ важи да су $B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$ независне,
- (4) $P(\{\omega : B(\cdot, \omega) \text{ је непрекидна}\}) = 1$.

Дефиниција 4.2. Случајни процес B је Брауновско кретање у $\mathbb{R}^d$ ако је $B = (B^{(1)}, \dots, B^{(d)})$, где су $B^{(1)}, \dots, B^{(d)}$ независна једнодимензионална Брауновска кретања.

Дефиниција 4.3. Нека је $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F})$ и $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ -алгебра. Условно очекивање случајне променљиве X у односу на σ -алгебру $\mathcal{G}$ је јединствена (до на скуп P -мере нула) $\mathcal{G}$ -мерљива случајна променљива Y таква да за свако $A \in \mathcal{G}$ важи $\int_A X dP = \int_A Y dP$. Овакво Y ћемо означавати са $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$.

Дефиниција 4.4. Нека је T или интервал на $\mathbb{R}$ или скуп $\mathbb{N}$. Филтрација на T је растућа фамилија σ -алгебри $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$. Случајни процес X_t , $t \in T$, је прилагођен филтрацији $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ ако за свако $t \in T$ важи да је X_t $\mathcal{F}_t$ -мерљив.

Дефиниција 4.5. Нека је X_t случајан процес прилагођен филтрацији $\{\mathcal{F}_t\}$ такав да за свако $t \in T$ важи $\mathbb{E}|X_t| < \infty$. X_t је мартингал (у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t\}$) ако за све $s \leq t$ у T важи $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ скоро сигурно.

Дефиниција 4.6. Мартингал X_t је непрекидан ако је за скоро свако $\omega \in \Omega$ $X(\cdot, \omega)$ непрекидна функција на T .

Напомена. У даљем делу ове секције посматраћемо само случај када је „временска” променљива t у скупу $[a, b]$. Потпуно аналогно се дефинишу појмови и када посматрамо произвољан интервал у $\mathbb{R}$.

Дефиниција 4.7. Случајна променљива $\tau : \Omega \rightarrow [a, b]$ је време заустављања у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t\}$ ако за свако $a \leq t \leq b$ важи $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Дефиниција 4.8. Нека је X_t случајан процес прилагођен филтрацији $\{\mathcal{F}_t\}$. X_t је локални мартингал (у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t\}$) ако постоји низ времена заустављања $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ за који важи да $\tau_n \rightarrow b$ кад $n \rightarrow \infty$ скоро сигурно и ако је, за свако $n \in \mathbb{N}$, $X_{t \wedge \tau_n}$ мартингал у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t\}$.

Нека је B произвољно фиксирано једнодимензионално Брауновско кретање. Фиксирајмо и филтрацију $\{\mathcal{F}_t\}$ на интервалу $[a, b]$ за коју важи да је за све $a \leq s \leq t \leq b$ $B(t)$ $\mathcal{F}_t$ -мерљива и $B(t) - B(s)$ независна од $\mathcal{F}_s$.

Дефиниција 4.9. Са $L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ означимо скуп свих случајних процеса f на $[a, b] \times \Omega$ који су прилагођени филтрацији $\{\mathcal{F}_t\}$, за које додатно важи

$$\int_a^b \mathbb{E}(|f(t)|^2) dt < \infty.$$

Теорема 4.10. Нека је $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Случајни процес X , дат као Итоов интеграл

$$X_t = \int_a^t f(s) dB(s), \quad a \leq t \leq b,$$

је непрекидни мартингал у односу на претходно фиксирану филтрацију.

Теорема 4.11 (L^2 -изометричност Итоовог интеграла). Нека је $f \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. Тада је Итоов интеграл $I(f) = \int_a^b f(t) dB(t)$ случајна променљива чије је очекивање 0 и важи

$$\mathbb{E}(|I(f)|^2) = \int_a^b \mathbb{E}(|f(t)|^2) dt.$$

Дакле, Итоов интеграл је изометрија $I : L^2_{ad}([a, b] \times \Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$. Додатно, ако је и $g \in L^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$, из поларизационог идентитета добијамо

$$\mathbb{E}(I(f)I(g)) = \int_a^b \mathbb{E}(f(t)g(t))dt.$$

Дефиниција 4.12. Са $\mathcal{L}^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$ означимо скуп свих случајних процеса f на $[a, b] \times \Omega$ који су прилагођени филтрацији $\{\mathcal{F}_t\}$, за које додатно важи

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Теорема 4.13. Нека је $f \in \mathcal{L}^2_{ad}([a, b] \times \Omega)$. Случајни процес X , дат као Итоов интеграл

$$X_t = \int_a^t f(s)dB(s), \quad a \leq t \leq b,$$

је локални мартингал у односу на претходно фиксирану филтрацију и има непрекидну реализацију (постоји непрекидни мартингал Y такав да је $X_t = Y_t$ скоро сигурно за свако $t \in [a, b]$).

Напомена. Све теореме које смо навели се аналогно преносе на вишедимензионална Брауновска кретања.

Дефиниција 4.14. Нека је $1 \leq p \leq \infty$. Случајни процес X припада скупу $L^p(\Omega, \mathcal{F})$ ако важи $\|X\|_p < \infty$, где је $\|X\|_p = \sup_{t \in T} \|X_t\|_p$.

Теорема 4.15. Нека је $1 \leq p < \infty$. Условно очекивање у односу на подалгебру $\mathcal{G}$ је контракција на простору $L^p(\Omega, \mathcal{F})$, односно за сваки случајан процес $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F})$ важи

$$\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|\mathcal{G})|^p) \leq \mathbb{E}(|X|^p).$$

Теорема 4.16. Нека је $M \in L^2(\Omega, \mathcal{F})$ непрекидан мартингал у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [a, b]}$. Тада постоји јединствен непрекидан растући случајни процес $\langle M \rangle_t$ такав да је $\langle M \rangle_0 = 0$ и да је $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ мартингал (у односу на исту филтрацију као и M). Овај процес називамо квадратном варијацијом процеса M и он је дат са

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (M(t_i) - M(t_{i-1}))^2,$$

при чему ова гранична вредност постоји у вероватноћи, а лимес иде по свим поделама Δ_n интервала $[a, b]$, где је $\|\Delta_n\|$ параметар поделе.

Дефиниција 4.17. За непрекидне мартингале $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F})$ дефинишемо процес квадратне коваријације са $\langle X, Y \rangle_t = \frac{1}{4}(\langle X + Y \rangle_t - \langle X - Y \rangle_t)$.

Теорема 4.18. Посматрајмо мартингале $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(n)})$ и $Y = (Y^{(1)}, \dots, Y^{(n)})$ дате са $X_t^{(i)} = X_a^{(i)} + \int_a^t f_i(s) \cdot dB(s)$, $Y_t^{(i)} = Y_a^{(i)} + \int_a^t g_i(s) \cdot dB(s)$, за све $1 \leq i \leq n$, где је B d -димензионално Брауновско кретање, а $f_i = (f_{i1}, \dots, f_{id})$ и $g_i = (g_{i1}, \dots, g_{id})$ такве да $f_{ij}, g_{ij} \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq d$. Тада је

$$\langle X \rangle_t = \sum_{i=1}^n \langle X^{(i)} \rangle_t = \sum_{i=1}^n \int_a^t |f_i(s)|^2 ds \quad \text{и} \quad \langle X^{(i)}, Y^{(j)} \rangle_t = \int_a^t f_i(s) \cdot g_j(s) ds.$$

Теорема 4.19. Нека је $M \in L^2(\Omega, \mathcal{F})$ реално-вредносни мартингал у односу на филтрацију индуковану d -димензионалним Брауновским кретањем B . Тада постоји $H \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$ тако да важи

$$M_t = M_a + \int_a^t H_s \cdot dB_s,$$

где је а $M_a = \mathbb{E}(M_t)$.

Дефиниција 4.20. Нека су $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F})$ два непрекидна мартингала са вредностима у $\mathbb{R}^d$. Кажемо да је мартингал Y диференцијално подређен мартингалу X ако је $|Y_a| \leq |X_a|$ и $\langle X \rangle_t - \langle Y \rangle_t$ неопадајућа ненегативна функција за свако $t \in [a, b]$. Специјално, за $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ и $Y = (Y^{(1)}, \dots, Y^{(d)})$, где је $X_t^{(i)} = X_a^{(i)} + \int_a^t H_s^{(i)} \cdot dB_s$ и $Y_t^{(i)} = Y_a^{(i)} + \int_a^t K_s^{(i)} \cdot dB_s$, довољно је да важи

$$|Y_a^{(i)}| \leq |X_a^{(i)}| \quad \text{за све } 1 \leq i \leq d \quad \text{и} \\ d\langle Y \rangle_t = \sum_{i=1}^d |K_t^{(i)}|^2 \leq \sum_{i=1}^d |H_t^{(i)}|^2 = d\langle X \rangle_t \quad \text{за све } t \in [a, b].$$

Напомена. Постоји доста верзија Итоове формуле, али ћемо ми навести само оне које су нам потребне у наставку рада.

Теорема 4.21 (Итоова формула). Нека је $F(x_1, \dots, x_n)$ непрекидна комплексна функција на $\mathbb{R}^n$ таква да су јој и сви парцијални изводи првог и другог реда непрекидни. Тада за n -димензионално Брауновско кретање B и $t \in [a, b]$ важи

$$F(B_t) = F(B_a) + \int_a^t \nabla F(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_a^t \Delta F(B_s) \cdot dB_s.$$

Теорема 4.22 (Итоова формула). Нека је $F(x_1, \dots, x_n, t)$ непрекидна комплексна функција на $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ таква да су јој парцијални изводи $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ непрекидни за све $1 \leq i, j \leq n$. Тада за n -димензионално Брауновско кретање B и $t \in [a, b]$ важи

$$F(B_t, t) = F(B_a, a) + \int_a^t \frac{\partial F}{\partial t}(B_s, s) ds + \int_a^t \nabla_x F(B_s, s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_a^t \Delta_x F(B_s, s) ds.$$

Теорема 4.23 (Итоова формула за вишедимензионалне мартингале). Нека је $F(t, x_1, \dots, x_n)$ непрекидна комплексна функција на $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ таква да су јој и парцијални изводи $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ непрекидни за све $1 \leq i, j \leq n$. Тада за непрекидне мартингале $M^{(1)}, \dots, M^{(n)} \in L^2(\Omega, \mathcal{F})$ важи

$$\begin{aligned} F(t, M_t^{(1)}, \dots, M_t^{(n)}) &= F(a, M_a^{(1)}, \dots, M_a^{(n)}) + \int_a^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, M_s^{(1)}, \dots, M_s^{(n)}) ds \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_a^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(s, M_s^{(1)}, \dots, M_s^{(n)}) dM_s^{(i)} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(s, M_s^{(1)}, \dots, M_s^{(n)}) d\langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle_s. \end{aligned}$$

Теорема 4.24. Нека је $M \in L^2(\Omega, \mathcal{F})$ непрекидни мартингал. Тада за сваки ограничен, непрекидан и прилагођен случајни процес X важи

$$\int_a^b X(t) d\langle M \rangle_t = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n X(t_{i-1}) (M(t_i) - M(t_{i-1}))^2,$$

при чему ова гранична вредност постоји у вероватноћи, а лимес иде по свим поделама Δ_n интервала $[a, b]$, где је $\|\Delta_n\|$ параметар поделе.

Теорема 4.25. Нека су X и Y непрекидни мартингали и g непрекидна функција, тако да је добро дефинисан Итоов интеграл $\int_0^t g(X_s, Y_s) dX_s$. Уколико је T ограничено време заустављања (у односу на исту филтрацију као и мартингали X и Y), важи

$$\langle X^T, Y^T \rangle = \langle X, Y \rangle^T \quad \text{и} \quad \int_0^{t \wedge T} g(X_s, Y_s) dX_s = \int_0^t g(X_s^T, Y_s^T) dX_s^T,$$

где је $X_t^T = X_{t \wedge T}$ за свако t .

4.2 Веза Рисових трансформација и мартингала

У овој секцији ћемо показати кључну неједнакост између мартингала и везу са Рисовим трансформацијама, помоћу којих ћемо добити једну оцену норме Бјорлингове трансформације. Она ће бити најслабија до сада, али, као прва оцена добијена овом методом, представља ослонац за све наредне одређене на сличан начин.

За почетак, покажимо неједнакост сличну Биркхолдеровој неједнакости 2.1, само за непрекидне подређене мартингале.

Теорема 4.26. Нека је $1 < p < \infty$ и X и Y два непрекидна мартингала са вредностима у $\mathbb{R}^d$, тако да је Y диференцијално подређен X -у. Тада за свако t важи

$$\|Y_t\|_p \leq (p^* - 1) \|X_t\|_p. \quad (4.1)$$

Доказ. Без умањења општости, нека „временска” променљива мартингала X и Y узима вредности из скупа $[0, \infty)$. Идеја доказа је слична као и код Биркхолдерове неједнакости, тако да ћемо користити исте ознаке као и тамо. Неједнакост 4.1 је еквивалентна са тим да је $\mathbb{E}(v(X_t, Y_t)) \leq 0$ за свако $t \geq 0$, где је

$$v(x, y) = |y|^p - (p^* - 1)^p |x|^p.$$

На основу става 2.3, да би ово важило, довољно је да покажемо да је

$$\mathbb{E}(u(X_t, Y_t)) \leq 0, \quad \text{за свако } t \geq 0, \quad (4.2)$$

при чему је u Биркхолдјева Белманова функција, дата са

$$u(x, y) = \alpha_p (|y| - (p^* - 1)|x|) (|x| + |y|)^{p-1}.$$

Наравно, овде је одговарајући Хилбертов простор $H = \mathbb{R}^d$.

Пре него што покажемо 4.2, увешћемо неке стандардне редукције. Прво, можемо претпоставити да за свако $t \geq 0$ важи $|X_t|, |Y_t| \geq \varepsilon > 0$. Наиме, уколико ово није случај, можемо наћи вектор $a \in \mathbb{R}^d$ ортогоналан на слике мартингала X и Y (ако такво a не постоји, само ћемо додати још једну димензију простору $\mathbb{R}^d$). Мартингали $\tilde{X} = X + a$ и $\tilde{Y} = Y + a$ задржавају све нама битне особине од X и Y (чува се подређеност и непрекидни су), а за њих, због ортогоналности a са X_t и Y_t , важи $|\tilde{X}_t| = |X_t| + |a| \geq |a| > 0$ и $|\tilde{Y}_t| = |Y_t| + |a| \geq |a| > 0$. Неједнакост 4.1 добијамо када на показану неједнакост за $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ применимо граничну вредност кад $|a| \rightarrow 0$. Сада фиксирајмо $T \geq 0$. У неким деловима доказа биће нам неопходно да мартингали X и Y буду ограничени и квадратно-интеграбилни. Ако их посматрамо само на $[0, T]$, ограниченост ће имплицирати да $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F})$. Њу можемо постићи посматрајући низ времена заустављања

$$\tau_n = \begin{cases} \inf\{t \in [0, T] : \max(|X_t|, |Y_t|) > n\} & , \text{ ако инфимум постоји,} \\ T & , \text{ ако инфимум не постоји.} \end{cases}$$

Овај низ скоро сигурно тежи ка T кад $n \rightarrow \infty$. Мартингали X^{τ_n} и Y^{τ_n} су ограничени са n , па су и квадратно-интеграбилни. Они такође чувају особине из поставке теореме, па показивањем неједнакости између њих и применом граничне вредности кад $n \rightarrow \infty$ добијамо 4.1. У току доказа појавиће се неколико Итоових интеграла за које би нам било корисно да су мартингали. Како су они локални мартингали, постоји низ времена заустављања који скоро сигурно тежи ка T тако да они буду мартингали. И овде на коначну неједнакост прелазимо граничним процесом, аналогно као и у претходним редукцијама, с тим што ће нам бити потребна и примена теореме 4.25 да би интеграл и времена заустављања „заменили места” (наравно, у случају да је подинтегрална функција коју посматрамо непрекидна, а времена

заустављања ограничена, што је овде случај). Када све претходне редукције сумирамо, можемо претпоставити да су мартингали X и Y (на $[0, T]$) непрекидни, ограничени, квадратно-интеграбилни, Y је диференцијално подређен X -у и за свако $t \in [0, T]$ важи $|X_t|, |Y_t| \geq |a| > 0$. Поред тога, Итоови интеграли $\int_0^t u_x(X_s, Y_s) \cdot dX_s$ и $\int_0^t u_y(X_s, Y_s) \cdot dY_s$ су мартингали.

Сада се можемо вратити доказивању неједнакости 4.2. Функција u , коју смо дефинисали у теорему 2.1, има непрекидне парцијалне изводе првог и другог реда (а и свих осталих) на скупу $\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : |x|, |y| > 0\}$. Како за наше мартингале важи $|X_t|, |Y_t| \geq |a| > 0$ за свако $t \in [0, T]$, на основу Итоове формуле 4.23 имамо

$$\begin{aligned} u(X_t, Y_t) &= u(X_0, Y_0) + \int_0^t u_x(X_s, Y_s) \cdot dX_s + \int_0^t u_y(X_s, Y_s) \cdot dY_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t (u_{x_i x_j}(X_s, Y_s) d\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_s \\ &\quad + 2u_{x_i y_j}(X_s, Y_s) d\langle X^{(i)}, Y^{(j)} \rangle_s + u_{y_i y_j}(X_s, Y_s) d\langle Y^{(i)}, Y^{(j)} \rangle_s). \end{aligned}$$

Желимо да посматрамо очекивање од последње једнакости. Као што смо већ напоменули, други и трећи сабирак са десне стране су мартингали, па је њихово очекивање једнако 0 (јер су они сами једнаки 0 за $t = 0$). Како је Y подређен X -у, важи $|Y_0| \geq |X_0|$, па на основу става 2.3 (2) имамо да је $u(X_0, Y_0) \leq 0$, а самим тим и $\mathbb{E}(u(X_0, Y_0)) \leq 0$. Остало је још да проценимо очекивање последњег сабирка. Означимо га са $\frac{1}{2}I$ и изразимо интеграле у њему као у теорему 4.24. За неко $n \in \mathbb{N}$, поделу интервала $[0, t]$ ћемо означити са $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$, а њен параметар са $||\Delta_n||$. За свако $1 \leq i, j \leq d$ је

$$\begin{aligned} &\int_0^t u_{x_i x_j}(X_s, Y_s) d\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_s \\ &= \frac{1}{4} \int_0^t u_{x_i x_j}(X_s, Y_s) d(\langle X^{(i)} + X^{(j)} \rangle_s - \langle X^{(i)} - X^{(j)} \rangle_s) \\ &= \lim_{||\Delta_n|| \rightarrow 0} \frac{1}{4} \sum_{l=1}^n u_{x_i x_j}(X(t_{l-1}), Y(t_{l-1})) \left(\left((X^{(i)}(t_l) + X^{(j)}(t_l)) - (X^{(i)}(t_{l-1}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + X^{(j)}(t_{l-1})) \right)^2 - \left((X^{(i)}(t_l) - X^{(j)}(t_l)) - (X^{(i)}(t_{l-1}) - X^{(j)}(t_{l-1})) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{l=1}^n u_{x_i x_j}(X(t_{l-1}), Y(t_{l-1})) (X^{(i)}(t_l) - X^{(i)}(t_{l-1})) (X^{(j)}(t_l) - X^{(j)}(t_{l-1})).$$

Примена теореме 4.24 је могућа јер су мартингали $X^{(i)} + X^{(j)}$ и $X^{(i)} - X^{(j)}$ непрекидни и квадратно-интеграбилни (јер су такви $X^{(i)}$ и $X^{(j)}$), а случајни процес $u_{x_i x_j}(X_s, Y_s)$ непрекидан, прилагођен одговарајућој филтрацији и ограничен (јер су $|X^{(i)}|$ и $|X^{(j)}|$ ограничени одоздо са $|a| > 0$ и одозго).

Уведимо сада неколико ознака које ће нам олакшати остатак доказа. За $1 \leq l \leq n$ и $1 \leq i \leq d$ дефинишемо

$$h_l^{(i)} = X^{(i)}(t_l) - X^{(i)}(t_{l-1}) \quad \text{и} \quad k_l^{(i)} = Y^{(i)}(t_l) - Y^{(i)}(t_{l-1}).$$

Сада претходну једнакост можемо записати као

$$\int_0^t u_{x_i x_j}(X_s, Y_s) d\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_s = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{l=1}^n u_{x_i x_j}(X(t_{l-1}), Y(t_{l-1})) h_l^{(i)} h_l^{(j)}.$$

Аналогне једнакости имамо и за остале сабирке у I . Ако са u_{xx} означимо Јакобијеву матрицу других парцијалних извода по променљивама x_i , $1 \leq i \leq d$, а са h_l вектор $(h_l^{(1)}, \dots, h_l^{(d)})$ (и аналогно за y и k), имамо

$$\langle u_{xx}(X(t_{l-1}), Y(t_{l-1})), h_l \rangle = \sum_{i,j=1}^d u_{x_i x_j}(X(t_{l-1}), Y(t_{l-1})) h_l^{(i)} h_l^{(j)},$$

и аналогно за остале чланове. Када имамо овакво представљање, сабирајући све добијене једнакости видимо да добијамо леву страну једне од последица Биркхолдере неједнакости, односно става 2.3 (4), за $h = h_l$, $k = k_l$, $x = X(t_{l-1})$ и $y = Y(t_{l-1})$. Из ње је

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^d \left(u_{x_i x_j}(X(t_{l-1}), Y(t_{l-1})) h_l^{(i)} h_l^{(j)} + 2u_{x_i y_j}(X(t_{l-1}), Y(t_{l-1})) h_l^{(i)} k_l^{(j)} \right. \\ & \quad \left. + u_{y_i y_j}(X(t_{l-1}), Y(t_{l-1})) k_l^{(i)} k_l^{(j)} \right) \\ & \leq -\alpha_p p^*(p-1) (|h_l|^2 - |k_l|^2) (|X(t_{l-1})| + |Y(t_{l-1})|)^{p-2} \\ & = -\alpha_p p^*(p-1) \sum_{i=1}^d \left(|h_l^{(i)}|^2 - |k_l^{(i)}|^2 \right) (|X(t_{l-1})| + |Y(t_{l-1})|)^{p-2}. \end{aligned}$$

Када претходну неједнакост сумирамо по свим $1 \leq l \leq n$ и применимо $\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0}$, имамо

$$\begin{aligned} I &\leq -\alpha_p p^*(p-1) \sum_{i=1}^d \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{l=1}^n (|X(t_{l-1})| + |Y(t_{l-1})|)^{p-2} \left(|h_l^{(i)}|^2 - |k_l^{(i)}|^2 \right) \\ &= -\alpha_p p^*(p-1) \sum_{i=1}^d \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{l=1}^n (|X(t_{l-1})| + |Y(t_{l-1})|)^{p-2} \left((X^{(i)}(t_l) - X^{(i)}(t_{l-1}))^2 \right. \\ &\quad \left. - (Y^{(i)}(t_l) - Y^{(i)}(t_{l-1}))^2 \right). \end{aligned}$$

На десну страну можемо применити теорему 4.24, јер су мартингали $X^{(i)}$ и $Y^{(i)}$ непрекидни и квадратно-интеграбилни за свако $1 \leq i \leq d$, а случајни процес $(|X_s| + |Y_s|)^{p-2}$ ограничен, непрекидан и подређен одговарајућој филтрацији. Она нам даје

$$\begin{aligned} I &\leq -\alpha_p p^*(p-1) \sum_{i=1}^d \int_0^t (|X_s| + |Y_s|)^{p-2} d(\langle X^{(i)} \rangle_s - \langle Y^{(i)} \rangle_s) \\ &= -\alpha_p p^*(p-1) \int_0^t (|X_s| + |Y_s|)^{p-2} d(\langle X \rangle_s - \langle Y \rangle_s). \end{aligned}$$

Како су $\alpha_p, (p-1)$ и p^* ненегативни, а таква је и подинтегрална функција, из подређености мартингала Y у односу на X имамо да је десна страна претходне неједнакости непозитивна. Самим тим је и $I \leq 0$, па важи $\mathbb{E}(I) \leq 0$. Комбинујући све претходне резултате, добијамо да важи 4.2, што директно повлачи 4.1. $\square$

Уведимо неколико појмова који ће нас приближити траженој вези између Рисових трансформација и мартингала.

Дефиниција 4.27. За комплексно-вредносну $d \times d$ матрицу A дефинишемо норму

$$\|A\| = \sup\{|Av| : v \in \mathbb{C}^d, |v| \leq 1\}.$$

Дефинишемо и њену „реалну” норму (ако посматрамо дејство на само реално-вредносне векторе) са

$$\|A\|_r = \sup\{|Av| : v \in \mathbb{R}^d, |v| \leq 1\}.$$

У наредним тврђењима ћемо прецизирати о којој норми се ради само у случају да постоји суштинска разлика између њих.

Дефиниција 4.28. Нека је $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F})$ мартингал у односу на филтрацију индуковану d -димензионалним Брауновским кретањем B . На основу теореме 4.19 имамо да је $X_t = X_0 + \int_0^t H_s \cdot dB_s$, за неко $H \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$. За $d \times d$ матрицу A дефинишемо мартингалску трансформацију $A * X$ са

$$(A * X)_t = \int_0^t (AH_s) \cdot dB_s, \quad t > 0.$$

Како је и $AH \in L_{ad}^2([a, b] \times \Omega)$, $A * X$ је мартингал.

Применом неједнакости 4.26 на мартингалску трансформацију, добијамо следећу теорему.

Теорема 4.29. Нека је $1 < p < \infty$ а X и A као у дефиницији 4.28. Тада за свако $t \geq 0$ важи

$$\|(A * X)_t\|_p \leq (p^* - 1) \|A\| \|X_t\|_p.$$

Доказ. Довољно је показати да је $A * X$ диференцијално подређен у односу на $\|A\|X$. Како је $(A * X)_0 = 0$, први део тривијално важи. Једноставно видимо и да је $\langle \|A\|X \rangle_t = \|A\|^2 \langle X \rangle_t$. Приметимо да за $s < t$ важи

$$\langle A * X \rangle_t - \langle A * X \rangle_s \leq \|A\|^2 \langle X \rangle_t - \|A\|^2 \langle X \rangle_s. \quad (4.3)$$

Ово можемо видети применом дефиниције норме матрице A , јер расписивањем претходне неједнакости имамо

$$\int_s^t |AH_u|^2 du \leq \|A\|^2 \int_s^t |H_u|^2 du,$$

што директно важи. Ова неједнакост нам показује да је $\|A\|^2 \langle X \rangle_t - \langle A * X \rangle_t$ неоппадајућа функција, док њена ненегативност следи из 4.3 за $s = 0$. Дакле, $A * X$ је диференцијално подређен $\|A\|X$ -у, оба су непрекидна, па применом теореме 4.26 добијамо да је за свако $t \geq 0$

$$\|(A * X)_t\|_p \leq (p^* - 1) (\|A\| \|X_t\|_p) = (p^* - 1) \|A\| \|X_t\|_p,$$

што је и требало показати. □

Да бисмо претходно добијене резултате могли да применимо на Бјорлингову и Рисове трансформације, морамо наћи начин да их представимо преко мартингала. То ћемо урадити у неколико корака, од којих ће први бити хармонијско продужење функције на полупростор, што ћемо управо и детаљније обрадити.

Хармонијско продужење

У секцији 3.1 смо се бавили топлотним продужењем, тако да ћемо и овде имати сличан приступ.

Дефиниција 4.30. Нека је $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ произвољна функција. Њено хармонијско продужење је функција $U_\varphi : \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ дата са

$$U_\varphi(y, t) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \frac{t}{(t^2 + |x - y|^2)^{\frac{d+1}{2}}} dx.$$

Овако дефинисана функција U_φ је заправо решење Лапласове једначине

$$\begin{aligned} \Delta u(y, t) &= 0, \quad (y, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ u(y, 0) &= \varphi(y), \quad y \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

(при чему је ово Лапласијан по свим променљивама).

Из дефиниције је јасно да је U_φ конволуција функције φ са језгром

$$P(x, t) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{d+1}{2}}},$$

које се назива Пуасоново³ језгро.

Једна од његових битних особина је да му је Фуријеова трансформација једнака $P^\wedge(\xi, t) = e^{-2\pi t|\xi|}$.

Позадинско зрачење

Први корак ка овом резултату смо већ описали. Наредни представља конструкција специјалног Брауновског кретања, које ћемо звати позадинско зрачење. Овде ћемо ту конструкцију описати и извести неке битне особине

³Siméon Denis Poisson, 1781 - 1840, француски математичар, физичар и инжењер

које ће нам бити потребне касније. Више детаља о овом случајном процесу можете наћи у [32], [6] и [31].

Нека је $a > 0$ произвољно. Посматрајмо неко Брауновско кретање B^a у $\mathbb{R}^d \times (0, \infty)$, такво да је B_0^a произвољна тачка у $\mathbb{R}^d \times \{a\}$. Уведимо „очекивање” $\mathbb{E}$ придружено случајном процесу B^a . Њега дефинишемо са

$$\mathbb{E}(f(B_t^a)) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x(f(B_t^a)) dx,$$

где је $f : \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, а $\mathbb{E}_x$ очекивање при услову да је $B_0^a = x$ (из ове дефиниције видимо да је $\mathbb{E}$ добијено сумирајући очекивања за све могуће изборе почетне вредности случајног процеса B^a , при чему, због равномерности избора почетне тачке, користимо Лебегову меру).

Напомена. Ради поједностављивања записа, уколико се подразумева која је последња координата Брауновског кретања у неком тренутку (нпр. $B_0^a = (x, a)$), користићемо исту ознаку и за првих d координата (нпр. $B_0^a = x$). Из контекста ће увек моћи да се закључи на који објекат мислимо.

Нека је τ_a тренутак првог изласка B^a из горњег полупростора, односно

$$\tau_a = \inf\{t > 0 : B_t^a \notin \mathbb{R}^d \times (0, \infty)\}.$$

Густина расподеле случајне величине $B_{\tau_a}^a$, за $\xi \in \mathbb{R}^d$, дата је са

$$P_x(B_{\tau_a}^a = \xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \frac{a}{(a^2 + |x - \xi|^2)^{\frac{d+1}{2}}} = P(x - \xi, a).$$

Доказ овога можете наћи у [19], секција 1.9 (у случају $d = 2$ ово је густина Кошијеве расподеле). Сада, за произвољну непрекидну функцију $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, можемо израчунати

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(B_{\tau_a}^a)) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x(f(B_{\tau_a}^a)) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) P(x - y, a) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_{\mathbb{R}^d} P(x - y, a) dx dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) dy, \end{aligned}$$

при чему смо у преласку на други ред користили Фубинијеву теорему.

Можемо извести још један битан идентитет везан за ове појмове. Нека је $F : \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ произвољна непрекидна функција. Тада важи

$$\mathbb{E} \left(\int_0^{\tau_a} F(B_s^a) ds \right) = 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (y \wedge a) F(x, y) dx dy.$$

Ово ћемо показати само за функције које раздвајају променљиве, из чега ће општи случај следити применом граничног прелаза, с обзиром да посматране функције чине густ подскуп скупа непрекидних функција. Нека је $F(x, y) = f(x)g(y)$ за $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$ и неке непрекидне функције $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ и $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$. Ако Брауновско кретање B^a запишемо у облику $B_t^a = (X_t^a, Y_t^a) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$, имамо да је

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_0^{\tau_a} F(B_s^a) ds \right) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x \left(\int_0^{\tau_a} f(X_s^a) g(Y_s^a) ds \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x \left(\int_0^{\infty} f(X_s^a) g(Y_s^a) I\{s \leq \tau_a\} ds \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{\infty} \mathbb{E}_x (f(X_s^a) g(Y_s^a) I\{s \leq \tau_a\}) ds dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{\infty} \mathbb{E}_x (f(X_s^a)) \mathbb{E}_x (g(Y_s^a) I\{s \leq \tau_a\}) ds dx, \end{aligned}$$

при чему смо последњи корак добили из независности посматраних случајних величина. Наиме, као компоненте вишедимензионалног Брауновског кретања, X_s^a и Y_s^a су независне, док је јасно да тренутак изласка не зависи од првих d компоненти од B^a , односно од X^a . Да бисмо израчунали последњи интеграл, применићемо Фубинијеву теорему. Већ смо видели да случајна величина $g(Y_s^a) I\{s \leq \tau_a\}$ не зависи од првих d координата од B^a , па ни од почетне тачке x . Због тога је

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \int_0^{\infty} \mathbb{E}_x (f(X_s^a)) \mathbb{E}_x (g(Y_s^a) I\{s \leq \tau_a\}) ds dx \\ &= \int_0^{\infty} \mathbb{E}_0 (g(Y_s^a) I\{s \leq \tau_a\}) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x (f(X_s^a)) dx ds \\ &= \int_0^{\infty} \mathbb{E}_0 (g(Y_s^a) I\{s \leq \tau_a\}) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) p_s(x - y) dy dx ds \\ &= \int_0^{\infty} \mathbb{E}_0 (g(Y_s^a) I\{s \leq \tau_a\}) \int_{\mathbb{R}^d} f(y) dy ds \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \int_0^\infty \mathbb{E}_0 (g(Y_s^a) I\{s \leq \tau_a\}) ds dy.$$

Како је Y^a једнодимензионално Брауновско кретање, а τ_a тренутак његовог изласка из полуправе, важи

$$\int_0^\infty \mathbb{E}_0 (g(Y_s^a) I\{s \leq \tau_a\}) ds = \int_0^\infty 2(a \wedge t)g(t)dt.$$

Заменом овога у последњу једнакост добијамо тражени идентитет. Формуле сличне претходној важе и за Брауновска кретања у вишим димензијама, при чему је главна разлика у језгру, које је у једнодимензионалном случају једнако $G_H(x, y) = -|x - y|$. Детаљније о овоме, као и доказ претходне формуле, можете видети у поглављу 1.9 у [19].

Посматраћемо случај када $a \rightarrow \infty$. Тада имамо проблем јер почетна расподела од B_0^a зависи од a . Ганди⁴ и Варопулос⁵ су тај проблем решили тако што су време посматрали уназад. Наиме, они су конструисали случајни процес B чија је временска променљива индексирана са $t \in (-\infty, 0]$. Оно има особину да је сваки пут B_t једно Брауновско кретање које креће из $\{y = \infty\}$ у тренутку $t = -\infty$ и напушта горњи полупростор у тренутку $t = 0$, и то равномерно (B_0 је једнако вероватно свака тачка простора $\mathbb{R}^d$). Овако дефинисан процес назива се процес позадинског зрачења и представља основу за остатак рада.

Пренесимо ознаке за „очекивање” придружено процесу B , при чему ћемо сада очекивање у случају да је $B_0 = x$, за $x \in \mathbb{R}^d$, означавати са $\mathbb{E}^x$. Применом граничних вредности на формуле које смо извели за B^a , добијамо

$$\mathbb{E}(f(B_0)) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)dy, \quad (4.4)$$

$$\mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^0 F(B_s)ds \right) = 2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} yF(x, y)dxdy. \quad (4.5)$$

Веза са Рисовим трансформацијама

Сада ћемо искористити процес позадинског зрачења и хармонијско продужење функције да бисмо дефинисали кључни појам за даљи рад. Овај

⁴Richard Floyd Gundy, амерички математичар

⁵Nicholas Varopoulos, 1940, грчки математичар

процес ћемо записати у облику $B = (X, Y) = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)}, Y)$, где је $X_s = (X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(d)}) \in \mathbb{R}^d$ и $Y_s \in (0, \infty)$ за све $s \in (-\infty, 0)$.

Дефиниција 4.31. Нека је $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и A $(d+1) \times (d+1)$ матрица. Мартингалска трансформација функције f је дата са

$$A * f = \int_{-\infty}^0 (A \nabla U_f(X_s, Y_s)) \cdot dB_s.$$

Дефинишемо и оператор T_A који пројектује мартингалске трансформације на простор функција из $\mathbb{R}^d$ у $\mathbb{C}$ са

$$(T_A f)(x) = \mathbb{E}(A * f | B_0 = x) = \mathbb{E}^x(A * f).$$

Једина преостала ствар коју треба да урадимо да бисмо нашли тражену везу са Рисовом трансформацијом је адекватан избор матрице A . Нека је $1 \leq j \leq d$ произвољно. Посматрајмо $(d+1) \times (d+1)$ матрицу $A^{(j)} = (a_{lk}^{(j)})$ дату са

$$a_{lk}^{(j)} = \begin{cases} 1 & , l = j, k = d+1, \\ -1 & , l = d+1, k = j, \\ 0 & , \text{иначе.} \end{cases}$$

Тада је

$$A^{(j)} * f = - \int_{-\infty}^0 \frac{\partial U_f}{\partial x_j}(X_s, Y_s) dY_s + \int_{-\infty}^0 \frac{\partial U_f}{\partial y}(X_s, Y_s) dX_s^{(j)}.$$

Показаћемо да је $T_{A^{(j)}} f = R_j(f)$. Прецизније, пројекције од оба сабирка у претходном представљању биће једнаке $\frac{1}{2} R_j(f)$.

Нека је $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ произвољна. Хармонијско продужење U_g је непрекидно и има непрекидне први и друге парцијалне изводе. Због тога можемо применити Итоову формулу 4.21, која нам за произвољно $t > 0$ даје

$$U_g(B_0) = U_g(B_{-t}) + \int_{-t}^0 \nabla U_g(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_{-t}^0 \Delta U_g(B_s) ds. \quad (4.6)$$

Приметимо неколико ствари у претходној формули. Прво, како је хармонијско продужење решење Лапласове једначине, важи $\Delta U_g \equiv 0$, па је трећи

сабирак са десне стране једнак нули. Друга ствар коју видимо је да је $U_g(B_0) = U_g(B_0, 0) = g(B_0)$, што такође важи због особина топлотног проширења. За крај, за довољно велико t , $(d + 1)$ -ва компонента Брауновског кретања B_{-t} биће бесконачно велика (због тога што је позадинско зрачење B тако дефинисано), што повлачи да ће одговарајуће Пуасоново језгро у свакој тачки бити бесконачно мало. Самим тим, и хармонијско продужење функције g ће бити произвољно близу нуле. Применом граничне вредности кад $t \rightarrow \infty$ на једнакост 4.6, добијамо

$$g(B_0) = \int_{-\infty}^0 \nabla U_g(B_s) \cdot dB_s. \quad (4.7)$$

Пређимо сада на главни део. Имамо да је

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial U_f}{\partial x_j}(X_s, Y_s) dY_s \right) g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x \left(g(B_0) \int_{-\infty}^0 \frac{\partial U_f}{\partial x_j}(X_s, Y_s) dY_s \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x \left(\int_{-\infty}^0 \nabla U_g(X_s, Y_s) \cdot dB_s \int_{-\infty}^0 \frac{\partial U_f}{\partial x_j}(X_s, Y_s) dY_s \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x \left(\int_{-\infty}^0 \nabla U_g(X_s, Y_s) \cdot dB_s \int_{-\infty}^0 A_0^{(j)} \nabla U_f(X_s, Y_s) \cdot dB_s \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-\infty}^0 \mathbb{E}^x \left(\nabla U_g(X_s, Y_s) \cdot A_0^{(j)} \nabla U_f(X_s, Y_s) \right) ds dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-\infty}^0 \mathbb{E}^x \left(\frac{\partial U_g}{\partial y}(X_s, Y_s) \frac{\partial U_f}{\partial x_j}(X_s, Y_s) \right) ds dx \\ &= \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial U_g}{\partial y}(X_s, Y_s) \frac{\partial U_f}{\partial x_j}(X_s, Y_s) ds \right) \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} 2y \frac{\partial U_f}{\partial x_j}(x, y) \frac{\partial U_g}{\partial y}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty 2y \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial U_f}{\partial x_j} \right)^\wedge (\xi, y) \overline{\left(\frac{\partial U_g}{\partial y} \right)^\wedge (\xi, y)} d\xi dy.$$

У претходном низу једнакости имали смо неколико нетривијалних корака. Прво смо у трећем реду искористили 4.7. Матрица $A_0^{(j)}$ је дата тако да је $a_{d+1,j}^{(j)} = 1$, док су остали чланови нула. Она нам само помаже да применимо теорему 4.11, која нам даје наредни ред. Седми израз добијамо применом Фубинијеве теореме и дефиниције од $\mathbb{E}$, док је наредни последица директне примене формуле 4.5. Последњу једнакост нам даје Планшерелова формула.

Како је хармонијско продужење конволуција са Пуасоновим језгром, једноставно рачунамо његову Фуријеову трансформацију. Уколико уз то искористимо и формуле за Фуријеову трансформацију парцијалних извода, имамо

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_f}{\partial x_j} \right)^\wedge (\xi, y) &= -2\pi i \xi_j e^{-2\pi y |\xi|} f^\wedge(\xi), \\ \left(\frac{\partial U_f}{\partial y} \right)^\wedge (\xi, y) &= -2\pi |\xi| e^{-2\pi y |\xi|} f^\wedge(\xi). \end{aligned}$$

Замена претходних формула у последњи низ једнакости који смо извели, уз коришћење теореме 1.11 и Планшерелове формуле, даје нам

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty 2y \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial U_f}{\partial x_j} \right)^\wedge (\xi, y) \overline{\left(\frac{\partial U_g}{\partial y} \right)^\wedge (\xi, y)} d\xi dy \\ &= \int_0^\infty 2y \int_{\mathbb{R}^d} (-2\pi i \xi_j e^{-2\pi y |\xi|} f^\wedge(\xi)) \left(-2\pi |\xi| e^{-2\pi y |\xi|} \overline{g^\wedge(\xi)} \right) d\xi dy \\ &= 8\pi^2 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} i \xi_j f^\wedge(\xi) \overline{g^\wedge(\xi)} |\xi| y e^{-4\pi y |\xi|} d\xi dy \\ &= -8\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left(-\frac{i \xi_j}{|\xi|} f^\wedge(\xi) \right) \overline{g^\wedge(\xi)} |\xi|^2 \int_0^\infty y e^{-4\pi y |\xi|} dy d\xi \\ &= -8\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} (R_j f)^\wedge(\xi) \overline{g^\wedge(\xi)} |\xi|^2 \left(\frac{1}{4\pi |\xi|} \int_0^\infty e^{-4\pi y |\xi|} dy \right) d\xi \\ &= -8\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} (R_j f)^\wedge(\xi) \overline{g^\wedge(\xi)} |\xi|^2 \frac{1}{(4\pi |\xi|)^2} d\xi \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (R_j f)^\wedge(\xi) \overline{g^\wedge(\xi)} d\xi = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (R_j f)(x) g(x) dx. \end{aligned}$$

Како је функција g произвољна, закључујемо да за свако $x \in \mathbb{R}^d$ важи

$$-\mathbb{E}^x \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial U_f}{\partial x_j}(X_s, Y_s) dY(s) \right) = \frac{1}{2}(R_j f)(x).$$

Потпуно аналогно се показује да је и

$$\mathbb{E}^x \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial U_f}{\partial y}(X_s, Y_s) dX^{(j)}(s) \right) = \frac{1}{2}(R_j f)(x),$$

што заједно даје $T_{A^{(j)}} f = R_j f$.

Оцена норме

Као и у претходној глави, норму Бјорлигнове трансформације ћемо рачунати преко норми Рисових трансформација, користећи везу доказану у теорему 1.29. Због тога желимо да представимо Рисове трансформације другог реда (композиције две Рисове трансформације) преко мартингалских трансформација, аналогно као што смо пре урадили. Дакле, неопходно је да изаберемо одговарајуће матрице.

За $1 \leq i < j \leq d$ дефинишимо $(d+1) \times (d+1)$ матрицу $A^{(ij)} = (a_{kl}^{(ij)})$ са

$$a_{lk}^{(ij)} = \begin{cases} -1 & , l = i, k = j, \\ -1 & , l = j, k = i, \\ 0 & , \text{иначе.} \end{cases}$$

Потпуно аналогно као што смо показали да је $T_{A^{(j)}} f = R_j f$, показује се и да важи $T_{A^{(ij)}} f = R_i R_j f$. Због тога ћемо само навести неколико последњих корака у овом извођењу. Као и пре, $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ је произвољно.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x (A^{(ij)} * f) g(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial U_f}{\partial x_j}(X_s, Y_s) dX_s^{(i)} + \int_{-\infty}^0 \frac{\partial U_f}{\partial x_i}(X_s, Y_s) dX_s^{(j)} \right) g(x) dx \\ &= - \int_0^\infty 2y \int_{\mathbb{R}^d} \left(\left(\frac{\partial U_f}{\partial x_j} \right)^\wedge \overline{\left(\frac{\partial U_g}{\partial x_i} \right)^\wedge} + \left(\frac{\partial U_f}{\partial x_i} \right)^\wedge \overline{\left(\frac{\partial U_g}{\partial x_j} \right)^\wedge} \right) (\xi, y) d\xi dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^\infty 2y \int_{\mathbb{R}^d} 2(-2\pi i \xi_j e^{-2\pi y |\xi|}) (2\pi i \xi_i e^{-2\pi y |\xi|}) f^\wedge(\xi) \overline{g^\wedge(\xi)} d\xi dy \\
 &= 16\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left(-\frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} f^\wedge(\xi) \right) \overline{g^\wedge(\xi)} |\xi|^2 \int_0^\infty y e^{-4\pi y |\xi|} dy d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} (R_i R_j f)^\wedge(\xi) \overline{g^\wedge(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} (R_i R_j f)(x) g(x) dx,
 \end{aligned}$$

што повлачи да је $T_{A^{(ij)}} f = R_i R_j f$. Аргументи које смо користили у овом извођењу су исти као и у случају Рисове трансформације првог реда, тако да их нећемо наводити.

Остаје још да нађемо представљање композиције две исте Рисове трансформације. За $1 \leq j \leq d$ уочимо $(d+1) \times (d+1)$ матрицу $A^{(jj)} = \left(a_{kl}^{(jj)} \right)$ дату са

$$a_{lk}^{(jj)} = \begin{cases} -1 & , l = k = j, \\ -1 & , l = k = d+1, \\ 1 & , l = k \neq j \text{ и } l = k \neq d+1, \\ 0 & , \text{ иначе.} \end{cases}$$

Даљи рачун је потпуно аналоган као и пре, па ћемо навести само неке кључне разлике. За произвољно $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ је

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x (A^{(jj)} * f) g(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x \left(\sum_{i=1, i \neq j}^d \int_{-\infty}^0 \frac{\partial U_f}{\partial x_i}(X_s, Y_s) dX_s^{(i)} \right. \\
 &\quad \left. - \int_{-\infty}^0 \frac{\partial U_f}{\partial y}(X_s, Y_s) dY_s - \int_{-\infty}^0 \frac{\partial U_f}{\partial x_j}(X_s, Y_s) dX_s^{(j)} \right) g(x) dx \\
 &= \int_0^\infty 2y \int_{\mathbb{R}^d} 4\pi^2 e^{-4\pi y |\xi|} \left(\sum_{i=1, i \neq j}^d \xi_i^2 - |\xi|^2 - \xi_j^2 \right) f^\wedge(\xi) \overline{g^\wedge(\xi)} d\xi dy \\
 &= 8\pi^2 \int_0^\infty y \int_{\mathbb{R}^d} e^{-4\pi y |\xi|} (-2\xi_j^2) f^\wedge(\xi) \overline{g^\wedge(\xi)} d\xi dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 16\pi^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left(-\frac{\xi_j^2}{|\xi|^2} f^\wedge(\xi) \right) \overline{g^\wedge(\xi)} \int_0^\infty y e^{-4\pi y |\xi|} dy d\xi \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} (R_j^2 f)^\wedge(\xi) \overline{g^\wedge(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} (R_j^2 f)(x) g(x) dx,
 \end{aligned}$$

што повлачи $T_{Ajj} f = R_j^2 f$.

Како бисмо помоћу претходних представљања успели да дамо оцену норме, потребно је да на неки начин нађемо ограничење мартингалске трансформације функције. То ћемо урадити у наредној теорему, и то применом теореме 4.29.

Теорема 4.32. За функцију $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и $(d+1) \times (d+1)$ матрицу A важи

$$\|T_A \varphi\|_p \leq (p^* - 1) \|A\| \|\varphi\|_p.$$

Доказ. Из дефиниције мартингалске трансформације функције и теореме 4.15 имамо

$$\begin{aligned}
 \|T_A \varphi\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |T_A \varphi(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbb{E}^x(A * \varphi)|^p dx \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x(|A * \varphi|^p) dx = \mathbb{E}(|A * \varphi|^p) = \|A * \varphi\|_p^p.
 \end{aligned}$$

Да бисмо применили теорему 4.29, морамо представити $A * \varphi$ као у дефиницији 4.28. Видимо да је тражено представљање $(A * \varphi)_t = (A * X)_t$, $t \geq 0$, где је мартингал X дат са

$$X_t = \int_{-t}^0 \nabla U_\varphi(B_s) \cdot dB_s.$$

Сада је из 4.29

$$\|A * \varphi\|_p^p = \lim_{t \rightarrow \infty} \|(A * X)_t\|_p^p \leq (p^* - 1)^p \|A\|^p \lim_{t \rightarrow \infty} \|X_t\|_p^p.$$

За крај, применом формуле 4.7, добијамо

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \|X_t\|_p^p &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x(|X_t|^p) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x \left(\left| \int_{-t}^0 \nabla U_\varphi(B_s) \cdot dB_s \right|^p \right) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x \left(\left| \int_{-\infty}^0 \nabla U_\varphi(B_s) \cdot dB_s \right|^p \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x (|\varphi(B_0)|^p) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x (|\varphi(x)|^p) dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x)|^p dx = \|\varphi\|_p^p.
 \end{aligned}$$

Спајање свих показаних формула даје тражену неједнакост. $\square$

Применом претходне теореме на матрице $A^{(ij)}$, за $1 \leq i, j \leq d$, добијамо оцене норми Рисових трансформација другог реда. Једноставно се показује да су (комплексне) норме ових матрица једнаке 1, па важи

$$\|R_i R_j f\|_p \leq (p^* - 1) \|f\|_p.$$

Ово директно повлачи и одговарајућу оцену за норму Бјорлингове трансформације, али ћемо њу извести мало другачије, што ће бити јасно из поставке наредне теореме.

Теорема 4.33. За $1 < p < \infty$ и Бјорлингову трансформацију S имамо

$$\|S\|_p \leq 4(p^* - 1).$$

У случају рестрикције Бјорлингове трансформације на реално-вредносне функције, важи

$$\|S_r\|_p \leq 2\sqrt{2}(p^* - 1).$$

Доказ. Из теореме 1.29 имамо

$$S = R_2^2 - R_1^2 + 2iR_1R_2.$$

Како већ знамо одговарајуће матрице за Рисове трансформације другог реда, из линеарности мартингалске трансформације (по матрицама) долазимо до закључка да ће за 3×3 матрицу B , дату са

$$B = A^{(2,2)} - A^{(1,1)} + 2iA^{(1,2)} = \begin{pmatrix} 2 & -2i & 0 \\ -2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

важити $T_B f = S f$. Сада треба да израчунамо норму ове матрице. Овде разликујемо реални и комплексни случај.

Нека је $v = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$, $|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1$. Имамо да је

$$\begin{aligned} |Bv| &= |(2x - 2iy, -2ix - 2y, 0)^T| \\ &= \sqrt{|2x - 2iy|^2 + |-2ix - 2y|^2 + |0|^2} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Посматрајући супремум по свим векторима v који задовољавају дате услове, видимо да је он баш једнак $2\sqrt{2}$, па је $\|B\|_r = 2\sqrt{2}$.

Комплексни случај је мало компликованији. Посматрајмо $v = (x, y, z)^T \in \mathbb{C}^3$, $|v| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} \leq 1$, при чему ћемо користити запис $\operatorname{Re} x = x_1$, $\operatorname{Im} x = x_2$. Сада је

$$\begin{aligned} |Bv| &= |(2x - 2iy, -2ix - 2y, 0)^T| = 2\sqrt{|x - iy|^2 + |ix + y|^2 + |0|^2} \\ &= 2\sqrt{(x_1 + y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2 + (-x_2 + y_1)^2 + (x_1 + y_2)^2} \\ &= 2\sqrt{2}\sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1} \leq 4\sqrt{|x|^2 + |y|^2} \leq 4. \end{aligned}$$

Аналогно као у реалном случају, супремум претходне вредности је баш 4.

Сада можемо применити теорему 4.32, па за произвољну реално-вредносну функцију $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ добијамо

$$\|S\varphi\|_p = \|T_B\varphi\| \leq (p^* - 1)\|B\|_r\|\varphi\|_p = 2\sqrt{2}(p^* - 1)\|\varphi\|_p.$$

Аналогно, у случају комплексно-вредносне $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ је

$$\|S\varphi\|_p = \|T_B\varphi\| \leq (p^* - 1)\|B\|\|\varphi\|_p = 4(p^* - 1)\|\varphi\|_p.$$

Последње две неједнакости повлаче тражено. □

4.3 Побољшање оцене коришћењем топлотног продужења

Да бисмо побољшали оцене добијене у претходној секцији, служићемо се идејама из главе 3. Као и тада, уместо хармонијског користићемо топлотно продужење функција, само у мало другачијем облику, прилагођеном овом случају.

Топлотно продужење

Овим проблемом смо се већ бавили у секцији 3.1. Због тога ћемо изоставити сва извођења и само навести основне појмове и особине које ће нам бити потребне.

Дефиниција 4.34. За $(z, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ дефинишимо топлотно језгро са

$$p_t(z) = \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{|z|^2}{2t}}.$$

Напомена. Приметимо да је ово заправо густина дводимензионалне нормалне расподеле $\mathcal{N}(0, tI)$ у тачки z . Ово запажање ће нам бити доста важно на многим местима. Такође, ово топлотно језгро није исто као оно које смо дефинисали пре, већ је „рескалирано”, а разлог за то ћемо видети у неком од наредних доказа.

Дефиниција 4.35. Топлотно продужење функције $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ на горњу полураван је функција $U_\varphi : \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ дата са

$$U_\varphi(z, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi) p_t(z - \xi) d\xi.$$

Једноставном адаптацијом рачуна из секције 3.1 добијамо особине овог топлотног продужења.

Топлотно продужење U_φ је решење топлотне једначине

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta_y u(y, t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(y, t), \quad (y, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \\ u(y, 0) &= \varphi(y), \quad y \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Фуријеова трансформација топлотног језгра p_t је $p_t^\wedge(\xi) = e^{-2\pi^2 t |\xi|^2}$, па је $U_\varphi^\wedge(\xi, t) = \varphi^\wedge(\xi) e^{-2\pi^2 t |\xi|^2}$ (овде, као и надаље, када причамо о Фуријеовој трансформацији топлотног продужења, сматрамо да је оно само функција по „просторној” променљивој).

Просторно-временско Брауновско кретање

Приступ који ћемо овде обрадити је сличан оном из претходне секције. Једна од разлика је то што ћемо се одмах ограничити на случај $d = 2$, као

и то да компонента Брауновског кретања у $(0, \infty)$ неће бити случајна, већ директно одређена „временском” променљивом.

Посматрајмо произвољно дводимензионално Брауновско кретање Z_t , при чему Z_0 може једнако вероватно бити било која тачка из $\mathbb{R}^2$. Фиксирајмо $T > 0$ и дефинишимо просторно-временско Брауновско кретање B_t са

$$B_t = (Z_t, T - t), \quad \text{за свако } t \in [0, T].$$

Појмове „очекивања” уводимо исто као у претходној секцији. За функцију $f : \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ и $t \in [0, T]$ дефинишемо

$$\mathbb{E}(f(B_t)) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_z(f(B_t)) dz,$$

где је $\mathbb{E}_z$ очекивање при услову да је $Z_0 = z$.

Из особина топлотног продужења имамо $U_\varphi(B_T) = U_\varphi(Z_T, 0) = \varphi(Z_T)$. Како функција U_φ има непрекидне прве и друге изводе по свим координатама, на основу Итоове формуле 4.22 имамо

$$\begin{aligned} \varphi(Z_T) = U_\varphi(B_T) &= U_\varphi(B_0) + \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(U_\varphi(Z_t, T - t)) dt \\ &+ \int_0^T \nabla_z(U_\varphi(Z_t, T - t)) \cdot dZ_t + \frac{1}{2} \int_0^T \Delta_z(U_\varphi(Z_t, T - t)) dt \\ &= U_\varphi(B_0) - \int_0^T \frac{\partial U_\varphi}{\partial t}(Z_t, T - t) dt \\ &+ \int_0^T \nabla_z(U_\varphi(Z_t, T - t)) \cdot dZ_t + \frac{1}{2} \int_0^T \Delta_z(U_\varphi(Z_t, T - t)) dt. \end{aligned}$$

Користећи да је топлотно продужење решење одговарајуће парцијалне једначине, добијамо

$$\varphi(Z_T) = U_\varphi(B_0) + \int_0^T \nabla_z(U_\varphi(B_t)) \cdot dZ_t. \quad (4.8)$$

Исти рачун (без прве једнакости), за произвољно $t \in [0, T]$ уместо T , нам даје да је $U_\varphi(B_t)$ мартингал.

Оцена норме

Као и у претходној секцији, и овде ћемо везу између Рисових трансформација и мартингала наћи преко мартингалске трансформације, у овом случају од топлотног продужења.

Дефиниција 4.36. За произвољну 2×2 матрицу A , $T > 0$ и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, дефинишемо мартингалску трансформацију

$$(A * U_\varphi)_T = \int_0^T (A \nabla_z U_\varphi(B_t)) \cdot dZ_t.$$

Додатно, за $z \in \mathbb{R}^2$ дефинишемо пројекцију ове трансформације на простор функција из $\mathbb{R}^2$ у $\mathbb{C}$ са

$$(S_A^T \varphi)(z) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_w((A * U_\varphi)_T \mid Z_T = z) p_T(z - w) dw.$$

Наредна тру става директно ће дати оцену норме Бјорлингове трансформације.

Став 4.37. Нека је $1 < p < \infty$ и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Тада важи

$$\|S_A^T \varphi\|_p \leq (p^* - 1) \|A\| (\mathbb{E}(|\varphi(Z_T) - U_\varphi(B_0)|^p))^{\frac{1}{p}}.$$

Доказ. Нека је $1 < q < \infty$ такво да важи $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Користећи Хелде-рову неједнакост, Фубинијеву теорему, теорему 4.15 и рачунање очекивања условљавањем, имамо да је

$$\begin{aligned} \|S_A^T \varphi\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^2} |S_A^T \varphi(z)|^p dz = \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_w((A * U_\varphi)_T \mid Z_T = z) p_T(z - w) dw \right|^p dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_w((A * U_\varphi)_T \mid Z_T = z) p_T(z - w)^{\frac{1}{p}} p_T(z - w)^{\frac{1}{q}} dw \right|^p dz \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbb{E}_w((A * U_\varphi)_T \mid Z_T = z)|^p p_T(z - w) dw \left(\int_{\mathbb{R}^2} p_T(z - w) dw \right)^{\frac{p}{q}} dz \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_w(|(A * U_\varphi)_T|^p \mid Z_T = z) p_T(z - w) dz dw \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_w (|(A * U_\varphi)_T|^p) dw = \mathbb{E}(|(A * U_\varphi)_T|^p) = \|(A * U_\varphi)_T\|_p^p.$$

На последњи израз можемо применити теорему 4.29. Тако добијамо

$$\|(A * U_\varphi)_T\|_p \leq (p^* - 1) \|A\| \left\| \int_0^T \nabla_z U_\varphi(B_s) \cdot dZ_s \right\|_p.$$

Примена формуле 4.8 завршава доказ. $\square$

Став 4.38. Нека је $2 \leq p < \infty$ и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Тада важи

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|\varphi(Z_T) - U_\varphi(B_0)|^p) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|\varphi(Z_T)|^p) = \|\varphi\|_p^p.$$

Доказ. Нека је носач од φ садржан у компакту K . Фиксирајмо $z \in \mathbb{R}^2$ и $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Из биномне формуле, неједнакости троугла и линеарности очекивања имамо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_z(|\varphi(Z_T) - U_\varphi(B_0)|^p) &\leq \mathbb{E}_z \left(\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} |U_\varphi(Z_0, T)|^{p-k} |\varphi(Z_T)|^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} |U_\varphi(z, T)|^{p-k} \mathbb{E}_z(|\varphi(Z_t)|^k) \\ &\leq \mathbb{E}_z(|\varphi(Z_T)|^p) + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} (\mathbb{E}_z(|\varphi(Z_T)|))^p \mathbb{E}_z(|\varphi(Z_t)|^k), \end{aligned}$$

при чему смо у последњој неједнакости користили да је

$$|U_\varphi(z, T)| = \left| \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(w) p_T(z - w) dw \right| \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(w)| p_T(z - w) dw = \mathbb{E}_z(|\varphi(Z_T)|).$$

Да бисмо олакшали запис, за $(z, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T]$ посматрајмо вероватносну меру на $\mathbb{R}^2$ дату са $\mu_{z,t}(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_B(w) p_t(z - w) dw$, где је B произвољан Лебег-мерљив скуп у равни. За $0 < k < p$, користећи Хелдерову неједнакост, имамо

$$\begin{aligned} (\mathbb{E}_z(|\varphi(Z_T)|))^p &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(w)| p_T(z - w) dw \right)^{p-k} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(w)| \chi_K(w) d\mu_{z,T}(w) \right)^{p-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(w)|^{p-k} d\mu_{z,T}(w) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_K(w) d\mu_{z,T}(w) \right)^{p-k-1} \\
 &= \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|^{p-k}) (\mu_{z,T}(K))^{p-k-1}, \\
 \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|^k) &= \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(w)|^k d\mu_{z,T}(w) = \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(w)|^k \chi_K(w) d\mu_{z,T}(w) \\
 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(w)|^p d\mu_{z,T}(w) \right)^{\frac{k}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_K(w) d\mu_{z,T}(w) \right)^{1-\frac{k}{p}} \\
 &= \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|^p)^{\frac{k}{p}} (\mu_{z,T}(K))^{1-\frac{k}{p}}.
 \end{aligned}$$

Комбинујући претходне резултате, добијамо

$$\begin{aligned}
 &(\mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|))^{p-k} \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|^k) \\
 &\leq \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|^{p-k}) (\mu_{z,T}(K))^{p-k-1} \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|^p)^{\frac{k}{p}} (\mu_{z,T}(K))^{1-\frac{k}{p}} \\
 &\leq \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|^p)^{\frac{p-k}{p}} (\mu_{z,T}(K))^{1-\frac{p-k}{p}} (\mu_{z,T}(K))^{p-k-1} \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|^p)^{\frac{k}{p}} (\mu_{z,T}(K))^{1-\frac{k}{p}} \\
 &= \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|^p) (\mu_{z,T}(K))^{p-k}.
 \end{aligned}$$

Једино нисмо покрили случај $k = 0$, где важи

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|))^p &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(w)| d\mu_{z,T}(w) \right)^p = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(w)| \chi_K(w) d\mu_{z,T}(w) \right)^p \\
 &\leq \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|^p) (\mu_{z,T}(K))^{p-1} \leq \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|^p) (\mu_{z,T}(K))^p.
 \end{aligned}$$

Када све ово заменимо у прву процену коју смо добили, имамо

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T) - U_\varphi(B_0)|^p) &\leq \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|^p) + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|^p) (\mu_{z,T}(K))^{p-k} \\
 &= \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T)|^p) (1 + \mu_{z,T}(K))^p.
 \end{aligned}$$

Приметимо да леву страну претходне неједнакости можемо записати као

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_z (|\varphi(Z_T) - U_\varphi(B_0)|^p) &= \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(w) - U_\varphi(z, T)|^p d\mu_{z,T}(w) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \left| \varphi(w) - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi) d\mu_{z,T}(\xi) \right|^p d\mu_{z,T}(w) = \|H(\varphi)\|_p^p,
 \end{aligned}$$

где је $H : L^p(K, \mu_{z,T}) \rightarrow L^p(K, \mu_{z,T})$ дат са $H(\varphi) = \varphi - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(w) d\mu_{z,T}(w)$. Једноставно видимо и

$$\mathbb{E}_z(|\varphi(Z_T)|^p) = \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(w)|^p d\mu_{z,T}(w) = \|\varphi\|_p^p.$$

Из свега што смо до сада показали, имамо да је за произвољан природан $p \geq 2$ задовољено

$$\|H(\varphi)\|_p \leq (1 + \mu_{z,T}(K)) \|\varphi\|_p.$$

Фиксирајмо сада неко $p \geq 2$. Јасно је да је $p \in [[p], [p] + 1]$, па применом Рис-Торинове⁶ теореме на оператор H и просторе $L^{[p]}(K, \mu_{z,T})$ и $L^{[p]+1}(K, \mu_{z,T})$ закључујемо да је

$$\|H(\varphi)\|_p \leq (1 + \mu_{z,T}(K)) \|\varphi\|_p \leq \left(1 + \frac{m(K)}{2\pi T}\right) \|\varphi\|_p,$$

односно

$$\mathbb{E}_z(|\varphi(Z_T) - U_\varphi(B_0)|^p) \leq \left(1 + \frac{m(K)}{2\pi T}\right)^p \mathbb{E}_z(|\varphi(Z_T)|^p).$$

Интеграљењем претходне неједнакости по свим $z \in \mathbb{R}^2$, добијамо

$$\mathbb{E}(|\varphi(Z_T) - U_\varphi(B_0)|^p) \leq \left(1 + \frac{m(K)}{2\pi T}\right)^p \mathbb{E}(|\varphi(Z_T)|^p).$$

Примена граничне вредности кад $T \rightarrow \infty$ нам даје

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|\varphi(Z_T) - U_\varphi(B_0)|^p) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|\varphi(Z_T)|^p).$$

За крај, приметимо да за произвољно $T > 0$, применом Фубинијеве теореме, важи

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\varphi(Z_T)|^p) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_z(|\varphi(Z_T)|^p) dz = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(w)|^p p_T(z - w) dw dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(w)|^p \int_{\mathbb{R}^2} p_T(z - w) dz dw = \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(w)|^p dw = \|\varphi\|_p^p, \end{aligned}$$

чиме завршавамо доказ. □

⁶Olof Thorin, 1912 - 2004, шведски математичар

Став 4.39. Нека су $i, j \in \{1, 2\}$ произвољни. Посматрајмо 2×2 матрицу $A^{i,j}$ која на месту (i, j) има вредност -1, а на осталим местима 0. Тада за произвољне $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ важи

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(z) (S_{A^{i,j}}^T \varphi)(z) dz = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(z) (R_i R_j \varphi)(z) dz.$$

Доказ. Показаћемо само случај када је $i = j = 1$, јер остали следе аналогно. Како и $S_{A^{1,1}}^T$ и $R_1 R_1$ сликају реално-вредносне функције у реално-вредносне функције, прво ћемо сматрати да су такве и φ и ψ .

Користећи формулу 4.8, добијамо

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(z) (S_{A^{1,1}}^T \varphi)(z) dz &= \int_{\mathbb{R}^2} \psi(z) \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_w ((A^{1,1} * U_\varphi)_T | Z_T = z) p_T(z - w) dw dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_w (\psi(Z_T) (A^{1,1} * U_\varphi)_T | Z_T = z) p_T(z - w) dz dw \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_w \left(\psi(Z_T) \int_0^T \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) dZ_t^{(1)} \right) dw = - \mathbb{E} \left(U_\varphi(B_T) \int_0^T \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) dZ_t^{(1)} \right) \\ &= - \mathbb{E} \left(U_\varphi(B_0) \int_0^T \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) dZ_t^{(1)} \right) - \mathbb{E} \left(\int_0^T \nabla_z U_\psi(B_t) \cdot dZ_t \int_0^T \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) dZ_t^{(1)} \right). \end{aligned}$$

Посматраћемо одвојено сабирке из последње једнакости. За произвољно $z \in \mathbb{R}^2$ имамо

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_z \left| U_\psi(B_0) \int_0^T \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) dZ_t^1 \right| \\ &\leq (\mathbb{E}_z |U_\psi(B_0)|^2)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}_z \left| \int_0^T \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) dZ_t^1 \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\mathbb{E}_z |U_\psi(B_0)|^2)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \mathbb{E}_z \left| \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\mathbb{E}_z |U_\psi(B_0)|^2)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \mathbb{E}_z |\nabla_z U_\varphi(B_t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\mathbb{E}_z |U_\psi(B_0)|^2)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}_z \left(\int_0^T |\nabla_z U_\varphi(B_t)|^2 dt \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= (\mathbb{E}_z |U_\psi(B_0)|^2)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}_z \left| \int_0^T \nabla_z U_\varphi(B_t) \cdot dZ_t \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= (\mathbb{E}_z |U_\psi(B_0)|^2)^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}_z |\varphi(Z_T) - U_\psi(B_0)|^2)^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

где смо у прво користили Коши-Шварцову неједнакост, затим теорему 4.11, неједнакост $\left| \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) \right| \leq |\nabla_z U_\varphi(B_t)|$, потом Фубинијеву теорему, поново изометричност Итоовог интеграла (теорема 4.11) и на крају формулу 4.8. Из овога, поново примењујући Коши-Шварцову неједнакост, добијамо

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left| U_\psi(B_0) \int_0^T \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) dZ_t^1 \right| = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_z \left| U_\psi(B_0) \int_0^T \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) dZ_t^1 \right| dz \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbb{E}_z |U_\psi(B_0)|^2)^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}_z |\varphi(Z_T) - U_\psi(B_0)|^2)^{\frac{1}{2}} dz \\
 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_z |U_\psi(B_0)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_z |\varphi(Z_T) - U_\psi(B_0)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= (\mathbb{E} |U_\psi(B_0)|^2)^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E} |\varphi(Z_T) - U_\psi(B_0)|^2)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Став 4.38 нам даје да други чинилац у претходном изразу тежи ка $\|\varphi\|_2$ кад $T \rightarrow \infty$, док за први чинилац имамо

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} |U_\psi(B_0)|^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_z |U_\psi(B_0)|^2 dz = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_z |U_\psi(Z_0, T)|^2 dz = \int_{\mathbb{R}^2} |U_\psi(z, T)|^2 dz \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |U_\psi(z, T)| \frac{1}{2\pi T} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \psi(w) e^{-\frac{|w-z|^2}{2T}} \right| dz \leq \frac{\|\psi\|_1}{2\pi T} \int_{\mathbb{R}^2} |U_\psi(z, T)| dz \\
 &\leq \frac{\|\psi\|_1}{2\pi T} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\psi(w)| p_T(z-w) dw dz = \frac{\|\psi\|_1^2}{2\pi T} \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

кад $T \rightarrow \infty$. Заједно са претходно показаним индентитетима, добијамо

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left| U_\psi(B_0) \int_0^T \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) dZ_t^1 \right| = 0,$$

што повлачи и

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(U_\psi(B_0) \int_0^T \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) dZ_t^1 \right) = 0. \quad (4.9)$$

Пређимо сада на анализу другог сабирка од пре.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\int_0^T \nabla_z U_\psi(B_t) \cdot dZ_t \int_0^T \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) dZ_t^{(1)} \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{E}_z \left(\int_0^T \nabla_z U_\psi(B_t) \cdot dZ_t \int_0^T \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) dZ_t^{(1)} \right) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^T \mathbb{E}_z \left(\frac{\partial U_\psi}{\partial x}(B_t) \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) \right) dt dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial U_\psi}{\partial x}(w, T-t) \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(w, T-t) p_t(z-w) dw dt dz \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial U_\psi}{\partial x}(w, T-t) \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(w, T-t) \int_{\mathbb{R}^2} p_t(z-w) dz dw dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial U_\psi}{\partial x}(w, T-t) \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(w, T-t) dw dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\left(\frac{\partial U_\psi}{\partial x} \right)^\wedge}(\xi, T-t) \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial x} \right)^\wedge(\xi, T-t) d\xi dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} 4\pi^2 \xi_1^2 e^{-4\pi^2(T-t)|\xi|^2} \overline{\psi^\wedge}(\xi) \varphi^\wedge(\xi) d\xi dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} 4\pi^2 \xi_1^2 e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \overline{\psi^\wedge}(\xi) \varphi^\wedge(\xi) d\xi dt. \end{aligned}$$

Овде смо прво користили теорему 4.11, након тога Фубинијеву теорему, па Планшерелов идентитет, где је важно напоменути да је ψ , а самим тим и њено топлотно продужење, реално-вредносна функција. Последње једнакости добијамо из особина Фуријеове трансформације извода (сличне рачуне смо изводили у претходној секцији). У последњем кораку смо урадили линеарну смену променљиве t . Како је подинтегрална функција интеграбилна на

$(0, \infty) \times \mathbb{R}^2$, из теореме о доминантној конвергенцији добијамо

$$\begin{aligned}
 & - \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\int_0^T \nabla_z U_\psi(B_t) \cdot dZ_t \int_0^T \frac{\partial U_\varphi}{\partial x}(B_t) dZ_t^1 \right) \\
 & = - \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} 4\pi^2 \xi_1^2 e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \overline{\psi^\wedge}(\xi) \varphi^\wedge(\xi) d\xi dt \\
 & = - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} 4\pi^2 \xi_1^2 e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} \overline{\psi^\wedge}(\xi) \varphi^\wedge(\xi) d\xi dt \\
 & = - \int_{\mathbb{R}^2} 4\pi^2 \xi_1^2 \overline{\psi^\wedge}(\xi) \varphi^\wedge(\xi) \int_0^\infty e^{-4\pi^2 t |\xi|^2} dt d\xi \\
 & = - \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\psi^\wedge}(\xi) \frac{\xi_1^2}{|\xi|^2} \varphi^\wedge(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(z) R_1^2 \varphi(z) dz.
 \end{aligned}$$

Аргументи које овде користимо су исти као и код сличних извођења у претходној секцији, с тим што је овде битно што је ψ реално-вредносна. Комбинујући претходну једнакост са 4.9 имамо

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(z) (S_{A^{1,1}}^T \varphi)(z) dz = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(z) (R_1^2 \varphi)(z) dz,$$

у случају да су $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ реално-вредносне. Из особина $S_{A^{1,1}}^T$ и Рисових трансформација (које смо поменули на почетку доказа), прво добијамо да ова једнакост важи за реално-вредносну ψ и комплексно-вредносу φ , а потом и за комплексно-вредносне φ и ψ . $\square$

Сада када смо показали помоћне ставове, прелазимо на главну теорему

Теорема 4.40. За $1 < p < \infty$ и Бјорлингову трансформацију S имамо

$$\|S\|_p \leq 2(p^* - 1).$$

У случају рестрикције Бјорлингове трансформације на реално-вредносне функције, важи

$$\|S_r\|_p \leq \sqrt{2}(p^* - 1).$$

Доказ. Нека је $p \geq 2$ и $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ произвољне. Нека је q такво да важи $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. На основу теореме 1.29 и става 4.39 добијамо

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(z)(S\varphi)(z)dz &= \int_{\mathbb{R}^2} \psi(z)((R_2^2 - R_1^2 + 2iR_1R_2)\varphi)(z)dz \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(z)(S_{A^{2,2}}^T\varphi - S_{A^{1,1}}^T\varphi + iS_{A^{1,2}}^T\varphi + iS_{A^{2,1}}^T\varphi)(z)dz. \end{aligned}$$

Из дефиниције оператора S_A^T видимо да је он линеаран по матрици A , па из ставова 4.37 и 4.38 за матрицу $B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$ важи

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(z)(S\varphi)(z)dz &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \psi(z)(S_B^T\varphi)(z)dz \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \|\psi\|_q \|S_B^T\varphi\|_p \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \|\psi\|_q (p-1) \|B\| (\mathbb{E}(|\varphi(Z_T) - U_\varphi(B_0)|^p))^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (p-1) \|B\| \|\psi\|_q \|\varphi\|_p, \end{aligned}$$

при чему смо у првом кораку користили Хелдерову неједнакост.

Стандардним поступком добијамо да за је произвољно $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$

$$\|Sf\|_p \leq (p-1) \|B\| \|f\|_p.$$

Разлику између општег и реално-вредносног случаја чини баш норма матрице B . У општем случају (на комплексним векторима) она је једнака 2, док је на реално-вредносним векторима она $\sqrt{2}$.

Да бисмо завршили доказ, неопходно је да обрадимо и случај $1 < p < 2$. Њега добијамо из дуалности. Нека је q такво да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Јасно је да је тада $q > 2$. За произвољно $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ имамо

$$\begin{aligned} \|Sf\|_p &= \sup_{\|g\|_q=1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} (Sf)(z)g(z)dz \right| = \sup_{\|g\|_q=1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} f(z)(Sg)(z)dz \right| \\ &\leq \sup_{\|g\|_q=1} \|f\|_p \|Sg\|_q \leq \sup_{\|g\|_q=1} \|f\|_p \|S\|_q \|g\|_q \\ &= (q-1) \|B\| \|f\|_p = (p^* - 1) \|B\| \|f\|_p, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

4.4 Побољшање оцене применом интерполације

У свим претходним покушајима оцене норме смо се ослањали на везу између Рисових и Бјорлингове трансформације дату теоремом 1.29. То је био један од разлога зашто нисмо могли да се још више приближимо константи из Ивањецове хипотезе. Метод који ћемо обрадити у овој секцији неће користити претходно поменућу везу, али ће бити доста базиран на свим резултатима досад показаним у овој глави.

Биркхолдјева неједнакост

Прво место на ком ћемо поправити оцену јесте Биркхолдјева неједнакост 4.26. Да бисмо то успели, мораћемо да смањимо скуп мартингала на којих је можемо применити.

Став 4.41. Нека је $p \geq 2$. Посматрајмо два непрекидна мартингала $X = (X^{(1)}, X^{(2)})$ и $Y = (Y^{(1)}, Y^{(2)})$ са вредностима у $\mathbb{R}^2$, која можемо представити у облику

$$X_t^{(i)} = \int_0^t H_s^{(i)} \cdot dB_s \quad \text{и} \quad Y_t^{(i)} = \int_0^t K_s^{(i)} \cdot dB_s,$$

за $i \in \{1, 2\}$, где је B Брауновско кретање у равни, а $H^{(1)}, H^{(2)}, K^{(1)}, K^{(2)} \in L_{ad}^2([0, \infty) \times \Omega)$, са вредностима такође у $\mathbb{R}^2$. Ако је

$$|K_s^{(1)}| = |K_s^{(2)}| \quad \text{и} \quad K_s^{(1)} \cdot K_s^{(2)} = 0 \quad \text{за свако } s \geq 0,$$

и мартингал $\sqrt{\frac{p}{p-1}} Y^{(1)}$ диференцијално подређен мартингалу X , за свако $t \geq 0$ важи

$$\|Y_t\|_p \leq (p-1) \|X_t\|_p.$$

Доказ. Овај став ћемо показати слично као и теорему 4.26. Заправо ће добар део ових доказа бити исти, тако да ћемо се фокусирати на оне делове који се разликују. Користићемо исте ознаке као и тамо.

И овде можемо применити све редукције као и пре, тако да ћемо сматрати да су мартингали X и Y ограничени и квадратно-интеграбилни. Део доказа

који се разликује јесте процена члана I . Уколико покажемо да је његово очекивање непозитивно, добићемо тражену неједнакост. На основу става 2.3 (3) имамо

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 & \left(u_{x_i x_j}(X(t_{l-1}), Y(t_{l-1})) h_l^{(i)} h_l^{(j)} + 2u_{x_i y_j}(X(t_{l-1}), Y(t_{l-1})) h_l^{(i)} k_l^{(j)} \right. \\ & \left. + u_{y_i y_j}(X(t_{l-1}), Y(t_{l-1})) k_l^{(i)} k_l^{(j)} \right) = -\alpha_p(A + B + C) \leq -\alpha_p(A + B). \end{aligned}$$

Као и пре, сумирајмо претходне неједнакости за све $1 \leq l \leq n$ и применимо $\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0}$. Како су мартингали реално-вредносни, скаларни производ је једнак свом реалном делу. Због тога је

$$\left(\frac{y}{|y|}, k \right)^2 = \left\langle \frac{y}{|y|}, k \right\rangle^2 = \left(\frac{k^{(1)} y^{(1)}}{|y|} \right)^2 + \left(\frac{k^{(2)} y^{(2)}}{|y|} \right)^2 + 2 \frac{k^{(1)} k^{(2)} y^{(1)} y^{(2)}}{|y|^2},$$

па заменом у претходну неједнакост добијамо

$$\begin{aligned} I \leq & -\alpha_p p(p-1) \sum_{i=1}^2 \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{l=1}^n (|X(t_{l-1})| + |Y(t_{l-1})|)^{p-2} \left(|h_l^{(i)}|^2 - |k_l^{(i)}|^2 \right) \\ & -\alpha_p p(p-2) \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{l=1}^n |Y(t_{l-1})|^{-1} (|X(t_{l-1})| + |Y(t_{l-1})|)^{p-1} \\ & \cdot \left(|k_l^{(1)}|^2 + |k_l^{(2)}|^2 - \left(\frac{Y^{(1)}(t_{l-1})}{|Y(t_{l-1})|} \right)^2 |k_l^{(1)}|^2 - \left(\frac{Y^{(2)}(t_{l-1})}{|Y(t_{l-1})|} \right)^2 |k_l^{(2)}|^2 \right. \\ & \left. - 2 \frac{Y^{(1)}(t_{l-1})}{|Y(t_{l-1})|} \frac{Y^{(2)}(t_{l-1})}{|Y(t_{l-1})|} k_l^{(1)} k_l^{(2)} \right). \end{aligned}$$

На основу теореме 4.24 (услови важе због особина мартингала X и Y , аналогно као у теореме 4.26), претходна неједнакост постаје

$$\begin{aligned} I \leq & -\alpha_p p(p-1) \int_0^t (|X_s| + |Y_s|)^{p-2} d(\langle X \rangle_s - \langle Y \rangle_s) \\ & -\alpha_p p(p-2) \int_0^t |Y_s|^{-1} (|X_s| + |Y_s|)^{p-1} \left(d\langle Y \rangle_s - \left(\frac{Y_s^{(1)}}{|Y_s|} \right)^2 d\langle Y^{(1)} \rangle_s \right. \\ & \left. - \left(\frac{Y_s^{(2)}}{|Y_s|} \right)^2 d\langle Y^{(2)} \rangle_s - 2 \frac{Y_s^{(2)}}{|Y_s|} \frac{Y_s^{(1)}}{|Y_s|} d\langle Y^{(1)}, Y^{(2)} \rangle_s \right). \end{aligned}$$

Услови става повлаче да је $d\langle Y^{(1)} \rangle = d\langle Y^{(2)} \rangle$ и $d\langle Y^{(1)}, Y^{(2)} \rangle = 0$. Ако уз то применимо и да је $|Y_s|^{-1}(|X_s| + |Y_s|) \geq 1$, имамо да важи

$$\begin{aligned}
 I &\leq -\alpha_p p(p-1) \int_0^t (|X_s| + |Y_s|)^{p-2} d(\langle X \rangle_s - \langle Y \rangle_s) \\
 &\quad - \alpha_p p(p-2) \int_0^t (|X_s| + |Y_s|)^{p-2} \left(d\langle Y \rangle_s - \frac{(Y_s^{(1)})^2 + (Y_s^{(2)})^2}{|Y_s|^2} d\langle Y^{(1)} \rangle_s \right) \\
 &= -\alpha_p p(p-1) \int_0^t (|X_s| + |Y_s|)^{p-2} \left(d\langle X \rangle_s - d\langle Y \rangle_s + \frac{p-2}{p-1} \frac{1}{2} d\langle Y \rangle_s \right) \\
 &= -\alpha_p p(p-1) \int_0^t (|X_s| + |Y_s|)^{p-2} \left(d\langle X \rangle_s - \frac{p}{p-1} d\langle Y^{(1)} \rangle_s \right) \\
 &= -\alpha_p p(p-1) \int_0^t (|X_s| + |Y_s|)^{p-2} \left(d\langle X \rangle_s - d\left\langle \sqrt{\frac{p}{p-1}} Y^{(1)} \right\rangle_s \right) \leq 0,
 \end{aligned}$$

где је последња неједнакост тачна због диференцијалне подређености из услова става. Сада је јасно и $\mathbb{E}(I) \leq 0$, из чега добијамо тражено. $\square$

Оцена норме

Поставка овог приступа се у потпуности наставља на секцију 4.3. Користићемо исте објекте и ознаке као и тамо.

Став 4.41, примењен на адекватне мартингале, даје следећу неједнакост.

Последица 4.42. Нека је $p \geq 2$ и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Тада за свако $t > 0$ важи

$$\|(B * U_\varphi)_t\|_p \leq \sqrt{2p(p-1)} \|(I * U_\varphi)_t\|_p.$$

Доказ. Посматрајмо мартингале

$$\begin{aligned}
 X_t &= \sqrt{\frac{2p}{p-1}} (I * U_\varphi)_t = \sqrt{\frac{2p}{p-1}} \int_0^t \nabla_z U_\varphi(B_s) \cdot dZ_s \\
 &= \left(\sqrt{\frac{2p}{p-1}} \int_0^t \nabla_z U_{\varphi_1}(B_s) \cdot dZ_s, \sqrt{\frac{2p}{p-1}} \int_0^t \nabla_z U_{\varphi_2}(B_s) \cdot dZ_s \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_t &= (B * U_\varphi)_t = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \nabla_z U_\varphi(B_s) \cdot dZ_s \\
 &= \left(\int_0^t \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \nabla_z U_{\varphi_1}(B_s) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla_z U_{\varphi_2}(B_s) \right) \cdot dZ_s, \right. \\
 &\quad \left. \int_0^t \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \nabla_z U_{\varphi_2}(B_s) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla_z U_{\varphi_1}(B_s) \right) \cdot dZ_s \right).
 \end{aligned}$$

Прво ћемо проверити да Y задовољава услове става 4.41. Користићемо исте ознаке као и тамо.

$$\begin{aligned}
 |K_s^1|^2 &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \nabla_z U_{\varphi_1}(B_s) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla_z U_{\varphi_2}(B_s) \right|^2 \\
 &= \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial x}(B_s) - \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial y}(B_s) \\ -\frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial y}(B_s) - \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial x}(B_s) \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= \left(\frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial x}(B_s) - \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial y}(B_s) \right)^2 + \left(-\frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial y}(B_s) - \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial x}(B_s) \right)^2 \\
 |K_s^2|^2 &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \nabla_z U_{\varphi_2}(B_s) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla_z U_{\varphi_1}(B_s) \right|^2 \\
 &= \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial x}(B_s) + \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial y}(B_s) \\ -\frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial y}(B_s) + \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial x}(B_s) \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= \left(\frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial x}(B_s) + \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial y}(B_s) \right)^2 + \left(-\frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial y}(B_s) + \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial x}(B_s) \right)^2
 \end{aligned}$$

Једноставним рачуном добијамо да је $|K_s^1|^2 = |K_s^2|^2$, па је први услов задовољен. Искористићемо добијене резултате да покажемо и другу особину.

$$\begin{aligned}
 K_s^1 \cdot K_s^2 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial x}(B_s) - \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial y}(B_s) \\ -\frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial y}(B_s) - \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial x}(B_s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial x}(B_s) + \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial y}(B_s) \\ -\frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial y}(B_s) + \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial x}(B_s) \end{pmatrix} \\
 &= \left(\frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial x}(B_s) - \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial y}(B_s) \right) \left(\frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial x}(B_s) + \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial y}(B_s) \right) \\
 &\quad + \left(-\frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial y}(B_s) - \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial x}(B_s) \right) \left(-\frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial y}(B_s) + \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial x}(B_s) \right) = 0,
 \end{aligned}$$

па је и други услов испуњен. Остаје да проверимо да је $\sqrt{\frac{p}{p-1}} Y^1$ диференцијално подређен мартингалу X . За то је довољно показати да важи

$$|K_s^1|^2 \leq \frac{p-1}{p} (|H_s^1|^2 + |H_s^2|^2).$$

Користећи рачуне од пре и неједнакост између аритметичке и геометријске средине, имамо

$$\begin{aligned}
 & \frac{p-1}{p} (|H_s^1|^2 + |H_s^2|^2) \\
 &= 2 \left(\left(\frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial x}(B_s) \right)^2 + \left(\frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial y}(B_s) \right)^2 + \left(\frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial x}(B_s) \right)^2 + \left(\frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial y}(B_s) \right)^2 \right) \\
 &\geq \left(\frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial x}(B_s) \right)^2 + \left(\frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial y}(B_s) \right)^2 + \left(\frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial x}(B_s) \right)^2 + \left(\frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial y}(B_s) \right)^2 \\
 &+ \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial y}(B_s) \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial x}(B_s) - \frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial x}(B_s) \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial y}(B_s) \\
 &= \left(\frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial x}(B_s) - \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial y}(B_s) \right)^2 + \left(-\frac{\partial U_{\varphi_1}}{\partial y}(B_s) - \frac{\partial U_{\varphi_2}}{\partial x}(B_s) \right)^2,
 \end{aligned}$$

из чега следи тражена диференцијална подређеност.

Сада, применом става 4.41 на мартингале X и Y , добијамо да за свако $t > 0$ важи

$$\begin{aligned}
 & \|(B * U_{\varphi})_t\|_p = \|Y_t\|_p \leq (p-1)\|X_t\|_p \\
 &= (p-1) \left\| \sqrt{\frac{2p}{p-1}} (I * U_{\varphi})_t \right\|_p = \sqrt{2p(p-1)} \|(I * U_{\varphi})_t\|_p,
 \end{aligned}$$

што је и требало показати. $\square$

Комбиновањем ове последице са резултатима добијеним у претходним секцијама, изводимо нову оцену норме.

Теорема 4.43. За $p \geq 2$ и Бјорлингову трансформацију S важи

$$\|S\|_p \leq \sqrt{2p(p-1)}.$$

Доказ. Овде ћемо се потпуно позивати на ставове доказане у секцији 4.3. Нека је $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ произвољно. За почетак, из доказа става 4.37 имамо да је за свако $T > 0$

$$\|S_B^T \varphi\|_p \leq \|(A * U_{\varphi})_T\|_p.$$

Доказ теореме 4.43 повлачи да је

$$\|S\varphi\|_p \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \|S_B^T \varphi\|_p.$$

За крај, како је

$$(I * U_\varphi)_T = \int_0^T \nabla_z U_\varphi(B_s) \cdot dZ_s,$$

из става 4.38 добијамо да ће десна страна неједнакости из последице 4.42 тежити ка $\|\varphi\|_p$. Комбиновање добијених неједнакости и применом последице 4.42 добијамо тражену оцену. $\square$

Приметимо да претходна оцена није најбоља коју знамо за све вредности p . Наиме, видимо да за $p = 2$ важи $\sqrt{2p(p-1)} = 2 > 1 = \|S\|_2$. Али, ако посматрамо асимптотско понашање, видимо да смо добили одређено побољшање у односу на резултате добијене у теорему 3.17. Наиме, тамо имамо да је за $p \geq 2$

$$\|S\|_p \leq \sqrt{2}(p-1) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \theta|^p dm(\theta) \right)^{-\frac{1}{p}}.$$

За израз $\left(\frac{\|S\|_p}{\sqrt{2}(p-1)} \right)^p$ добијамо оцене

$$\begin{aligned} \left(\frac{\|S\|_p}{\sqrt{2}(p-1)} \right)^p &\leq \sqrt{\left(\frac{p}{p-1} \right)^p} \rightarrow \sqrt{e} \quad \text{кад } p \rightarrow \infty, \\ \left(\frac{\|S\|_p}{\sqrt{2}(p-1)} \right)^p &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \theta|^p dm(\theta) \right)^{-1} \rightarrow \infty \quad \text{кад } p \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Из овога се јасно види да је наша нова оцена асимптотски боља од претходних. Зато ћемо комбиновањем ње, чињенице да је $\|S\|_2 = 1$ и Рис-Торинове теореме о интерполацији добити ново побољшање.

Теорема 4.44. За $1 < p < \infty$ и Бјорлингову трансформацију S важи

$$\|S\|_p \leq 1.575(p^* - 1).$$

Доказ. Фиксирајмо $r > 2$. На основу теореме 4.43 је $\|S\|_r \leq \sqrt{2r(r-1)}$, док од раније знамо $\|S\|_2 = 1$. Применом Рис-Торинове теореме о интерполацији добијамо да је за свако $0 < t < 1$

$$\|S\|_{r_t} \leq \left(\sqrt{2r(r-1)} \right)^t,$$

где је r_t дато са

$$\frac{1}{r_t} = \frac{t}{r} + \frac{1-t}{2}.$$

Јасно је да се $r_0 = 2$ и $r_1 = r$ уклапају у горње изразе. Ако изразимо t преко r_t и то заменимо у формулу за $\|S\|_{r_t}$, имамо

$$t = \frac{r}{r-2} \frac{r_t - 2}{r_t},$$

$$\|S\|_{r_t} \leq \left(\left(\sqrt{2r(r-1)} \right)^{\frac{r}{r-2}} \right)^{\frac{r_t-2}{r_t}}.$$

Видимо да, када t узима вредности из $[0, 1]$, r_t узима вредности у $[2, r]$. Уочимо функцију $\alpha : (2, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ дату са $\alpha(r) = \left(\sqrt{2r(r-1)} \right)^{\frac{r}{r-2}}$. Претходне формуле сада можемо објединити на следећи начин:

$$\|S\|_p \leq (\alpha(r))^{\frac{p-2}{p}}, \quad 2 \leq p \leq r.$$

Желимо да нађемо r за које је оцена норме најоптималнија, односно за које функција α достиже минимум. Како је $\lim_{r \rightarrow 2} \alpha(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$, он се достиже у некој тачки интервала $(2, \infty)$ и његове кандидате тражимо анализирајући први извод.

$$\begin{aligned} \alpha'(r) &= \left(e^{\frac{r}{r-2} \log(\sqrt{2r(r-1)})} \right)' \\ &= \alpha(r) \left(\frac{-2}{(r-2)^2} \log(\sqrt{2r(r-1)}) + \frac{r}{r-2} \frac{1}{\sqrt{2r(r-1)}} \frac{2(2r-1)}{2\sqrt{2r(r-1)}} \right) \\ &= \frac{\alpha(r)}{r-2} \left(\frac{-2}{r-2} \log(\sqrt{2r(r-1)}) + \frac{2r-1}{2(r-1)} \right). \end{aligned}$$

Нумерички налазимо да је нула ивода у тачки $r = \tilde{p} \in (5.5, 5.6)$, да је лево од ње негативан, а десно позитиван. Дакле, функција α опада на $(2, \tilde{p})$, расте на $(\tilde{p}, \infty)$ и достиже минимум у $\tilde{p}$. Због тога је

$$\|S\|_p \leq (\alpha(\tilde{p}))^{\frac{p-2}{p}}, \quad 2 \leq p \leq \tilde{p}.$$

Јасно је да за $2 \leq p \leq \tilde{p}$ важи $(\alpha(\tilde{p}))^{\frac{p-2}{p}} \leq (\alpha(p))^{\frac{p-2}{p}} = \sqrt{2p(p-2)}$, па је за те p -ове ова оцена боља од оне из теореме 4.43. За $p \geq \tilde{p}$ овим поступком не побољшавамо оцену.

Посматрајмо сада функцију $\beta : [2, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, дату са

$$\beta(p) = \begin{cases} \frac{(\alpha(\tilde{p}))^{\frac{p-2}{p}}}{p-1} & , 2 \leq p < \tilde{p}, \\ \sqrt{\frac{2p}{p-1}} & , p \geq \tilde{p}. \end{cases}$$

Из претходно показаних ствари, имамо да је $\beta(p)$ горње ограничење од $\frac{\|S\|_p}{p-1}$ за свако $p \geq 2$. Желимо да одредимо максимум ове функције. За $p \geq \tilde{p}$ је

$$\beta'(p) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p-1}{2p}} \frac{-1}{(p-1)^2} < 0,$$

па функција β ту строго опада. Због тога она достиже максимум на $[2, \tilde{p}]$. На том интервалу је

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= \frac{(p-1) \left((\alpha(\tilde{p}))^{\frac{p-2}{p}} \log(\alpha(\tilde{p})) \frac{2}{p^2} \right) - (\alpha(\tilde{p}))^{\frac{p-2}{p}}}{(p-1)^2} \\ &= -(\alpha(\tilde{p}))^{\frac{p-2}{p}} \frac{p^2 - 2 \log(\alpha(\tilde{p}))p + 2 \log(\alpha(\tilde{p}))}{p^2(p-1)^2}. \end{aligned}$$

Јасно је да је нула од β' оно решење квадратне једначине $p^2 - 2 \log(\alpha(\tilde{p}))p + 2 \log(\alpha(\tilde{p}))$ које се налази у интервалу $(2, \tilde{p})$. Користећи апроксимацију $\tilde{p} \approx 5.5$, добијамо решење

$$p_1 = \log(\alpha(\tilde{p})) + \sqrt{(\log(\alpha(\tilde{p})))^2 - 2 \log(\alpha(\tilde{p}))} \approx 4.87351 \in (2, 5.5) \subset (2, \tilde{p}).$$

Друго решење не припада интервалу $(2, \tilde{p})$. Из особина квадратне једначине и извода β' који смо израчунали, видимо да функција β расте на $(2, p_1)$, а опада на $(p_1, \tilde{p})$. Зато у тачки p_1 има локални максимум, а како је $\beta(p_1) > \beta(2)$ и $\beta(p_1) > \beta(\tilde{p})$ (ово се покаже директним рачуном), то је баш и глобални максимум. Може се израчунати да је

$$\beta(4.87351) \approx 1.5738 < 1.575 = \frac{63}{40}.$$

Ово повлачи да је за $p \geq 2$

$$\|S\|_p \leq 1.575(p-1).$$

Из дуалности, аналогно као у доказу теореме 4.40, добијамо да је за свако $1 < p < \infty$

$$\|S\|_p \leq 1.575(p^* - 1),$$

што је и требало показати. □

Закључак

У овом мастер раду смо приказали скоро све познате оцене норме Бјорлингове трансформације. Излагање није било потпуно хронолошки, с обзиром да су се приступи обрађени у главама 3 и 4 развијали истовремено. Они су заправо и имали велики међусобни утицај, јер су се комбиновањем идеја поправљале оцене. Поред наведених, постоји и још један значајан рад у коме је добијена, бар засада, најбоља асимптотска оцена. То је рад Боричева⁷, Јанакирамана и Волберга [14], који даје $\|S\|_p \leq 1.3922(p-1)$ када $p \rightarrow \infty$. Ивањецова хипотеза још увек није показана, што оставља доста простора за напредак у овој области.

Важно је напоменути да се методе и технике обрађене у овом мастер раду могу применити на многе друге математичке проблеме. Међу њима треба истаћи слабе оцене норми сингуларних интегралних оператора, оцене норми Рисових и Бјорлингових трансформација вишег реда, бездимензионе оцене за Рисове трансформације и још многе друге. Постоји и доста радова везаних за норму на неким специјалним функцијама, што смо овде донекле и поменули.

За крај, желео бих да препоручим прегледне радове [35], [7], [34] и [27] који се могу надовезати на садржај овог мастер рада и послужити као увод у даље истраживање ове теме.

⁷Alexander Borichev, руски математичар

Библиографија

- [1] L. Ahlfors. *Lectures on Quasiconformal Mappings*. University lecture series. American Mathematical Society, 2006.
- [2] K. Astala. Area distortion of quasiconformal mappings. *Acta Mathematica*, 173:37–60, 1994.
- [3] K. Astala, T. Iwaniec, and G. Martin. *Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane*. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, 2009.
- [4] K. Astala, T. Iwaniec, I. Prause, and E. Saksman. Burkholder integrals, Morrey’s problem and quasiconformal mappings. *Journal of American Mathematical Society*, 25(2):507–531, 2012.
- [5] A. Baernstein and S. Montgomery-Smith. Some conjectures about integral means of ∂f and $\bar{\partial} f$. *Complex analysis and differential equations*, pages 92–109, 1997.
- [6] R. Bañuéllos. Martingale transforms and related singular integrals. *Transactions of the American Mathematical Society*, 293:547–563, 1986.
- [7] R. Bañuéllos. The foundational inequalities of D.L. Burkholder and some of their ramifications. <https://arxiv.org/abs/1012.4850>, 2018.
- [8] R. Bañuéllos and P. Janakiraman. L^p -bounds for the Beurling-Ahlfors transform. *Transactions of the American Mathematical Society*, 360(7):3603–3612, 2008.
- [9] R. Bañuéllos and P. Méndez-Hernández. Space-time Brownian motion and the Beurling-Ahlfors transform. *Indiana University Mathematical Journal*, 52(4):981–990, 2003.

- [10] R. Bañuelos and A. Osekowski. Sharp inequalities for the Beurling–Ahlfors transform on radial functions. *Duke Mathematical Journal*, 162(2):417–434, 2013.
- [11] R. Bañuelos and A. Osekowski. On the Bellman function of Nazarov, Treil and Volberg. *Mathematische Zeitschrift*, 278:1–14, 2014.
- [12] R. Bañuelos and G. Wang. Sharp inequalities for martingales with application to the Beurling–Ahlfors and Riesz transforms. *Duke Mathematical Journal*, 80(3):575–600, 1995.
- [13] B. Bojarski. Generalized solutions of a system of differential equations of first order and of elliptic type with discontinuous coefficients. *Mat. Sb.*, 43(85):451–503, 1957.
- [14] A. Borichev, P. Janakiraman, and A. Volberg. Subordination by conformal martingales in L^p and zeros of Laguerre polynomials. *Duke Mathematical Journal*, 162(5):889–924, 2013.
- [15] D. Burkholder. A nonlinear partial differential equation and the unconditional constant of the Haar system in L^p . *Bulletin of the American Mathematical Society*, 7(3):591–595, 1982.
- [16] D. Burkholder. Sharp inequalities for martingales and stochastic integrals. *Astérisque*, 157-158:75–94, 1988.
- [17] O. Dragičević. Analysis of the Ahlfors–Beurling operator. <https://arxiv.org/abs/2109.04555>, 2013.
- [18] O. Dragičević and A. Volberg. Bellman function, Littlewood–Paley estimates and asymptotics of the Ahlfors–Beurling operator in $L^p(\mathbb{C})$. *Indiana University Mathematical Journal*, 54(4):971–995, 2005.
- [19] R. Durrett. *Brownian Motion and Martingales in Analysis*. The Wadsworth Mathematics Series. Wadsworth Pub Co, 1984.
- [20] R. Fefferman, C. Kenig, and J. Pipher. The theory of weights and the Dirichlet problem for elliptic equations. *Annals of Mathematics*, 134(1):65–124, 1991.

- [21] F. Gehring and O. Lehto. On the total differentiability of functions of a complex variable. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, 272:1–9, 1959.
- [22] F. Gehring and E. Reich. Area distortion under quasiconformal mappings. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, 388:1–15, 1966.
- [23] L. Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2014.
- [24] T. Iwaniec. Extremal inequalities in Sobolev spaces and quasiconformal mappings. *Z. Anal. Anwend.*, 1:1–16, 1982.
- [25] H. Kuo. *Introduction to Stochastic Integration*. Universitext. Springer, 2006.
- [26] F. Nazarov and A. Volberg. Heat extension of the Ahlfors-Beurling operator and estimates of its norm. *Algebra i Analiz*, 14(4):142–158, 2003.
- [27] A. Osekowski. Survey article: Bellman function method and sharp inequalities for martingales. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 43(6):1759–1825, 2013.
- [28] S. Pichorides. On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov. *Studia Mathematica*, 44:165–179, 1972.
- [29] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis*. Princeton Lectures in Analysis. Princeton University Press, 2011.
- [30] M. Strzelecki. The L^p -norms of the Beurling-Ahlfors transform on radial functions. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, 42:73–93, 2017.
- [31] N. Varopoulos. Aspects of probabilistic Littlewood-Paley theory. *Journal of Functional Analysis*, 38:25–60, 1980.
- [32] N. Varopoulos and R. Gundy. Les transformations de Riesz et les intégrales stochastiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.*, 989:A13–A16, 1979.
- [33] V. Vasyunin. Cincinnati lectures on bellman functions. <https://arxiv.org/abs/1508.07668>, 2015.

- [34] V. Vasyunin and A. Volberg. Bellman function technique in harmonic analysis. <https://arxiv.org/abs/1508.07668>, 2015.
- [35] A. Volberg. Bellman function technique in harmonic analysis. <https://arxiv.org/abs/1106.3899>, 2011.
- [36] A. Volberg. Ahlfors-Beurling operator on radial functions. <https://arxiv.org/abs/1203.2291>, 2012.
- [37] A. Volberg, S. Treil, and F. Nazarov. Bellman function in stochastic control and harmonic analysis. *Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics*, 129:393–423, 2001.