

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Станислава М. Кузманов 1125/20

БИНОМНА И ПОЛИНОМНА ФОРМУЛА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

мастер рад

Београд 2021.

Ментор:

проф. др Горан Ђанковић, ванредни професор

Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Марко Радовановић, доцент

Универзитет у Београду, Математички факултет

др Славко Моцоња, доцент

Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 29.09.2021.

Ивану и Урошу

Наслов мастер рада: Биномна и полиномна формула у настави математике

Резиме: У раду је више пажње посвећено настави математике, везано за ову тему, у средњим школама - гимназијама. Разлог је што се ова тема у основној школи обрађује само за квадрат бинома (квадрат збира и разлике монома).

Дат је осврт на великане науке, Исака Њутна и Блеза Паскала, као и на историјски ток о сазнањима о биномним коефицијентима и Паскаловом троуглу.

Кратке напомене о моному, биному и полиному су битне као увођење у биномну формулу. Посебна пажња је посвећена Паскаловом троуглу, онолико колико је потребно за схватање биномних коефицијената и биномне формуле. Мада је Паскалов троугао ризница са благом, како га је неко упоредио. Урађен је доказ биномне теореме математичком индукцијом и комбинаторно.

Код обраде полиномне формуле, прво је објашњено шта су то решења једначине $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$, као и шта су речи датог типа, тј. пермутације са понављањем. На основу чега је затим дефинисан полиномни коефицијент. Доказ полиномне теореме је урађен методом математичке индукције и комбинаторно.

Даље су обрађени интересантни задаци који се решавају применом биномне и полиномне формуле. Задаци су распоређени од лакших ка тежим. У сваком задатку је дато упутство како и шта треба урадити и које формуле применити.

На крају су дати додатни задаци, за ученике који желе да науче више или се припреме за такмичење из ове области. За сваки задатак дато је и решење. Додатни задаци нису рађени детаљно јер се сматра да ученици који раде ове задатке знају основне особине степеновања и логаритмовања. Такође, квадратне једначине нису решаване поступно у овим задацима, већ је само дат резултат. После додатних задатака дато је још пар задатака за самостални рад, где је дат само резултат, како би ученици проверили своје знање.

Кључне речи: моном, бином, полином, формула, дефиниција, коефицијент.

САДРЖАЈ

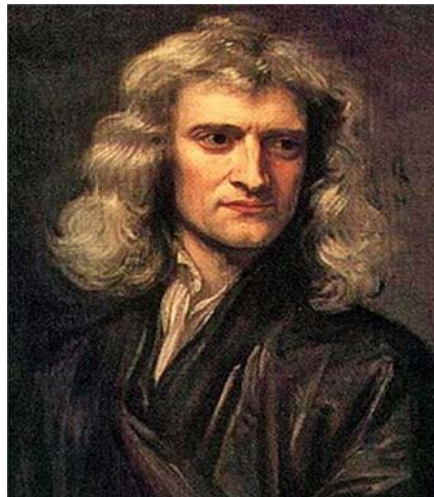
1. УВОД.....	6
2. ПОЈАМ МОНОМА, БИНОМА И ПОЛИНОМА	8
2.1. Полиноми	8
2.2. Рачунске операције са полиномима	10
2.2.1. Сабирање полинома	10
2.2.2. Множење полинома	10
2.2.3. Дељење полинома	11
3. БИНОМНИ КОЕФИЦИЈЕНТИ	12
3.1. Појам факторијела и биномног коефицијента.....	12
3.2. Својства биномних коефицијената.....	15
3.3. Паскалов троугао.....	17
4. БИНОМНА ФОРМУЛА	21
4.1. Појам биномне формуле.....	21
4.2. Биномна формула.....	21
4.3. Доказ биномне формуле	22
4.4. Задаци	26
5. ПОЛИНОМНА ФОРМУЛА.....	36
5.1. Број решења једначине	36
5.2. Речи датог типа.....	36
5.3. Полиномна формула.	38
5.4. Доказ полиномне формуле	38
5.5. Задаци	41
6. ДОДАТНИ ЗАДАЦИ.....	46
6.1. Задаци за самостални рад	56
7. ЗАКЉУЧАК.....	57
ЛИТЕРАТУРА.....	58

1. УВОД

Са појмом бинома и полинома ученици се срећу први пут у седмом разреду основне школе. Након упознавања са овим појмовима, уче и формуле квадрата збира и квадрата разлике монома, као и разлику квадрата монома и полинома. То знање им помаже да лакше сређују неки израз. Тада им још није познато да је то биномна формула. Ово предзнање је веома важно за даље надограђивање знања у средњој школи, а посебно у гимназији, када се ова проблематика више изучава.

Касније у првом разреду средње школе, ученици ће упознати и научити да решавају и сложеније изразе. Проблеми већ настају при обради куба збира и куба разлике, разлике кубова, решавању сложенијих задатака у којима је потребно средити изразе или решити једначине и неједначине.

Откриће Биномне формуле везује се за Исака Њутна (Isaac Newton) и Блеза Паскала (Blaise Pascal, 1623. до 1662.).



Isaac Newton (1643. - 1727.)



Blaise Pascal (1623. - 1662.)

Исак Њутн, енглески математичар, физичар, астроном, филозоф, теолог је дао немерљив допринос развоју науке. У математици се везује за откриће инфинитезималног рачуна - калкулуса, интерполације и биномне формуле. У физици су познати Њутнови закони, али је упамћен и по својим филозофским и теолошким делима.

Скуп од три основна закона класичне физике су Њутнови закони. Како популарна прича каже, Њутн је написао закон гравитације, након што га је ударила јабука у главу, док је шетао у врту његове мајке у Линколнширу.

У част научном великану, јединица за силу у физици носи назив 1N (1 Njutn). По другом Њутновом закону, 1N је сила која телу масе 1kg саопштава убрзање од 1m/s^2 .

Блез Паскал, француски математичар, филозоф и теолог се такође везује за откриће биномне формуле.

У делу „Теза о аритметичком троуглу“ описао је табеларни приказ за биномне коефицијенте (Паскалов троугао). Ово дело је настало као резултат интересовања научника за игре на срећу и руски рулет.

О биномним коефицијентима и Паскаловом троуглу знало се у давним временима. У периоду између 5. и 2. века п.н.е. овакав троугао описао је математичар Пингалау у старој индијској књизи Chandashaastra. Индијски математичари су овај троугао називали степеништем планине Меру. У Ирану је био познат као Хајамов (математичар Омар Хајам) троугао. Кинески математичар Ји Хиан је користио Паскалов троугао за израчунавање другог и трећег корена.

Постоје претпоставке да је Паскал сазнао за троугао преко језуитских мисионара, који су путовали у Кину и тамо дошли до записа о троуглу. У 13. веку математичар Јанг Хуи користи Паскалов троугао са шест редова, па се у Кини Паскалов троугао назива „Јанг Хуиев“ троугао. Почетком 14. века математичар Зху Схије проширује број редова у троуглу на осам.

Паскал је познат и по механичком калкулатору (Паскалина), који је једино он знао да поправи, када дође до кvara. Касније ће у раду бити више о Паскаловом троуглу када буде обрада биномних коефицијената и биномне формуле.

2. ПОЈАМ МОНОМА, БИНОМА И ПОЛИНОМА

2.1. Полиноми

Дефиниција 1.1.

Моном је број или производ броја и једне или више променљивих.

На пример $4x$, $\frac{1}{2}x^3$, $-7x^5$, $-3x^2y^3$ су мономи.

Променљиву или производ променљивих у моному најчешће називамо променљиви део, а број називамо константа или коефицијент монома.

Променљиви део може бити производ степена различитих основа.

У моному $-3x^2y^3$ променљиви део је x^2y^3 и он представља производ степена x^2 и степена y^3 .

Степен монома је збир изложилаца свих степена променљивих у моному.

На пример степен монома $-3x^2y^3$ је 5, јер је 5 збир изложилаца степена x^2 и y^3 .

Два монома су супротна ако имају једнак променљиви део, а константе су им супротни бројеви.

На пример моному $4x$ супротан моном је $-4x$, а моному $-7x^5$ супротан моном је $7x^5$.

Мономи су слични ако имају једнак променљиви део.

На пример $4x$ и $-6x$, $\frac{1}{2}x^3$ и $\frac{7}{3}x^3$, $-7x^5$ и $37x^5$, $5x^2y^3$ и $-9x^2y^3$ су слични мономи.

Два монома можемо да сабирамо (одузимамо) ако су слични, тако што саберемо (одузмемо) коефицијенте, а променљиви део остаје исти.

На пример $4x + 6x = 10x$, а $9x - 6x = 3x$.

Помножити моном мономом значи помножити њихове коефицијенте и помножити њихове променљиве делове.

На пример $3x \cdot 5x = 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x = 15x^2$.

Збир два неслична монома назива се **бином**, збир три неслична монома назива се **трином**, а збир више несличних монома назива се **полином**. Полиноме називамо још и цели алгебарски изрази.

Полиноми могу бити са једном променљивом или више њих. Полином једне променљиве, ако је та променљива x , најчешће означавамо са $p(x)$.

Дефиниција 1.2.

Полином по x је збир коначно много монома по x , тј. израз облика

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

где су:

- $p(x)$ полином;
- $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ коефицијенти полинома, при чему је $a_n \neq 0$;
- x променљива полинома;
- број $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ степен полинома;
- изрази a_ix^i чланови полинома.

Ако су сви чланови полинома једнаки нули, полином $p(x)$ назива се **нула полином**.

Водећи (најстарији) коефицијент у полиному је онај уз променљиву са највећим степеном. Члан уз који стоји водећи коефицијент је **водећи члан**. Ако је коефицијент у водећем члану једнак јединици, полином се назива **нормиран**.

Пример 1.1.

Израз $9 - 7x + 3x^2$ јесте полином другог степена.

Израз $7 - 3x + x^{-2}$ није полином, јер је степен променљиве негативан број.

Изрази $\sqrt{x} + y$, $\frac{2}{x+3}$ нису полиноми, јер степен променљиве није природан број.

Назив полином води порекло од речи *binom*, тако што се префикс *bi* замени грчким префиксом *poly* - што у преводу значи мноштво.

Француски математичар Франсоа Виет (1540 - 1603), који се сматра оцем модерне алгебре, је први употребио израз полином (polynomial). Виет је популаризовао увођење симбола у до тада:

- реторичку алгебру у којој су употребљаване речи код решавања проблема и
- синкопатску алгебру у којој су коришћене скраћенице за означавање појмова и операција.

2.2. Рачунске операције са полиномима

2.2.1. Сабирање полинома

Два полинома $p(x)$ и $q(x)$ се сабирају (одузимају) тако што се сабирају (одузимају) слични мономи.

Пример: Сабрати полиноме: $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 7x + 5$ и $q(x) = x^3 + 2x + 3$.

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= 2x^3 + 3x^2 + 7x + 5 + x^3 + 2x + 3 \\ &= 3x^3 + 3x^2 + 9x + 8 \end{aligned}$$

2.2.2. Множење полинома

Два полинома $p(x)$ и $q(x)$ се множе тако што се сваки моном полинома $p(x)$ помножи са сваким мономом полинома $q(x)$.

Пример: Помножити полиноме $p(x) = 5 - x$ и $q(x) = 2x + 3$.

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) &= (5 - x)(2x + 3) = 5 \cdot 2x + 5 \cdot 3 + (-x) \cdot 2x + (-x) \cdot 3 \\ &= 10x + 15 - 2x^2 - 3x \\ &= -2x^2 + 7x + 15 \end{aligned}$$

Разлика квадрата: Нека су a и b два неслична монома. Производ разлике и збира ова два монома се назива разлика квадрата.

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$$

Пример: $(x - 8) \cdot (x + 8) = x^2 - 8^2 = x^2 - 64$

2.2.3. Дељење полинома

Еуклидов алгоритам дељења за целе бројеве важи и за дељење полинома са реалним коефицијентима. При дељењу полинома $p(x)$ са $q(x)$ добија се као резултат полином $s(x)$ и остатак дељења $r(x)$, при чему је степен остатка мањи од степена делиоца.

Пример:

Поделити полиноме $p(x) = x^3 - 5x^2 + 5x - 3$ и $q(x) = x - 1$.

$$p(x):q(x) = (x^3 - 5x^2 + 5x - 3):(x - 1) = x^2 - 4x + 1$$

$$\underline{x^3 - x^2/(-1)}$$

$$-4x^2 + 5x - 3$$

$$\underline{-4x^2 + 4x/(-1)}$$

$$x - 3$$

$$\underline{x - 1/(-1)}$$

$$2$$

Резултат дељења полинома $p(x)$ и $q(x)$ је полином $s(x) = x^2 - 4x + 1$, а остатак $r(x) = 2$.

3. БИНОМНИ КОЕФИЦИЈЕНТИ

3.1. Појам факторијела и биномног коефицијента

Ради лакшег упознавања биномне формуле, прво ћемо објаснити шта је то биномни коефицијент.

Дефиниција 1.3. Биномни коефицијент је израз облика (чита се, „ n над k “):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}, \forall k, n \in N_0 \wedge k \leq n,$$

при чему је $k! = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (чита се „ k факторијел“).

За $n < k$ важи да је $\binom{n}{k} = 0$.

Дефиниција 1.4. По дефиницији: $0! = 1$.

Подсетимо се шта су то пермутације (речи) и комбинације и какве могу бити.

На који начин можемо изабрати k елемената из скупа од n елемената?

Постоје две врсте избора, а то су пермутације (битан редослед изабраних елемената) и комбинације (небитан редослед изабраних елемената). Пермутације и комбинације могу бити без понављања (сви изабрани елементи су различити) и са понављањем (међу изабраним елементима може бити једнаких).

У овој глави биће речи само о пермутацијама и комбинацијама без понављања.

Нека је дат скуп $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$.

Подсетимо се k -ту класа скупа S од n елемената чине сви k -точлани подскупови скупа S .

1. Пермутације k -те класе на скупу S без понављања су $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $x_i \in S$, $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$.

Број пермутација k -те класе без понављања на скупу од n елемената означавамо са P_k^n .

Теорема 1.1. $P_k^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$

Доказ.

Из скупа од n елемената изаберемо k елемената, то су $(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Први елемент можемо изабрати на n начина, други на $n-1$ начин (јер смо први већ одабрали, а нема понављања), трећи на $n-2$ начина (различит од прва два), $\dots$, k -ти елемент на $n-(k-1) = n-k+1$ начина.

За $k \geq n \Rightarrow P_k^n = 0$;

$k = n \Rightarrow P_k^n = n!$;

$k \leq n \Rightarrow P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$.

2. Комбинације k -те класе на скупу S без понављања су $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, $x_i \in S$, $x_i \neq x_j$ за $i \neq j$.

Број комбинација k -те класе без понављања на скупу од n елемената означавамо са C_k^n .

Теорема 1.2. $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$ за $k \leq n$.

Доказ.

Нека је $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ једна комбинација која има (као скуп) $k!$ пермутација без понављања.

$P_k^n = C_k^n \cdot k!$

Од изабраног подскупа где није битан редослед направим све пермутације	Све подскупове које могу да изаберем без понављања, тј. C_k^n помножим са бројем пермутација	
$\frac{n!}{(n-k)!}$	$= \overbrace{C_k^n \cdot k!}^{\text{Све подскупове које могу да изаберем без понављања, тј. } C_k^n \text{ помножим са бројем пермутација}}$	$\Rightarrow C_k^n = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \blacksquare$

Пример 1.2. Нека је дат скуп $A = \{3, 4, 5, 6\}$. Бирамо 2 елемента из тог скупа без понављања.

$\{3, 4\} \{3, 5\} \{3, 6\} \{4, 5\} \{4, 6\} \{5, 6\}$. Укупан број комбинација 2-класе је 6.

Са друге стране, на основу дефиниције биномног коефицијента имамо да је

$n = 4, k = 2$, па је

$$\binom{n}{k} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} = \frac{4!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \mathbf{2!}}{2 \cdot \mathbf{2!}} = \frac{12}{2} = 6.$$

Очигледно је $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}, \dots, \binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{n} = 1$.

Пример 1.3. Решити једначину $\binom{x}{4} = 5$ у скупу природних бројева.

Решење.

Јасно је да је $x \geq 4$.

На основу дефиниције биномног коефицијента имамо

$$\frac{x!}{4! \cdot (x-4)!} = 5$$

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot \mathbf{(x-4)!}}{4! \cdot \mathbf{(x-4)!}} = 5.$$

Изрази означени истом бојом се скраћују.

Према томе је

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{4!} = 5 / \cdot 4!$$

$$x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) = 5 \cdot 4!$$

$$x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Дакле, јасно се види да је у скупу природних бројева једино решење $x=5$.

3.2.Својства биномних коефицијената

Теорема 1.3.

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, за $n \geq k \geq 0$;
2. Паскалова формула $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, за $n > k > 0$;
3. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$, за $n \geq 0$.

Доказ.

а) алгебарски

Прва два својства лако доказујемо помоћу дефиниције биномног коефицијента:

$$\begin{aligned} 1. \quad \binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}, \\ 2. \quad \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\ &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!(n-k) + (n-1)!k}{k(k-1)!(n-k-1)!(n-k)} \\ &= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \blacksquare \end{aligned}$$

Доказ трећег својства даћемо касније када будемо говорили о биномној формули (Пример 1.4. стр. 24).

Ова три својства можемо доказати и комбинаторно.

Следећа теорема ће нам требати за доказ 2. својства.

Теорема 1.4. (Принцип збира и принцип производа)

1) **Принцип збира.** Ако је $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, при чему је $A_i \cap A_j = \emptyset$, за $1 \leq i < j \leq n$, онда је

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

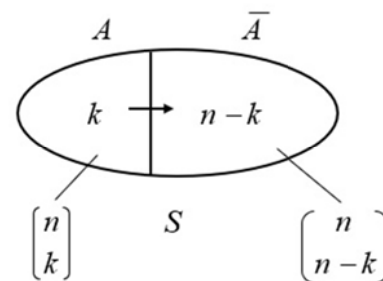
2) **Принцип производа.** За непразне скупове $A_1, A_2, \dots, A_n$ је

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

б) комбинаторни

1. Нека је дат скуп S који има n елемената, тј. $|S| = n$.

Сваки пут кад из скупа S изаберемо подскуп A од k елемената, преосталих $n - k$ елемената образују један подскуп, комплемент скупа A , тј. $\bar{A}$. Очигледно, различитим подскуповима A одговарају различити комплементи и обрнуто. Зато је број k -подскупова скупа S једнак броју $(n - k)$ -подскупова скупа S .



2. Нека је $|S| = n$, тј. скуп S има n елемената.

Разбијмо скуп свих k -подскупова скупа $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, којих има $\binom{n}{k}$, на две дисјунктне класе. У првој класи $\mathcal{A}$ нека буду сви k -подскупови који не садрже елемент s_1 , а у другој класи $\mathcal{B}$, они који садрже елемент s_1 .

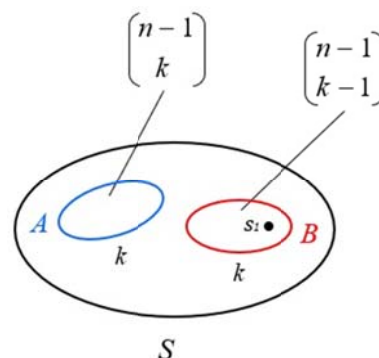
Сваки k -подскуп из $\mathcal{B}$, поред s_1 садржи и $k - 1$ елемената из $(n - 1)$ - скупа $\{s_2, \dots, s_n\}$ који се могу изабрати на $\binom{n-1}{k-1}$ начина. Са друге стране, у класи $\mathcal{A}$ има $\binom{n-1}{k}$ подскупова, јер су у тој класи сви k -подскупови скупа $\{s_2, \dots, s_n\}$.

$$\mathcal{C} = \{C \subset S : |C| = k\} \quad |\mathcal{C}| = \binom{n}{k} \quad (1)$$

$$\mathcal{A} = \{A \subset S : |A| = k, s_1 \notin A\} \quad |\mathcal{A}| = \binom{n-1}{k} \quad (2)$$

$$\mathcal{B} = \{B \subset S : |B| = k, s_1 \in B\} \quad |\mathcal{B}| = \binom{n-1}{k-1} \quad (3)$$

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$$



$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{C}$$

$$\xrightarrow{\text{Принцип збира}} |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| = |\mathcal{C}|$$

$$\text{Из (1), (2) и (3) имамо да је } \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}.$$

Напомена: За скупове чији је пресек празан скуп кажемо да су дисјунктни.

3. Нека је S скуп свих низова дужине n који се састоје из нула и јединица.

Укупан број таквих низова је $|S|=2^n$ (n речи над двочланом азбуком).

Разбићемо скуп свих тих речи на дисјунктне подскупове $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$, где се скуп S_k ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) састоји од речи са k јединица, тј. $n - k$ нула.

Имамо да је $|S_k| = \binom{n}{k}$ (низ дужине n који се састоји од k јединица). Што можемо лако и доказати. Низ садржи n знакова (нула и јединица), треба изабрати k места на којима ће стајати јединице. То можемо урадити на $\binom{n}{k}$ начина.

Слично, можемо изабрати $n - k$ места на којима ће стајати нуле, што је могуће урадити на $\binom{n}{n-k}$ начина.

На основу теореме 1.3. знамо да је $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, за $n \geq k \geq 0$.

Јасно је, да је $|S_0| = \binom{n}{0} = 1$, $|S_1| = \binom{n}{1} = n$ и $|S_n| = \binom{n}{n} = 1$

Према правилу збира, следи да је $|S| = |S_0| + |S_1| + \dots + |S_n|$, тј.

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}. \blacksquare$$

3.3. Паскалов троугао

По дефиницији биномног коефицијента добијамо:

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} = 1;$$

$$\binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1;$$

$$\binom{1}{1} = \frac{1!}{1!(1-1)!} = \frac{1}{1 \cdot 0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1;$$

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0!(2-0)!} = \frac{2 \cdot 1!}{1 \cdot 2!} = \frac{2}{2 \cdot 1!} = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1;$$

$$\binom{2}{1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = \frac{2 \cdot 1!}{1! \cdot 1!} = \frac{2}{1} = 2;$$

$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!(2-2)!} = \frac{2 \cdot 1!}{2 \cdot 1! \cdot 0!} = \frac{2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1;$$

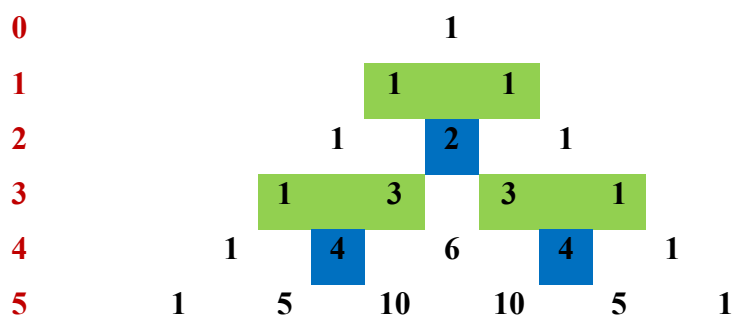
$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!(3-0)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1!}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!} = 1;$$

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1!}{1! 2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1!} = 3;$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3;$$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1!}{3 \cdot 2 \cdot 1! \cdot 0!} = \frac{1}{1} = 1.$$

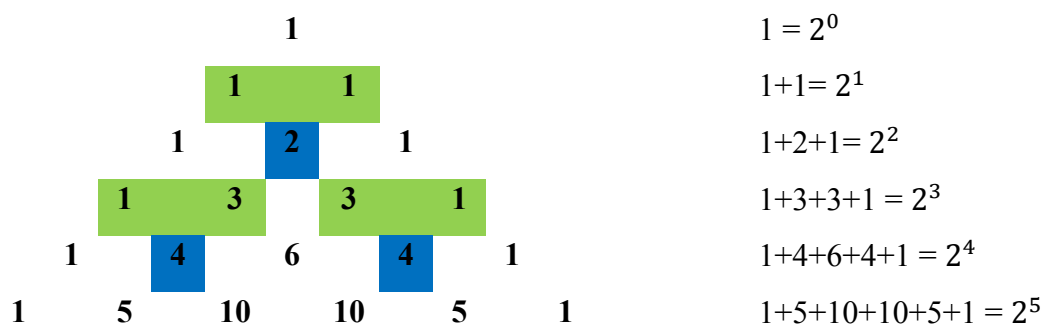
Ако сада ове резултате запишемо на следећи начин, добијамо троугао као бесконачан низ природних бројева, који се назива Паскалов троугао. Запис почињемо бројем један и са обе стране замишљамо нуле.



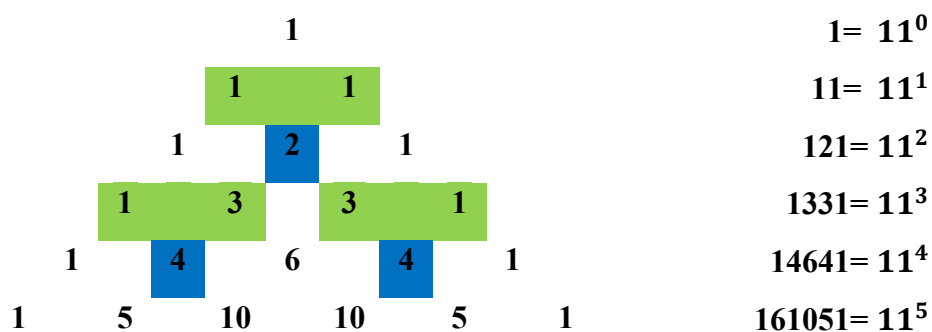
Како је за израчунавање биномних коефицијената потребно време, горњи запис нам показује да лако и брзо израчунавање биномних коефицијената може да олакша Паскалов троугао.

Особине Паскаловог троугла:

- Сваки број у једном реду (осим крајњих који су јединице) једнак је збиру два суседна броја који се налазе лево и десно од њега у претходном реду (изнад њега);
- Ако саберемо бројеве у сваком реду добићемо узастопне степене броја 2, тј. знамо да је $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$, за $n \geq 0$ (теорема 1.3.).



- Ако посматрамо бројеве једног реда као цифре једног броја, добијамо:



Напомена:

Од шестог реда па на даље двоцифрене бројеве читамо на други начин. Како имамо бројеве 1,5,10,10,5,1 читамо их на сл. начин

1(5+1)(0+1)051 тј. 161051.

Доказ ове особине даћемо нешто касније, када урадимо биномну формулу.

- Симетричност Паскаловог троугла , као последица симетричности биномних коефицијената. Ако пажљиво погледамо Паскалов троугао, јасно се види, да у било ком реду бројеви расту до средине, а затим опадају. Такође, у средини Паскаловог троугла бројеви су највећи и расту са сваким новим редом.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

4. БИНОМНА ФОРМУЛА

4.1. Појам биномне формуле

Степенујемо са n , за $n=0,1,2,3,\dots$ бином $x + y$:

- $n = 0 \quad (x + y)^0 = 1$
- $n = 1 \quad (x + y)^1 = \mathbf{1}x + \mathbf{1}y$
- $n = 2 \quad (x + y)^2 = \mathbf{1}x^2 + \mathbf{2}xy + \mathbf{1}y^2$
- $n = 3 \quad (x + y)^3 = \mathbf{1}x^3 + \mathbf{3}x^2y + \mathbf{3}xy^2 + \mathbf{1}y^3$
- $n = 4 \quad (x + y)^4 = \mathbf{1}x^4 + \mathbf{4}x^3y + \mathbf{6}x^2y^2 + \mathbf{4}xy^3 + \mathbf{1}y^4$
- ...

Коефицијенти уз мономе x и y су биномни коефицијенти из Паскаловог троугла за прва четири реда. Тако је најважније својство биномних коефицијената исказано у биномној формули.

4.2. Биномна формула

Теорема 1.5. (Биномна формула)

За $\forall n \in \mathbb{N}$ је

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \dots + \binom{n}{n}x^0 y^n.$$

Или записано краће

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Општи члан у биномној формули је $\mathbf{T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}$.

Ако вредности за биномне коефицијенте из Паскаловог троугла убацимо у горњу теорему, добија се:

$$n = 1, (x + y)^1 = 1x + 1y = x + y;$$

$$n = 2, (x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2 = x^2 + 2xy + y^2;$$

$$n = 3, (x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3;$$

$$n = 4, (x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4;$$

...

4.3. Доказ биномне формуле

Биномну формулу ћемо доказати на два начина:

- а) математичком индукцијом и
- б) комбинаторно.

Математичка индукција

У скупу природних бројева важи принцип математичке индукције:

Нека је X подскуп скупа природних бројева N који садржи број 1 и за сваки елемент $n \in X$ важи $n + 1 \in X$. Тада $X = N$, тј. скуп X се поклапа са скупом N .

У примерима када желимо доказати да нека формула или својство $F(n)$, где је $n \in N$, важи за свако $n \in N$, узимамо да је скуп X скуп свих $n \in N$, за које важи формула или својство $F(n)$, па ако докажемо да је $1 \in X$ и да $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$, онда према принципу математичке индукције закључујемо да је $X = N$, тј. да је формула или својство $F(n)$ важи за свако $n \in N$. Обично се чињеница да важи $F(1)$, тј. да је $1 \in X$ зове база индукције, а чињеница да из $F(k)$ следи $F(k+1)$, $k \in X \Rightarrow k + 1 \in X$ зове индукцијски корак.

Доказ.

а) *математичком индукцијом*

➤ За $n = 1$, формула је тачна.

$$(x + y)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1 = x + y.$$

➤ Претпоставимо да биномна формула важи за неко n , тј.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

➤ Индукцијски корак:

Докажимо да ова формула важи и за $n + 1$

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)(x + y)^n = (x + y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= x \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) + y \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1} = \\ &\quad \textcircled{*}. \end{aligned}$$

Користећи једнакости $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ и друго својство биномног коефицијената (Паскалова формула) добија се

$$\begin{aligned} \textcircled{*} &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^{n-k+1} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k. \end{aligned}$$

Сада је формула облика

$$(x + y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.$$

Тако је доказано да формула важи за $n + 1$ и тиме је доказ математичком индукцијом завршен. ■

б) комбинаторни

Израз $(x + y)^n$ можемо написати у облику

$$(x + y)^n = \underbrace{(x + y)(x + y) \cdots (x + y)}_{n \text{ пута}} \\ = \dots 2^n \text{ сабирка} \dots$$

У случају $n=2$ имамо

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y),$$

Множењем сваким чланом из прве заграде, са сваким чланом из друге заграде добијамо

$$x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y = x^2 + 2x \cdot y + y^2$$

Сваки од ових чланова добили смо тако што смо сабрали све сличне мономе. Чланове развоја x^2 и y^2 добили смо од само по једног сабирка, $x \cdot x$ односно $y \cdot y$. Члан развоја $2 \cdot x \cdot y$ добили смо тако што смо сабрали $x \cdot y$ и $y \cdot x$.

Поставља се питање, од колико се сабирака, у општем случају, добија сваки од ових чланова развоја?

Члан развоја x^2 добија се тако што из сваког од ова два бинома који се множе одаберемо моном x и затим те одабране мономе међусобно измножимо. То можемо учинити на један начин, јер од укупно два бинома можемо на $\binom{2}{2}$ начина одабрати она два из којих ћемо узети моном x ($\binom{2}{2} = 1$). Ако то посматрамо као биноме из којих бирамо моном y , потребно је да не одаберемо ни један бином из којег ћемо узети моном y , тј. $\binom{2}{0}$ што је једнако са $\binom{2}{2}$ и износи 1.

Сабирак $2 \cdot x \cdot y$ као што смо већ рекли добијамо сабирањем два сабирка, $x \cdot y$ и $y \cdot x$.

Број тих сабирака можемо добити као број начина на које од укупно 2 бинома можемо одабрати један бином из којег ћемо узети моном x . Тај број је $\binom{2}{1} = 2$.

Општи случај:

Члан развоја који садржи $x^{n-k}y^k$ добијамо тако што саберемо све сабирке од

$\underbrace{x \cdot x \dots x}_{n-k \text{ монома}} \cdot \underbrace{y \cdot y \dots y}_k$. Тај број износи $\binom{n}{n-k}$, а на основу својства биномног

коэффицијента имамо да је то исто као и $\binom{n}{k}$. Што уствари представља број начина на који од n бинома можемо одабрати оних k бинома из којих ћемо узети мономом y . ■

Пример 1.4. Користећи биномну формулу доказати треће својство биномног коэффицијента $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$, за $n \geq 0$.

Решење.

Ако у биномној формули узмемо да је $x = y = 1$, тада лева страна добија вредност 2^n .

Дакле,

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}.$$

Пример 1.5. Применом биномне формуле развити $(2a - 3)^5$.

Решење.

Како биномна формула гласи

$$(x + y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + \dots + \binom{n}{n} x^0 y^n,$$

у овом примеру имамо да је $x = 2a$, $y = -3$ и $n = 5$.

Према биномној формули развијамо дати пети степен бинома.

$$(2a - 3)^5 = \binom{5}{0} (2a)^5 (-3)^0 + \binom{5}{1} (2a)^4 (-3)^1 + \binom{5}{2} (2a)^3 (-3)^2 + \binom{5}{3} (2a)^2 (-3)^3 + \binom{5}{4} (2a)^1 (-3)^4 + \binom{5}{5} (2a)^0 (-3)^5 = \Delta$$

Знамо да је

$$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1$$

$$\binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5.$$

Према својству 1. имамо да је

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{5-3}, \text{ тј.}$$

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} = \frac{20}{2} = 10.$$

$$\Delta = 1 \cdot (2a)^5 + 5 \cdot (2a)^4 \cdot (-3) + 10 \cdot (2a)^3 \cdot 9 + 10 \cdot (2a)^2(-27) + 5 \cdot (2a) \cdot 81 + 1 \cdot 1 \cdot (-243)$$

$$= 32a^5 - 240a^4 + 720a^3 - 1080a^2 + 810a - 243.$$

4.4. Задаци

① Наћи четврти члан у развоју $(x^2 - y^2)^{11}$.

Упутство: Знамо да је у биномној формули, четврти члан онај са биномним коефицијентом $k=3$. Можемо да користимо готову формулу за општи члан

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Решење.

Тражени четврти члан је

$$T_4 = \binom{11}{3} (x^2)^{11-3} (-y^2)^3 = 165x^{16}(-y^6)$$

$$T_4 = -165x^{16}y^6.$$

② Одредити коефицијент уз члан a^7b^8 у развоју $(a+b)^{15}$.

Упутство: Користимо биномну формулу, како нам треба коефицијент уз a^7b^8 , видимо да је $k=8$.

Решење.

Биномна формула: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Коефицијент уз a^7b^8 је $\binom{15}{8}$.

Остаје нам само да израчунамо тај коефицијент.

$$\begin{aligned}\binom{15}{8} &= \frac{15!}{8!(15-8)!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!7!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 15 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 3 \\ &= 6435.\end{aligned}$$

③ Одредити $n \in N$ тако да је коефицијент трећег члана у развоју $(a + b)^n$ једнак 21.

Упутство: Користити формулу за општи члан биномне формуле

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Решење.

На основу општег члана из биномне формуле имамо да је

$$T_3 = \binom{n}{2} a^{n-2} b^2.$$

Коефицијент трећег члана је

$$\binom{n}{2} = 21$$

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 21$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \cdot 1! \cdot (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = 21$$

$$n(n-1) = 42$$

$$n^2 - n - 42 = 0.$$

Ово је потпуна квадратна једначина, чија су решења

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{2} = \frac{1 \pm 13}{2}$$

$$n_1 = \frac{1-13}{2} = -6$$

$$n_2 = \frac{1+13}{2} = 7.$$

Решење n_1 је негативно, па га одбацујемо.

Решење $n_2 = 7$ задовољава услов задатка да је $n \in \mathbb{N}$.

④ У развоју $\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{y}{x}\right)^n$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, одредити члан који не садржи x , ако је биномни коефицијент трећег члана већи за 5 од биномног коефицијента другог члана.

Упутство: Написати једнакост да је биномни коефицијент трећег члана већи за 5 од биномног коефицијента другог члана. Из задате једнакости се израчунава n , а затим треба одредити $(k+1)$ -ти члан у коме је x^0 .

Решење.

$$\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{y}{x}\right)^n = \left(x^{\frac{2}{3}} + yx^{-1}\right)^n$$

Како је коефицијент трећег члана је $\binom{n}{2}$, а другог $\binom{n}{1}$ важи

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{1} + 5$$

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{1!(n-1)!} + 5$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \cdot 1! \cdot (n-2)!} = \frac{n(n-1)!}{1 \cdot (n-1)!} + 5$$

$$\frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} = \frac{n}{1} + 5 / \cdot 2$$

$$n(n-1) = 2n + 10$$

$$n^2 - n = 2n + 10$$

$$n^2 - 3n - 10 = 0.$$

Решење ове потпуне квадратне једначине је

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$$

$$n_1 = \frac{3 - 7}{2} = -2$$

$$n_2 = \frac{3 + 7}{2} = 5.$$

Решење n_1 је негативно, па га одбацујемо.

Решење $n_2 = n = 5$ задовољава услов задатка $n \in N$.

Сада, када знамо n , напишемо израз за општи члан датог полинома.

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$T_{k+1} = \binom{5}{k} x^{\frac{2}{3}(5-k)} y^k x^{-k}$$

Члан не садржи x ако је:

$$\frac{2}{3}(5-k) - k = 0$$

$$\frac{10}{3} - \frac{2k}{3} - k = 0$$

$$10 - 5k = 0$$

$$k = 2$$

Члан који не садржи x , тј $(k + 1)$ - ти је трећи члан.

$$T_3 = \binom{5}{2} y^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} y^2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1! \cdot 3!} y^2 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} y^2 = 10 y^2$$

$$T_3 = 10y^2.$$

⑤ Наћи средњи члан у развоју $(a^{-2}\sqrt{a} - \sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}})^n$, $a > 0, n \in N$, ако се зна да се биномни коефицијенти петог и трећег члана односе као 14:3.

Упутство: Из односа коефицијената петог и трећег члана одредити n , па онда одредити средину степена n и тако ћемо знати који по реду је средњи члан у развоју

$$(a^{-2}\sqrt{a} - \sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}})^n, a > 0, n \in N.$$

Решење.

$$\binom{n}{4} : \binom{n}{2} = 14:3$$

$$\frac{n!}{4!(n-4)!} : \frac{n!}{2!(n-2)!} = 14:3$$

$$\frac{n!}{4 \cdot 3 \cdot 2! \cdot (n-4)!} : \frac{n!}{2!(n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)!} = 14:3$$

$$\frac{1}{12} : \frac{1}{(n-2) \cdot (n-3)} = 14:3$$

$$\frac{1}{12} \cdot 3 = 14 \cdot \frac{1}{(n-2) \cdot (n-3)}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{14}{(n-2) \cdot (n-3)}$$

$$14 \cdot 4 = (n-2) \cdot (n-3)$$

$$(n-2)(n-3) = 56$$

$$n^2 - 3n - 2n + 6 = 56$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0.$$

Решавањем квадратне једначине добија се

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$n_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-50)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{5 \pm 15}{2}$$

$$n_1 = \frac{5-15}{2} = -5$$

$$n_2 = \frac{5+15}{2} = 10.$$

Решење n_1 је негативно, па га одбацујемо.

Решење $n_2 = n = 10$ задовољава услов задатка $n \in N$.

$$(a^{-2}\sqrt{a} - \sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}})^n = (a^{-2+\frac{1}{2}} - \frac{a^{-\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{10}}})^n = (a^{-\frac{3}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^{10}.$$

За $n = 10$ бином има 11 чланова; средњи члан је T_6 ($k=5$).

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$T_6 = -\binom{10}{5} (a^{-\frac{3}{2}})^5 (a^{-\frac{1}{2}})^5$$

$$T_6 = -\binom{10}{5} a^{-\frac{15}{2}} a^{-\frac{5}{2}} = -\binom{10}{5} a^{-10} = -\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot (10-5)!} a^{-10} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} a^{-10}$$

$$T_6 = -252 a^{-10}.$$

⑥ Одредити коефицијент уз x^8 у развоју $(1 + x^2 - x^3)^9$.

Упутство: Дати девети степен тринома написати у облику деветог степена бинома, да би се могла применити биномна формула.

Решење.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(1 + x^2 - x^3)^9 = (1 + (x^2 - x^3))^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} 1^{9-k} (x^2 - x^3)^k = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} (x^2 - x^3)^k$$

Да би смо одредили коефицијент који стоји уз x^8 у овом развоју, потребно је прво применити биномну формулу на израз $(x^2 - x^3)^k$.

$$(x^2 - x^3)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (x^2)^{k-i} (-x^3)^i$$

Коефицијент уз x^8 биће $\binom{9}{k} \binom{k}{i}$.

Даље је потребно одредити које вредности $k, i \in N_0$ задовољавају експоненцијалну једначину

$$(x^2)^{k-i} (-x^3)^i = x^8$$

$$(-1)^{3i} x^{2k-2i} x^{3i} = 1 \cdot x^8$$

$$(-1)^{3i} x^{2k-2i+3i} = 1 \cdot x^8$$

$$(-1)^{3i} x^{2k+i} = 1 \cdot x^8.$$

Имамо да је $(-1)^{3i} = 1$, ако је i паран број. Решавамо једначину $2k + i = 8$.

Једно решење је $i=0, k = 4$.

Друго решење је $i=2, k = 3$.

Тражени коефицијент уз x^8 износи

$$\begin{aligned} \binom{9}{4} \binom{4}{0} + \binom{9}{3} \binom{4}{2} &= \binom{9}{3} \binom{3}{2} + \binom{9}{4} \cdot 1 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{3! \cdot (9-3)!} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4! (9-4)!} \\ &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} \cdot \frac{3}{1} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 36 \cdot 7 + 126 \end{aligned}$$

$$= 252 + 126 = 378.$$

⑦ Израчунати вредност израза:

$$(a + bi)^6 + (a - bi)^6, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Упутство: Примењујемо биномну формулу и из области комплексних бројева, $i^2 = -1$.

Решење.

Биномна формула гласи

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Биномни коефицијенти су

$$\binom{6}{0} = \frac{6!}{0!(6-0)!} = \frac{6!}{1 \cdot 6!} = 1$$

$$\binom{6}{1} = \frac{6!}{1!(6-1)!} = \frac{6 \cdot 5!}{1 \cdot 5!} = 6$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 1 \cdot 4!} = 15$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = 20$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} = 15$$

$$\binom{6}{5} = \frac{6!}{5!(6-5)!} = \frac{6 \cdot 5!}{5! \cdot 1!} = 6$$

$$\binom{6}{6} = \frac{6!}{6!(6-6)!} = \frac{6!}{6! \cdot 0!} = 1.$$

Даље рачунамо 6-ти степен бинома.

Имамо

$$\begin{aligned} (a + bi)^6 &= \binom{6}{0}a^6b^0 + \binom{6}{1}a^5bi + \binom{6}{2}a^4b^2i^2 + \binom{6}{3}a^3b^3i^3 + \binom{6}{4}a^2b^4i^4 + \binom{6}{5}ab^5i^5 + \\ &\quad \binom{6}{6}a^0b^6i^6 \\ &= a^6 + 6a^5bi + 15 \cdot (-1)a^4b^2 + 20a^3b^3 \cdot (-i) + 15a^2b^4 + 6ab^5i - b^6 \\ &= a^6 + 6a^5bi - 15a^4b^2 - 20a^3b^3i + 15a^2b^4 + 6ab^5i - b^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a - bi)^6 &= \binom{6}{0}a^6b^0 + \binom{6}{1}a^5(-bi) + \binom{6}{2}a^4(-bi)^2 + \binom{6}{3}a^3(-bi)^3 + \binom{6}{4}a^2(-bi)^4 + \\
&\quad \binom{6}{5}a(-bi)^5 + \binom{6}{6}a^0(-bi)^6 \\
&= a^6 - 6a^5bi - 15a^4b^2 + 20a^3b^3i + 15a^2b^4 - 6ab^5i - b^6.
\end{aligned}$$

Тражени израз је

$$\begin{aligned}
(a + bi)^6 + (a - bi)^6 &= a^6 + 6a^5bi - 15a^4b^2 - 20a^3b^3i + 15a^2b^4 + 6ab^5i - \\
&\quad b^6 + a^6 - 6a^5bi - 15a^4b^2 + 20a^3b^3i + 15a^2b^4 - 6ab^5i - b^6.
\end{aligned}$$

Сређивањем израза се добија

$$(a + bi)^6 + (a - bi)^6 = 2a^6 - 30a^4b^2 + 30a^2b^4 - 2b^6.$$

⑧ Доказати да ако бројеве n -тог реда Паскаловог троугла посматрамо као цифре једног броја добијамо n -ти степен броја 11 (особина Паскаловог троугла стр. 19).

Упутство: Првих неколико степена броја 11 израчунати, а затим тај број записати у декадном запису и уочити неко правило.

Решење.

$$11^0 = 1 = 1 \cdot 10^0 = \binom{0}{0} 10^0$$

$$11^1 = 11 = 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = \binom{1}{0} 10^1 + \binom{1}{1} 10^0$$

$$11^2 = 121 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 = \binom{2}{0} 10^2 + \binom{2}{1} 10^1 + \binom{2}{2} 10^0$$

$$\begin{aligned}
11^3 &= 1331 = 1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 \\
&= \binom{3}{0} 10^3 + \binom{3}{1} 10^2 + \binom{3}{2} 10^1 + \binom{3}{3} 10^0
\end{aligned}$$

...

Приметимо када израчунамо k -ти степен броја 11 и запишемо га у декадном запису добијамо да је

$$11^k = \binom{k}{0} 10^k + \binom{k}{1} 10^{k-1} + \dots + \binom{k}{k-1} 10^1 + \binom{k}{k} 10^0. \quad (\odot)$$

Докажимо да $(\odot)$ важи за свако $k \in N_0$ применом биномне формуле.

$$\begin{aligned} 11^k &= (10 + 1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} 10^{k-i} 1^i = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} 10^{k-i} \\ &= \binom{k}{0} 10^k + \binom{k}{1} 10^{k-1} + \dots + \binom{k}{k-1} 10^1 + \binom{k}{k} 10^0. \end{aligned}$$

5. ПОЛИНОМНА ФОРМУЛА

5.1. Број решења једначине

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \quad (*)$$

Одредићемо број решења горње једначине у скупу природних бројева N_0 .

Подсетимо се функција $f: X \rightarrow A$ је бијекција акко је она истовремено и инјекција (ако за свака два елемента $x, y \in X$, из $x \neq y$ следи $f(x) \neq f(y)$) и сурјекција (ако за сваки $a \in A$ постоји $x \in X$, такав да је $a = f(x)$), тј. ако је сваки елемент из A слика неког елемента из X по пресликавању f).

Теорема 1.6. Једначина

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

има $\binom{n+k-1}{n}$ решења у скупу N_0 .

Доказ.

Нека је $X_{n,k}$ скуп свих решења горње једначине у скупу N_0 , а $B_{n,k-1}$ скуп свих $(n+k-1)$ -речи азбуке $B = \{0, 1\}$ које садрже тачно $k-1$ нула (и тачно n јединица). Функција $X_{n,k} \rightarrow B_{n,k-1}$ која решење $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ дате једначине пресликава у реч из $B_{n,k-1}$ такву да се испред прве нуле у њој налази x_1 јединица, између i -те и $(i+1)$ -те нуле x_{i+1} јединица ($i=1, 2, \dots, k-1$) и иза последње нуле x_k јединица, очигледно је бијекција. На основу тога, следи тврђење. ■

5.2. Речи датог типа

Нека је $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ и нека су $k_1, k_2, \dots, k_m$ ненегативни цели бројеви такви да је $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. За n -реч над азбуком A кажемо да је реч типа $(k_1, k_2, \dots, k_m)$, ако се у њој слово a_j појављује k_j пута, за $1 \leq j \leq m$.

Очигледно је број различитих типова n -речи над неком m -азбуком једнак броју решења једначине $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ у скупу ненегативних целих бројева, тј. $\binom{n+m-1}{n}$.

Теорема 1.7. Број n -речи типа $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ једнак је $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$.

Доказ.

Реч $p = b_1 b_2 \dots b_n$ типа $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ над азбуком A потпуно је одређена ако за свако слово азбуке A знамо позиције (места) на којима се то слово појављује у речи p . При исписивању такве n -речи, места на којима ће бити слово a_1 могу се изабрати на $\binom{n}{k_1}$ начина, од преосталих $n - k_1$ места, она на којима ће бити слово a_2 могу се изабрати на $\binom{n-k_1}{k_2}$ начина, ..., места за слово a_m могу се изабрати на $\binom{n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1}}{k_m}$ начина. На основу принципа производа следи да је број n -речи типа $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ једнак

$$\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-k_2-\dots-k_{m-1}-k_m)!}$$

$$= \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Изрази означени бојама се скраћују.

Израз: $(n - k_1 - k_2 - \dots - k_{m-1} - k_m)! = (n - (k_1 + k_2 + \dots + k_m))! = (n - n)! = 0! = 1$. ■

Дефиниција 1.5. Бројеви $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$ називају се **полиномни бројеви**, тј. **полиномни коефицијенти**.

За полиномне бројеве користићемо још и ознаку $\binom{n}{k_1 k_2 \dots k_m}$.

5.3. Полиномна формула

Теорема 1.8. (Полиномна формула)

За $\forall m, n \in \mathbb{N}$ важи следећа формула, која се назива полиномна формула:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n &= \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n \\ k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0}} \binom{n}{k_1 \ k_2 \dots \ k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m} \\ &= \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n \\ k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0}} \frac{n!}{k_1! \ k_2! \dots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}\end{aligned}$$

5.4. Доказ полиномне формуле

Као и биномну формулу и полиномну формулу можемо доказати на два начина:

- а) математичком индукцијом и
- б) комбинаторно.

Доказ полиномне формуле.

а) *математичком индукцијом:*

Полиномну формулу доказујемо математичком индукцијом по m :

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n &= \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n \\ k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0}} \frac{n!}{k_1! \ k_2! \dots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}.\end{aligned}$$

➤ За $m = 1$, добија се да је лева страна једнакости једнака десној страни:

$$\begin{aligned}x_1^n &= \sum_{k_1} \binom{n}{k_1} x_1^{k_1} = \binom{n}{n} x_1^n = 1 \cdot x_1^n = x_1^n.\end{aligned}$$

$k_1 = n$
 $k_1 \in \mathbb{N}_0$

➤ За $m = 2$, добија се биномна формула:

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 = n \\ k_1, k_2 \in N_0}} \binom{n}{k_1 k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2} = \sum_{0 \leq k_2 \leq n} \binom{n}{k_2} x_1^{n-k_2} x_2^{k_2}. \quad (1)$$

➤ Претпоставимо да формула важи за неко m , тј.

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n \\ k_1, k_2, \dots, k_m \in N_0}} \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}. \quad (2)$$

➤ Индукцијски корак:

Докажимо да ова формула важи и за $m + 1$

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \dots + x_{m+1})^n &= (x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} + (x_m + x_{m+1}))^n = \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1} + k = n \\ k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k \in N_0}} \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_{m-1} k} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{m-1}^{k_{m-1}} (x_m + x_{m+1})^k \\ &\stackrel{(1)}{=} \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_{m-1} + k = n \\ k_1, k_2, \dots, k_{m-1}, k \in N_0}} \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_{m-1} k} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{m-1}^{k_{m-1}} \sum_{\substack{k_m + k_{m+1} = k \\ k_m, k_{m+1} \in N_0}} \binom{k}{k_m k_{m+1}} x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}}. \end{aligned}$$

Производ биномних коефицијената из горње једнакости једнак је

$$\begin{aligned} \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_{m-1} k} \binom{k}{k_m k_{m+1}} &= \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_{m-1}! k!} \cdot \frac{k!}{k_m! k_{m+1}!} \\ &= \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_{m-1}!} \cdot \frac{1}{k_m! k_{m+1}!} \\ &= \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_{m-1}! k_m! k_{m+1}!} \\ &= \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_{m+1}!} \\ &= \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_{m-1} k_m k_{m+1}}. \end{aligned}$$

И на крају се добија једнакост којом је завршена индукција и доказана теорема:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{m+1})^n =$$

$$\sum_{\substack{k_1 + k_2 + \cdots + k_{m+1} = n \\ k_1, k_2, \dots, k_{m+1} \in N_0}} \binom{n}{k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_{m-1} \ k_m \ k_{m+1}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{m-1}^{k_{m-1}} x_m^{k_m} x_{m+1}^{k_{m+1}}. \blacksquare$$

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{m+1} = n$$

$$k_1, k_2, \dots, k_{m+1} \in N_0$$

б) комбинаторни

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)(x_1 + x_2 + \cdots + x_m) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)}_n$$

$$= \cdots m^n \text{ сабирака } \cdots$$

Сваки сабирак је облика

$$x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}, \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n, \quad k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0.$$

Овде имамо: x_1 из k_1 заграда, x_2 из k_2 заграда, $\dots$, x_m из преосталих k_m заграда.

$$C = \text{број сабирака } x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}.$$

$$C = \underbrace{\binom{n}{k_1}}_{x_1} \underbrace{\binom{n-k_1}{k_2}}_{x_2} \underbrace{\binom{n-k_1-k_2}{k_3}}_{x_3} \cdots \underbrace{\binom{n-k_1-k_2-\cdots-k_{m-1}}{k_m}}_{x_m} = \binom{n}{k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_m}.$$

И на крају се добија да је

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n \\ k_1, k_2, \dots, k_m \in N_0}} \binom{n}{k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m}.$$

Тиме је и комбинаторни доказ за полиномну теорему завршен. $\blacksquare$

5.5. Задаци

① Користећи полиномну формулу, написати у развијеном облику $(x + y + z)^3$.

Упутство:

Користимо полиномну формулу

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n \\ k_1, k_2, \dots, k_m \in N_0}} \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

Решење.

$$\begin{aligned} (x + y + z)^3 &= \sum_{\substack{k_1 + k_2 + k_3 = 3 \\ k_1, k_2, k_3 \in N_0}} \binom{3}{k_1 k_2 k_3} x^{k_1} \cdot y^{k_2} \cdot z^{k_3} \\ &= \binom{3}{3 0 0} x^3 y^0 z^0 + \binom{3}{0 3 0} x^0 y^3 z^0 + \binom{3}{0 0 3} x^0 y^0 z^3 + \binom{3}{2 1 0} x^2 y^1 z^0 + \\ &\quad \binom{3}{2 0 1} x^2 y^0 z^1 + \binom{3}{1 2 0} x^1 y^2 z^0 + \binom{3}{0 2 1} x^0 y^2 z^1 + \binom{3}{1 0 2} x^1 y^0 z^2 + \\ &\quad \binom{3}{0 1 2} x^0 y^1 z^2 + \binom{3}{1 1 1} x^1 y^1 z^1 = \\ &= \frac{3!}{3!0!0!} x^3 + \frac{3!}{0!3!0!} y^3 + \frac{3!}{0!0!3!} z^3 + \frac{3!}{2!1!0!} x^2 y + \frac{3!}{2!0!1!} x^2 z + \frac{3!}{1!2!0!} x y^2 \\ &\quad + \frac{3!}{0!2!1!} y^2 z + \frac{3!}{1!0!2!} x z^2 + \frac{3!}{0!1!2!} y z^2 + \frac{3!}{1!1!1!} x y z \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2 y + 3x^2 z + 3xy^2 + 3y^2 z + 3xz^2 + 3yz^2 + \\ &\quad 6xyz. \end{aligned}$$

② Одредити коефицијенте C_{17} и C_{18} уз чланове x^{17} и x^{18} у развоју $(1 + x^5 + x^7)^{20}$.

Упутство:

Користити полиномну формулу

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n \\ k_1, k_2, \dots, k_m \in N_0}} \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

Решење.

$$\begin{aligned}
 (1 + x^5 + x^7)^{20} &= \sum_{\substack{k_1 + k_2 + k_3 = 20 \\ k_1, k_2, k_3 \in N_0}} \binom{20}{k_1 k_2 k_3} x^0 x^{5k_2} x^{7k_3} \\
 &= \sum_{\substack{k_1 + k_2 + k_3 = 20 \\ k_1, k_2, k_3 \in N_0}} \frac{20!}{k_1! k_2! k_3!} x^{5k_2 + 7k_3}
 \end{aligned}$$

Из услова задатка се добија

$$5k_2 + 7k_3 = 17$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 20.$$

Услов из полиномне формуле је $k_1, k_2, k_3 \in N_0$, па су решења $k_1 = 17$, $k_2 = 2$ и $k_3 = 1$.

Коефицијент уз члан x^{17} је једнак

$$C_{17} = \frac{20!}{17!2!1!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{17! \cdot 2 \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{2} = 10 \cdot 19 \cdot 18 = 3420.$$

За члан x^{18} имамо

$$5k_2 + 7k_3 = 18$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 20.$$

Услов из полиномне формуле је $k_1, k_2, k_3 \in N_0$.

Нема решења, па је коефицијент уз x^{18}

$$C_{18} = 0.$$

③ Одредити коефицијенте C_{10} и C_{15} уз чланове x^{10} и x^{15} у развоју

$$(1 - x^2 + x^3)^{20}.$$

Упутство: Користити полиномну формулу као и у задатку ②.

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n \\ k_1, k_2, \dots, k_m \in N_0}} \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}.$$

Решење.

Дакле, имамо да је

$$\begin{aligned} (1 - x^2 + x^3)^{20} &= \sum_{\substack{k_1 + k_2 + k_3 = 20 \\ k_1, k_2, k_3 \in N_0}} \binom{20}{k_1 k_2 k_3} x^0 x^{2k_2} x^{3k_3} \\ &= \sum_{\substack{k_1 + k_2 + k_3 = 20 \\ k_1, k_2, k_3 \in N_0}} \frac{20!}{k_1! k_2! k_3!} x^{2k_2 + 3k_3} \end{aligned}$$

Бројеви 10 и 15 могу се разбити на сабирке на следећи начин:

$$10 = 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2$$

$$15 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 5 \cdot 3$$

Из услова задатка за члан x^{10} се добија

$$2k_2 + 3k_3 = 10$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 20.$$

Услов из полиномне формуле је $k_1, k_2, k_3 \in N_0$.

Решења горњег система једначина су:

$$\text{а) } k_2 = 5 \wedge k_3 = 0, \quad k_1 = 20 - (k_2 + k_3) = 20 - (5 + 0) = 15$$

$$\text{б) } k_2 = 2 \wedge k_3 = 2, \quad k_1 = 20 - (k_2 + k_3) = 20 - (2 + 2) = 16.$$

Имамо да је коефицијент

$$C_{10} = -\frac{20!}{15!5!0!} + \frac{20!}{16!2!2!} = -\binom{20}{5} + \binom{20}{4}\binom{4}{2}.$$

Из услова задатка за члан x^{15} се добија

$$2k_2 + 3k_3 = 15$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 20.$$

Услов из полиномне формуле је $k_1, k_2, k_3 \in N_0$.

Решења горњег система једначина су:

$$\text{а) } k_2 = 6 \wedge k_3 = 1, \quad k_1 = 20 - (k_2 + k_3) = 20 - (6 + 1) = 13$$

$$\text{б) } k_2 = 3 \wedge k_3 = 3, \quad k_1 = 20 - (k_2 + k_3) = 20 - (3 + 3) = 14$$

$$\text{в) } k_2 = 0 \wedge k_3 = 5, \quad k_1 = 20 - (k_2 + k_3) = 20 - (0 + 5) = 15.$$

Па је коефицијент

$$C_{15} = \frac{20!}{13!6!1!} - \frac{20!}{14!3!3!} + \frac{20!}{15!0!5!} = \binom{20}{7}\binom{7}{2} - \binom{20}{6}\binom{6}{3} + \binom{20}{5}.$$

④ Користећи полиномну формулу, написати у развијеном облику

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2.$$

Упутство:

Користити полиномну формулу

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n \\ k_1, k_2, \dots, k_m \in N_0}} \binom{n}{k_1 k_2 \dots k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

Решење.

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 &= \sum_{\substack{k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2 \\ k_1, k_2, k_3, k_4 \in N_0}} \binom{2}{k_1 k_2 k_3 k_4} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} x_4^{k_4} \\ &= \binom{2}{2 0 0 0} x_1^2 + \binom{2}{0 2 0 0} x_2^2 + \binom{2}{0 0 2 0} x_3^2 + \binom{2}{0 0 0 2} x_4^2 + \\ &\quad \binom{2}{1 1 0 0} x_1 x_2 + \binom{2}{1 0 1 0} x_1 x_3 + \binom{2}{1 0 0 1} x_1 x_4 + \binom{2}{0 1 1 0} x_2 x_3 + \end{aligned}$$

$$\binom{2}{0\ 1\ 0\ 1}x_2x_4 + \binom{2}{0\ 0\ 1\ 1}x_3x_4.$$

Биномни коефицијенте можемо израчунати:

$$\binom{2}{2\ 0\ 0\ 0} = \binom{2}{0\ 2\ 0\ 0} = \binom{2}{0\ 0\ 2\ 0} = \binom{2}{0\ 0\ 0\ 2} = \frac{2!}{2!0!0!0!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\begin{aligned}\binom{2}{1\ 1\ 0\ 0} &= \binom{2}{1\ 0\ 1\ 0} = \binom{2}{1\ 0\ 0\ 1} = \binom{2}{0\ 1\ 1\ 0} = \binom{2}{0\ 1\ 0\ 1} = \binom{2}{0\ 0\ 1\ 1} = \frac{2!}{1!1!0!0!} = \\ &= 2.\end{aligned}$$

Тражени полином у развијеном облику је

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 \\ &+ 2x_2x_4 + 2x_3x_4 \\ &= \sum_{i=1}^4 x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j.\end{aligned}$$

⑤ Користећи полиномну формулу, написати у развијеном облику

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2, n \in N.$$

Решење.

На основу претходног задатка видимо да је

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + \cdots + 2x_1x_n + \\ &2x_2x_1 + \cdots + 2x_2x_n + \cdots + 2x_nx_1 + \cdots + 2x_{n-1}x_n \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j.\end{aligned}$$

6. ДОДАТНИ ЗАДАЦИ

1. Наћи најмањи природан број n такав да је при развоју $(1 + y)^n$ однос нека два суседна коефицијента 7:15.

Решење.

$$(1 + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} y^k$$

Однос нека два суседна коефицијента је $T_k : T_{k+1} = 7:15$ тј.

$$\binom{n}{k} : \binom{n}{k+1} = 7:15$$

Применом дефиниције биномног коефицијента имамо да је

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} : \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = 7:15$$

$$15 \frac{n!}{k!(n-k)!} = 7 \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}$$

$$15 \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} = 7 \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!}$$

Множењем леве и десне стране једнакости са $\frac{k!(n-k-1)!}{n!}$ добијамо

$$\frac{15}{(n-k)} = \frac{7}{(k+1)}$$

Унакрсним множењем разломака добијамо

$$15(k+1) = 7(n-k)$$

$$15k + 15 = 7n - 7k$$

$$7n = 15k + 15 + 7k$$

$$n = \frac{22k + 15}{7}$$

Услов задатка је да $k \in N$ и $n \in N$, па добијамо да је најмањи природан броја n за $k = 6$.

Дакле, тражено $n=21$.

2. Одреди x у изразу $\left[(\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x+1}} + \sqrt[12]{x} \right]^6$ тако да четврти члан у биномном изразу буде 200.

Решење.

Знамо да је општи члан

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Дакле,

$$T_4 = \binom{6}{3} \left((\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x+1}} \right)^{6-3} (\sqrt[12]{x})^3.$$

Како по услову задатка знамо да је $T_4 = 200$, имамо да је

$\binom{6}{3} \left((\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x+1}} \right)^{6-3} (\sqrt[12]{x})^3 = 200$, на основу дефиниције биномног коефицијента и особина логаритма имамо

$$20 \left(x^{\frac{1}{2(\log x+1)}} \right)^3 (x)^{\frac{3}{12}} = 200 \quad /:20$$

$$\left(x^{\frac{1}{2(\log x+1)}} \right)^3 (x)^{\frac{3}{12}} = 10$$

$$x^{\frac{3}{2\log x+2}} x^{\frac{1}{4}} = 10$$

$$x^{\frac{6+\log x+1}{4(\log x+1)}} = 10$$

$$x^{\frac{7+\log x}{4\log x+4}} = 10.$$

Логаритмовањем последње једначине добијамо:

$$\frac{7+\log x}{4\log x+4} \log x = 1$$

$$\Rightarrow \log x(7 + \log x) = 4(\log x + 1)$$

$$7\log x + (\log x)^2 = 4\log x + 4$$

$$(\log x)^2 + 3 \log x - 4 = 0.$$

Смена: $t = \log x$;

$$t^2 + 3t - 4 = 0.$$

Решавањем квадратне једначине добија се да је $t = 1$ или $t = -4$.

Враћањем смене добија се да је $x = 10$ или $x = 10^{-4}$.

3. За које вредности x је трећи члан у биномном развоју израза $(x + x^{\log x})^5$ једнак 1000000?

Решење.

Трећи члан је

$$T_3 = \binom{5}{2} x^3 (x^{\log x})^2 = 1000000$$

$$\Rightarrow 10x^3 x^{2\log x} = 10^6 / :10$$

$$x^3 x^{2\log x} = 10^5$$

$$x^{3+2\log x} = 10^5.$$

Логоритмовањем добијамо

$$(3+2\log x)\log x = 5\log 10.$$

Како је $\log 10 = 1$ имамо да је

$$3\log x + 2(\log x)^2 = 5.$$

Смена $t = \log x$.

Дакле, наша квадратна једначина постаје

$$2t^2 + 3t - 5 = 0.$$

Решавањем квадратне једначине добијамо $t = -\frac{10}{4}$ или $t = 1$.

Враћањем смене добија се да је $x = 10$ или $x = 10^{-\frac{5}{2}}$.

4. За које вредности x је у развијеном облику израза $(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}})^n$ збир трећег и петог члана једнак 135, а збир биномних коефицијената последња три члана је 22?

Решење.

Како су биномни коефицијенти који су једнако удаљени од почетка и краја једнаки, уместо последња три члана можемо узети прва три. Према томе тај услов можемо исказати на следећи начин.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = 22 \text{ тј.}$$

$$1 + n + \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 22$$

$$1 + n + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot 1 \cdot (n-2)!} = 22$$

$$1 + n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 22 \quad / \cdot 2$$

$$2 + 2n + n(n-1) = 44$$

$$2 + 2n + n^2 - n = 44$$

$$n^2 + n - 42 = 0$$

Решавањем квадратне једнчине добијамо да је $n = -7$ или $n = 6$. Како је $n \in N$

једино решење је $n = 6$.

Други услов задатка је $T_3 + T_5 = 135$.

$$\binom{6}{2}(\sqrt{2^{x+2}})^4 \left(\frac{1}{\sqrt{2^{x+1}}}\right)^2 + \binom{6}{4}(\sqrt{2^{x+2}})^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2^{x+1}}}\right)^4 = 135$$

Како је $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ имамо

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 1 \cdot 4!} (2^{x+2})^2 \left(\frac{1}{2^{x+1}}\right)^1 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} 2^{x+2} \left(\frac{1}{2^{x+1}}\right)^2 = 135$$

$$15 \frac{2^{2x+4}}{2^{x+1}} + 15 \frac{2^{x+2}}{2^{2x+2}} = 135 \quad / :15$$

$$\frac{2^{2x+4}}{2^{x+1}} + \frac{2^{x+2}}{2^{2x+2}} = 9.$$

На основу особина степеновања добијамо

$$8 \cdot 2^x + 2^{-x} = 9$$

$$\text{Смена } t = 2^x$$

$$8 \cdot t + \frac{1}{t} \cdot 9 = / \cdot t$$

$$8 \cdot t^2 + 1 = 9t$$

$$8 \cdot t^2 - 9 \cdot t + 1 = 0.$$

Решавањем квадратне једначине добијамо да је $t = 1$ или $t = \frac{1}{8}$.

Враћањем смене добијамо да је $x = 0$ или $x = -3$.

5. Израчунати збир $\binom{5}{0} + 2\binom{5}{1} + 2^2\binom{5}{2} + 2^3\binom{5}{3} + 2^4\binom{5}{4} + 2^5\binom{5}{5}$.

Решење.

Ако упоредимо дати збир са десном страном једнакости биномне формуле

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + \dots + \binom{n}{n}x^0 y^n,$$

Видимо да $n = 5$, $x = 1$ и $y = 2$ ($x = 1$, јер је један на било који степен увек један).

Дакле, имамо да је

$$\begin{aligned} (1 + 2)^5 &= \binom{5}{0}1^5 2^0 + \binom{5}{1}1^4 2^1 + \binom{5}{2}1^3 2^2 + \binom{5}{3}1^2 2^3 + \binom{5}{4}1^1 2^4 + \binom{5}{5}1^0 2^5 \\ &= \binom{5}{0} + \binom{5}{1}2^1 + \binom{5}{2}2^2 + \binom{5}{3}2^3 + \binom{5}{4}2^4 + \binom{5}{5}2^5. \end{aligned}$$

Тражени збир је $(1 + 2)^5 = 3^5 = 243$.

6. Доказати да је $\sqrt{3} \left[(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n \right]$ цео број.

Решење.

На основу биномне формуле је

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{3})^n &= \binom{n}{0} 1^n (\sqrt{3})^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} (\sqrt{3})^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} (\sqrt{3})^2 + \binom{n}{3} 1^3 (\sqrt{3})^3 + \dots + \\ &\binom{n}{n} 1^1 (\sqrt{3})^n = 1 + n\sqrt{3} + \binom{n}{2} 3 + \binom{n}{3} 3\sqrt{3} + \dots \quad (1)\end{aligned}$$

Слично, имамо

$$(1 - \sqrt{3})^n = 1 - n\sqrt{3} + \binom{n}{2} 3 - \binom{n}{3} 3\sqrt{3} + \dots \quad (2)$$

Сабирањем (1) и (2) имамо

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n &= [(1 + n\sqrt{3} + \binom{n}{2} 3 + \binom{n}{3} 3\sqrt{3} + \dots) - (1 - n\sqrt{3} + \\ &\binom{n}{2} 3 - \binom{n}{3} 3\sqrt{3} + \dots)]\end{aligned}$$

Приметимо, сви рационални чланови у главној загради се поништавају, остају само чланови који садрже $\sqrt{3}$. Када чланове који садрже $\sqrt{3}$ помножимо са $\sqrt{3}$, они постају цели бројеви. Биномни коефицијенти су цели бројеви, тако да смо добили збир целих бројева, који је такође цео број.

7. Доказати да је број $11^{100} - 1$ дељив са 1000.

Решење.

11^{100} можемо написати као $(1 + 10)^{100}$ и применити биномну формулу.

$$\begin{aligned}11^{100} - 1 &= (1 + 10)^{100} - 1 = \binom{100}{0} 1^{100} 10^0 + \binom{100}{1} 1^{99} 10^1 + \binom{100}{2} 1^{98} 10^2 + \\ &\binom{100}{3} 1^{97} 10^3 + \dots + \binom{100}{100} 1^0 10^{100} - 1 \\ &= 1 + \binom{100}{1} 10^1 + \binom{100}{2} 10^2 + \binom{100}{3} 10^3 + \dots + \binom{100}{100} 10^{100} - 1\end{aligned}$$

Први и последњи члан се поништавају, остају само чланови дељиви са 1000.

Сви сабирци који садрже 10^k , за $k \geq 3$ су дељиви са 1000, а за преостале ћемо директно показати.

$$\binom{100}{1} 1^{99} 10^1 = 100 \cdot 1 \cdot 10 = 1000$$

$$\binom{100}{2} 10^2 = \frac{100 \cdot 99}{2} 10^2 = \frac{10^4 \cdot 99}{2} = \frac{10^3 \cdot 10 \cdot 99}{2} = \frac{1000 \cdot 10 \cdot 99}{2} = 495000$$

Ако је сваки сабирак неког збира дељив неким бројем онда је и збир дељив тим бројем.

8. Доказати да за сваки природан број $n > 1$ и сваки позитиван број x важи неједнакост $(1+x)^n > 1+n \cdot x$.

Решење.

Ако је $x > 0$ и $n \in \{2, 3, 4, \dots, n\}$ онда је

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= \binom{n}{0} 1^n x^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} x^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} 1^0 x^n \\ &= 1 + n \cdot x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n = \textcircled{*} \end{aligned}$$

Сви сабирци иза $n \cdot x$ су позитивни, $\textcircled{*}$ је сигурно већа од $1+n \cdot x$ за $n > 1$. Тиме је доказ завршен.

9. Доказати да за сваки природан број $n \geq 2$ важи неједнакост $2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Решење.

За $n \geq 2$ имамо

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \binom{n}{0} 1^n \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \binom{n}{n} 1^0 \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots > 1 + 1 = 2. \quad (1) \end{aligned}$$

Доказали смо да $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2$, остаје нам још да докажемо да је $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

За $k \geq 2$ важи неједнакост

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} < \frac{1}{k!}, \text{ па добијамо}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}. \quad (2)$$

Како је ово геометријски низ имамо да је

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}},$$

Па је $(2) = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, што је сигурно мање од 3.

10. Колико рационалних чланова садржи развој $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$?

Решење.

Општи члан развоја бинома је

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} (\sqrt{2})^{n-k} (\sqrt[4]{3})^k$$

Како је у нашем задатку $n = 100$, имамо да је

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \binom{100}{k} (\sqrt{2})^{100-k} (\sqrt[4]{3})^k \\ &= \binom{100}{k} 2^{\frac{100-k}{2}} 3^{\frac{k}{4}}. \end{aligned}$$

Да би чланови развоја овог бинома били рационални бројеви потребан и довољан услов је да k буде дељив са 4. Како је $0 \leq k \leq 100$, закључујемо да су то бројеви 0, 4, 8, 12, 16, ..., 100. Укупно их има 26.

11. Одреди коефицијент уз $x^2 y^3 z^2$ у изразу $(x + y + z)^7$.

Решење.

Према полиномној формули имамо

$$(x + y + z)^7 = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + k_3 = 7 \\ k_1, k_2, k_3 \in N_0}} \binom{7}{k_1 k_2 k_3} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$$

Како у задатку треба да одредимо коефицијент уз $x^2 y^3 z^2$ имамо да је $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ и $k_3 = 2$.

Дакле,

$$\binom{7}{k_1 k_2 k_3} = \binom{7}{2 \ 3 \ 2} = \frac{7!}{2!3!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

12. Одреди коефицијент уз $x^p y^q$ у изразу $(1 + x + y)^n$.

Решење.

Према полиномној формули имамо

$$(1 + x + y)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + k_3 = n \\ k_1, k_2, k_3 \in N_0}} \binom{n}{k_1 k_2 k_3} 1^{k_1} x^{k_2} y^{k_3}$$

Како у задатку треба да одредимо коефицијент уз $x^p y^q$ имамо да је $k_2 = p$, $k_3 = q$.
Знамо да је $k_1 + k_2 + k_3 = n$, па одатле имамо

$$k_1 + p + q = n, \text{ тј.}$$

$$k_1 = n - p - q.$$

Тражени коефицијент је

$$\binom{n}{n-p-q \ p \ q} = \frac{n!}{(n-p-q)! \cdot p! \cdot q!}.$$

13. Наћи коефицијент уз $x^6 y^3 z^2 (x - 2y + 5z)^{11}$.

Решење.

Уводимо смену $x_1 = x$, $x_2 = -2y$, $x_3 = 5z$ и примењујемо полиномну формулу.

$$\begin{aligned}(x - 2y + 5z)^{11} &= (x_1 + x_2 + x_3)^{11} \\ &= \sum_{\substack{k_1 + k_2 + k_3 = 11 \\ k_1, k_2, k_3 \in N_0}} \binom{11}{k_1 k_2 k_3} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}\end{aligned}$$

Коефицијент уз $x_1^6 x_2^3 x_3^2$ је $\binom{11}{6 \ 3 \ 2} = \frac{11!}{6!3!2!}$.

Како је $x_1^6 x_2^3 x_3^2 = x^6 (-2y)^3 (5z)^2 = x^6 (-2)^3 y^3 5^2 z^2 = x^6 (-8) y^3 25 z^2$

имамо да је коефицијент уз $x^6 y^3 z^2$

$$-8 \cdot 25 \cdot \frac{11!}{6!3!2!} = -924000.$$

6.1. Задаци за самостални рад

1. Други, трећи и четврти члан у развоју $(x + y)^n$ једнаки су редом 240, 720 и 1080.

Одреди x , y и n .

Решење. $n=5$, $x=2$ и $y=3$.

2. Одредити x ако се зна да шести члан развоја $\left(\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}} + x^{2\log x}\right)^8$ има вредност 5600.

Решење. $x=10$ или $x=10^{-\frac{1}{5}}$.

3. Доказати да је $(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$ цео број.

4. Наћи онај члан који не садржи x у развоју $(\sqrt[3]{x^2} - x^{-1})^{15}$.

Решење. Седми члан.

5. Наћи коефицијент уз x^4 у развоју $(x + 3x^{-1})^8$.

Решење. Коефицијент уз x^4 је 252.

6. Одреди коефицијент уз x^8 у развоју $(1 + x^2 - x^3)^9$.

7. Одреди коефицијент уз x^{17} и x^{18} у изразу $(1 + x^5 + x^7)^n$.

Решење. Коефицијент уз x^{17} једнак је $\frac{n!}{1!2!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$,

а коефицијент уз x^{18} једнак је нули.

7. ЗАКЉУЧАК

У овом раду обрађена је биномна и полиномна формула у настави математике. По програму за средње стручне школе и гимназије ова тема се ради у четвртом разреду. Претходно се обрађује комбинаторика да би ученици стекли одређена знања и могли да прате ново градиво. Познавање појма пермутација и комбинација је неопходно за схватање појма биномне и полиномне формуле и биномних коефицијената.

Из тог разлога је у раду дат и објашњен развој биномне формуле за $n = 2$ и $n = 3$, јер су формуле квадрата бинома и куба бинома рађене у основној (квадрат бинома) и средњој школи (куб бинома) да би се проблем приближио ученицима.

Моје искуство је да објашњења Паскаловог троугла привлаче пажњу ученика, јер им је увек прихватљивије и лакше за праћење нешто што није дато у општим бројевима, а овде их привлачи мистериозност Паскаловог троугла и мотивише да се укључе у рад. Сама могућност да при развоју бинома, биномни коефицијенти се могу директно видети у Паскаловом троуглу и употребити без потребе да се рачунају по формули, такође мотивише ученике да самостално покушају израду задатка. Напомена да су и стари кинески и индијски математичари проучавали овај троугао због игара на срећу, што је такође заокупљало и Паскала, веома заинтересује ученике, што није изненађење данас када су игре на срећу веома заступљене и популарне.

У свим задацима за биномну и полиномну формулу, дато је кратко упутство и поступно решење задатка. У решењу је увек прво представљена формула, која се користи у задатку (биномна, полиномна, формула за члан у биномној формули) и онда започета израда задатка са детаљним описом свих израчунавања до крајњег резултата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богословов, В.: Збирка решених задатака из Математике 4, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2000.
2. Ивановић, Ж., Огњановић, С.: Збирка задатака и тестова за IV разред гимназија и техничких школа, „Круг", Београд, 2004.
3. Миличић, П., Стојановић, В., Каделбург, З., Боричић, Б.: Математика за IV разред средње школе, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2008.
4. Младеновић, П.: Комбинаторика, Друштво математичара Србије- Материјали за младе математичаре, свеска 22, 3. издање, Београд, 2001.
5. Обрадовић, М., Георгијевић, Д.: Математика за 4. разред средње школе, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2003.
6. Павковић, Б., Вељан, Д.: Елементарна математика 1, Школска књига, Загреб, 2004.
7. Шешеља, Б., Тепавчевић, А.: Алгебра 2 - Теорија и задаци, СИМБОЛ, Нови Сад, 2011.
8. Тошић, Р.: Комбинаторика, Универзитет у Новом Саду, Природно математички факултет, Нови Сад, 1999.

БИОГРАФИЈА

Станислава М. Кузманов, рођена 09.08.1991. године у Новом Саду, где је завршила Основну школу „Прва војвођанска бригада“, а после основне школе Гимназију „Исидора Секулић“ природно - математички смер.

Након завршене гимназије уписује ПМФ Универзитета у Новом Саду, на студијском програму Дипломирани професор математике, Департман за математику и информатику. После завршених основних академских студија, ради као наставник предмета математика у Основној школи „Светозар Милетић“ у Врбасу.

Мастер студије на Математичком факултету Универзитета у Београду уписује 2020. године и успешно полаже предвиђене испите. Тема мастер рада „Биномна и полиномна формула у настави математике“, ментор проф. др Горан Ђанковић, ванредни професор - ментор, одобрена је 18.12.2020. године.
