УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милица Д. Милојевић

ТРЕТИРАЊЕ КОНВЕРГЕНЦИЈЕ РЕДОВА У УЏБЕНИЦИМА О. Л. КОШИЈА

мастер рад

Београд, 2021.

Ментор:

проф. др Зоран Каделбург, редовни професор у пензији, емеритус
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Милош Арсеновић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Златко Лазовић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: ____________________

Сестри Марији

Наслов мастер рада: Третирање конвергенције редова у уџбеницима О. Л. Кошија

Резиме: Тема се бави једном облашћу из уџбеника О. Л. Кошија *Алгебарска анализа*, који прати његов курс анализе на Политехничкој школи *Ecole Polytechnique*. То је једна од најутицајнијих математичких књига икада написаних. Не само да је Коши први представио прецизну дефиницију лимеса и средство да они постану основа ригорозне теорије диференцијалног рачуна, већ је и оживео идеју да сва математика може бити постављена на тако ригорозне темеље. Овај стандард је у великој мери последица трансформације коју су донели Коши и *Алгебарска анализа*. Циљ рада јесте да се прикаже како се у 19. веку учило и предавало о теорији редова и упореди са начином како се то предаје данас. Тачније, да се направи паралела између теорије редова из књига тадашњег времена и из данашњих књига, да се прикаже има ли разлике у приступу, има ли непрецизности у увођењу и извођењу њихових својстава у 19. веку.

Кључне речи: Коши, ред, конвергенција редова, степени редови, непрекидност, сума реда

Садржај

Глава 1

Увод

Математичка анализа је грана математике која користи идеју граничне вредности. Спомиње се и под именом виша математика, диференцијални рачун, а у енглеској литератури као calculus. Оснивачи математичке анализе, Њутн и Лајбниц, нису се много бавили дефинисањем њених основа. За њих је математичка анализа била исто што и обичан рачун са функцијама и њиховим диференцијалима и интегралима. Бесконачно малим и великим величинама није се придавао велики значај, говорило се о њима без објашњења шта су. Понекад су се користили геометријски аргументи са дијаграма, а понекад и тврдње попут „види се" и „очигледно је". Многи значајни математичари 18. века, попут Де Моавра, Тејлора, Лагранжа, Јакоба и Јохана Бернулија и Маклорена, потрудили су се да унесу што више грчке класичне строгости у основе математичке анализе. Процес систематског заснивања анализе је трајао дуго. Било је потребно донети одлуку да ли да се покуша са логички конзистентним и систематским дефинисањем бесконачно мале величине или да се покуша са избацивањем појма бесконачно мале величине и да се уведе њена замена, односно дефинишу други појмови. Чешки филозоф, математичар и теолог, Болцано и, вероватно најзначајнији француски математичар прве половине 19. века, Огистен Луј Коши [1], скоро су истовремено понудили два концепта елиминисања појма бесконачно мале величине помоћу увођења граничне вредности. Математичарима је упућена порука: *„Не размишљајте нити говорите о бесконачно малим величинама, говорите и размишљајте о низовима све мањих и мањих величина које се приближавају нули."* [2]

У овом раду пажња је посвећена Огистен Луј Кошију. Са само 27 година, почео је да предаје курс анализе на факултету *Ecole Polytechnique*, где је две године раније исти предмет предавао Жозеф Луј Лагранж. Од њега је Коши наследио мотивацију и преданост да успостави темеље диференцијалног рачуна. Није било лако заслужити звање професора на *Ecole Polytechnique*, али је Коши до 1821. године објавио 28 монографија, док је 1821. године објавио уџбеник *Course d'analyse* [1], који прати његов курс анализе на политехничкој школи *Ecole*. То је његова прва комплетна књига и једна од најутицајнијих математичких књига икада написаних. Не само да је Коши први представио прецизну дефиницију лимеса и средство да они постану основа ригорозне теорије диференцијалног рачуна, већ је и оживео идеју да се сва математика може поставити на тако ригорозне темеље. Данас се квалитет математичког дела делимично процењује и оценом нивоа његове ригорозности. Овај стандард је у великој мери последица трансформације коју су донели Коши и *Course d'analyse*. Неки извори овај уџбеник називају и *Алгебарска анализа*. Коши је намеравао да напише и други део, али није имао прилику. Годину дана након објављивања, *Ecole Polytechnique* је променила наставни план и програм како би смањила нагласак на основама диференцијалног рачуна. Коши је написао нове текстове у којима је материјал из *Алгебарске анализе* свео на само неколико десетина страница.

Будући да је застарео као уџбеник само годину дана након објављивања, *Course d'analyse* је у 19. веку доживео само једно француско издање. То прво издање, објављено 1821. године, имало је 568 страница. Друго издање, објављено је као том 15 *Cauchy's Oeuvres complètes*[1] 1897. године. Садржај овог издања је готово идентичан првом. Објављена су немачка издања 1828. и 1885. године, и руско издање у Лајпцигу 1864. године. Шпански превод појавио се 1994. године, објављен у Мексику.[3]

Кроз овај рад представљени су делови књиге *Course d'analyse* [1]. У другом поглављу наведени су делови друге главе уџбеника у којима су уведени појмови број, величина, гранична вредност, граничне вредности низа који неограничено расте и опада. Уведени су и појмови бесконачно мале и бесконачно велике величине и изведена основна својства тих појмова. Затим, следи текст у коме Коши представља дефиницију непрекидности функције у три етапе (дефиниције). Такође, испитано је у којим су границама функције дате промењиве x непрекидне у односу на ту промењиву.

Треће поглавље почиње Кошијевом дефиницијом реда. Описани су основни

[1]Кошијева сабрана дела

појмови о редовима, правила конвергенције, потребни и довољни услови за конвергенцију редова. На конкретним примерима је испитана конвергенција реда. Уведени су редови са позитивним члановима, као и редови са позитивним и негативним члановима. Највећи део овог поглавља се бави редовима чији су чланови поређани према растућим целобројним степенима променљиве x, које данас називамо степеним редовима.

Оригинални Кошијев текст је испраћен коментарима аутора, који су написани или у фуснотама или искошеним словима. Коментари су, заправо, паралела између теорије редова из Кошијеве књиге *Course d'analyse* и из данашњих књига. Такође, приказују да ли има разлике у приступу, у увођењу неких појмова и извођењу њихових својстава у 19. веку и у савременим уџбеницима, а коментаришу се и неке непрецизности у Кошијевом тексту.

Глава 2

Бесконачно мале и бесконачно велике величине. Непрекидност функција

2.1 Бесконачно мале и бесконачно велике величине

Под појмом број у Кошијевом тексту подразумева се позитиван број који се користи за бројање и мерење, док се под појмом величина подразумева реалан број који се јавља у операцијама са бројевима. Разликују се константне величине и променљиве величине, где константе имају фиксну вредност и означавају се почетним словима абецеде, док променљиве величине могу добити различите вредности и представљене су последњим словима абецеде. Коши је приметио да одређене променљиве величине добијају узастопне вредности које се приближавају фиксној вредности, тако да је њихово одступање од те вредности произвољно мало. Та фиксна вредност се зове гранична вредност. Затим, уводи $+\infty$ као граничну вредност низа који неограничено расте, и $-\infty$ као граничну вредност низа који неограничено опада. На овај начин, његове величине сада укључују бесконачно мале и бесконачно велике.

Променљиву величину зовемо *бесконачно малом* ако њене вредности неограничено опадају[1], тако да им је граница једнака нули. Треба разликовати стално опадање и неограничено опадање. Површине правилних полигона опи-

[1] по апсолутној вредности

саних око неког круга стално опадају како број њихових страница расте, али оне се не смањују неограничено јер им је граница површина круга. Посматрајмо променљиву чије су вредности чланови низа

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, ...$$

Она стално опада, али не неограничено, јер јој вредности теже граници 1. Затим, променљива чије су вредности узастопни чланови низа

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, ...$$

не опада стално, јер је разлика између два узастопна члана овог низа наизменично позитивна и негативна, али ипак, она неограничено опада јер њене вредности постају мање од сваког унапред датог броја.

Променљиву величину зовемо *бесконачно великом* ако њене нумеричке[2] вредности неограничено расту тако да теже граници ∞. Слично као малопре, треба разликовати променљиву која стално расте од променљиве која неограничено расте. Површина правилног полигона уписаног у круг стално расте кад расте број његових страница, али не расте неограничено. Чланови низа

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, ...$$

расту стално и неограничено.

Нека је α бесконачно мала величина и нека су

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, ...$$

бесконачно мале величине првог, другог, трећег,... реда. Уопште, нека је бесконачно мала првог реда у односу на α она променљива величина која, подељена са α, када се вредност α смањује, тежи коначној граници различитој од нуле. Затим, бесконачно мала другог реда у односу на α је променљива величина која, подељена са α^2, тежи коначној граници различитој од нуле, итд. Ако са k означимо величину различиту од нуле, са ε променљиви број који неограничено опада заједно са нумеричком вредношћу променљиве α, општи облик променљиве величине, бесконачно мале првог реда у односу на α биће

$$k\alpha \quad \text{или бар} \quad k\alpha(1 \pm \varepsilon);$$

[2] Коши свуда кад помиње нумеричку вредност неке величине мисли у ствари на њену апсолутну вредност.

општи облик бесконачно мале другог реда биће

$$k\alpha^2 \quad \text{или бар} \quad k\alpha^2(1 \pm \varepsilon).$$

Аналогно, општи облик бесконачно мале реда n, где је n цео број, биће

$$k\alpha^n \quad \text{или бар} \quad k\alpha^n(1 \pm \varepsilon).$$

Теорема 2.1: Ако упоредимо две бесконачно мале величине различитог реда, док обе конвергирају ка нули, она чији је ред већи узима стално мање нумеричке вредности.

Доказ: Нека су

$$k\alpha^n(1 \pm \varepsilon) \quad \text{и} \quad k'\alpha^{n'}(1 \pm \varepsilon')$$

две бесконачно мале величине, једна реда n, друга реда n' и претпоставимо да је $n' > n$. Однос друге од ових величина према првој,

$$\frac{k'}{k}\alpha^{n'-n}\frac{1 \pm \varepsilon'}{1 \pm \varepsilon},$$

конвергира ка нули заједно са α. Како тај однос може имати произвољно мале нумеричке вредности, друга величина мора постати стално мања од прве.

Теорема 2.2: Бесконачно мала величина реда n, облика

$$k\alpha^n(1 \pm \varepsilon),$$

мења знак заједно са α увек када је n непаран број, а задржава знак као k за довољно мале вредности α, када је n паран број.

Доказ: У првом случају, α^n мења знак заједно са α, а у другом случају α^n је увек позитивно. Знак производа $k(1 \pm \varepsilon)$ је исти као за k ако је ε довољно мало.

Теорема 2.3: Збир неколико бесконачно малих величина реда

$$n, n', n'', ...$$

($n', n'', ...$ су бројеви већи од n) је нова бесконачно мала величина реда n.

Доказ: Заиста,

$$\begin{aligned}
&k\alpha^n(1 \pm \varepsilon) + k'\alpha^{n'}(1 \pm \varepsilon') + k''\alpha^{n''}(1 \pm \varepsilon'') + ... \\
&= k\alpha^n\left[1 \pm \varepsilon + \frac{k'}{k}\alpha^{n'-n}(1 \pm \varepsilon') + \frac{k''}{k}\alpha^{n''-n}(1 \pm \varepsilon'') + ...\right] \\
&= k\alpha^n(1 \pm \varepsilon_1),
\end{aligned}$$

где је ε_1 број који конвергира ка нули заједно са α.

Извешћемо сада неколико важних тврђења која се односе на полиноме који су уређени по растућим степенима бесконачно мале величине α.

Теорема 2.4: Сваки полином, уређен по растућим степенима од α, на пример,

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + ...$$

или општије,

$$a\alpha^n + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + ...,$$

(бројеви $n, n', n'', ...$ образују растући низ), биће стално истог знака као његов први члан

$$a, \quad \text{односно} \quad a\alpha^n$$

за довољно мале вредности α.

<u>Доказ:</u> Збир другог члана и свих који му следе, у првом случају, је бесконачно мала величина првог реда па је његова нумеричка вредност коначно[3] мања од величине a.[4] У другом случају, тај је збир бесконачно мала реда n' која коначно узима стално мање нумеричке вредности од оних бесконачне мале реда n.

Теорема 2.5: Ако је у полиному

$$a\alpha^n + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + ...,$$

уређеном по растућим степенима од α, степен n' другог члана непаран број, тај полином, за довољно мале нумеричке вредности променљиве α, узима некад веће, а некад мање вредности од $a\alpha^n$, зависно од тога да ли променљива a и коефицијент b имају исти или различити знак.

<u>Доказ:</u> Према датим претпоставкама, сума чланова после првог

$$b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + ...$$

биће, за довољно мале нумеричке вредности α, истог знака као сваки од производа $b\alpha^{n'}, b\alpha$.

Теорема 2.6: Ако је у полиному

$$a\alpha^n + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + ...,$$

[3]Коши термин „коначно” користи у смислу „када је независно променљива довољно близу тачки којој тежи”.

[4]Коши овде мисли да је збир мањи од нумеричке вредности a, јер a може бити негативно.

уређеном по растућим степенима од α, степен n' другог члана паран број, тај полином, за довољно мале нумеричке вредности променљиве α, узима стално веће вредности од првог члана, увек када је b позитиван, а стално мање, увек када је b негативан.

Доказ: Према датим претпоставкама, сума чланова после првог имаће, за довољно мале нумеричке вредности α, знак производа $b\alpha^{n'}$, дакле знак броја b.

Ако у претходној теореми ставимо $n = 0$, добијамо следеће тврђење:

Теорема 2.7: Нека је у полиному

$$a + b\alpha^{n'} + c\alpha^{n''} + ...,$$

уређеном по растућим степенима од α, n' паран број, тада су вредности тог полинома које одговарају довољно малим нумеричким вредностима α, стално веће од a, увек када је b позитиван, а стално мање, увек када је b негативан.

Ова посебна вредност полинома, стално већа, односно стално мања од осталих вредности полинома у некој околини, зове се његов максимум, односно минимум.

Пошто су особине бесконачно малих величина изведене, из њих закључујемо аналогне особине за бесконачно велике величине, ако приметимо да се свака таква величина може представити у облику $\frac{1}{\alpha}$, где α означава неку бесконачно малу величину. Тако, на пример, ако у полиному

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + ... + hx + k,$$

уређеном по опадајућим степенима променљиве x, та променљива постаје бесконачно велика, тада се заменом $\frac{1}{\alpha}$ уместо x полином записује у облику

$$\frac{a}{\alpha^m}\left(1 + \frac{b}{a}\alpha + \frac{c}{a}\alpha^2 + ... + ... + \frac{h}{a}\alpha^{m-1} + \frac{k}{a}\alpha^m\right).$$

Тако, одмах закључујемо, да за довољно мале нумеричке вредности α, тј. за довољно велике нумеричке вредности x, тај полином је истог знака као његов први члан

$$\frac{a}{\alpha^m} = ax^m.$$

Како претходно важи и у случају да се нека од величина $b, c, ..., h, k$ своди на нулу, може се извести следећа теорема:

Теорема 2.8: Ако у неком полиному, уређеном по опадајућим степенима променљиве x, нумеричка вредност те променљиве постаје неограничено велика, полином коначно узима знак првог члана.

2.2 Непрекидност функција

Коши представља дефиницију непрекидности у три различите етапе. Његова прва дефиниција говори о функцији променљиве x, $f(x)$, која за сваку вредност x између датих граница, има јединствену коначну вредност. За функцију $f(x)$ кажемо да је непрекидна ако, за дату вредност x која се налази између датих граница, сваки бесконачно мали прираштај α вредности x, проузрокује разлику $f(x+\alpha)-f(x)$, која зависи од нове променљиве α и неограничено опада са α. У овој дефиницији можемо уочити процес опадања функције $f(x+\alpha)-f(x)$ како се α смањује.

У другој дефиницији непрекидности, Коши наводи да је функција $f(x)$ непрекидна, за вредности x између датих граница, ако бесконачно мала промена величине x, између датих граница, производи бесконачно малу промену функције $f(x)$. Ако упоредимо са првом дефиницијом, процес промене (опадања) прираштаја функције суптилно постаје концепт промене са увођењем појма бесконачно мала промена функције. [4]

Трећа дефиниција непрекидности говори о томе да, ако функција престаје да буде непрекидна у околини неке одређене вредности променљиве x, кажемо да је она прекидна, и да у тој тачки има прекид.

Имајући у виду ове дефиниције непрекидности, можемо испитати у којим су границама функције дате променљиве x непрекидне у односу на ту променљиву. На пример, функција $\sin x$ има за сваку конкретну вредност променљиве x једнозначно одређену коначну вредност. Функција је непрекидна између произвољних вредности те променљиве јер апсолутна вредност за $\sin(\frac{1}{2}\alpha)$, а с њом и читаве разлике

$$\sin(x+\alpha)-\sin x = 2\sin(\frac{1}{2}\alpha)\cos(x+\frac{1}{2}\alpha),$$

неограничено опада заједно са α, за било коју вредност променљиве x.

Уопште, ако размотримо било коју од наредних једноставних функција:

$$a+x, a-x, ax, \frac{a}{x}, x^a, A^x, \log x,$$
$$\sin x, \cos x, \arcsin x, \arccos x,$$

видимо да је свака од њих непрекидна између двеју коначних граница за x, увек када између тих граница функција има једнозначно одређене коначне вредности.

Коши је писао lx или понекад Lx како би означио логаритам од x за дату основу A. Такође, користио је тачке на крају скраћених назива тригонометријских функција, $\sin .x, \cos .x$. Како би се избегла непотребна конфузија, у овом раду пратимо савремени запис логаритма и тригонометријских функција.

Свака од функција остаје непрекидна у околини сваке коначне вредности променљиве x, ако се та вредност налази:[5]

за функције

$$\left.\begin{array}{l} a+x \\ a-x \\ ax \\ A^x \\ \sin x \\ \cos x \end{array}\right\} \text{између граница} \quad x=-\infty, x=+\infty$$

за функцију

$$\frac{a}{x} \quad \begin{cases} 1^\circ & \text{између граница} \quad x=-\infty, x=0; \\ 2^\circ & \text{између граница} \quad x=0, x=+\infty; \end{cases}$$

за функције

$$\left.\begin{array}{l} x^a \\ \log x \end{array}\right\} \text{између граница} \quad x=0, x=+\infty;$$

за функције

$$\left.\begin{array}{l} \arcsin x \\ \arccos x \end{array}\right\} \text{између граница} \quad x=-1, x=+1;$$

Можемо приметити да, ако се претпостави да је $a = \pm m$ (m означава цео број), једноставна функција

$$x^a$$

увек је непрекидна у околини неке коначне вредности променљиве x, под условом да та вредност задовољава:

$$\text{ако је} \quad a=+m, \quad \text{између граница} \quad x=-\infty, x=+\infty,$$

$$\text{ако је} \quad a=-m, \begin{cases} 1^\circ & \text{између граница} \quad x=-\infty, x=0; \\ 2^\circ & \text{између граница} \quad x=0, x=+\infty. \end{cases}$$

Међу функцијама које смо навели, само две имају прекид за неку вредност x која се налази у интервалу у којем она има реалне вредности. То су функције

$$\frac{a}{x} \quad \text{и} \quad x^a \quad (\text{ако је } a = -m).$$

Оне у тачки $x = 0$ постају бесконачне и имају прекид.

У савременом приступу дефиницији непрекидности, тачка у којој функција није дефинисана не може бити тачка прекида (макар била и тачка нагомилавања њене области дефинисаности). Тако, на пример, тачка $x = 0$ није тачка прекида функције $\frac{1}{x}$, за ту функцију подразумевамо да јој је домен цео скуп реалних бројева, без нуле. У наставку одељка о непрекидности Коши говори о непрекидности функција више променљивих и изводи нека важна својства непрекидних функција. Ови делови овде нису наведени.

Глава 3

О редовима. Правила конвергенције редова. Сума неких конвергентних редова

3.1 Основни појмови о редовима

Бесконачан низ величина

$$u_0, u_1, u_2, u_3, ...,$$

које следе једне иза друге према утврђеној законитости називамо редом. Ове величине представљају чланове посматраног реда. Нека је

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$$

сума првих n чланова реда, где је n било који природан број. Ако, при повећању броја n, сума s_n тежи граничној вредности s, ред називамо конвергентним. Граничну вредност s називамо сумом реда. У супротном, уколико сума s_n не тежи ниједној фиксној граничној вредности, ред је дивергентан и нема суму. У сваком случају, члан који одговара индексу n, u_n, називамо општим чланом реда. Да би ред био потпуно дефинисан, довољно је општи члан реда представити у функцији индекса n.

Један од најједноставнијих редова је геометријски ред

$$1, x, x^2, x^3, ...,$$

где је x^n општи члан, односно, n-ти степен броја x. Ако формирамо суму првих n чланова овог реда, добијамо

$$1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}.$$ [1]

Како се n повећава, нумеричка вредност[2] разломка $\frac{x^n}{1-x}$ конвергира ка нули или ка бесконачности, у зависности да ли је нумеричка вредност x-а мања или већа од 1. Уколико је $x < 1$, можемо закључити да је ред

$$1, x, x^2, x^3, ...$$

конвергентан и да му је сума $\frac{1}{1-x}$. Уколико је $x > 1$ исти ред је дивергентан и нема суму.

Кошијева терминологија и нотација блиски су ономе што данас користимо, али постоје неке разлике. Коши је започео дефиницију реда са „Бесконачан низ величина $u_0, u_1, u_2, u_3, ...$", али онда каже „Ове величине представљају чланове посматраног реда." Ово може звучати збуњујуће, поготово ако упоредимо то са данашњом дефиницијом низа и реда у уџбеницима анализе. Израз $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$, који је Коши дефинисао као суму првих n чланова, још увек се користи у савременој терминологији и представља парцијалну суму. Приметимо да се може формирати низ парцијалних сума s_n, и закључити да је конвергенција реда еквивалентна конвергенцији низа s_n. Већина савремених текстова формално дефинише бесконачне редове као низ парцијалних сума s_n. Кошијева дефиниција да дивергентан ред нема суму, у његово време није била прихваћена, док се данас то подразумева.

Пратећи горе наведене принципе, да би ред

$$u_0, u_1, u_2, ..., u_n, u_{n+1}, ... \tag{3.1}$$

био конвергентан потребно је и довољно да за растуће n сума

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$$

конвергира ка фиксној граничној вредности s. Другим речима, потребно је и довољно да се за бесконачно велике вредности броја n суме

$$s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, ...$$

[1] Подразумева се $x \neq 1$.

[2] Очигледно, и даље, под „нумеричка вредност" Коши подразумева „апсолутна вредност".

разликују од граничне вредности s, и једне од других, за бесконачно малу вредност. Штавише, узастопне разлике између прве суме s_n и сваке следеће суме су дефинисане, редом, једначинама

$$
\begin{aligned}
&s_{n+1} - s_n = u_n,\\
&s_{n+2} - s_n = u_n + u_{n+1},\\
&s_{n+3} - s_n = u_n + u_{n+1} + u_{n+2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Да би ред (3.1) био конвергентан, најпре је потребно да општи члан u_n неограничено опада[3] како n расте. Али, овај услов није довољан. Такође је потребно да су, за растуће вредности n, различите суме,

$$
\begin{aligned}
&u_n + u_{n+1},\\
&u_n + u_{n+1} + u_{n+2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

почевши од прве, мање од било које мале величине. Обратно, уколико су ови услови испуњени, ред је сигурно конвергентан.

Ово је Кошијев критеријум конвергенције, и он је и даље један од најважнијих потребних и довољних услова за конвергенцију редова. Занимљиво је да су Коши и многи његови савременеци сматрали да је овај услов конвергенције реда очигледан и није им био потребан доказ. Данас знамо да такав доказ и није био могућ у то време, јер је за његово извођење претходно неопходно прецизно увођење скупа реалних бројева и њихових својстава.

Посматрајмо геометријски ред

$$1, x, x^2, x^3, \dots \tag{3.2}$$

Ако је нумеричка вредност величине x већа од 1, тада општи члан x^n неограничено расте како се n повећава. Ово је довољно да се закључи да је ред дивергентан. Ред ће бити дивергентан и ако је $x = \pm 1$, зато што нумеричка вредност општег члана x^n, која је 1, не опада неограничено како n расте. Међутим, ако је нумеричка вредност величине x мања од 1, тада се све суме било

[3] По апсолутној вредности, подразумева се-ово се односи на многе од следећих ситуација па то нећемо даље коментарисати.

ког члана реда, почевши од x^n:

$$\begin{aligned} x^n&, \\ x^n+x^{n+1} &= x^n\frac{1-x^2}{1-x}, \\ x^n+x^{n+1}+x^{n+2} &= x^n\frac{1-x^3}{1-x}, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \end{aligned}$$

налазе између граница

$$x^n \quad \text{и} \quad \frac{x^n}{1-x},$$

од којих свака постаје бесконачно мала за бесконачно велико n. Стога, као што смо већ знали, ред је конвергентан.

Као други пример, посматрајмо нумерички ред

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ... \tag{3.3}$$

Општи члан овог реда, $\frac{1}{n+1}$, неограничено опада како n расте. Ипак, ред није конвергентан, зато што је сума чланова од $\frac{1}{n+1}$ до $\frac{1}{2n}$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}$$

увек већа од

$$n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

без обзира на вредност n. Као последица, сума не опада неограничено, као што би био случај да је ред конвергентан. Ако означимо суму првих n чланова реда (3.3) са s_n и највећи степен броја 2, који је мањи од n, са 2^m, тада имамо

$$\begin{aligned} s_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1} \\ &> 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+... \\ &\quad +(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+...+\frac{1}{2^m}), \end{aligned}$$

одакле следи

$$s_n > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}=1+\frac{m}{2}.$$

Можемо из овога закључити да сума s_n неограничено расте како m расте. Ово је нови доказ дивергенције реда.

Посматрајмо даље нумерички ред

$$1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}, ..., \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}, ... \tag{3.4}$$

Чланови овог реда, почевши од индекса n,

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)(n+2)}, ...$$

су, редом, мањи од одговарајућих чланова геометријског реда

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\frac{1}{n}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\frac{1}{n^2}, ...$$

Као последица, сума од колико год почетних чланова је увек мања од суме одговарајућих чланова геометријског реда, који је конвергентан ред. Самим тим, мања је од суме овог реда, што ће рећи

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots (n-1)}\frac{1}{n-1}.$$

Како последња сума неограничено опада, за растуће n, следи да је ред (3.4) конвергентан.

Ово је имплицитна употреба поредбеног критеријума конвергенције. Коши га нигде није навео експлицитно.

Општеприхваћено је да се сума реда (3.4) означава словом e. Сабирањем првих n чланова, добијамо приближну вредност броја e,

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots (n-1)}.$$

Учињена грешка ће бити мања од производа n-тог члана са $\frac{1}{n-1}$. На пример, ако је $n = 11$, приближна вредност броја e је

$$e = 2.7182818..., \tag{3.5}$$

и грешка направљена у овом случају је мања од прозвода разломка $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}$ за $\frac{1}{10}$, што износи $\frac{1}{36288000}$, тако да то не утиче на седму децималу.

Број e се често користи у сумирању редова и у диференцијалном рачуну. Логаритам са основом e се зове Неперов, према Џону Неперу, или хиперболички логаритам, зато што мери различите делове површина између једнакостраничне хиперболе [4] и њених асимптота.

[4] Једнакостранична хипербола је хипербола чије су асимптоте међусобно управне.

Уопштено, суму конвергентног реда означавамо сумом првих чланова. Дакле, када је ред

$$u_o, u_1, u_2, u_3, ...$$

конвергентан, суму овог реда означавамо са

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ...$$

Према овој конвенцији, вредност броја e је одређена једначином

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + ... \tag{3.6}$$

и, ако се узме у обзир геометријски ред

$$1, x, x^2, x^3, ...,$$

имамо, за $x < 1$,

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1 - x}. \tag{3.7}$$

Означавајући суму конвергентног реда

$$u_0 . u_1, u_2, u_3, ...$$

са s и суму првих n чланова са s_n, имамо

$$\begin{aligned} s &= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + ... \\ &= s_n + u_n + u_{n+1} + ... \end{aligned}$$

одакле следи

$$s - s_n = u_n + u_{n+1} + ...$$

Из последње једначине следи да величине

$$u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, ...$$

формирају нови конвергентан ред чија је сума једнака $s - s_n$. Ако ову суму представимо са r_n, имамо

$$s = s_n + r_n,$$

где се r_n зове остатак реда (3.1) почев од n-тог члана.

Претпоставимо да чланови реда (3.1) зависе од променљиве x. Ако је ред конвергентан и његови чланови су непрекидне функције по x у околини неке одређене тачке, тада су

$$s_n, \quad r_n, \quad \text{и} \quad s$$

такође три функције променљиве x. Прва од њих, s_n, очигледно је непрекидна функција по x у околини одговарајуће тачке. Размотримо прираштај ове три функције када се x повећава за бесконачно малу величину α. За све могуће вредности n, прираштај s_n је бесконачно мала величина. Прираштај r_n, као и само r_n постаје бесконачно мала за веома велике вредности n. Као последица, прираштај функције s мора бити бесконачно мала. Из овога, изводимо следећу теорему:

Теорема 3.1: Када су различити чланови реда (3.1) непрекидне функције променљиве x у околини неке тачке за коју ред конвергира, сума s реда је такође непрекидна функција променљиве x у околини исте тачке.

Коши у својој нотацији „околина тачке x" мисли на отворен интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, где је $\varepsilon > 0$. [6]

Овако наведена теорема није тачна. Ако поставимо додатни услов равномерне конвергенције, теорема постаје тачна. Наведена формулација изазвала је велику полемику међу стручњацима. Неки сматрају да је Коши овде начинио грешку, а неки да је у ствари имао равномерну конвергенцију на уму.

Према овој теореми, сума реда (3.2) мора бити непрекидна функција променљиве x између граница $x = -1$ и $x = 1$, што можемо потврдити посматрајући вредност s дате изразом

$$s = \frac{1}{1-x}.$$

3.2 Редови са позитивним члановима

Ако су сви чланови реда

$$u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ... \tag{3.8}$$

позитивни углавном можемо утврдити да ли је ред конвергентан или дивергентан користећи следећу теорему:

Теорема 3.2: Посматрајмо граничну вредност или граничне вредности према којима израз $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ конвергира, кад n тежи бесконачности, и означимо са k највећу од тих граничних вредности. Ред (3.8) конвергира ако је $k < 1$ и дивергира ако је $k > 1$.

Коши не користи данас уобичајене термине „делимични лимес" и „лимес супериор", али је из контекста јасно да се мисли на њих.

Доказ: Нека је $k < 1$ и нека је U број такав да важи

$$k < U < 1.$$

За свако U, $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ мора бити мањи од U, за свако n, почев од неког.

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} < U, \quad \text{тј.} \quad u_n < U^n.$$

Следи да су чланови реда

$$u_0, u_1, u_2, ..., u_{n+1}, u_{n+2}, ...$$

мањи од одговарајућих чланова геометријског реда[5]

$$1, U, U^2, ..., U^{n+1}, U^{n+2}, ...$$

Геометријски ред је конвергентан, јер је $U < 1$, па можемо закључити да и ред (3.8) конвергира.

С друге стране, нека је сада $k > 1$ и нека је U број такав да

$$k > U > 1.$$

Како n тежи бесконачности, највећа вредност $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ тежи ка k и на крају постаје већа од U.[6] Може се закључити да је

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} > U$$

што је, заправо,

$$u_n > U^n,$$

за произвољно n. Као последица тога, у реду

$$u_0, u_1, u_2, ..., u_{n+1}, u_{n+2}, ...$$

налазимо бесконачан број чланова већих од одговарајућих чланова геометријског реда

$$1, U, U^2, ..., U^{n+1}, U^{n+2}, ...$$

Овај ред је дивергентан, јер је $U > 1$, па његови чланови бесконачно расту, што је довољно да се закључи да ред (3.8) дивергира.

[5] Осим можда њих коначно много.

[6] Прецизније, постоји бесконачно много индекса n за које важи следећа неједнакост.

Теорема 3.3: Ако, за растуће n, израз

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

конвергира ка фиксној граничној вредности k, ред (3.8) конвергира ако је $k < 1$, и дивергира ако је $k > 1$.

Овај количнички (или, како га данас обично зовемо, Даламберов) тест Коши овде не доказује. На другом месту у уџбенику доказује се тврђење из којег следи да је теорема 3.3 последица теореме 3.2.

На пример, посматрајмо ред

$$1, \frac{1}{1}, \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, ..., \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}, ...$$

тада имамо да је

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

одакле следи да је

$$k = \frac{1}{\infty} = 0,$$

па је ред, као што смо већ знали, конвергентан.

Прва од две теореме које смо управо поставили нам јасно говори о конвергенцији и дивергенцији реда са позитивним члановима, осим у случају када је $k = 1$. У том случају није увек једноставно одговорити на питање о конвергенцији. Међутим, доказаћемо две теореме, које често помажу у решавању тог проблема.

Теорема 3.4: Уколико је сваки члан реда (3.8) мањи од претходног, тада су ред (3.8) и ред

$$u_0, 2u_1, 4u_3, 8u_7, 16u_{15}, ... \tag{3.9}$$

истовремено, или конвергентни или дивергентни.

Доказ: Прво, претпоставимо да је ред (3.8) конвергентан и нека је s његова сума. Тада

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0, \\ 2u_1 &= 2u_1, \\ 4u_3 &< 2u_2 + 2u_3, \\ 8u_7 &< 2u_4 + 2u_5 + 2u_6 + 2u_7, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

и, сума произвољно много чланова реда (3.9) је мања од

$$u_0 + 2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 + ... = 2s - u_0.$$

Следи да ред (3.9) конвергира.

С друге стране, претпоставимо да је ред (3.8) дивергентан. Сума великог броја његових чланова је већа од било које границе која се може доделити. Зато што важи

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_0,\\
2u_1 &> u_1 + u_2,\\
4u_3 &> u_3 + u_4 + u_5 + u_6,\\
8u_7 &> u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{13} + u_{14},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

можемо закључити да је сума великог броја величина

$$u_0, 2u_1, 4u_3, 8u_7, ...$$

већа од било које дате величине. Ред (3.9) је, дакле, дивергентан, у складу са наведеном теоремом.

Последица 3.1: Нека је μ произвољан број. Ако је ред (3.8)

$$1, \frac{1}{2^\mu}, \frac{1}{3^\mu}, \frac{1}{4^\mu}, ..., \tag{3.10}$$

тада ред (3.9) постаје

$$1, 2^{1-\mu}, 4^{1-\mu}, 8^{1-\mu}, ...$$

Последњи ред је геометријски ред, који је конвергентан уколико је $\mu > 1$ и дивергентан у супротном случају. Стога, ред (3.10) је конвергентан ако је $\mu > 1$ и дивергентан ако је $\mu = 1$ или $\mu < 1$. На пример, од три реда

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, ..., \tag{3.11}$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \tag{3.12}$$

$$1, \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}, ..., \tag{3.13}$$

први ред је конвергентан, док су друга два дивергентна.

Теорема 3.5: Претпоставимо да log означава логаритам у било ком систему, и да израз

$$\frac{\log(u_n)}{\log(\frac{1}{n})}$$

тежи ка коначној граничној вредности h, за растуће n. Ред (3.8) конвергира уколико је $h > 1$, и дивергира уколико је $h < 1$.

Доказ: Прво, претпоставимо да је $h > 1$ и нека је a било који број такав да је

$$h > a > 1.$$

Трансформацијом израза

$$\frac{\log(u_n)}{\log(\frac{1}{n})}$$

добијамо израз

$$\frac{\log(\frac{1}{u_n})}{\log(n)}.$$

Последњи израз је, за довољно велико n, увек веће од a. Другим речима, за растуће n, увек имамо да је

$$\frac{\log(\frac{1}{u_n})}{\log(n)} > a,$$

што је заправо

$$\log(\frac{1}{u_n}) > a\log(n),$$

одакле следи да је[7]

$$\frac{1}{u_n} > n^a \quad \text{тј.} \quad u_n < \frac{1}{n^a}.$$

То значи да су чланови реда (3.8) стално мањи од одговарајућих чланова реда

$$1, \frac{1}{2^a}, \frac{1}{3^a}, \frac{1}{4^a}, ..., \frac{1}{n^a}, \frac{1}{(n+1)^a}, ...$$

Како је последњи ред конвергентан (јер је $a > 1$), можемо закључити да је и ред (3.8) конвергентан.

Затим, претпоставимо сада, да је $h < 1$ и нека је a било који број такав да је

$$h < a < 1.$$

[7]За основу логаритма већу од 1.

За довољно велико n, добијамо

$$\frac{\log(\frac{1}{u_n})}{\log(n)} < a,$$

или,

$$\log(\frac{1}{u_n}) < a\log(n)$$

одакле следи[8]

$$\frac{1}{u_n} < n^a \quad \text{тј.} \quad u_n > \frac{1}{n^a}.$$

То значи да су чланови реда (3.8) стално већи од одговарајућих чланова реда

$$1, \frac{1}{2^a}, \frac{1}{3^a}, \frac{1}{4^a}, ..., \frac{1}{n^a}, \frac{1}{(n+1)^a}, ...$$

Како је последњи ред дивергентан (јер је $a < 1$), можемо закључити да је и ред (3.8) дивергентан, чиме је теорема доказана.

Тестови конвергенције редова дати у теоремама 3.4 и 3.5 данас се ређе налазе у уџбеницима. Уместо њих обично се појављују неки практичнији тестови као што су Рабеов и Гаусов.

Уколико су дата два реда, чији су чланови позитивни, можемо сабирањем или множењем тих истих чланова формирати нови ред, чија је сума настала сабирањем или множењем сума прва два реда. На ову тему, поставићемо две теореме:

Теорема 3.6: Нека су

$$\begin{cases} u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ..., \\ v_0, v_1, v_2, ..., v_n, ... \end{cases} \tag{3.14}$$

два конвергентна реда са позитивним члановима, чије су суме, редом, s и s'. Тада је

$$u_0 + v_0, u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n, ... \tag{3.15}$$

нови конвергентан ред, чија је сума $s + s'$.

Доказ: Ако означимо

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} \quad \text{и}$$
$$s_n^{'} = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1},$$

[8] За основу логаритма већу од 1.

тада s_n и s'_n теже ка граничним вредностима s и s', редом. Сума првих n чланова реда (3.15), $s_n + s'_n$, конвергира ка $s + s'$, чиме је теорема 3.6. доказана.

Теорема 3.7: Нека важе исте претпоставке као у претходној теореми. Тада је

$$\begin{cases} u_0v_0, u_0v_1 + u_1v_0, u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0, ..., \\ ..., u_0v_n + u_1v_{n-1} + ... + u_{n-1}v_1 + u_nv_0, ... \end{cases} \tag{3.16}$$

нови конвергентан ред, чија је сума ss'.

Доказ: Нека су s_n и s'_n суме првих n чланова редова (3.14) и означимо суму реда (3.16) са s''_n. Означимо, још, са m највећи природан број $\frac{n-1}{2}$, односно, $m = \frac{n-1}{2}$ када је n непарно, $m = \frac{n-2}{2}$ када је m парно. Тада имамо:

$$\begin{aligned} u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + ... + (u_0v_{n-1} + u_1v_{n-2} + ... + u_{n-2}v_1 + u_{n-1}v_0) \\ < (u_0 + u_1 + ... + u_{n-1})(v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}) \\ \text{и} \\ > (u_0 + u_1 + ... + u_m)(v_0 + v_1 + ... + v_m). \end{aligned}$$

Другим речима,

$$s''_n < s_n s'_n \quad \text{и} \quad s''_n > s_{m+1} s'_{m+1}.$$

Нека n тежи бесконачности. Број

$$m = \frac{n - \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2}$$

неограничено расте, и две суме s_n и s_{m+1} теже ка s, док s'_n и s'_{m+1} теже ка s'. Стога, два производа $s_n s'_n$ и $s_{m+1} s'_{m+1}$, као и сума s''_n која се налази између ова два производа, тежи ка ss', чиме је теорема 3.7. доказана.

3.3 Редови са позитивним и негативним члановима

Претпоставимо да ред

$$u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ... \tag{3.17}$$

садржи позитивне и негативне чланове, и нека су,

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, ..., \rho_n, ... \tag{3.18}$$

редом, нумеричке вредности посматраних чланова, тако да имамо

$$u_0 = \pm\rho_0, u_1 = \pm\rho_1, u_2 = \pm\rho_2, ..., u_n = \pm\rho_n, ...$$

Нумеричка вредност реда

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$$

никада не прелази[9]

$$\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_{n-1},$$

што значи да конвергенција реда (3.18) увек повлачи конвергенцију реда (3.17).

Коши није дефинисао апсолутну конвергенцију, али је овде суштински показао да апсолутна конвергенција повлачи обичну конвергенцију.

Треба да додамо да је ред (3.17) дивергентан ако неки чланови реда (3.18) неограничено расту. Овај последњи случај се јавља увек када највећа вредност $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$ тежи ка граничној вредности која је већа од 1, за растуће n. С друге стране, уколико је гранична вредност мања од 1, ред (3.18) је увек конвергентан. Имајући то у виду, можемо формулисати теорему:

Теорема 3.8: Нека је ρ_n нумеричка вредност општег члана u_n реда (3.17) и нека је k гранична вредност према којој тежи највећа вредност израза $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$, када n тежи бесконачности. Ред (3.17) је конвергентан ако је $k < 1$, и дивергентан ако је $k > 1$.

Теорема 3.9: Ако је низ величина[10]

$$A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ...$$

такав да однос између два узастопна члана тог низа, дакле,

$$\frac{A_{n+1}}{A_n}$$

тежи, када вредност n неограничено расте, одређеној граници A, тада израз

$$(A_n)^{\frac{1}{n}}$$

тежи у исто време тој истој граници.[11]

[9] Овде Коши имплицитно користи општу неједнакост троугла.

[10] Овде се очигледно подразумева „позитивних величина”.

[11] Ово тврђење, као што је напред речено, Коши доказује у уџбенику на другом месту.

Кад израз $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$, тј. нумеричка вредност односа $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, конвергира ка фиксној граничној вредности, тада према теореми 3.9. та гранична вредност представља жељену вредност k.

Теорема 3.10: Ако нумеричка вредност односа

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

конвергира према фиксној граничној вредности k, када вредност n неограничено расте, тада је ред (3.17) конвергентан ако је $k < 1$, и дивергентан ако је $k > 1$.

На пример, ако посматрамо ред

$$1, -\frac{1}{1}, +\frac{1}{1 \cdot 2}, -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, +...,$$

тада налазимо да

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{1}{n+1}, \quad \text{тј.} \quad k = \frac{1}{\infty} = 0,$$

одакле следи да је ред конвергентан.

Прва од ове три теореме нам јасно говори о конвергенцији или дивергенцији реда, осим у случају када је $k = 1$. Конкретно, у овом случају, можемо утврдити конвергенцију датог реда или потврђивањем да нумеричке вредности различитих чланова реда формирају конвергентан ред или користећи следећу теорему:

Теорема 3.11: Ако нумеричка вредност општег члана u_n реда (3.17) неограничено и константно опада, за растуће n, и различити чланови реда су наизменично позитивни и негативни, тада ред конвергира.

Посматрајмо ред

$$1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, +... \pm \frac{1}{n}, \mp\frac{1}{n+1}, ... \tag{3.19}$$

Сума првих m чланова,[12] где је $m > n$ је

$$\pm\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + ... \pm \frac{1}{n+m}\right).$$

Нумеричка вредност ове суме,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + ... \pm \frac{1}{n+m} \\
&\qquad = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right) - ... \\
&\qquad = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) + \left(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n-6}\right) + ...,
\end{aligned}$$

[12] Сума првих m чланова почев од $(n+1)-$ог члана.

која се налази између

$$\frac{1}{n+1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

за растуће n, и произвољно m, неограничено опада, што је довољно да закључимо да ред конвергира. Исти аргументи би могли бити примењени на било који ред ове врсте. На пример, ред

$$1, -\frac{1}{2^\mu}, +\frac{1}{3^\mu}, -\frac{1}{4^\mu}, ..., \tag{3.20}$$

је, према теореми 3.11, конвергентан за све позитивне вредности μ.

Ако изоставимо знак који претходи сваком парном члану у реду (3.20), добијамо ред (3.10), из претходне секције, који је дивергентан ако је $\mu = 1$ или $\mu < 1$. Да бисмо претворили конвергентан ред у дивергентан, и обрнуто, некад је довољно само променити знак испред одређених чланова реда. Ово се односи искључиво на редове за које се величина k из теореме 3.10 своди на 1.

Конвергенцију реда, чији су чланови позитивни, можемо убрзати смањивањем нумеричке вредности чланова и мењањем знака испред неких чланова. Вреди напоменути да се овај ефекат јавља ако сваки члан помножимо са синусом или косинусом, што је довољно да поставимо следећу теорему:

Теорема 3.12: Ако је ред,

$$\rho_0, \rho_1, \rho_2, ..., \rho_n, ..., \tag{3.21}$$

чији су сви чланови позитивни, конвергентан, тада је сваки од следећих редова

$$\begin{cases} \rho_0 \cos\theta_0, \rho_1 \cos\theta_1, \rho_2 \cos\theta_2, ..., \rho_n \cos\theta_n, ... \\ \rho_0 \sin\theta_0, \rho_1 \sin\theta_1, \rho_2 \sin\theta_2, ..., \rho_n \sin\theta_n, ... \end{cases} \tag{3.22}$$

такође конвергентан, за произвољне вредности $\theta_0, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n, ...$

Последица 3.2: Ако претпоставимо да је

$$\theta_n = n\theta,$$

где је θ произвољно, тада два реда у (3.22) постају, редом,

$$\begin{cases} \rho_0, \quad \rho_1 \cos\theta, \rho_2 \cos 2\theta, ..., \rho_n \cos n\theta, ... \\ \qquad\quad \rho_1 \sin\theta, \rho_2 \sin 2\theta, ..., \rho_n \sin n\theta, ... \end{cases} \tag{3.23}$$

Последња два реда ће увек бити конвергентна ако је ред (3.21) конвергентан.

Теорема 3.13: Нека су

$$\begin{cases} u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ..., \\ v_0, v_1, v_2, ..., v_n, ... \end{cases} \tag{3.24}$$

два конвергентна реда са позитивним и негативним члановима, чије су суме, редом, s и s'. Тада је

$$u_0 + v_0, u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n, ... \tag{3.25}$$

нови конвергентан ред, чија је сума $s + s'$.

Доказ: Ако означимо

$$\begin{aligned} s_n &= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} \quad \text{и} \\ s_n^{'} &= v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}, \end{aligned}$$

тада s_n и s_n' теже ка граничним вредностима s и s', редом. Сума првих n чланова реда (3.15), $s_n + s_n'$, конвергира ка $s + s'$, чиме је теорема 3.13 доказана.

Теорема 3.14: Нека важе исте претпоставке као у претходној теореми, ако оба реда у (3.24) остану конвергентна ако им чланове заменимо њиховим нумеричким вредностима, тада је

$$\begin{cases} u_0 v_0, \\ u_0 v_1 + u_1 v_0, \\ u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0, ..., \\ ...., \\ u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + ... + u_{n-1} v_1 + u_n v_0, \\ .... \end{cases} \tag{3.26}$$

нови конвергентан ред, чија је сума ss'.

Доказ: Нека су s_n и s_n' суме првих n чланова редова (3.24) и означимо суму реда (3.26) са s_n''. Тада имамо:

$$\begin{aligned} s_n s_n' - s_n'' = & u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-1}) + ... \\ & + (u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + ... + u_2 v_{n-2} + u_1 v_{n-1}). \end{aligned}$$

Теорема 3.7 је доказана у другом поглављу, у случају реда (3.24) који се састоји само од позитивних чланова. Последица ове теореме је да вредности $s_n s_n'$ и s_n''

конвергирају ка ss', за растуће n. Због тога, разлика $s_n s'_n - s''_n$, тј.

$$\begin{aligned} u_{n-1}v_{n-1} &+ (u_{n-1}v_{n-2} + u_{n-2}v_{n-1}) + ... \\ &+ (u_{n-1}v_1 + u_{n-2}v_2 + ... + u_2v_{n-2} + u_1v_{n-1}), \end{aligned}$$

конвергира ка нули.

Сада, ако су неки чланови реда (3.24) позитивни, а неки негативни, означимо, редом, нумеричке вредности чланова са

$$\begin{cases} \rho_0, \rho_1, \rho_2, ..., \rho_n, ..., \\ \rho'_0, \rho'_1, \rho_2, ..., \rho'_n, ... \end{cases} \tag{3.27}$$

Претпоставимо да су, као у исказу теореме, редови (3.27), састављени од истих нумеричких вредности, конвергентни. На основу претходног, сума

$$\begin{aligned} \rho_{n-1}\rho'_{n-1} &+ (\rho_{n-1}\rho'_{n-2} + \rho_{n-2}\rho'_{n-1}) + ... \\ &+ (\rho_{n-1}\rho'_1 + \rho_{n-2}\rho'_2 + ... + \rho_2\rho'_{n-2} + \rho_1\rho'_{n-1}) \end{aligned}$$

конвергира ка нули, за растуће n. Зато што су нумеричке вредности ове суме веће од

$$\begin{aligned} u_{n-1}v_{n-1} &+ (u_{n-1}v_{n-2} + u_{n-2}v_{n-1}) + ... \\ &+ (u_{n-1}v_1 + u_{n-2}v_2 + ... + u_2v_{n-2} + u_1v_{n-1}), \end{aligned}$$

следи да последњи израз, тј. $s_n s'_n - s''_n$ тежи као нули. Стога, ss', што је гранична вредност производа $s_n s'_n$, такође је и гранична вредност s''_n. Другим речима, ред (3.26) је конвергентан и његова сума је ss'.

<u>Напомена:</u> Претходна теорема није могла остати тачна ако је ред (3.24), за који се претпоставља да је конвергентан, престао да буде такав након што је сваки члан замењен својом апсолутном вредношћу. Претпоставимо, на пример, да оба реда у (3.24) буду

$$1, -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}, +\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}, -\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}, +\frac{1}{5^{\frac{1}{2}}}, -.... \tag{3.28}$$

Ред (3.26) постаје

$$\begin{cases} 1, \\ -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ +\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ -\left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right), \\ +...................................... \end{cases} \tag{3.29}$$

Последњи ред је дивергентан јер његов општи члан

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{(n-1)2}} + \frac{1}{\sqrt{(n-2)3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

има нумеричку вредност већу од

$$\frac{n}{\left[\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{4n}{n+2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

када је n паран број, и већи од

$$\frac{n}{\left[(\frac{n+1}{2})^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2n}{n+1}$$

када је n непаран број. У сваком случају, има нумеричку вредност већу од 1. Ипак, ред (3.28) је конвергентан. Међутим, можемо приметити да престаје да буде конвергентан ако заменимо сваки члан својом нумеричком вредношћу. У том случају, постаје ред (3.13).

У савременим терминима, теорема 3.14 и напомена која јој следи се исказује на следећи начин: „Производ два апсолутно конвергентна реда је конвергентан ред са сумом једнаком производу сума редова који се множе; ако су редови условно конвергентни, то тврђење не важи."

3.4 Редови чији су чланови поређани према растућим целобројним степенима

Нека је

$$a_0, a_1 x, a_2 x^2, ..., a_n x^n, ... \tag{3.30}$$

ред чији су чланови поређани према растућим целобројним степенима променљиве x, где су

$$a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... \tag{3.31}$$

позитивне или негативне константе.

Такви редови, у то време, још нису добили савремени назив степени редови.

Даље, нека је A величина која одговара величини k из теореме 3.10, и односи се на ред (3.31). Иста величина, када се израчуна за ред (3.30), је нумеричка вредност производа

$$Ax.$$

Теорема 3.3 је Количнички тест, па је овде доказано да је $A = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, *када гранична вредност постоји. Одатле, и на основу теореме 3.9, следи теорема 3.15, док теорема 3.16 следи већ из претходног разматрања. Коши овде не помиње варијанту овог тврђења које користи горњи лимес, мада је с обзиром на Теорему 3.2, вероватно био свестан и такве могућности (као што је познато, ту варијанту је експлицитно касније формулисао Адамар, па је данас зовемо његовим именом).*

Ред (3.30) је конвергентан ако је ова нумеричка вредност мања од 1, или другим речима, ако је нумеричка вредност променљиве x мања од $\frac{1}{A}$.

Овај број, $\frac{1}{A}$, *у то време, још увек није добио савремени назив радијус (полупречник) конвергенције.*

С друге стране, ред (3.30) је дивергентан ако је нумеричка вредност x већа од $\frac{1}{A}$. Стога, можемо формулисати теорему:

Теорема 3.15: Нека је A гранична вредност према којој n-ти корен највеће нумеричке вредности a_n конвергира, за растуће n. Ред (3.30) конвергира за све вредности x које се налазе између граница

$$x = -\frac{1}{A} \quad \text{и} \quad x = +\frac{1}{A},$$

и дивергира за све вредности x које се налазе ван ових граница.

Уколико нумеричка вредност односа $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ конвергира према фиксној граничној вредности, та гранична вредност је жељена вредност A (према теореми 3.9). Ово нас доводи до следеће теореме:

Теорема 3.16: Ако нумеричка вредност односа

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

конвергира према граничној вредности A, за растуће n, ред (3.30) је конвергентан за све вредности x које се налазе између граница

$$x = -\frac{1}{A} \quad \text{и} \quad x = +\frac{1}{A},$$

и дивергира за све вредности x које се налазе ван ових граница.

Последица 3.3: Посматрајмо ред

$$1, 2x, 3x^2, 4x^3, ..., (n+1)x^n, ... \tag{3.32}$$

Како је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

и

$$A = 1,$$

тиме закључујемо да је ред (3.32) конвергентан за све вредности x које се налазе између граница

$$x = -1 \quad \text{и} \quad x = +1,$$

и дивергира за све вредности x ван ових граница.

Последица 3.4: Посматрајмо сада други ред

$$\frac{x}{1}, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, ..., \frac{x^n}{n}, ..., \tag{3.33}$$

у коме је слободан члан једнак нули. Како је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

и

$$A = 1,$$

ред (3.33) је конвергентан за све вредности x које се налазе између граница

$$x = -1 \quad \text{и} \quad x = +1,$$

и дивергира за све вредности x ван ових граница.

Последица 3.5: Нека је сада ред (3.30) ред

$$1, \frac{\mu}{1}x, \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2, ..., \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)...(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3...n}x^n, ... \tag{3.34}$$

где је μ било која величина. Тада налазимо

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\mu - n}{n+1} = -\frac{1 - \frac{\mu}{n}}{1 + \frac{1}{n}}$$

одакле следи да је

$$A = \lim \frac{1 - \frac{\mu}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Ред (3.34), је исто као и редови (3.32) и (3.33), конвергентан за све вредности x које се налазе између граница

$$x = -1 \quad \text{и} \quad x = +1,$$

и дивергира за све вредности x ван ових граница.

Последица 3.6: Размотримо сада ред

$$1, \frac{x}{1}, \frac{x^2}{1 \cdot 2}, \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, ..., \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3... \cdot n} \tag{3.35}$$

Како је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}$$

одакле следи да је

$$A = \frac{1}{\infty} = 0,$$

закључујемо да је ред конвергентан између граница

$$x = -\frac{1}{0} = -\infty \quad \text{и} \quad x = +\frac{1}{0} = +\infty,$$

тј. за све реалне вредности променљиве x.

Последица 3.7: На крају, посматрајмо ред

$$1, 1 \cdot x, 1 \cdot 2 \cdot x^2, 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^3, ..., 1 \cdot 2 \cdot 3 ... n \cdot x^n, ... \tag{3.36}$$

Како је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = n + 1 \quad \text{и} \quad A = \infty$$

следи да је

$$\frac{1}{A} = 0.$$

Закључујемо да је ред (3.36) увек дивергентан, осим у случају када је $x = 0$, тада се ред (3.36) своди на слободан члан 1.

Анализирајући добијене резултате, можемо приметити да су међу редовима чији су чланови поређани према растућим целобројним степенима променљиве

x, неки или конвергентни или дивергентни, у зависности од вредности x, док су други увек конвергентни за свако x, а неки су увек дивергентни, осим за $x = 0$. Можемо додати да је теорема 3.15 поуздана у погледу конвергенције таквог реда, осим у случају када нумеричка вредност x постаје једнака позитивној константи $\frac{1}{A}$, тј. претпостављамо $x = \pm\frac{1}{A}$. Конкретно, у овом случају, ред може бити конвергентан, може бити дивергентан и конвергенција некада зависи од знака променљиве x. На пример, ако у реду (3.33), за који је $A = 1$, кажемо:

$$x = 1 \quad \text{и} \quad x = -1$$

добијамо следеће редове

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ... \tag{3.37}$$

$$-1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{4}, ..., \pm\frac{1}{n}, ... \tag{3.38}$$

од којих је први дивергентан, а други конвергентан. Важно је напоменути да, како следи из теореме 3.15, када је ред чији су чланови поређани према растућим целобројним степенима променљиве x конвергентан за $x \neq 0$, остаје конвергентан ако смањујемо вредност x или ако пустимо да x неограничено опада.

Уколико су два реда чији су чланови поређани према растућим целобројним степенима променљиве x конвергентни за исте променљиве, можемо применити теореме 3.13 и 3.14. То је довољно да се изведу следеће две теореме:

Теорема 3.17 Претпоставимо да су оба реда

$$\begin{cases} a_0, a_1x, a_2x^2, ..., a_nx^n, ..., \\ b_0, b_1x, b_2x^2, ..., b_nx^n, ... \end{cases} \tag{3.39}$$

конвергентна за одређену вредност променљиве x и њихове суме су s и s', редом. Онда је

$$a_0 + b_0, (a_1 + b_1)x, (a_2 + b_2)x^2, ..., (a_n + b_n)x^n, ... \tag{3.40}$$

нови конвергентан ред, чија је сума $s + s'$.

Последица 3.8: Можемо лако проширити ову теорему на већи број редова. На пример, ако су сва три реда

$$a_0, a_1x, a_2x^2, ...,$$
$$b_0, b_1x, b_2x^2, ...,$$
$$c_0, c_1x, c_2x^2, ...,$$

конвергентна за исту вредност промењливе x, и ако означимо њихове суме са s, s', s'', редом, онда је

$$a_0 + b_0 + c_0, (a_1 + b_1 + c_1)x, (a_2 + b_2 + c_2)x^2, ...,$$

нови конвергентан ред, чија је сума $s + s' + s''$.

Теорема 3.18: Под истим претпоставкама као и у претходној теореми, ако сваки од редова (3.39) остане конвергентан ако им заменимо чланове са њиховим нумеричким вредностима, тада је

$$\begin{cases} a_0b_0, (a_0b_1 + a_1b_0)x, (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2, ... \\ ..., (a_0b_n + a_1b_{n-1} + ... + a_{n-1}b_1 + a_nb_0)x^n, ... \end{cases} \tag{3.41}$$

нови конвергентан ред, чија је сума ss'.

За доказ ове чињенице је, као што је познато, битна апсолутна конвергенција степеног реда унутар интервала конвергенције. С обзиром на теорему 3.14, Коши је вероватно тога свестан, мада то не наводи експлицитно.

Последица 3.9: Претходна теорема је садржана у формули

$$\begin{cases} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...(b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... \\ = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + ... \end{cases} \tag{3.42}$$

која остаје тачна у случају да сваки до редова (3.39) остане конвергентан уколико се његови чланови замене нумеричким вредностима. Под овом претпоставком формула (3.42) се може користити да се производ суме два реда прошири у нови ред истог облика.

Последица 3.10: Можемо множити три или више реда облика (3.39), од којих сваки остаје конвергентан када се његови чланови замене нумеричким вредностима, понављајући неколико пута операцију представљену једначином (3.42). Добијени производ представља суму новог конвергентног реда чији су чланови поређани према растућим целобројним степенима промењливе x.

Последица 3.11: У наредне две последице претпоставимо да су сви редови чије суме множимо једнаки. Тада је добијени производ целобројни степен од сваке суме, и ова последња сума такође представља суму реда исте врсте. На пример, ако је $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, ...$, из једначине (3.42) добијамо

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...)^2 = a_0^2 + 2a_0a_1x + (2a_0a_2 + a_1^2)x^2 + ... \tag{3.43}$$

Последица 3.12: Ако су

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)...(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3...\cdot n}x^n$$

и

$$\frac{\mu'(\mu'-1)(\mu'-2)...(\mu'-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3...\cdot n}x^n$$

општи чланови редова (3.39), где су μ и μ' било које величине, и ако се промењива x налази између граница $x=-1$ и $x=+1$, тада је сваки од редова (3.39) конвергентан, чак и ако заменимо његове чланове нумеричким вредностима, и општи члан реда (3.41) је

$$\left[\frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3...\cdot n}+\frac{\mu(\mu-1)...(\mu-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3...\cdot(n-1)}\frac{\mu'}{1}+...\right.$$
$$\left.+\frac{\mu}{1}\frac{\mu'(\mu'-1)...(\mu'-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3...\cdot(n-1)}+\frac{\mu'(\mu'-1)...(\mu'-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3...\cdot n}\right]x^n$$
$$=\frac{(\mu+\mu')(\mu+\mu'-1)(\mu+\mu'-2)...(\mu+\mu'-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3...\cdot n}x^n.$$

Нека $\varphi(\mu)$ означава суму првог реда у (3.39) под претпоставком коју смо направили, тј. ако претпоставимо

$$\varphi(\mu)=1+\frac{\mu}{1}x+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2+..., \tag{3.44}$$

онда под истом претпоставком суме редова (3.39) и (3.41) су означене са $\varphi(\mu)$, $\varphi(\mu')$ и $\varphi(\mu+\mu')$, редом, тако да једначина (3.42) постаје

$$\varphi(\mu)\varphi(\mu')=\varphi(\mu+\mu'). \tag{3.45}$$

Уколико заменимо ред

$$b_0, b_1x, b_2x^2, ...$$

у једначини (3.42) полиномом са коначним бројем чланова, добијамо формулу која је увек тачна, све док је ред

$$a_0, a_1x, a_2x^2, ...$$

конвергентан. Ово ћемо доказати директно уводећи следећу теорему:

Теорема 3.19: Ако је ред (3.30) конвергентан и ако суму овог реда помножимо полиномом

$$kx^m+lx^{m-1}+...+px+q, \tag{3.46}$$

где је m природан број, добијени производ представља суму новог конвергентног реда истог облика чији је општи члан

$$(qa_n + pa_{n-1} + ... + la_{n-m+1} + ka_{n-m})x^m,$$

све док величине

$$a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-m+1}, a_{n-m}$$

које имају негативне индексе узимају вредност нула. Другим речима, имамо

$$\begin{cases} (kx^m + lx^{m-1} + ... + px + q)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...) \\ = qa_0 + (qa_1 + pa_0)x + ... \\ +(qa_m + pa_{m-1} + ... + la_1 + ka_0)x^m \\ +.. \\ +(qa_n + pa_{n-1} + ... + la_{n-m+1} + ka_{n-m})x^n + ... \end{cases} \tag{3.47}$$

Доказ: Да бисмо помножили суму реда (3.30) полиномом (3.46) довољно је да га сукцесивно помножимо различитим члановима полинома. Стога, имамо

$$\begin{aligned} &(kx^m + lx^{m-1} + ... + px + q)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...) \\ &= q(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...) + px(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...) \\ &+ (qa_m + pa_{m-1} + ... + la_1 + ka_0)x^m \\ &+ .... \\ &+ lx^{m-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...) + kx^m(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...). \end{aligned}$$

Пошто за сваки природан број n

$$\begin{aligned} &q(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1}) \\ &= qa_0 + qa_1x + qa_2x^2 + ... + qa_{n-1}x^{n-1}, \end{aligned}$$

можемо закључити да је, када n тежи бесконачности,

$$q(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...) = qa_0 + qa_1x + qa_2x^2 + ...$$

Слично, налазимо

$$\begin{aligned} px(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...) &= pa_0x + pa_1x^2 + pa_2x^3 + ..., \\ &.., \\ lx^{m-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...) &= la_0x^{m-1} + la_1x^m + la_2x^{m+1} + ..., \\ kx^m(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...) &= ka_0x^m + ka_1x^{m+1} + ka_2x^{m+2} + ... \end{aligned}$$

Ако саберемо последње једначине, затим формирамо суму од десних страна једнакости и групишемо коефицијенте уз исте степене x, добијамо тачно формулу (3.47).

Претпоставимо, сада, да варирамо вредности x за мале величине. Све док је ред конвергентан, тј. све док се x налази између граница

$$-\frac{1}{A} \quad \text{и} \quad +\frac{1}{A},$$

сума реда је (према теореми 3.1) непрекидна фукција променљиве x. Једначина

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

остаје тачна за све вредности x које се налазе између граница $-\frac{1}{A}$ и $+\frac{1}{A}$, што указујемо писањем ових граница поред реда:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... \quad \left(x = -\frac{1}{A}, x = +\frac{1}{A}\right). \tag{3.48}$$

Када претпоставимо да је ред познат, понекад можемо из њега извести вредности функције $\varphi(x)$ у коначном облику и то је оно што називамо *сумирање* реда. Међутим, чешће је функција $\varphi(x)$ позната, а потребно је да развијемо у конвергентни ред чији су чланови поређани према растућим целобројним степенима. С тим у вези, лако је поставити следећу теорему:

Теорема 3.20: Непрекидна функција променљиве x може бити развијена у конвергентан ред чији су чланови поређани према растућим целобројним степенима исте променљиве на највише један начин.

Доказ: Претпоставимо да смо развили функцију $\varphi(x)$ на два различита начина и нека су

$$a_0, a_1 x, a_2 x^2, ..., a_n x^n, ...,$$
$$b_0, b_1 x, b_2 x 2, ..., b_n x^n, ...$$

два развоја, тј. два реда, сваки конвергентан за све вредности x осим нуле, и свакоме је функција $\varphi(x)$ сума, све док остаје конвергентна. Пошто су ова два реда стално конвергентна за веома мале вредности x, за такве вредности важи

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...$$

Занемаривањем вредности x у претходној једначини, добијамо

$$a_0 = b_0.$$

Претходну једначину можемо свести на

$$a_1x + a_2x^2 + ... = b_1x + b_2x^2 + ...$$

Трансформацијом овог израза добијамо

$$x(a_1 + a_2x + ...) = x(b_1 + b_2x + ...)$$

Множећи обе стране са $\frac{1}{x}$ добијамо

$$a_1 + a_2x + ... = b_1 + b_2x + ...$$

који такође мора бити тачан за веома мале вредности променљиве x, самим тим закључујемо да је

$$a_1 = b_1.$$

Примењујући аналогију, можемо показати да су константе $a_0, a_1, a_2, ...$ једнаке константама $b_0, b_1, b_2, ...$, редом. Одавде следи да су та два развоја функције $\varphi(x)$ идентична.

Диференцијални рачун пружа веома брзе методе развоја функција у ред. Ове методе ћемо описати касније. За сада ћемо се ограничити на развоје функције $(1+x)^\mu$, где је μ било која величина и примену у извођењу развоја две друге функције које произилазе из прве:

$$A^x \quad \text{и} \quad \log(1+x),$$

где A означава позитивну константу и log је логаритам произвољне основе. Као последица, решићемо три проблема:

Проблем 1: Када је могуће, развити функцију

$$(1+x)^\mu$$

у конвергентан ред чији су чланови поређани према растућим целобројним степенима.

Решење: Најпре, претпоставимо да је $\mu = m$, где је m било који природан број. Према Њутновој формули важи

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + ...$$

Ред чију суму чини десна страна једнакости формуле увек се састоји од коначног броја чланова. Међутим, ако заменимо природан број m било којом величином μ, новодобијени ред:

$$1, \frac{\mu}{1}x, \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2, ..., \tag{3.49}$$

се у општем случају састоји од бесконачно много чланова и конвергентан је само за нумеричке вредности x мање од 1. Користећи ову претпоставку, нека је $\varphi(\mu)$ сума новог реда:

$$\varphi(\mu) = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + ... \quad (x=-1, x=+1). \tag{3.50}$$

На основу теореме 3.1, $\varphi(\mu)$ је непрекидна функција променљиве μ унутар произвољних граница ове променљиве и важи (видети теорему 3.18, последицу 3.12)

$$\varphi(\mu)\varphi(\mu') = \varphi(\mu+\mu'). \tag{3.51}$$

Решавањем ове једначине добијамо:

$$\varphi(\mu) = [\varphi(1)]^{\mu} = (1+x)^{\mu}.$$

Ако заменимо вредност $\varphi(\mu)$, одређеног на овај начин, у формули (3.50), добијамо да за све вредности x које се налазе између $x=-1$ и $x=+1$,

$$(1+x)^{\mu} = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + ... \quad (x=-1, x=+1). \tag{3.52}$$

Ако је нумеричка вредност x већа од 1, ред (3.49) више није конвергентан и нема суму, тако да једначина (3.52) више није тачна. Под овом претпоставком, као што ћемо касније доказати уз помоћ диференцијалног рачуна, немогуће је развити функцију $(1+x)^{\mu}$ у конвергентан ред чији су чланови поређани према растућим целобројним степенима променљиве x.

Последица 3.13: Ако заменимо μ са $\frac{1}{\alpha}$ и x са αx у једначини (3.52), где је α бесконачно мала величина, тада за све вредности αx које се налазе између граница -1 и $+1$, тј. за све вредности x које се налазе између граница $-\frac{1}{\alpha}$ и $+\frac{1}{\alpha}$, имамо

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2}(1-\alpha) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}(1-\alpha)(1-2\alpha) + ...$$
$$(x = -\frac{1}{\alpha}, x = +\frac{1}{\alpha}).$$

Последња једначина би требало да остане тачна, без обзира на то колико је нумеричка вредност величине α мала. У случају када α тежи нули, имамо

$$\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + ... \quad (x=-\infty, x=+\infty). \tag{3.53}$$

Остаје нам да пронађемо граничну вредност $(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$. Прво, из претходне формуле добијамо да је

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + ...$$

или, другим речима,

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \tag{3.54}$$

где је e основа Неперовог логаритма. Можемо одмах закључити да је

$$\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}} = e,$$

и као последица,

$$\lim(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim[(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha x}}]^x = e^x.$$

Ако заменимо вредност од $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ у једначину (3.53), добијамо следеће:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + ... \quad (x=-\infty, x=+\infty). \tag{3.55}$$

Једначину (3.55) можемо директно извести посматрајући да је низ

$$1, \frac{x}{1}, \frac{x^2}{1\cdot 2}, \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}, ... \tag{3.56}$$

конвергентан за све вредности x и тражећи функцију променљиве x која представља суму истог реда. Нека је $\varphi(x)$ сума реда (3.56), чији је општи члан

$$\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}.$$

Тада је $\varphi(y)$ сума реда чији је општи члан

$$\frac{y^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}.$$

Према теореми 3.14, производ ове две суме је сума новог реда чији је општи члан

$$\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n} + \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-1)}\frac{y}{1} + ... + \frac{x}{1}\frac{y^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-1)} + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n} = \frac{(x+y)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}.$$

Овај производ је, стога, једнак $\varphi(x+y)$ и, ако је

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + ...$$

тада функција $\varphi(x)$ задовољава једначину

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y).$$

Решавајући ову једначину, добијамо

$$\varphi(x) = [\varphi(1)]^x = \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + ...\right)^x.$$

Следи да је

$$\varphi(x) = e^x.$$

Последица 3.14: Ако прво одузмемо 1 од обе стране једначине (3.52), и затим их поделимо са μ, једначина коју добијамо је:

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = x - \frac{x^2}{2}(1-\mu) + \frac{x^3}{3}(1-\mu)(1-\frac{1}{2}\mu) - ...$$
$$(x=-1, x=+1).$$

Ако у последњој једначини пустимо да μ тежи ка нули, тада је

$$\lim \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = x - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + ... \tag{3.57}$$

Даље, ако ln означава Неперов логаритом са основом e, тада очигледно имамо

$$1 + x = e^{\ln(1+x)}$$

и

$$(1+x)^\mu = e^{\mu\ln(a+x)} = 1 + \frac{\mu\ln(a+x)}{1} + \frac{\mu^2[\ln(1+x)]^2}{1\cdot 2} + ...$$

Закључујемо да

$$\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = \ln(1+x) + \frac{\mu}{2}[\ln(1+x)]^2 + ...$$

Као последица, имамо

$$\lim \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu} = \ln(1+x). \tag{3.58}$$

Према томе, формула (3.58) постаје

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... \quad (x=-1, x=+1). \tag{3.59}$$

Претходна једначина остаје тачна све док су нумеричке вредности x мање од 1. У овом случају, ред

$$x, -\frac{x^2}{2}, +\frac{x^3}{3}, ..., \pm\frac{x^n}{n}, ... \tag{3.60}$$

је конвергентан, као ред (3.33), који се разликује само у знаку чланова на парним местима. Пошто је ред дивергентан за x веће од 1, ова претпоставка не важи за једначину (3.59).

У посебном случају, за $x = 1$, ред (3.60) се своди на ред (3.19), који је конвергентан, као што смо показали. Према томе, једначина (3.59) би требало да остане тачна, тако да имамо

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... \tag{3.61}$$

С друге стране, ако је $x = -1$, ред (3.60) дивергира и нема суму. Можемо приметити да, ако заменимо $-x$ за x у формули (3.59), мењамо знакове са обе стране једначине, добијамо следеће

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... \quad (x=-1, x=+1). \tag{3.62}$$

Проблем 2: Развити функцију

$$A^x,$$

где је A произвољан број, у конвергентан ред чији су чланови поређани према растућим целобројним степенима променљиве x.

<u>Решење:</u> Претпоставимо, и даље, да ln означава Неперов логаритам са основом e. Према дефиницији овог логаритма, имамо

$$A = e^{\ln(A)},$$

и тиме закључујемо да

$$A^x = e^{x\ln(A)}. \tag{3.63}$$

Користећи једначину (3.55), следи

$$\begin{cases} A^x = 1 + \frac{x\ln(A)}{1} + \frac{x^2[\ln(A)]^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3[\ln(A)]^3}{1\cdot 2\cdot 3} + ... \\ (x=-\infty, x=+\infty). \end{cases} \tag{3.64}$$

Последња формула је тачна за све могуће реалне вредности x.

Проблем 3: Ако је са log означен логаритам са основом A, развити, где је могуће, функцију

$$\log(1+x)$$

у ред чији су чланови поређани према растућим целобројним степенима променљиве x.

Решење: На основу познатих особина логаритма (*прелазак са једне основе на другу и* $\log_A A = 1$) и трансформацијом израза следи

$$\log(1+x) = \frac{\log(1+x)}{\log A} = \frac{\ln(1+x)}{\ln(A)}.$$

Користећи формулу (3.59), добијамо да је за све вредности x које се налазе између граница $x = -1$ и $x = 1$,

$$\log(1+x) = \frac{1}{\ln(A)}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ...\right) \quad (x = -1, x = +1). \tag{3.65}$$

Последња формула је тачна чак и за $x = 1$, док за $x = -1$ и $x^2 > 1$ није.

Глава 4

Закључак

Кошијев допринос математичкој анализи је огроман. Уџбеник *Course d'analyse* је једна од најутицајнијих математичких књига икада написаних. У овом раду је приказан само један мали део његовог широког опуса.

Најпре су уведени неопходни појмови - Кошијеве дефиниције броја, величине, граничне вредности, бесконачно мале, бесконачно велике величине, као и непрекидност функција. Остатак рада је посвећен анализи редова коју је спровео Коши. Прву разлику у односу на данашњу теорију редова уочавамо у самој дефиницији реда: Коши ред дефинише као бесконачан низ величина, који бисмо ми данас назвали једноставно - низом, док под редом сматрамо бесконачну суму низа. Анализирани су редови са позитивним члановима, редови са позитивним и негативним члановима (које бисмо данас назвали редови са произвољним члановима) и редови са члановима поређаним према растућим целобројним степенима промењиве (степени редови). Коши поставља потребне и довољне услове конвергенције свих ових редова, које користимо и данас. Није доказивао све услове конвергенције, с објашњењем да су неки од њих очигледни. У данашњим уџбеницима те теореме имају доказ.

Постављањем паралеле између теорије написане у *Course d'analyse* и данашњих уџбеника, можемо да закључимо да се теорија редова која се учила у 19. веку, учи и данас, уз допуне и корекције. Коши у неким извођењима и теоремама, према стандардима модерне математике, није био потпуно прецизан. Касније су математичари, попут Вајерштраса, његова тврђења допунили и доказали.

Велики број појмова и тврђења која данас везујемо за Кошијево име: Кошијев низ, Коши-Болцанова теорема о међувредности, Кошијева теорема о средњој вредности, Кошијев облик остатка у Тејлоровој формули, Кошијева интегрална формула у комплексној анализи, итд, само указују на то колики је Коши оставио траг у математичкој анализи.

Библиографија

[1] Cauchy A.L. *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, Premiére partie: Analyse algébrique*, De l'imprimerie royale, Paris, 1821.

[2] Божић М. *Преглед историје и филозофије математике*, Друго издање, Завод за уџбенике Београд, 2010.

[3] Bradley R., Sandifer C.E. *Cauchy's Cours d'analyse - An Annotated Translation*, Springer, New York, NY, 2009.

[4] Tall D., Katz M.G. *A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit, and infinitesimal, with implications for teaching the calculus*, Educational Studies in Mathematics,86(1), 2014.

[5] Каделбург З. *Заснивање наставе математичке анализе-Историјски коментари*, Друштво математичара Србије, 2019.

[6] Ruch D. *Abel and Cauchy on a Rigorous Approach to Infinite Series* , Analysis. 4, 2017.