

Математички факултет
Универзитет у Београду



Мастер рад

ПОЉИНА ТЕОРЕМА ЕНУМЕРАЦИЈЕ И ПРИМЕНЕ

Ментор:
Др Горан
Ћанковић

Студент:
Малиша Радосављевић
1040/2020

Београд
2021.

Садржај

1. Увод.....	3
2. Релације и класе еквиваленције	4
2.1 Релације	4
2.2 Класе еквиваленције.....	9
3. Пермутације.....	12
3.1 Дефиниција пермутација.....	12
3.2 Група пермутација	13
3.3 Еквиваленције индуковане групом пермутација	15
3.4 Аутоморфизми графа	16
3.5 Пермутације као производ циклуса.....	17
4. Бернсајдова лема	18
5. Бојење	21
5.1 Дефиниција и еквивалентна бојења.....	21
5.2 Бојење графова	22
5.3 Функција пребацивања	24
6. Индекс циклуса.....	28
6.1 Посебан случај Пољине теореме.....	28
6.2 Индекс циклуса групе.....	30
7. Пољина теорема	31
7.1 Инвентар скупа.....	31
7.2 Пољина теорема	33
7.3 Примена Пољине теореме.....	37
8. Закључак	43
9. Литература:	44

1. Увод

Ради лакше организације простора, често се врши селекција објеката на основу неког критеријума, а то могу бити величина, облик, боја и тако даље. Објекте који задовољавају изабрани критеријум сврставамо у скуп.

На самом почетку рада, даћемо дефиницију бинарне релације на произвољном скупу као и својства које та релација мора да задовољава како би била релација еквиваленције. Оваква релација нам омогућава поделу елемената скупа на класе еквиваленције које ће нам бити од изузетног значаја у даљем раду. Даћемо преглед основних појмова о пермутацијама, дејствима група, као и преглед примена Бернсајдове леме на најразличитије проблеме бројања. Уверићемо се како се различити проблеми из хемије и рачунарства који захтевају број различитих објеката скупа могу свести на проблем бојења. Приказаћемо флексибилнији метод енумерације мађарског математичара Ђерђ Поље, познатији као Пољина теорема енумерације коју ћемо илустровати многобројним примерима.

2. Релације и класе еквиваленције

2.1 Релације

У људској природи је да све око себе групише у различите скупове. Може се извршити подела живих бића према полу, старости или боји косе. Такође, можемо извршити селекцију многоуглова на троуглове, четвороуглове, петоуглове и тако даље. Уколико извршимо овакву поделу, намеће се следеће питање: када ћемо рећи да су два елемента скупа иста?

Пример 1 Бацамо новчић два пута и записујемо да ли је пало писмо (П) или глава (Г). Нека је X скуп свих исхода након пет таквих бацања.

$$X = \{(\text{П}, \text{Г}), (\text{Г}, \text{Г}), (\text{Г}, \text{П}), (\text{П}, \text{П}), (\text{П}, \text{Г})\}$$

За елементе $(\text{П}, \text{Г})$ и $(\text{П}, \text{Г})$ кажемо да су исти (еквивалентни) јер је у првом бацању пало писмо (П), а у другом бацању пала глава (Г), док су сви остали елементи међусобно различити.

У претходном примеру смо видели када ћемо за два елемента скупа рећи да су иста (еквивалентна). Претпоставимо сада да посматрамо скуп који има бар два различита елемента.

Сада можемо поставити следеће питање: да ли постоји релација (веза) између два елемента истог скупа?

Дефиниција 1 Нека су X и Y непразни скупови. Декартов производ скупова X и Y , у ознаци $X \times Y$, дефинишемо као скуп уређених парова код којих је прва компонента из скупа X , а друга компонента из скупа Y , $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

Пример 2 Нека је $X = \{1, 2\}$ и $Y = \{3, 4\}$.

Тада је $X \times Y = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

Дефиниција 2 Бинарна релација S на скупу X је подскуп Декартовог производа $X \times X = \{(a, b) \mid a \in X, b \in X\}$.

Пример 3 Нека је $X = \{1,2,3,4\}$.

$X \times X = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,1), (2,3), (2,4), (3,3), (3,1), (3,2), (3,4), (4,4), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

Једна бинарна релација S на скупу X дата је са $S = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3), (2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$.

У случају бинарне релације S на скупу X , обично ћемо писати aSb уколико је $(a,b) \in S$.

На основу имена можемо закључити да нам бинарне релације дају јасно дефинисану везу између два елемента истог скупа.

Релација S дата у *Примеру 3* може бити дефинисана и на следећи начин:

$S = \{(a,b) \mid a \in X, b \in X, a \text{ и } b \text{ су исте парности}\}$.

Дефиниција 3 Нека је X непразан скуп и нека је S бинарна релација на X .

Уколико је испуњено:

1. Рефлексивност: $(\forall a \in X) aSa$
2. Симетричност: $(\forall a, b \in X) aSb \Rightarrow bSa$
3. Транзитивност: $(\forall a, b, c \in X) (aSb \wedge bSc) \Rightarrow aSc$

онда S називамо релацијом еквиваленције.

Пример 4 Нека је X скуп свих људи у Србији. Једна релација еквиваленције на скупу X дата је са $S = \{(a,b) \mid a, b \in X, a \text{ и } b \text{ су исте висине}\}$.

1. Рефлексивност: $(\forall a \in X) aSa$
2. Симетричност: $(\forall a, b \in X) aSb \Rightarrow bSa$ (уколико је особа a исте висине као особа b , онда је и особа b исте висине као и особа a)
3. Транзитивност: $(\forall a, b, c \in X) (aSb \wedge bSc) \Rightarrow aSc$ (уколико је особа a исте висине као особа b и особа b исте висине као особа c , онда је и особа a исте висине као особа c)

Пример 5 Нека је X скуп свих људи у Србији и нека је релација S дата на следећи начин: $S = \{(a,b) \mid a, b \in X, \text{ особа } a \text{ је барем висине као особа } b\}$.

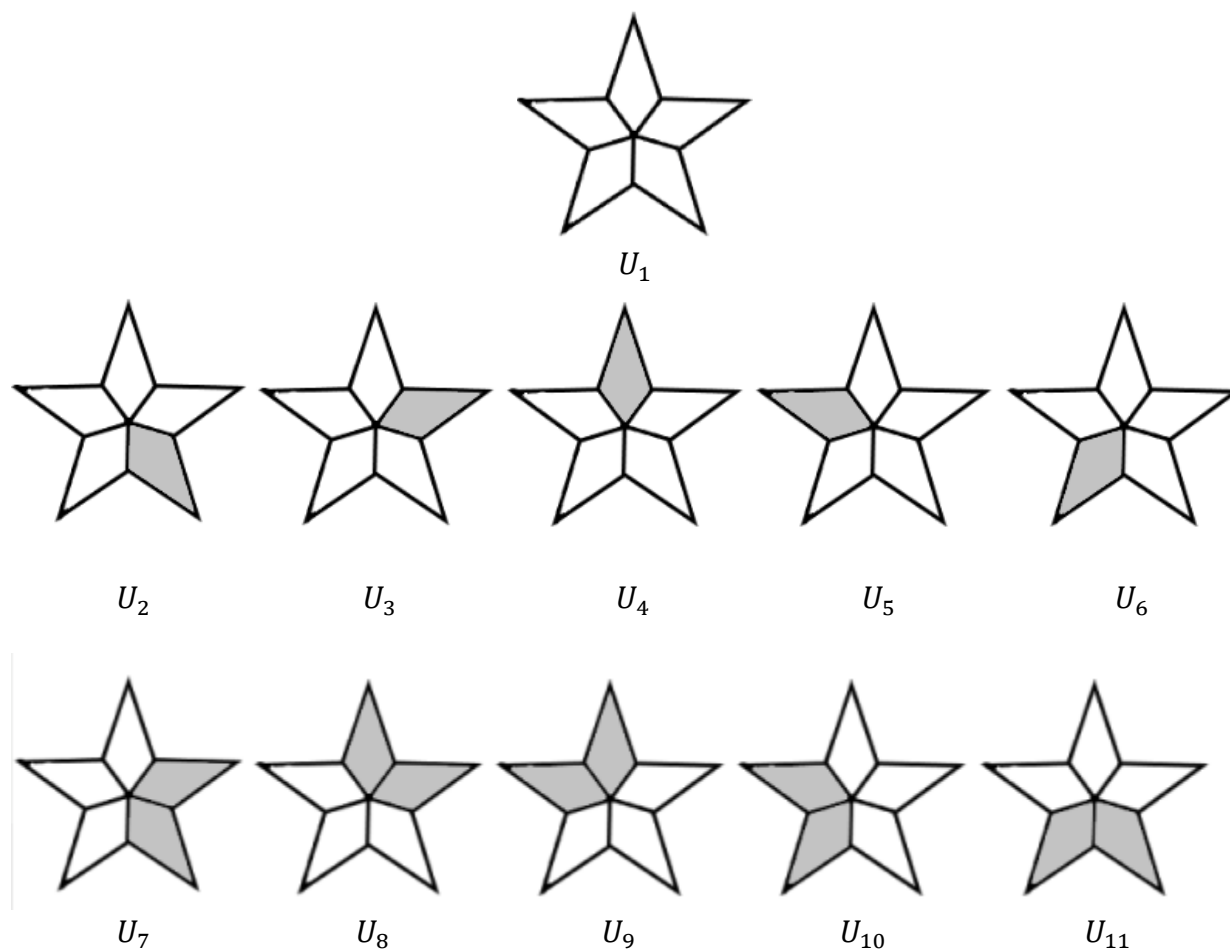
1. Рефлексивност: $(\forall a \in X) aSa$
2. Симетричност (не важи): Уколико је особа a барем висине као особа b , онда не важи да је особа b барем висине као особа a .
3. Транзитивност: $(\forall a, b, c \in X) (aSb \wedge bSc) \Rightarrow aSc$ (уколико је особа a барем висине као особа b и особа b барем висине као особа c , онда је и особа a барем висине као особа c)

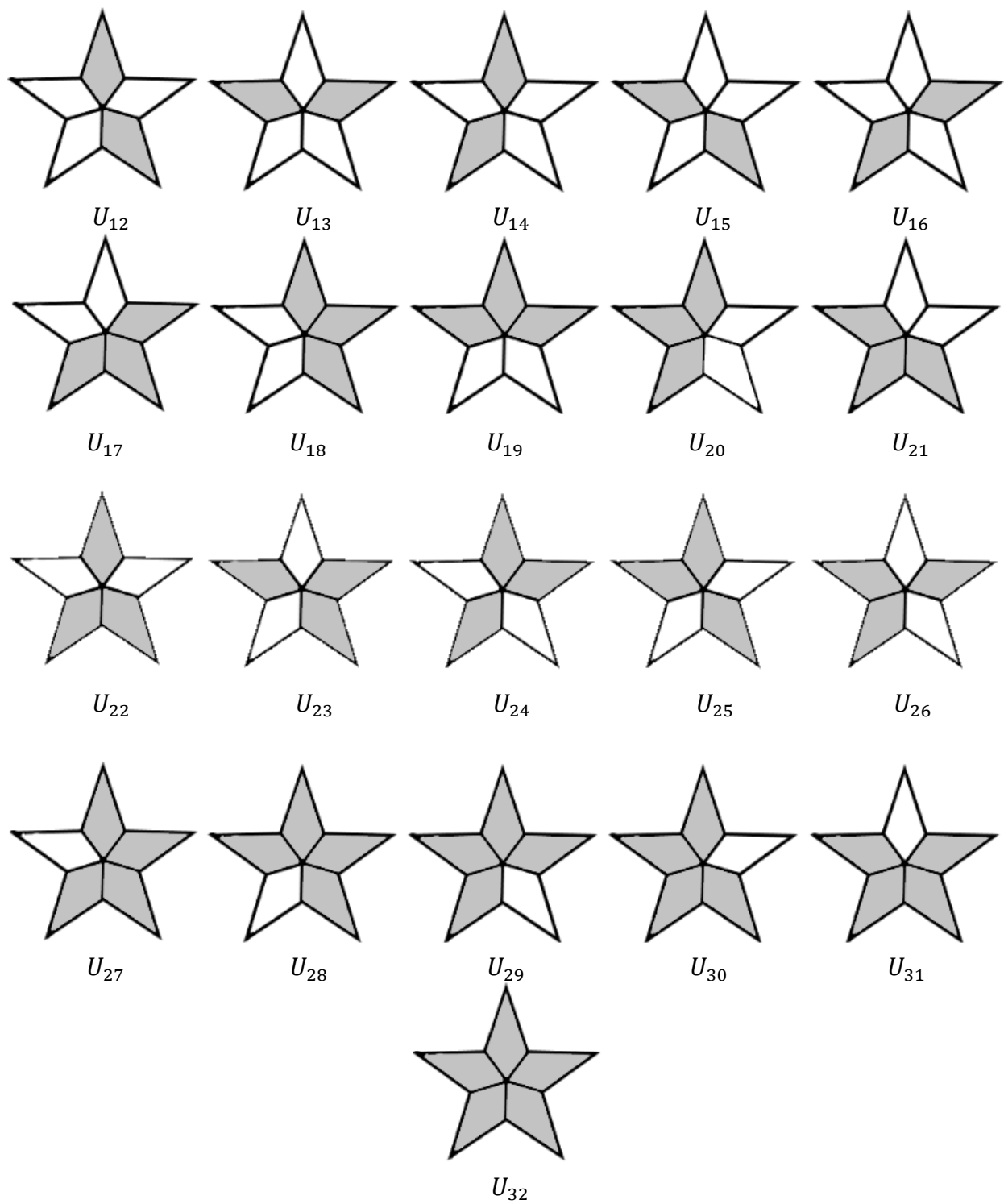
У овом примеру можемо видети релацију на скупу X која није релација еквиваленције.

Пример 6 Посматрајмо низ новогодишњих украса у облику звезде са пет кракова. Сваки украс је подељен на пет једнаких делова од којих сваки део независно може бити осветљен или не. Уколико је део осветљен бојимо га белом бојом, а уколико није бојимо сивом бојом. Нека је X скуп свих таквих украса. Додатно можемо претпоставити да се сваки украс може ротирати за 0° , 72° , 144° , 216° или 288° .

На скупу X дефинишимо релацију S тако да aSb ако се украс b може добити од украса a ротацијом за неки угао.

Посматрајмо сада скуп X :



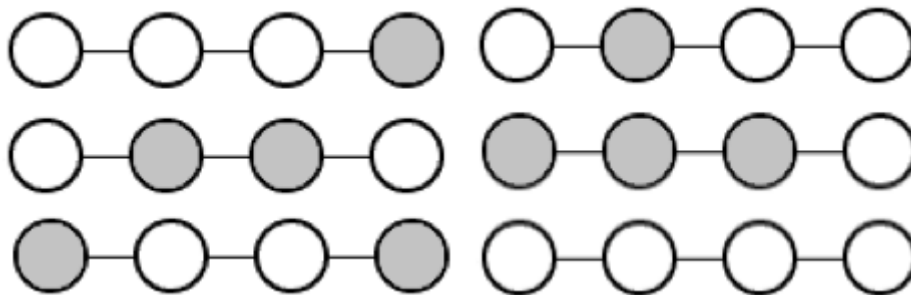


Слика 1: Сва бојења новогодишњих украса у две боје.

Докажимо да је S релација еквиваленције на скупу X .

1. Рефлексивност: $(\forall a \in X) aSa$ (украс a се може добити из украса a ротацијом за 0°)
2. Симетричност: $(\forall a, b \in X) aSb \Rightarrow bSa$ (уколико се украс b може заротирати до украса a за угао од x° , онда се украс a може заротирати до украса b за угао од $(360 - x)^\circ$)
3. Транзитивност: $(\forall a, b, c \in X) (aSb \wedge bSc) \Rightarrow aSc$ (уколико се украс b може заротирати до украса a за угао од x° и уколико се украс c може заротирати до украса b за угао од y° , онда се украс c може заротирати до украса a за угао од $(x + y)^\circ$ водећи рачуна да ротацију за угао $(360 + x)^\circ$ поистовећујемо са ротацијом за угао од x°)

Пример 7 Нека је X скуп свих низова који се састоје од n сијалица поређаних једна поред друге и при томе имамо могућност да сваку сијалицу из низа посебно упалимо, односно угасимо.



Слика 2: Неколико могућности за низ који се састоји од четири сијалице.

Два низа, a и b , су у релацији S и пишемо aSb , уколико имају исти број упаљених сијалица. Тада је S једна релација еквиваленције.

1. Рефлексивност: $(\forall a \in X) aSa$
2. Симетричност: $(\forall a, b \in X) aSb \Rightarrow bSa$ (уколико низ b има исти број упаљених сијалица као низ a , онда и низ a има исти број упаљених сијалица као и низ b).
3. Транзитивност: $(\forall a, b, c \in X) (aSb \wedge bSc) \Rightarrow aSc$ (уколико низ b има исти број упаљених сијалица као и низ a и уколико низ c има исти број упаљених сијалица као низ b , онда и низ c има исти број упаљених сијалица као и низ a).

2.2 Класе еквиваленције

Релација еквиваленције S на скупу X дели елементе тог скупа на класе које називамо класама еквиваленције.

Посматрајмо произвољан елемент a из скупа X . Класу еквиваленције која садржи елемент a , обележавамо са $C(a)$ и она се састоји од свих елемената b из скупа X тако да важи aSb , односно $C(a) = \{b \in X \mid aSb\}$.

Тврђење 1 Нека су $a, b, c \in X$ произвољни елементи, тада важи:

1. $a \in C(a)$
2. $C(a) = C(b)$ или $C(a) \cap C(b) = \emptyset$

Доказ:

1. Из рефлексивности имамо да је aSa па можемо закључити да сваки елемент скупа X припада својој класи еквиваленције;
2. Нека $c \in C(a)$ и $c \in C(b)$, тада имамо да је aSc и bSc . Применом симетрије добијамо да је aSc и cSb . Коначно, из транзитивности имамо да је aSb .

Нека је $y \in C(b)$, тада имамо да је bSy . Из aSb и bSy добијамо aSy што је еквивалентно чињеници да $y \in C(a)$. Добијамо да је $C(b) \subseteq C(a)$.

Слично томе, можемо показати да је $C(a) \subseteq C(b)$, па закључујемо да је $C(a) = C(b)$.

Претходно тврђење нас доводи до следеће теореме.

Теорема 1 Ако је S релација еквиваленције на скупу X , тада сваки елемент скупа X припада тачно једној класи еквиваленције.

Уколико посматрамо *Пример 6*, можемо издвојити тачно осам различитих класа еквиваленције:



Класа 1



Класа 2



Класа 3



Класа 4



Класа 5



Класа 6



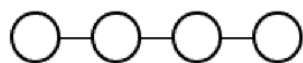
Класа 7



Класа 8

Слика 3: Класе еквиваленције новогодишњих украса обојених у две боје.

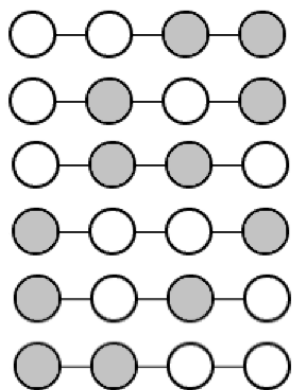
Посматрајмо поново *Пример 7* када се низ састоји од 4 сијалице. Тада можемо уочити пет различитих класа еквиваленције.



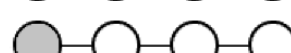
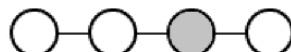
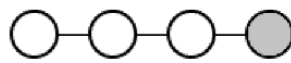
Класа 1



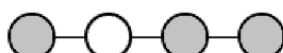
Класа 2



Класа 4



Класа 3



Класа 5

Слика 4: Класе еквиваленције низа који се састоји од четири сијалице.

3. Пермутације

3.1 Дефиниција пермутација

Дефиниција 4 Пермутација је бијекција скупа у самог себе.

Посматрајмо скуп $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Пермутацију која претвара елемент 1 у a_1 , 2 у a_2 и тако даље, можемо записати на следећи начин:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

или краће $a_1 a_2 \cdots a_n$.

Пермутација 213 је краћи облик записивања пермутације $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Пермутацију $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ можемо схватити и као функцију $\pi: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ дефинисану са $\pi(1) = 2, \pi(2) = 1, \pi(3) = 3$.

Са друге стране, сваку бијективну функцију f која слика коначан скуп X у самог себе можемо гледати као пермутацију на скупу X тако што елементе скупа идентификујемо са целим бројевима.

Ради илустрације, нека је скуп $X = \{p, q, r\}$ и нека је функција f дефинисана са $f(p) = r, f(q) = p, f(r) = q$. Након идентификације $p = 1, q = 2, r = 3$ функцију f можемо замислити и као пермутацију $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Природно се поставља следеће питање: како да дефинишемо композицију две пермутације?

Нека су π_1 и π_2 пермутације скупа $X = \{1, 2, 3\}$ дате на следећи начин:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Композицију (производ) пермутација π_1 и π_2 , у ознаци $\pi_1 \circ \pi_2$, добијамо тако што прво заменимо елементе пермутацијом π_2 а након тога применимо пермутацију π_1 , што се слаже са композицијом функција.

$$\pi_1(\pi_2(1)) = \pi_1(3) = 3$$

$$\pi_1(\pi_2(2)) = \pi_1(1) = 2$$

$$\pi_1(\pi_2(3)) = \pi_1(2) = 1$$

Коначно добијамо $\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2 Група пермутација

Означимо са G скуп свих пермутација произвољног скупа X .

Важе следеће особине:

1. Затвореност ($G1$): $(\forall \pi_1, \pi_2 \in G) \pi_1 \circ \pi_2 \in G$
2. Асоцијативност ($G2$): $(\forall \pi_1, \pi_2, \pi_3 \in G) (\pi_1 \circ \pi_2) \circ \pi_3 = \pi_1 \circ (\pi_2 \circ \pi_3)$
3. Неутрал ($G3$): $(\exists \pi_e \in G)(\forall \pi \in G) \pi_e \circ \pi = \pi \circ \pi_e = \pi$
4. Инверз ($G4$): $(\forall \pi \in G)(\exists \pi^{-1} \in G) \pi \circ \pi^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi = \pi_e$

У особини $G3$, пермутација π_e је дата на следећи начин:

$$\pi_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Пермутацију π^{-1} у особини $G4$ дефинишемо тако да ради супротно од пермутације π .

На пример, ако је

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

онда је

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Дефиниција 5 Нека је X било који скуп и нека је $\circ$ бинарна операција на скупу X . Уређени пар $(X, \circ)$ зовемо групом уколико задовољава особине $G1$, $G2$, $G3$ и $G4$.

Са групама се први пут сусрећемо у основној школи када радимо целе бројеве. Нека је X скуп целих бројева и нека бинарна операција $\circ$ представља сабирање целих бројева.

Тада важи:

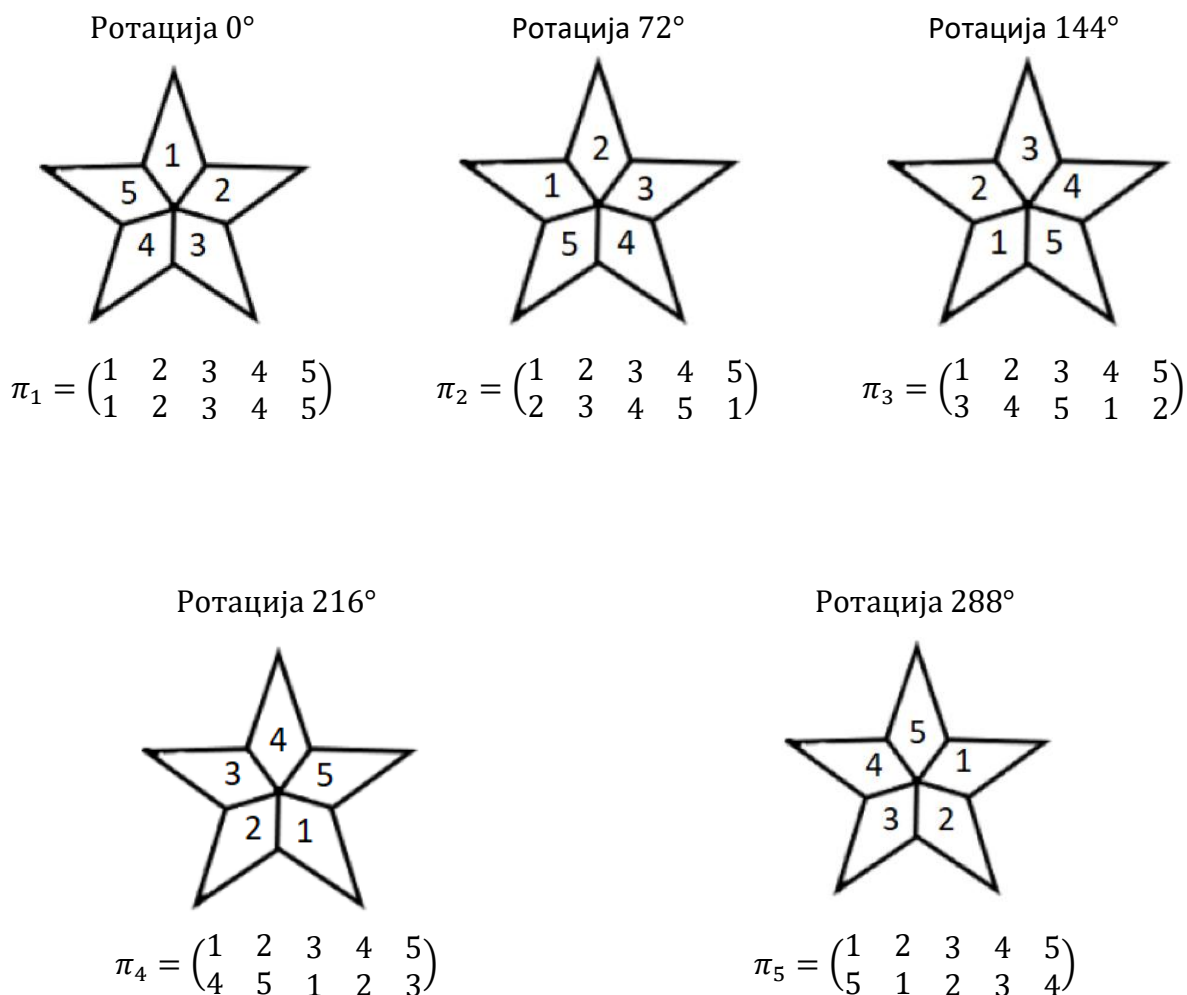
1. Затвореност ($G1$): $(\forall a, b \in X) a + b \in X$
2. Асоцијативност ($G2$): $(\forall a, b, c \in X) (a + b) + c = a + (b + c)$
3. Неутрал ($G3$): $(\exists 0 \in X)(\forall a \in X) 0 + a = a + 0 = a$
4. Инверз ($G4$): $(\forall a \in X)(\exists (-a) \in X) a + (-a) = (-a) + a = 0$

Тиме смо доказали да је $(X, \circ)$ група.

Посматрајмо опет исти скуп, али нека сада бинарна операција $\circ$ представља множење целих бројева. Испоставиће се да $(X, \circ)$ није група:

1. Затвореност $(G1)$: $(\forall a, b \in X) a \cdot b \in X$
2. Асоцијативност $(G2)$: $(\forall a, b, c \in X) (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Неутрал $(G3)$: $(\exists 1 \in X)(\forall a \in X) 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
4. Инверз $(G4)$: Не постоји уколико је $a \neq \pm 1$. Нека је $a \in X$ произвољан елемент, кандидат за инверз је $\frac{1}{a}$, али $\frac{1}{a} \notin X$ уколико је $a \neq \pm 1$.

Вратимо се на *Пример 6* и обележимо сваки део украса природним бројем од 1 до 5. Тада ротације за угао од $0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ$ и 288° можемо представити преко пермутација:



Слика 5: Пермутације које одговарају ротацијама украса за углове од $0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ$ и 288° .

Групу свих пермутација скупа X називамо симетричном групом и означавамо је са S_X . Нека је $(G, \circ)$ било која подгрупа групе S_X коју ћемо у наставку звати група пермутација на скупу X .

Једноставном провером особина $G1, G2, G3$ и $G4$ можемо закључити да пермутације $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ и π_5 чине групу пермутација на скупу $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Претпоставимо сада да имамо бијективну функцију f која слика коначан скуп X у самог себе. Како смо раније рекли, функција f је пермутација на скупу X . Ако посматрамо скуп свих таквих функција f а за $\circ$ узмемо композицију функција, онда добијамо групу свих пермутација скупа X .

Ради илустрације, узмимо да је $X = \{a, b, c, d, e\}$ и да су функције f, g, h, p и q дефинисане на следећи начин:

$f(a) = a$	$g(a) = b$	$h(a) = c$	$p(a) = d$	$q(a) = e$
$f(b) = b$	$g(b) = c$	$h(b) = d$	$p(b) = e$	$q(b) = a$
$f(c) = c$	$g(c) = d$	$h(c) = e$	$p(c) = a$	$q(c) = b$
$f(d) = d$	$g(d) = e$	$h(d) = a$	$p(d) = b$	$q(d) = c$
$f(e) = e$	$g(e) = a$	$h(e) = b$	$p(e) = c$	$q(e) = d$

Функције f, g, h, p и q су бијекције. Уколико узмемо да је $G = \{f, g, h, p, q\}$ и извршимо идентификацију $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ и $e = 5$, добијамо да су функције f, g, h, p и q заправо пермутације са *Слике 5*, па закључујемо да је $(G, \circ)$ група пермутација.

3.3 Еквиваленције индуковане групом пермутација

Нека је $(G, \circ)$ група пермутација на скупу X . Тада, на скупу X можемо да дефинишемо релацију S на следећи начин:

$$S = \{(a, b) \mid a, b \in X, (\exists \pi \in G) \pi(a) = b\}.$$

На пример, нека је $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\}$ где су пермутације $\pi_i, 1 \leq i \leq 5$, дате на *Слици 5* и нека је $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тада је $(G, \circ)$ група пермутација.

1S1 јер је $\pi_1(1) = 1$	2S1 јер је $\pi_5(2) = 1$	3S1 јер је $\pi_4(3) = 1$
1S2 јер је $\pi_5(1) = 2$	2S2 јер је $\pi_1(2) = 2$	3S2 јер је $\pi_5(3) = 2$
1S3 јер је $\pi_4(1) = 3$	2S3 јер је $\pi_2(2) = 3$	3S3 јер је $\pi_1(3) = 3$
1S4 јер је $\pi_3(1) = 4$	2S4 јер је $\pi_3(2) = 4$	3S4 јер је $\pi_2(3) = 4$
1S5 јер је $\pi_2(1) = 5$	2S5 јер је $\pi_4(2) = 5$	3S5 јер је $\pi_3(3) = 5$

4S1 јер је $\pi_3(4) = 1$	5S1 јер је $\pi_2(5) = 1$
4S2 јер је $\pi_4(4) = 2$	5S2 јер је $\pi_3(5) = 2$
4S3 јер је $\pi_5(4) = 3$	5S3 јер је $\pi_4(5) = 3$
4S4 јер је $\pi_1(4) = 4$	5S4 јер је $\pi_5(5) = 4$
4S5 јер је $\pi_5(4) = 5$	5S5 јер је $\pi_1(5) = 5$

(3.1)

Као што можемо приметити, за све a и b из X , важи да је aSb , што нас доводи до следеће теореме:

Теорема 2 Ако је $(G, \circ)$ група пермутација на скупу X , онда је са $S = \{(a, b) \mid a, b \in X, (\exists \pi \in G) \pi(a) = b\}$ дата релација еквиваленције на скупу X .

Доказ:

Потребно је доказати да S задовољава рефлексивност, симетричност и транзитивност.

Рефлексивност:

Како је $(G, \circ)$ група пермутација на скупу X , $(\exists \pi_e \in G)(\forall a \in X) \pi_e(a) = a$ па закључујемо да $(\forall a \in X) aSa$.

Симетричност:

Ако је aSb , тада постоји $\pi \in G$ тако да је $\pi(a) = b$. Како је $(G, \circ)$ група, постоји $\pi^{-1} \in G$ тако да је $\pi^{-1}(b) = a$ што нам даје bSa .

Транзитивност:

Нека је aSb и bSc , тада постоје $\pi_1, \pi_2 \in G$ тако да је $\pi_1(a) = b$ и $\pi_2(b) = c$. Композицијом $(\pi_2 \circ \pi_1)(a) = c$ добијамо aSc . ■

На основу претходне теореме и релација приказаних у (3.1), можемо закључити да релација S има само једну класу еквиваленције која се састоји од свих елемената скупа X .

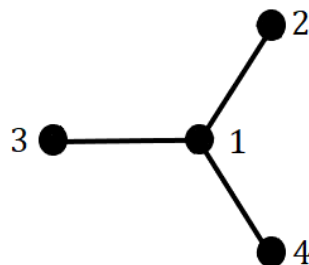
Дефиниција 6 Нека је $(G, \circ)$ група пермутација на скупу X . За свако $a \in X$, дефинишемо орбиту елемента a , у ознаци $C(a)$, на следећи начин:

$$C(a) = \{\pi(a) \mid \pi \in G\}.$$

3.4 Аутоморфизми графа

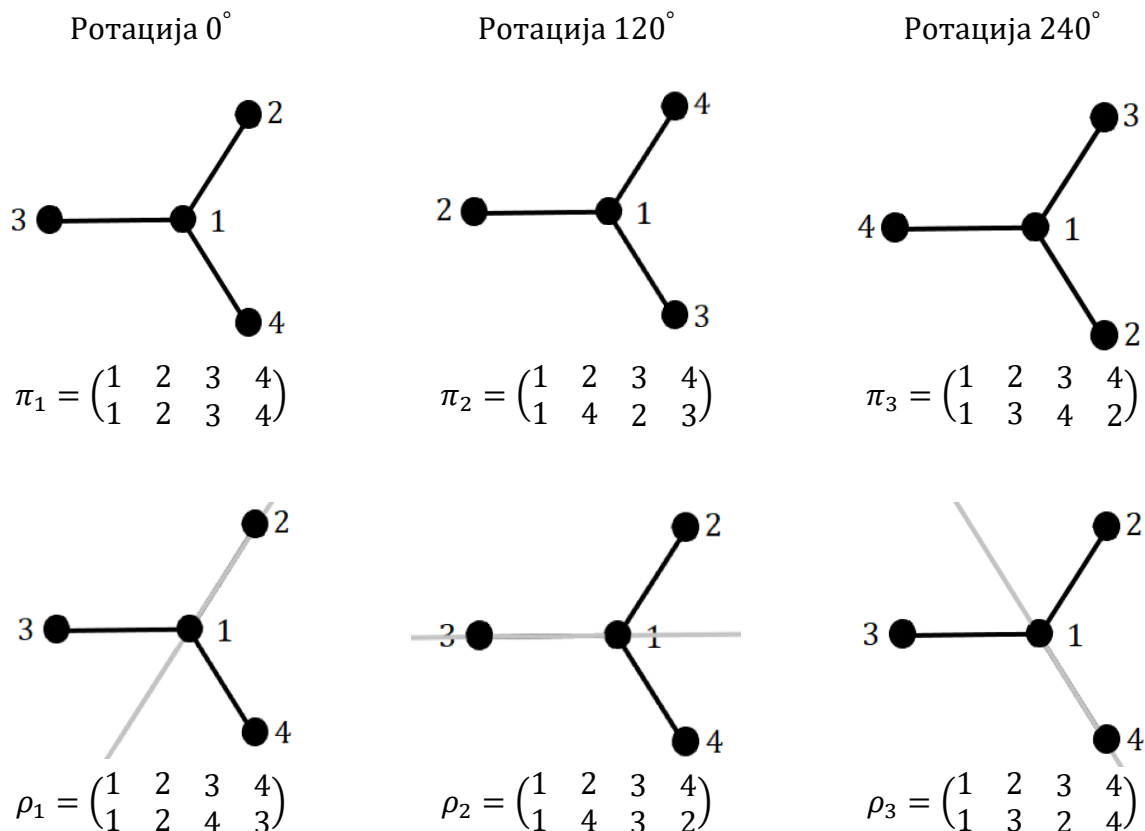
Нека је H фиксирани граф. Под аутоморфизмом графа H подразумевамо пермутацију π темена тог графа тако да ако је (x, y) ивица графа H онда је и $(\pi(x), \pi(y))$ такође ивица графа H .

Посматрајмо граф $K_{1,3}$ и обележимо темена бројевима 1, 2, 3 и 4:



Слика 6: Граф $K_{1,3}$.

Наведимо сада све аутоморфизме графа $K_{1,3}$:



Слика 7: Аутоморфизми графа $K_{1,3}$.

Теорема 3 Скуп свих аутоморфизама графа је група пермутација.

3.5 Пермутације као производ циклуса

Пермутација $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ која премешта 1 у 2, 2 у 3, 3 у 4 и 4 у 1 може бити краће записана као (1234). Уопштено, са $(a_1 a_2 \dots a_n)$ обележавамо пермутацију која елемент a_1 премешта у елемент a_2 , a_2 у a_3 , ..., a_{n-1} у a_n и a_n у a_1 . Овакав вид представљања називамо цикличном пермутацијом.

Посматрајмо сада пермутацију $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, она се састоји из два циклуса, (124) и (35). Тада, кажемо да је пермутација производ два циклуса и записујемо је као (124)(35). Производ циклуса је композиција (производ) две пермутације. Циклус (124) посматрамо као пермутацију која елемент 1 премешта у 2, 2 у 4, 4 у 1 а елементе 3 и 5 оставља непромењене (фиксирани).

Пермутацију $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ можемо записати као производ три циклуса (12)(3)(45), где циклус (3) означава да је елемент 3 фиксиран.

Свака пермутација скупа $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ се може записати као производ дисјунктних циклуса тако да сваки елемент $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ припада неком циклусу. За два циклуса $(a_1 a_2 \dots a_k)$ и $(b_1 b_2 \dots b_l)$ кажемо да су дисјунктни ако су дисјунктни скупови $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_l\}$.

На пример, посматрајмо пермутацију $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 1 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Узмемо први елемент 1, он се премешта у 3, 3 у 5, а 5 у 1 чиме добијамо циклус (135). Посматрајмо сада први елемент који се не налази у претходном циклусу, то је елемент 2. Пермутацијом се 2 премешта у 6, 6 у 8 а 8 у 2 чиме добијамо други циклус (268). Уочимо сада први елемент који се није појавио у претходна два циклуса, то је елемент 4. Елемент 4 се премешта у елемент 7, а 7 у 4 и тиме добијамо трећи циклус (47). Како смо искористили све елементе, почетну пермутацију записујемо као производ циклуса (135)(268)(47).

Пермутације $(1234 \dots n)$, $(234 \dots n1)$, $(345 \dots n12)$, $\dots$, $(n1 \dots n-1)$ сматрамо идентичним.

Дефиниција 7 Нека је пермутација π написана као производ дисјунктних циклуса. Са $\text{сус}(\pi)$ обележавамо број дисјунктних циклуса.

На пример, ако је $\pi = (135)(24)$ тада је $\text{сус}(\pi) = 2$.

4. Бернсајдова лема

Као што смо видели, бројање класа еквиваленције није увек једноставно јер захтева исписивање свих елемената скупа и проверавање међусобних релација. Бернсајдова лема нам даје број различитих класа еквиваленције.

Дефиниција 8 Нека је $(G, \circ)$ група пермутација на скупу X . За $a \in X$ кажемо да је инваријантан (фиксиран) у односу на пермутацију $\pi \in G$, ако важи $\pi(a) = a$. Са $\text{Inv}(\pi)$ обележавамо број инваријантних елемената скупа X у односу на пермутацију π .

Пример, ако нам је дата пермутација $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, тада је $\text{Inv}(\pi) = 2$ јер је $\pi(1) = 1$ и $\pi(4) = 4$.

Дефиниција 9 Нека је $(G, \circ)$ група пермутација на скупу X . За свако $a \in X$, дефинишимо стабилизатор елемента a , у ознаци $\text{St}(a)$, као $\text{St}(a) = \{\pi \in G \mid \pi(a) = a\}$, односно скуп свих пермутација $\pi \in G$ тако да је $\pi(a) = a$.

На пример, посматрајмо све аутоморфизме графа $K_{1,3}$ приказане на *Слици 7*. Тада је $\text{St}(2) = \{\pi_1, \rho_1\}$, $\text{St}(3) = \{\pi_1, \rho_2\}$.

Теорема 4 Нека је $(G, \circ)$ група пермутација на скупу X и нека је $a \in X$. Тада је: $|\text{St}(a)| \cdot |C(a)| = |G|$.

Доказ:

Претпоставимо да је $C(a) = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_r\}$. Тада постоји пермутација π_1 тако да је $\pi_1(a) = b_1$, постоји пермутација π_2 , тако да је $\pi_2(a) = b_2$, и тако даље.

Нека је $P = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_r\}$. Тада важи да је $|P| = |C(a)|$.

Докажимо сада да се свака пермутација π из G може на јединствен начин написати као композиција пермутације из P и пермутације из $St(a)$.

Нека је π из G такво да је $\pi(a) = b_k$ за произвољно $k, 1 \leq k \leq r$. Тада је $\pi(a) = \pi_k(a)$ што нам даје да $\pi_k^{-1} \circ \pi$ оставља a инваријантним, односно $\pi_k^{-1} \circ \pi \in St(a)$.

Сада пермутацију π из G можемо представити као композицију пермутације из P и пермутације из $St(a)$ на следећи начин:

$$\pi = \pi_e \circ \pi = (\pi_k \circ \pi_k^{-1}) \circ \pi = \pi_k \circ (\pi_k^{-1} \circ \pi).$$

Остаје нам још да покажемо јединственост.

Претпоставимо супротно, да се π може написати на два начина $\pi = \pi_k \circ \gamma = \pi_l \circ \delta$, где су $\gamma, \delta \in St(a)$.

Тада је $b_k = (\pi_k \circ \gamma)(a) = (\pi_l \circ \delta)(a) = b_l$ што нам даје $k = l$.

Сада из једнакости $\pi_k \circ \gamma = \pi_k \circ \delta$ добијамо да је $\gamma = \delta$ што је и требало доказати.

Коначно, на основу правила производа добијамо да је $|St(a)| \cdot |C(a)| = |G|$. ■

Илуструјмо ову теорему посматрајући све аутоморфизме графа $K_{1,3}$, *Слика 7*. Рачунањем добијамо да је $St(2) = \{\pi_1, \rho_1\}$, и $C(2) = \{2, 4, 3\}$.

$$|G| = 6 = 2 \cdot 3 = |St(2)| \cdot |C(3)|$$

Лема 1 (Бернсајдова лема) Нека је $(G, \circ)$ група пермутација на скупу X и нека је S релација еквиваленције индукована групом $(G, \circ)$. Број класа еквиваленције релације S дат је са:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} Inv(\pi).$$

Доказ:

Нека је $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ и $G = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m\}$.

Пре свега, уочимо да важи следећа једнакост:

$$Inv(\pi_1) + Inv(\pi_2) + \dots + Inv(\pi_m) = |St(1)| + |St(2)| + \dots + |St(n)|.$$

Претходна једнакост је тачна јер и лева и десна страна једнакости представљају број парова (a, π) тако да је $\pi(a) = a$.

На основу *Теореме 4* имамо да је:

$$\frac{1}{|G|} (Inv(\pi_1) + Inv(\pi_2) + \dots + Inv(\pi_m)) = \frac{1}{|C(1)|} + \frac{1}{|C(2)|} + \dots + \frac{1}{|C(n)|} \quad (4.1)$$

По *Тврђењу 1* имамо да је $C(x) = C(y)$ акко $x \in C(y)$. Ако је $C(x) = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_k\}$ онда постоји тачно k класа еквиваленције $C(b_1), C(b_2), \dots, C(b_k)$ једнаких са $C(x)$. На основу тога, класе еквиваленције можемо поделити на групе као што су $\{C(b_1), C(b_2), \dots, C(b_k)\}$ где свака група представља списак истих класа еквиваленције. Како је $|C(b_i)| = k$, добијамо:

$$\frac{1}{|C(b_1)|} + \frac{1}{|C(b_2)|} + \dots + \frac{1}{|C(b_k)|} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{k} = 1$$

Закључујемо да десна страна једнакости (4.1) представља број различитих класа еквиваленције. ■

На пример, нека је $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5\}$ где су пермутације $\pi_i, 1 \leq i \leq 5$, дате на *Слици 5* и нека је $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тада је, $Inv(\pi_1) = 5, Inv(\pi_2) = 0, Inv(\pi_3) = 0, Inv(\pi_4) = 0$ и $Inv(\pi_5) = 0$.

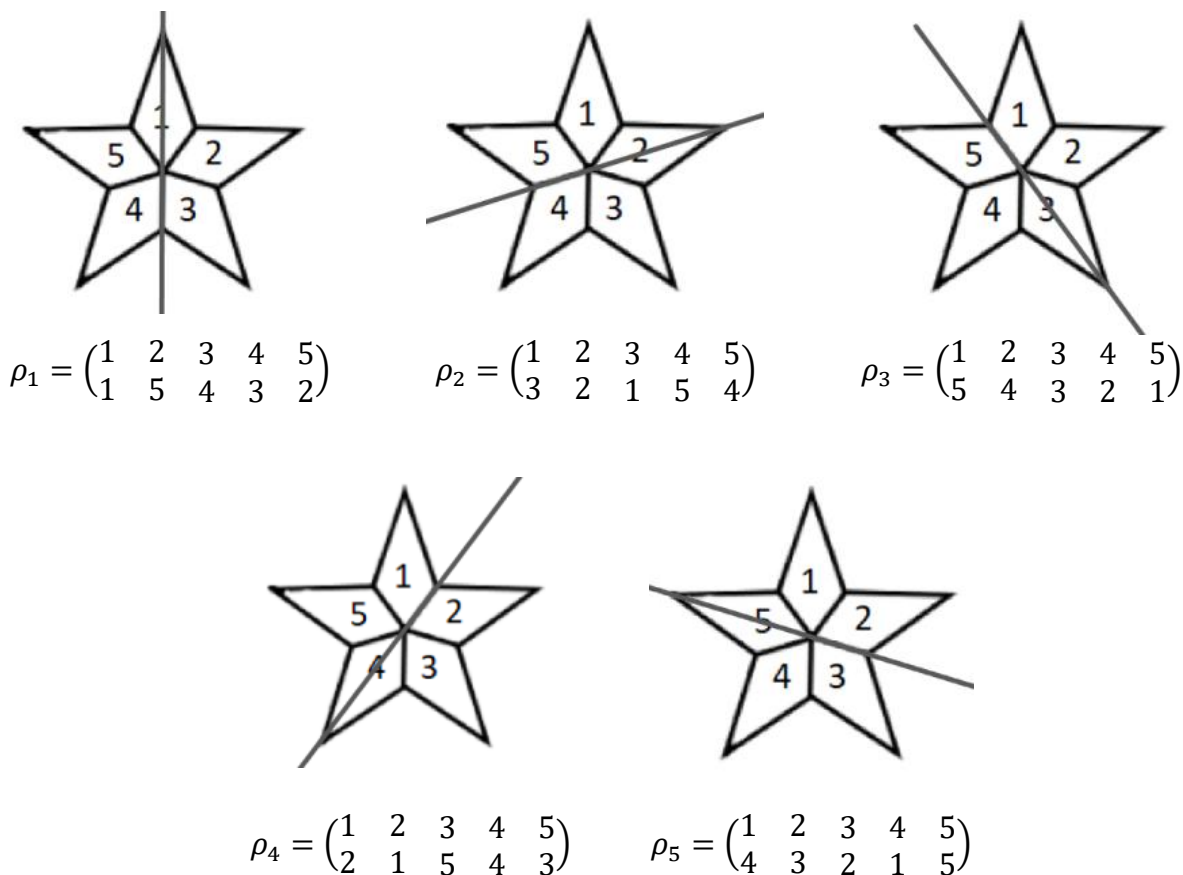
На основу Бернсајдове леме имамо да је број класа еквиваленције дат са $\frac{1}{5}(5 + 0 + 0 + 0 + 0) = 1$, што је исправно јер из (3.1) можемо закључити да имамо само једну класу еквиваленције.

Нека је $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ скуп свих аутоморфизама графа $K_{1,3}$ приказаних на *Слици 7*. Тада је, $Inv(\pi_1) = 4, Inv(\pi_2) = 1, Inv(\pi_3) = 1, Inv(\rho_1) = 2, Inv(\rho_2) = 2$ и $Inv(\rho_3) = 2$.

Из Бернсајдове леме добијамо да је број класа еквиваленције $\frac{1}{6}(4 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2) = 2$. Заиста, можемо уочити само две класе еквиваленције: $\{1\}$ и $\{2, 3, 4\}$.

Вратимо се на пример са новогодишњим украсима. Нека је A скуп свих украса приказаних на *Слици 1*.

Посматрајмо сада осне симетрије.



Слика 8: Пермутације које одговарају осним симетријама украса.

Свака пермутација π (или ρ) скупа $\{1,2,3,4,5\}$ приказана на *Слици 5* и *Слици 8*, индукује пермутацију π^* (или ρ^*) скупа A тако што поље означено бројем i , $1 \leq i \leq 5$, замењује пољем $\pi(i)$. Ако посматрамо $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, добијамо да је $\pi_2^*(U_2) = U_3$, $\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ генерише ρ_3^* за које важи да је $\rho_3^*(U_8) = U_{10}$, и тако даље. Скуп свих π^* и ρ^* чини групу пермутација на скупу A .

На основу релације коју смо задали у *Примеру 6*, закључујемо да је $Inv(\pi_1^*) = 32$, $Inv(\pi_2^*) = 2$, $Inv(\pi_3^*) = 2$, $Inv(\pi_4^*) = 2$, $Inv(\pi_5^*) = 2$, $Inv(\rho_1^*) = 8$, $Inv(\rho_2^*) = 8$, $Inv(\rho_3^*) = 8$, $Inv(\rho_4^*) = 8$ и $Inv(\rho_5^*) = 8$. Из Бернсајдове леме добијамо да је број класа еквиваленције $\frac{1}{10}(32 + 2 + 2 + 2 + 2 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8) = 8$ у шта смо могли да се уверимо на *Слици 3*.

5. Бојење

5.1 Дефиниција и еквивалентна бојења

Дефиниција 10 Обележимо са D скуп објеката које посматрамо. Под бојењем скупа D подразумевамо да сваком елементу скупа доделимо одређену боју.

Уколико претпоставимо да је D скуп темена графа, под бојењем подразумевамо да сваком темену графа доделимо неку боју, не водећи рачуна о томе да два суседна темена графа морају бити обојена различитом бојом.

Бојење скупа D можемо гледати и као функцију $f: D \rightarrow R$, где је R скуп свих расположивих боја. Ако D има n елемената а R има t елемената, онда D можемо обојити на t^n различитих начина.

У *Примеру 6*, D је скуп свих новогодишњих украса у облику звезде, а R се састоји од сиве и беле боје.

Означимо са $C(D, R)$ скуп свих бојења D помоћу боја из R , Нека је $(G, \circ)$ група пермутација скупа D . Пермутација π из G индукује пермутацију π^* , која узима бојење из $C(D, R)$ и пребацује га у друго бојење. Уколико је f бојење, ново бојење $(\pi^*f)(a)$ дефинишемо као $f(\pi(a))$. Ново бојење π^*f додељује a исту боју коју f додељује $\pi(a)$.

Посматрајмо *Пример 6* и ротације украса приказане на *Слици 5*. Пермутација π_2 која представља ротацију за 72° генерише пермутацију π_2^* која узима бојење U_i , $1 \leq i \leq 32$ и пребације га у неко друго бојење U_j , $1 \leq j \leq 32$. $U_1(x)$ је бело за свако поље x , $1 \leq x \leq 5$ чиме добијамо да је $(\pi_2^*U_1)(x) = U_1(\pi_2(x))$ је бело за свако x , $1 \leq x \leq 5$ па је $\pi_2^*U_1$ бојење U_1 .

Посматрајмо сада украс U_2 :

$$(\pi_2^*U_2)(1) = U_2(\pi_2(1)) = U_2(2) = \text{бело}$$

$$(\pi_2^*U_2)(2) = U_2(\pi_2(2)) = U_2(3) = \text{сиво}$$

$$\begin{aligned}
(\pi_2^* U_2)(3) &= U_2(\pi_2(3)) = U_2(4) = \text{бело} \\
(\pi_2^* U_2)(4) &= U_2(\pi_2(4)) = U_2(5) = \text{бело} \\
(\pi_2^* U_2)(5) &= U_2(\pi_2(5)) = U_2(1) = \text{бело}
\end{aligned}$$

Можемо закључити да је $\pi_2^* U_2$ исто што и бојење U_3 .

Идентичним разматрањем долазимо до пермутације π_2^* која је дата са:

$$\begin{aligned}
\pi_2^* &= (U_1)(U_2 U_3 U_4 U_5 U_6)(U_7 U_8 U_9 U_{10} U_{11})(U_{12} U_{13} U_{14} U_{15} U_{16})(U_{17} U_{18} U_{19} U_{20} U_{21}) \\
&\quad (U_{22} U_{23} U_{24} U_{25} U_{26})(U_{27} U_{28} U_{29} U_{30} U_{31})(U_{32})
\end{aligned}$$

Слично томе, добијамо:

$$\begin{aligned}
\pi_1^* &= (U_1)(U_2)(U_3)(U_4)(U_5)(U_6)(U_7)(U_8)(U_9)(U_{10})(U_{11})(U_{12})(U_{13})(U_{14})(U_{15})(U_{16}) \\
&\quad (U_{17})(U_{18})(U_{19})(U_{20})(U_{21})(U_{22})(U_{23})(U_{24})(U_{25})(U_{26})(U_{27})(U_{28})(U_{29})(U_{30})(U_{31})(U_{32})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_3^* &= (U_1)(U_2 U_4 U_6 U_3 U_5)(U_7 U_9 U_{11} U_8 U_{10})(U_{12} U_{14} U_{16} U_{13} U_{15})(U_{17} U_{19} U_{21} U_{18} U_{20}) \\
&\quad (U_{22} U_{24} U_{26} U_{23} U_{25})(U_{27} U_{29} U_{31} U_{28} U_{30})(U_{32})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_4^* &= (U_1)(U_2 U_5 U_3 U_6 U_4)(U_7 U_{10} U_8 U_{11} U_9)(U_{12} U_{15} U_{13} U_{16} U_{14})(U_{17} U_{20} U_{18} U_{21} U_{19}) \\
&\quad (U_{22} U_{25} U_{23} U_{26} U_{24})(U_{27} U_{30} U_{28} U_{31} U_{29})(U_{32})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_5^* &= (U_1)(U_2 U_6 U_5 U_4 U_3)(U_7 U_{11} U_{10} U_9 U_8)(U_{12} U_{16} U_{15} U_{14} U_{13})(U_{17} U_{21} U_{20} U_{19} U_{18}) \\
&\quad (U_{22} U_{26} U_{25} U_{24} U_{23})(U_{27} U_{31} U_{30} U_{29} U_{28})(U_{32})
\end{aligned}$$

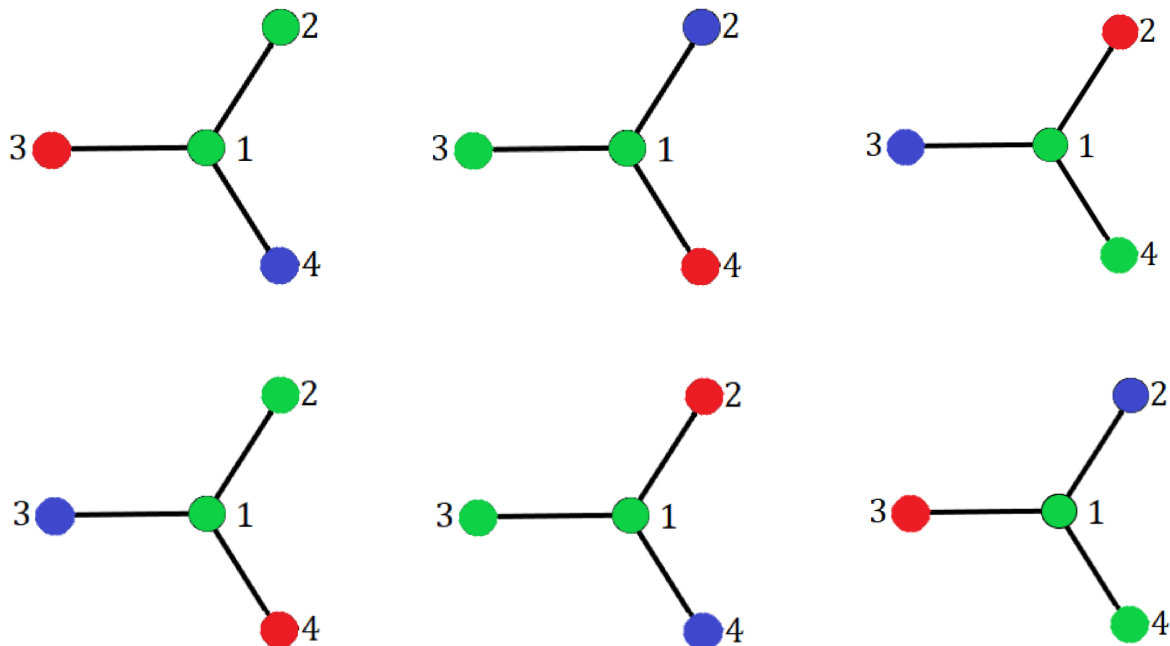
Групи $(G, \circ)$ пермутација скупа D одговара група $(G^*, \circ)$ пермутација скупа $C(D, R)$, односно $G^* = \{\pi^* \mid \pi \in G\}$. Групе $(G, \circ)$ и $(G^*, \circ)$ имају исти број елемента.

Са S^* обележавамо релацију еквиваленције која је индукована групом $(G^*, \circ)$. За релацију S^* , два бојења f и g су еквивалентна уколико постоји пермутација $\pi \in G$ тако да је $g = \pi^* f$ односно, за све a из D важи $g(a) = f(\pi(a))$.

5.2 Бојење графова

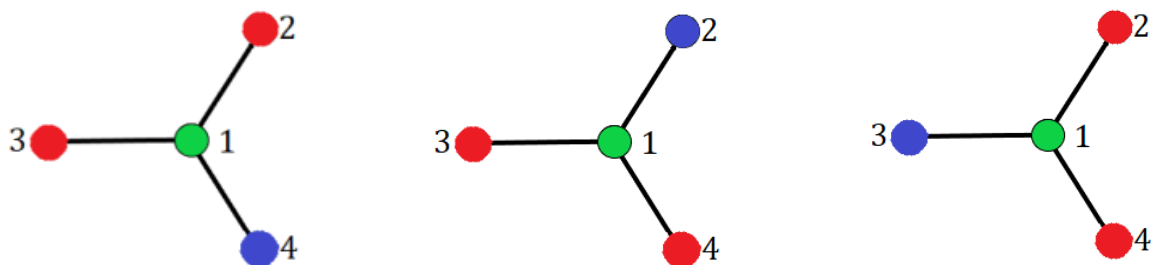
Посматрајмо граф $K_{1,3}$ приказан на *Слици 6* и претпоставимо да желимо да га обојимо у три боје: плаву, зелену и црвену. За два бојења ћемо рећи да су иста уколико се применом неког аутоморфизма приказаног на *Слици 7* од једног може добити друго бојење. Колико имамо различитих бојења?

Ако теме означено са 1 обојимо у зелено, а сва остала темена обојимо различитим бојама, можемо приметити да су тада сва таква бојења иста.



Слика 9: Еквивалентна бојења графа $K_{1,3}$ кад је теме 1 обојено зеленом бојом а темена 2, 3 и 4 обојена зеленом, црвеном и плавом бојом.

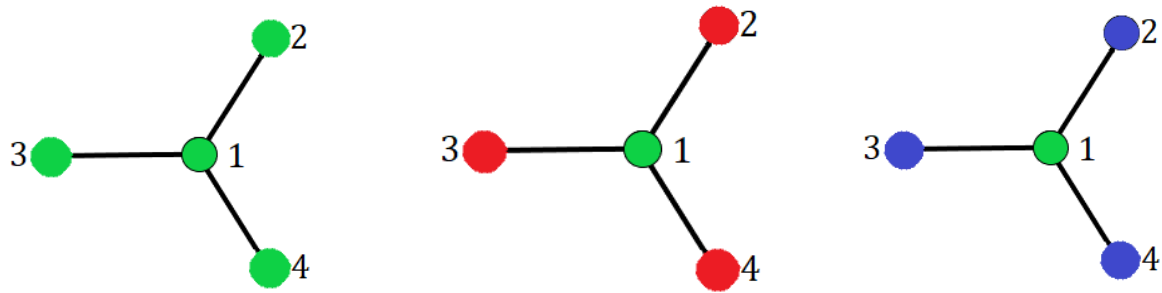
Посматрајмо сада бојења када је теме 1 обојено зеленом бојом, два преостала темена обојена црвеном бојом, а четврто теме обојено плавом бојом.



Слика 10: Еквивалентна бојења графа $K_{1,3}$ кад је теме 1 обојено зеленом бојом, два темена црвеном бојом и једно теме плавом бојом.

Сличним поступком, уколико теме 1 обојимо зеленом бојом, а преостала темена 2, 3 и 4 обојимо тако да два темена буду исте боје, закључујемо да имамо шест различитих бојења.

Преостаје нам још да размотримо случајеве када теме 1 обојимо зеленом бојом, а преостала темена обојимо у исту боју.



Слика 11: Бојења графа $K_{1,3}$ кад је теме 1 обојено зеленом бојом, а темена 2, 3 и 4 обојена истом бојом.

Дакле, постоји 10 класа еквиваленције (10 различитих бојења) када је теме 1 обојено зеленом бојом. Слично томе, теме 1 можемо обојити црвеном или плавом бојом па закључујемо да имамо 30 различитих бојења графа $K_{1,3}$ са три боје.

Овај резултат можемо добити и применом Бернсајдове леме. Граф $K_{1,3}$ има четири темена која желимо да обојимо са три боје па имамо $3^4 = 81$ бојења. Обележимо са π_i^* (односно ρ_i^*) пермутацију графа која је индукована аутоморфизмом π_i (односно ρ_i). Тада је $Inv(\pi_1^*) = 81$, $Inv(\pi_2^*) = Inv(\pi_3^*) = 9$ јер ротације остављају непромењена она бојења код којих су темена 2, 3 и 4 обојена истом бојом, $Inv(\rho_1^*) = 27$ јер ρ_1 оставља непромењена само она бојења код којих су темена 3 и 4 обојена истом бојом, на сличан начин је и $Inv(\rho_2^*) = Inv(\rho_3^*) = 27$. Применимо сада Бернсајдову лему да добијемо број различитих класа еквиваленције (број различитих бојења графа $K_{1,3}$):

$$\frac{1}{6} (81 + 9 + 9 + 27 + 27 + 27) = \frac{1}{6} 180 = 30.$$

5.3 Функција пребацивања

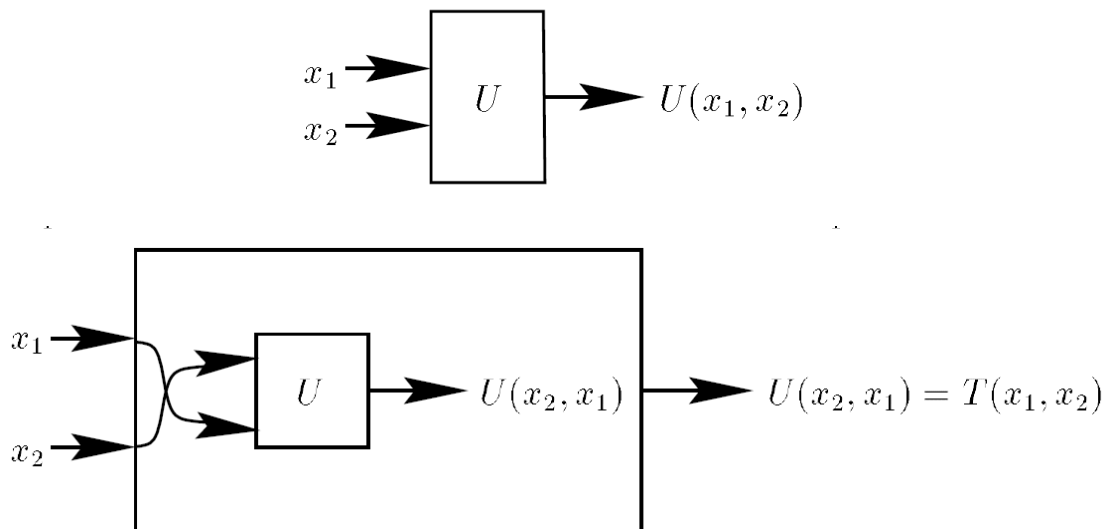
Обележимо са B_n скуп свих битских низова дужине n . Функција пребацивања од n променљивих сваком низу дужине n додељује број 0 или 1. Посматрајмо пример две функције пребацивања T и U дефинисане за $n = 2$.

Низ битова x	$T(x)$	$U(x)$
00	1	1
01	0	1
10	1	0
11	1	1

Слика 12: Две функције пребацивања дефинисане на низу дужине 2.

Функције пребацивања имају велики значај у рачунарству јер се многи проблеми могу решити применом ових функција. Један од примера где може да се искористи функција пребацивања јесте испитивање парности броја где нам је од највећег значаја последњи бит у низу. Овакве функције се могу реализовати на различите начине, али основни циљ у рачунарству је како искористити имплементацију постојећих функција за добијање нових функција. Колико заправо имамо различитих функција дефинисаних над n променљивих? Скуп B_n има 2^n елемената (на сваком од n места у низу бита имамо по две могућности, 0 или 1). Сада, како за сваки низ из B_n функција враћа 0 или 1, можемо да закључимо да укупно имамо 2^{2^n} различитих функција пребацивања. Број функција веома брзо расте ако се n помери за малу вредност. Користећи симетрије можемо уочити еквивалентна израчунавања одређених функција пребацивања што нас доводи до тога да не морамо имплементирати све функције понаособ већ је довољно да имплементирамо једну функцију, а остале које имају еквивалентна израчунавања представимо помоћу те функције. Са *Слике 12* лако можемо уочити да важи да је $T(x_1x_2) = U(x_2x_1)$ за све низове x_1x_2 . Функција T се на једноставан начин може добити од функције U обртањем улазних бита и тада за функције T и U кажемо да су еквивалентне.

Претпоставимо сада да имамо дизајнирано електрично коло које израчунава функцију U , на *Слици 13* је приказано црном кутијом. Посматрајмо сада израчунавања за улазни низ x_1x_2 .



Слика 13: Коло за израчунавање T се може добити од кола за израчунавање U .

Долазимо до закључка да функцију T можемо имплементирати преко кола које израчунава функцију U . Можемо дефинисати и релацију еквиваленције S . Две функције T и U су у релацији и пишемо TSU ако је $T = U$ или $T(x_1x_2) = U(x_2x_1)$.

Уопшtimo сада претходну идеју на функције n променљивих. За две функције пребацивања T и U од n променљивих кажемо да су еквивалентне (исте) ако постоји пермутација π скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ тако да је:

$$T(x_1x_2 \dots x_n) = U(x_{\pi(1)}x_{\pi(2)} \dots x_{\pi(n)}). \quad (5.1)$$

У случају функције две променљиве имамо само две могућности за π :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Посматрајмо сада функције T и U дефинисане за низове који се састоје од три елемента.

Низ битова x	$T(x)$	$U(x)$
000	1	1
001	0	0
010	1	0
011	1	0
100	0	1
101	0	1
110	1	1
111	0	0

Слика 14: Две функције пребацивања дефинисане на низу дужине 3.

Функције T и U су еквивалентне јер постоји пермутација $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ тако да је задовољена једнакост (5.1).

Природно се поставља питање: колико имамо различитих класа еквиваленције функција пребацивања у зависности од броја променљивих n ?

Одговор на ово питање можемо добити применом Бернсајдове леме ако за D узмемо скуп свих битских низова дужине n , односно $D = B_n$.

Нека је π било која пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ и нека је $(S_n, \circ)$ група свих пермутација на скупу $\{1, 2, \dots, n\}$. Низ $x_1x_2 \dots x_n$ можемо посматрати и као бојење где су боје означене бројевима 0 и 1. Групу пермутација бојења обележимо са $(S_n^*, \circ)$ што је заправо група $(G, \circ)$ из ранијих примера и она се састоји од пермутација π^* . Група $(G^*, \circ)$ је заправо група $((S_n^*)^*, \circ)$ која се састоји од пермутација π^{**} за све пермутације π из S_n .

Како заправо функционише π^{**} ?

Прво $\pi^*(x_1x_2 \dots x_n) = x_{\pi(1)}x_{\pi(2)} \dots x_{\pi(n)}$ замењује елементе унутар низа, а након тога група $(G^*, \circ)$ врши пермутације самих низова. Ако је U функција пребацивања, тада је:

$$(\pi^{**} U)(x_1 x_2 \cdots x_n) = U(\pi^*(x_1 x_2 \cdots x_n)) = U(x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)}).$$

Односно, добијамо да је $T = \pi^{**} U$.

Посматрајмо пример када је $n = 2$.

Тада имамо да је $\mathbb{S}_n = \{\pi_1, \pi_2\}$ где је

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тада се $G = \mathbb{S}_n^*$ састоји из

$$\pi_1^* = \begin{pmatrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 00 & 01 & 10 & 11 \end{pmatrix} \text{ и } \pi_2^* = \begin{pmatrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 00 & 10 & 01 & 11 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Као што смо раније написали, имамо $2^{2^2} = 16$ функција пребацивања две променљиве.

Низ битова x	$T(x)$															
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}
00	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
01	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
10	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
11	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Слика15: Функције пребацивања две променљиве.

Одредимо сада пермутације из групе $(G^*, \circ)$.

$$\pi_1^{**} = (T_1)(T_2)(T_3)(T_4)(T_5)(T_6)(T_7)(T_8)(T_9)(T_{10})(T_{11})(T_{12})(T_{13})(T_{14})(T_{15})(T_{16})$$

$$\pi_2^{**} = (T_1)(T_2)(T_3 T_5)(T_4 T_6)(T_7 T_8)(T_9)(T_{10})(T_{11} T_{13})(T_{12} T_{14})(T_{15})(T_{16})$$

Тада је $Inv(\pi_1^{**}) = 16$ и $Inv(\pi_2^{**}) = 8$ па на основу Бернсајдове леме закључујемо да имамо $\frac{1}{2}(16 + 8) = 12$ класа еквиваленције.

6. Индекс цикла

6.1 Посебан случај Пољине теореме

Теорема 5 Нека је $(G, \circ)$ група пермутација скупа D и нека је $C(D, R)$ скуп свих бојења скупа D коришћењем боје из R ($|R| = m$). Број различитих бојења у $C(D, R)$ дат је са:

$$\frac{1}{|G|} (m^{\text{сус}(\pi_1)} + m^{\text{сус}(\pi_2)} + \dots + m^{\text{сус}(\pi_k)})$$

где је $G = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k\}$.

Доказ:

Применићемо Бернасајдову лему на групу $(G^*, \circ)$ пермутација скупа $C(D, R)$. Од раније знамо да је $|G| = |G^*|$ па је довољно доказати да је $m^{\text{сус}(\pi)} = \text{Inv}(\pi^*)$. Елемент из $C(D, R)$ је инваријантан у односу на пермутацију π^* ако и само ако у одговарајућој пермутацији π скупа D , сви елементи из D у сваком циклусу од π добијају исту боју. Претпоставимо да је $\pi = (13)(245)(6)$ и нека је f бојење тако да је $f(1) = f(3) = \text{црно}, f(2) = f(4) = f(5) = \text{бело}$ и $f(6) = \text{црвено}$. Тада је $\pi^* f$ исто бојење.

До бојења које је инваријантно у односу на π^* долазимо тако што пермутацију π разложимо на дисјунктне циклусе и све елементе у циклусу обојимо истом бојом. Пермутација π има $\text{сус}(\pi)$ циклуса, а за бојење сваког циклуса имамо m боја на располагању што нам даје $m^{\text{сус}(\pi)}$ бојења инваријантних у односу на π^* . Закључујемо да је $m^{\text{сус}(\pi)} = \text{Inv}(\pi^*)$. ■

Илуструјмо претходну теорему на примеру новогодишњих украса у облику звезде узимајући у обзир све пермутације приказане на *Слици 5* и *Слици 8*. Запишимо прво све пермутације као производе дисјунктних циклуса:

$$\begin{array}{ll} \pi_1 = (1)(2)(3)(4)(5) & \rho_1 = (1)(25)(34) \\ \pi_2 = (12345) & \rho_2 = (13)(2)(45) \\ \pi_3 = (13524) & \rho_3 = (15)(24)(3) \\ \pi_4 = (14253) & \rho_4 = (12)(35)(4) \\ \pi_5 = (15432) & \rho_5 = (14)(23)(5) \end{array}$$

Одредимо сада број дисјунктних циклуса сваке пермутације:

$$\begin{array}{ll} \text{сус}(\pi_1) = 5 & \text{сус}(\rho_1) = 3 \\ \text{сус}(\pi_2) = 1 & \text{сус}(\rho_2) = 3 \\ \text{сус}(\pi_3) = 1 & \text{сус}(\rho_3) = 3 \\ \text{сус}(\pi_4) = 1 & \text{сус}(\rho_4) = 3 \\ \text{сус}(\pi_5) = 1 & \text{сус}(\rho_5) = 3 \end{array}$$

На основу *Теореме 5* добијамо да је број различитих бојења једнак:

$$\frac{1}{10}(2^5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3) = \frac{1}{10} \cdot 80 = 8.$$

у шта смо могли да се уверимо на *Слици 3*, али и при бројању помоћу Бернсајдове леме.

Посматрајмо опет бојења графа $K_{1,3}$ у три боје.

Напишимо сада све аутоморфизме приказане на *Слици 7* у облику производа дисјунктних циклуса:

$$\begin{array}{ll} \pi_1 = (1)(2)(3)(4) & \rho_1 = (1)(2)(34) \\ \pi_2 = (1)(243) & \rho_2 = (1)(34)(2) \\ \pi_3 = (1)(234) & \rho_3 = (1)(23)(4) \end{array}$$

Слика 16: Аутоморфизми графа $K_{1,3}$ приказани у облику производа дисјунктних циклуса.

Одредимо број дисјунктних циклуса сваког аутоморфизма

$$\begin{array}{ll} \text{сус}(\pi_1) = 4 & \text{сус}(\rho_1) = 3 \\ \text{сус}(\pi_2) = 2 & \text{сус}(\rho_2) = 3 \\ \text{сус}(\pi_3) = 2 & \text{сус}(\rho_3) = 3 \end{array}$$

На основу *Теореме 5* добијамо да је број различитих бојења једнак:

$$\frac{1}{6}(3^4 + 3^2 + 3^2 + 3^3 + 3^3 + 3^3) = \frac{1}{6}180 = 30$$

што смо добили директним бројањем али и применом Бернсајдове леме.

У примеру са функцијама пребацивања две променљиве могли смо да уочимо да није једноставно применити Бернсајдову лему јер је било потребно да одредимо пермутације π_1^{**} и π_2^{**} . Одредимо сада број класа еквиваленције преко специјалног случаја Пољине теореме.

Подсетимо се да је $G = \{\pi_1^*, \pi_2^*\}$, где π_1^* и π_2^* задовољавају (5.2).

Тада важи да је $\text{сус}(\pi_1^*) = 4$ и $\text{сус}(\pi_2^*) = 3$.

На основу *Теореме 5* имамо да је број различитих класа еквиваленције дат са:

$$\frac{1}{2}(2^4 + 2^3) = \frac{1}{2}24 = 12$$

у шта смо могли да се уверимо применом Бернсајдове леме.

6.2 Индекс цикла групе

Посматрајмо пермутацију π која је записана као производ дисјунктних циклуса и претпоставимо да се састоји од b_1 циклуса дужине 1, b_2 циклуса дужине 2, $\dots$, b_k циклуса дужине k . Тада сваку пермутацију π можемо кодирати изразом $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_k^{b_k}$. Овим приступом можемо да кодирамо целу групу $(G, \circ)$ узимајуће суму кодова свих пермутација. Нека је k дужина најдуже циклуса у декомпозицији свих пермутација групе $(G, \circ)$, тада је:

$$P_G(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_k^{b_k}$$

индекс циклуса групе $(G, \circ)$.

Посматрајмо пример новогодишњих украса и одредимо индекс циклуса групе која се састоји од свих пермутација приказаних на *Слици 5* и *Слици 8*. Кодирајмо прво све пермутације:

Пермутација	Код
$\pi_1 = (1)(2)(3)(4)(5)$	x_1^5
$\pi_2 = (12345)$	x_5^1
$\pi_3 = (13524)$	x_5^1
$\pi_4 = (14253)$	x_5^1
$\pi_5 = (15432)$	x_5^1
$\rho_1 = (1)(25)(34)$	$x_1 x_2^2$
$\rho_2 = (13)(2)(45)$	$x_1 x_2^2$
$\rho_3 = (15)(24)(3)$	$x_1 x_2^2$
$\rho_4 = (12)(35)(4)$	$x_1 x_2^2$
$\rho_5 = (14)(23)(5)$	$x_1 x_2^2$

Тада је индекс циклуса групе дат са:

$$\begin{aligned} P_G(x_1, x_2, \dots, x_5) &= \frac{1}{10} (x_1^5 + x_5 + x_5 + x_5 + x_5 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2^2) \\ &= \frac{1}{10} (x_1^5 + 4x_5 + 5x_1 x_2^2). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Ако је пермутација π кодирана изразом:

$$x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_k^{b_k}$$

тада је $\text{сус}(\pi) = b_1 + b_2 + \dots + b_k$

и важи једнакост:

$$x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_k^{b_k} = m^{\text{сус}(\pi)}$$

ако је $x_i = m$ за све $1 \leq i \leq k$.

На основу свега наведеног, можемо закључити да ако је $(G, \circ)$ група пермутација скупа D и ако је $C(D, R)$ скуп свих бојења из D помоћу боја из R ($|R| = m$), тада је број различитих бојења из $C(D, R)$ дат са $P_G(m, m, \dots, m)$.

Вратимо се на пример са новогодишљим украсима. Како украсе бојимо у две боје белу и сиву, стављамо да је $m = 2$, односно $x_1 = x_2 = \dots = x_5 = 2$. На основу једнакости (6.1) имамо да је број различитих бојења дат са:

$$P_G(2, 2, \dots, 2) = \frac{1}{10}(2^5 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot 2^2) = \frac{1}{10} \cdot 80 = 8,$$

што смо добили и бројањем.

7. Пољина теорема

7.1 Инвентар скупа

До сада смо увек говорили о бојењу објеката различитим бојама али понекад желимо употребити и различите врсте боја. На пример, можда желимо новогодишње украсе да осветлимо са две нијансе беле боје.

Нека је $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ скуп објеката које желимо да обојимо бојама из скупа $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$. Свакој боји ћемо доделити тежину која може бити број или симбол. Ако је r боја из R , тада ћемо јој доделити тежину $w(r)$. Тежину бојења објекта из D дефинишемо као производ тежине боја које се користе при бојењу.

Нека је $R = \{p, q, r\}$ и нека су дате тежине боја $w(p) = 1, w(q) = 2$ и $w(r) = 3$. Претпоставимо да објекат из D који желимо да обојимо има делове означене бројевима 1, 2, 3, 4 и 5 и желимо делове 1 и 3 да обојимо бојом q , делове означене са 2 и 4 бојом r а део означен бројем 5 да обојимо бојом p . Тежина бојења нашег објекта дата је са $w(q)w(r)w(q)w(r)w(p) = 175$. Уколико за тежине боја узмемо симболе тако да је $w(p) = i, w(q) = j$ и $w(r) = k$ тада би тежина нашег бојења била дата са j^2k^2i .

Дефиниција 11 Нека је K скуп свих бојења. Збир тежина свих бојења из K зовемо инвентар од K .

На пример, нека је скуп објеката дат са $D = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и нека је $R = \{r_1, r_2, r_3\}$ тако да је $w(r_1) = p, w(r_2) = q$ и $w(r_3) = s$. Нека су f_1, f_2 и f_3 бојења из $C(D, R)$ дефинисана на следећи начин:

$$\begin{array}{llll} f_1(a_1) = r_1 & f_1(a_2) = r_3 & f_1(a_3) = r_1 & f_1(a_4) = r_2 \\ f_2(a_1) = r_2 & f_2(a_2) = r_2 & f_2(a_3) = r_3 & f_2(a_4) = r_1 \\ f_3(a_1) = r_1 & f_3(a_2) = r_3 & f_3(a_3) = r_2 & f_3(a_4) = r_3 \end{array}$$

Обележимо са $W(f_i)$ тежину бојења f_i . Тада је $W(f_1) = w(r_1)w(r_3)w(r_1)w(r_2) = p^2qs$, $W(f_2) = w(r_2)w(r_2)w(r_3)w(r_1) = pq^2s$ и $W(f_3) = w(r_1)w(r_3)w(r_2)w(r_3) = pqs^2$. Ако је $K = \{f_1, f_2, f_3\}$ тада је инвентар од K дат са $p^2qs + pq^2s + pqs^2$. Из израза $W(f_2) = pq^2s$ можемо видети да бојење f_2 користи боју r_1 једном, боју r_2 два пута а боју r_3 једном. Инвентар скупа K нам даје увид у распрострањеност сваке боје.

Теорема 6 Два еквивалентна бојења имају исту тежину.

Доказ:

Нека је $(G, \circ)$ група пермутација скупа D и нека су f и g два еквивалентна бојења из $C(D, R)$. Тада постоји пермутација π из G таква да за свако a из D важи да је $g(a) = f(\pi(a))$. Ако је $D = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ тада је тежина бојења f дата са:

$$W(f) = w(f(a_1))w(f(a_2)) \cdots w(f(a_n))$$

а тежина бојења g са:

$$W(g) = w(g(a_1))w(g(a_2)) \cdots w(g(a_n)).$$

Скупови $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ и $\{\pi(a_1), \pi(a_2), \pi(a_3), \dots, \pi(a_n)\}$ имају исте елементе јер је π пермутација скупа D . Како је $W(g) = w(f(\pi(a_1)))w(f(\pi(a_2))) \cdots w(f(\pi(a_n)))$ закључујемо да важи $W(f) = W(g)$ ■

Претходна теорема нам даје да сва бојења у оквиру једне класе еквиваленције имају исту тежину па можемо причати и о тежини класе еквиваленције као о тежини било ког бојења из те класе. Тежину скупа класа еквиваленција (тежину узорка) можемо да дефинишемо као збир тежина класа.

У примеру са новогодишњим украсима видели смо да имамо осам различитих бојења (класа еквиваленције) помоћу две боје.

Нека је тежина беле боје означена са b , а тежина сиве боје означена са s . Тада, тежина класе 1 једнака је b^5 , тежина класе 2 је b^4s , тежина класе 3 и класе 4 је b^3s^2 , тежина класе 5 и класе 6 је b^2s^3 , тежина класе 7 је bs^4 и тежина класе 8 је s^5 . Добијамо да је тежина узорка дата са:

$$b^5 + b^4s + 2b^3s^2 + 2b^2s^3 + bs^4 + s^5. \quad (7.1)$$

На пример, из претходне суме можемо уочити да постоје две класе које користе три беле и две сиве боје.

Ако ставимо да је $b = s = 1$ и убацимо у суму (7.1) добијемо број 8 што заправо представља број различитих бојења украса помоћу две боје. Узимањем $b = 1$ и $s = 0$ и заменом у (7.1) добијамо број 1 што нам говори да постоји само једно бојење без сиве боје.

7.2 Пољина теорема

Претпоставимо да је скуп боја дат са $R = \{1, 2, \dots, m\}$.

Лема 2 Претпоставимо да је скуп D подељен на дисјунктне подскупове $D_1, D_2, \dots, D_p$. Нека је C подскуп од $C(D, R)$ који се састоји од свих бојења f тако да важи да ако су a и b из D_i $1 \leq i \leq p$, тада је $f(a) = f(b)$. Тада је инвентар скупа C дат са:

$$(w(1)^{|D_1|} + w(2)^{|D_1|} + \dots + w(m)^{|D_1|}) \cdot (w(1)^{|D_2|} + w(2)^{|D_2|} + \dots + w(m)^{|D_2|}) \cdot \dots \cdot (w(1)^{|D_p|} + w(2)^{|D_p|} + \dots + w(m)^{|D_p|}). \quad (7.2)$$

Доказ:

Множењем добијамо сабирке облика $w(i_1)^{|D_1|} w(i_2)^{|D_2|} \dots w(i_p)^{|D_p|}$ који представљају тежину бојења које боју i_1 додељује свим елементима скупа D_1 , боју i_2 додељује свим елементима скупа D_2 и тако даље. Тада, (7.2) представља збир тежина бојења које D_i боји у исту боју што је заправо инвентар скупа C . ■

Лема 3 Нека је $(G^*, \circ)$ група пермутација скупа $C(D, R)$ и нека је $G^* = \{\pi_1^*, \pi_2^*, \dots\}$. За свако π^* из G^* , са $\bar{w}(\pi^*)$ обележавамо тежину свих бојења f из $C(D, R)$ инваријантних у односу на π^* . Претпоставимо да су $C_1, C_2, \dots$ класе еквиваленције бојења и нека је $w(C_i)$ тежина свих бојења f из C_i . Тада је:

$$w(C_1) + w(C_2) + \dots = \frac{1}{|G^*|} (\bar{w}(\pi_1^*) + \bar{w}(\pi_2^*) + \dots). \quad (7.3)$$

Доказ:

Сваки сабирак $\bar{w}(\pi_i^*)$ у збиру на десној страни (7.3) представља тежину свих бојења f која су инваријантна у односу на π_i^* . Дакле, $w(f)$ се додаје уколико је f инваријантно у односу на π_i^* . Нека је $C(D, R) = \{f_1, f_2, \dots\}$. Уколико са $C(f)$ обележимо класу еквиваленције бојења f тада на основи *Теореме 4* о стабилизатору елемента десну страну једнакости (7.3) можемо написати на следећи начин:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G^*|} (w(f_1)|St(f_1)| + w(f_2)|St(f_2)| + \dots) &= \frac{1}{|G^*|} \left(\frac{w(f_1)|G^*|}{|C(f_1)|} + \frac{w(f_2)|G^*|}{|C(f_2)|} + \dots \right) \\ &= \frac{w(f_1)}{|C(f_1)|} + \frac{w(f_2)}{|C(f_2)|} + \dots. \end{aligned}$$

Ако саберемо $\frac{w(f_i)}{|C(f_i)|}$ за све f_i из класе еквиваленције C_j добијамо $w(C_j)$ јер је $w(f_i) = w(C_j)$ и $|C(f_i)| = |C_j|$. ■

Теорема 7 (Пољина теорема) Нека је $(G, \circ)$ група пермутација скупа D и нека је $C(D, R)$ скуп свих бојења скупа D коришћењем боје из R . Ако је w функција која додељује тежину бојењу тада је инвентар од $C(D, R)$ дат изразом:

$$P_G \left(\sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} w(r)^2, \dots, \sum_{r \in R} w(r)^k \right),$$

где је $P_G(x_1, x_2, \dots, x_k)$ индекс циклуса групе $(G, \circ)$.

Доказ:

Нека је $\bar{w}(\pi^*)$ тежина свих бојења f из $C(D, R)$ инваријантних у односу на π^* . Претпоставимо да је пермутација π написана као производ циклуса $D_1, D_2, \dots, D_p$. Бојење f је инваријантно у односу на π^* ако је $f(a) = f(b)$ за све a и b из D_i .

На основу Леме 2 имамо да израз (7.2) представља суму тежина бојења инваријантних у односу на π^* што је $\bar{w}(\pi^*)$.

Свака заграда у (7.2) је облика:

$$w(1)^j + w(2)^j + \dots + w(m)^j = \sum_{r \in R} w(r)^j$$

где је $j = |D_i|$.

Израз $\sum_{r \in R} w(r)^j$ се јавља у (7.2) онолико пута колико је пута $j = |D_i|$, односно онолико пута колико π има циклуса дужине j . Број циклуса дужине j смо означавали са b_j .

На основу тога, израз (7.2) можемо написати као:

$$\left(\sum_{r \in R} w(r)^1 \right)^{b_1} \cdot \left(\sum_{r \in R} w(r)^2 \right)^{b_2} \cdot \dots.$$

Тада десна страна (7.3) постаје

$$P_G \left(\sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} w(r)^2, \dots, \sum_{r \in R} w(r)^k \right)$$

чиме је доказана Пољина теорема. ■

Илуструјмо претходну теорему примером новогодишњих украса. Скуп боја се састојао од два елемента, $R = \{\text{бела, сива}\}$. Доделимо свакој боји тежину која је означена симболима, $w(\text{бела}) = b$ и $w(\text{сива}) = s$.

Тада је:

$$\sum_{r \in R} w(r) = b + s$$

$$\sum_{r \in R} w(r)^2 = b^2 + s^2$$

$$\sum_{r \in R} w(r)^3 = b^3 + s^3$$

$$\sum_{r \in R} w(r)^4 = b^4 + s^4$$

$$\sum_{r \in R} w(r)^5 = b^5 + s^5$$

Узмимо сада да је $x_1 = \sum_{r \in R} w(r)$, $x_2 = \sum_{r \in R} w(r)^2$, $\dots$, $x_5 = \sum_{r \in R} w(r)^5$ и заменимо у (6.1), чиме добијамо:

$$P_G \left(\sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} w(r)^2, \dots, \sum_{r \in R} w(r)^5 \right) = \frac{1}{10} ((b + s)^5 + 4(b^5 + s^5) + 5(b + s)(b^2 + s^2)^2).$$

Након сређивања добијамо да је

$$P_G \left(\sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} w(r)^2, \dots, \sum_{r \in R} w(r)^5 \right) = b^5 + b^4s + 2b^3s^2 + 2b^2s^3 + bs^4 + s^5$$

што представља израз (7.1).

Претпоставимо сада да украсе желимо да обојимо у три боје. Пољинном теоремом можемо на једноставан начин да израчунамо колико имамо различитих бојења. Нека је сада $R = \{\text{бела, сива, црвена}\}$. Доделимо свакој боји тежину која је означена симболима, $w(\text{бела}) = b$, $w(\text{сива}) = s$ и $w(\text{црвена}) = c$.

Тада је:

$$\sum_{r \in R} w(r) = b + s + c$$

$$\sum_{r \in R} w(r)^2 = b^2 + s^2 + c^2$$

$$\sum_{r \in R} w(r)^3 = b^3 + s^3 + c^3$$

$$\sum_{r \in R} w(r)^4 = b^4 + s^4 + c^4$$

$$\sum_{r \in R} w(r)^5 = b^5 + s^5 + c^5$$

Добијамо да је инвентар од $\mathcal{C}(D, R)$ дат изразом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{10} ((b + s + c)^5 + 4(b^5 + s^5 + c^5) + 5(b + s + c)(b^2 + s^2 + c^2)^2) \\ &= b^5 + b^4c + b^4s + 2b^3c^2 + 2b^3cs + 2b^3s^2 + 2b^2c^3 + 4b^2c^2s + 4b^2cs^2 + 2b^2s^3 + bc^4 \\ & \quad + 2bc^3s + 4bc^2s^2 + 2bcs^3 + bs^4 + c^5 + c^4s + 2c^3s^2 + 2c^2s^3 + cs^4 + s^5 \end{aligned}$$

Заменом $b = c = s = 1$ у претходни израз, добијамо да имамо 39 различитих бојења новогодишњих украса у три боје.

Вратимо се на пример бојења графа $K_{1,3}$ у три боје и одредимо најпре индекс циклуса групе $(G, \circ)$. На основу *Слике 16* закључујемо да је $k = 3$ и да је индекс циклуса групе дат са:

$$P_G(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}(x_1^4 + 2x_1x_3 + 3x_1^2x_2).$$

Доделимо свакој боји скупа $R = \{\text{зелена, црвена, плава}\}$ тежину, $w(\text{зелена}) = z$, $w(\text{црвена}) = c$ и $w(\text{плава}) = p$.

Добијамо:

$$\sum_{r \in R} w(r) = z + c + p \quad \sum_{r \in R} w(r)^2 = z^2 + c^2 + p^2 \quad \sum_{r \in R} w(r)^3 = z^3 + c^3 + p^3$$

Заменом $x_1 = \sum_{r \in R} w(r)$, $x_2 = \sum_{r \in R} w(r)^2$ и $x_3 = \sum_{r \in R} w(r)^3$ у израз за индекс циклуса групе добијамо да је инвентар од $C(D, R)$ дат изразом:

$$c^4 + 2c^3p + 2c^3z + 2c^2p^2 + 3c^2pz + 2c^2z^2 + 2cp^3 + 3cp^2z + 3cpz^2 + 2cz^3 + p^4 + 2p^3z + 2p^2z^2 + 2pz^3 + z^4.$$

Уколико узмемо да је $z = c = p = 1$ и заменимо у претходни израз, добијамо 30 различитих бојења графа $K_{1,3}$ у три боје, што смо могли и очекивати.

Поставља се питање: да ли претходни израз можемо искористити на другачији начин? Одговор је да.

Претпоставимо сада да желимо да одредимо колико има бојења која користе само зелену и црвену боју. Ово једноставно можемо да израчунамо тако што узмемо следеће вредности за тежину боја $z = c = 1$ и $p = 0$. Добијамо да имамо 8 различитих бојења без плаве боје.

Извршимо сада смену $z = c = 1$.

Добијамо израз:

$$8 + 10p + 7p^2 + 4p^3 + p^4.$$

Можемо закључити да постоји 10 бојења код којих је само једно теме обојено плавом бојом или да постоји само једно бојење код ког су сва темена графа обојена у плаво.

Применимо сада Пољину теорему на функцију пребацивања две променљиве. Ради лакшег рачуна, претпоставимо да пермутације π_1^* и π_2^* дејствују на скуп $\{1, 2, 3, 4\}$, па добијамо да је $\pi_1^* = (1)(2)(3)(4)$ и $\pi_2^* = (1)(23)(4)$. Тада је:

$$P_G(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^4 + x_1^2x_2).$$

Узимањем $w(0) = a$ и $w(1) = b$ добијамо да је инвентар од $C(D, R)$ дат изразом:

$$a^4 + 3a^3b + 4a^2b^2 + 3ab^3 + b^4.$$

Сабирак $4a^2b^2$ значи да постоје 4 различите функције пребацивања које додељују две нуле и две јединице. На Слици 14 приказано је шест таквих функција које су означене са $T_4, T_6, T_7, T_{10}, T_{11}$ и T_{13} , али су функције T_4 и T_6 , односно функције T_{11} и T_{13} еквивалентне што добијамо примењујући пермутацију $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7.3 Примена Пољине теореме

Задатак 1: Одредити број изомера дихлоробензена $C_6H_4Cl_2$.

Молекули дихлоробензена настају заменом два атома водоника у прстену бензена C_6H_6 . Број начина за везивање два атома хлора и четири атома водоника у прстену сачињеном од угљеника, идентичан је бојењу темена шестоугла у две боје. Означимо свако теме шестоугла природним бројем од 1 до 6 редом. Све пермутације темена правилног шестоугла које га пресликавају на самог себе дате су са:

$$\begin{array}{ll} \pi_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6) & \pi_2 = (123456) \\ \pi_3 = (135)(246) & \pi_4 = (14)(25)(36) \\ \pi_5 = (153)(264) & \pi_6 = (165432) \\ \pi_7 = (1)(26)(35)(4) & \pi_8 = (13)(2)(46)(5) \\ \pi_9 = (15)(24)(3)(6) & \pi_{10} = (12)(36)(45) \\ \pi_{11} = (14)(23)(56) & \pi_{12} = (16)(25)(34) \end{array}$$

Нека је $G = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9, \pi_{10}, \pi_{11}, \pi_{12}\}$, тада је $(G, \circ)$ група. Индекс циклуса групе $(G, \circ)$ дат је са:

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{12} (x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 4x_2^3 + 2x_3^2 + 2x_6).$$

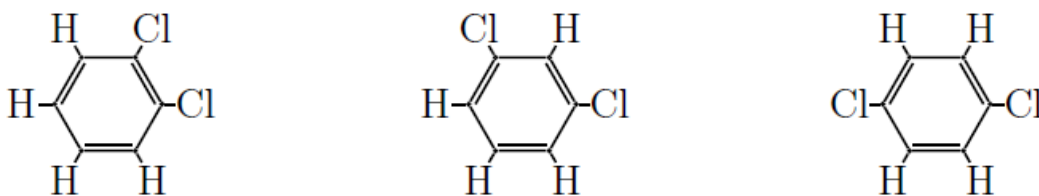
Доделимо атомима тежине $w(\text{хлор}) = Cl$ и $w(\text{водоник}) = H$.

Обележимо са $x_1 = Cl + H$, $x_2 = Cl^2 + H^2$, $x_3 = Cl^3 + H^3$ и $x_6 = Cl^6 + H^6$.

Применом Пољине теореме добијамо израз:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9} ((Cl + H)^6 + 3(Cl + H)^2(Cl^2 + H^2)^2 + 4(Cl^2 + H^2)^3 + 2(Cl^3 + H^3)^2 + 2(Cl^6 + H^6)) \\ & = Cl^6 + Cl^5H + 3Cl^4H^2 + 3Cl^3H^3 + 3Cl^2H^4 + ClH^5 + H^6 \end{aligned}$$

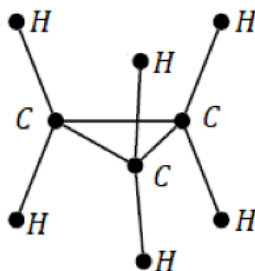
Коефицијент уз Cl^2H^4 нам говори да постоје три изомера дихлоробензена $C_6H_4Cl_2$. Уверимо се у добијени резултат:



Слика 17: Хемијске структуре бензенског прстена и три изомера дихлоробензена.

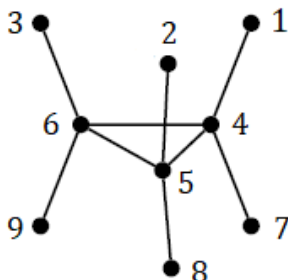
Задатак 2: Молекули циклопропана C_3H_6 сачињени су од три атома угљеника повезаних двоструким везама и шест атома водоника који се вежу за сваки од атома угљеника. На *Слици 18* приказана је тродимензионална хемијска структура. Сваки атом водоника може бити замењен моновалентним радикалима које можемо третирати као један атом. Молекули настали на овај начин називају се деривати циклопропана.

Колико имамо различитих деривата циклопропана облика $C_3X_kY_nZ_m$ тако да је $k + n + m = 6$?



Слика 18: Тродимензионална хемијска структура циклопропана.

Хемијску структуру циклопропана можемо представити помоћу графа где су темена обележена природним бројевима.



Слика 19: Хемијска структура циклопропана представљена помоћу графа.

Напоменимо, на месту темена 4, 5 и 6 увек се налази атом угљеника и она нам нису од значаја при разматрању броја различитих деривата.

Број различитих деривата можемо посматрати и као следећи задатак: на колико начина можемо обојити темена правилне тростране призме користећи три боје?

Посматрајмо сада сва пресликавања тростране призме на саму себе чија су темена обележена са 1, 2, 3, 7, 8, 9. Како су нама од значаја само темена призме, посматрајмо следеће пермутације:

Ротације:

(1)(2)(3)(7)(8)(9)	(123)(789)	(132)(798)
(18)(27)(39)	(19)(28)(37)	(17)(29)(38)

Рефлексије:

(17)(28)(39)	(183729)	(192738)
(1)(23)(7)(89)	(12)(3)(78)(9)	(13)(2)(79)(8)

Нека је G скуп наведених пермутација, тада је индекс циклуса групе $(G, \circ)$ дат са:

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{12}(x_1^6 + 2x_3^2 + 4x_2^3 + 2x_6 + 3x_1^2x_2^2).$$

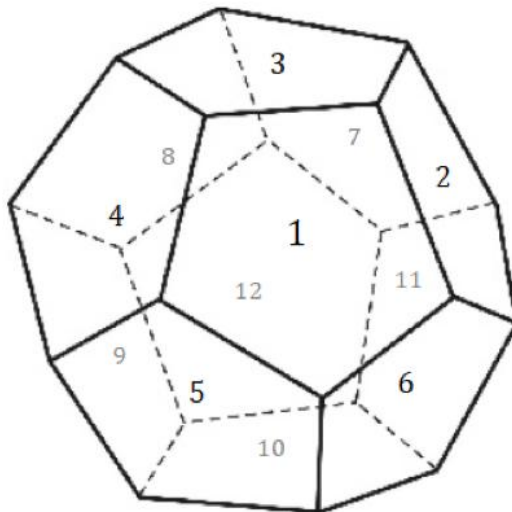
Доделимо атомима тежине $w(X) = x$, $w(Y) = y$ и $w(Z) = z$.

Обележимо са $x_1 = x + y + z$, $x_2 = x^2 + y^2 + z^2$, $x_3 = x^3 + y^3 + z^3$ и $x_6 = x^6 + y^6 + z^6$. Применом Пољине теореме добијамо израз:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12}((x + y + z)^6 + 2(x^3 + y^3 + z^3)^2 + 4(x^2 + y^2 + z^2)^3 + 2(x^6 + y^6 + z^6) \\ & \quad + 3(x + y + z)^2(x^2 + y^2 + z^2)^2) \\ & = x^6 + x^5y + x^5z + 3x^4y^2 + 3x^4yz + 3x^4z^2 + 3x^3y^3 + 6x^3y^2z + 6x^3yz^2 + 3x^3z^3 + \\ & \quad 3x^2y^4 + 6x^2y^3z + 11x^2y^2z^2 + 6x^2yz^3 + 3x^2z^4 + xy^5 + 3xy^4z + 6xy^3z^2 + 6xy^2z^3 + \\ & \quad 3xyz^4 + xz^5 + y^6 + y^5z + 3y^4z^2 + 3y^3z^3 + 3y^2z^4 + yz^5 + z^6 \end{aligned}$$

Читањем коефицијената уз произвољан сабирак можемо да одредимо колико има одређене врсте деривата. На пример, коефицијент уз x^2yz^3 нам говори да имамо шест различитих деривата циклопропана облика $C_3X_2YZ_3$.

Задатак 3: На колико начина можемо обојити пљосни додекаедра користећи плаву, црвену и зелену боју тако да четири пљосни буду обојене у плаво, пет у црвено а три у зелено? Два бојења сматрамо истим ако се једно може добити од другог ротацијом додекаедра.



Слика 20: Додекаедар.

Додекаедар се састоји од 12 пљосни које имају облик правилног петоугла. Обележимо пљосни бројевима од 1 до 12 као на *Слици 20*. У односу на осу, ротације додекаедра можемо поделити у три категорије.

Прва категорија представља ротације око оса које су одређене центрима наспрамних пљосни. Имамо 24 оваквих ротација а једна од њих је дата пермутацијом $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 8 & 9 & 10 & 11 & 7 & 12 \end{pmatrix}$.

Сваку пермутацију ове групе можемо написати као производ два циклуса дужине један и два циклуса дужине пет.

Друга категорија се састоји од ротација чија оса садржи наспрамне врхове додекаедра. Оваквих ротација имамо 20 а једна од њих је представљена пермутацијом $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 11 & 7 & 4 & 5 & 10 & 12 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Произвољну пермутацију ове категорије можемо представити као производ четири циклуса дужине три.

Трећу категорију чине ротације чија оса садржи средишта наспрамних ивица и имамо 15 таквих ротација. Једна од њих дата је пермутацијом $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 1 & 6 & 11 & 7 & 3 & 5 & 10 & 12 & 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

Пермутације ове групе можемо записати као производ шест циклуса дужине два.

Нека је G скуп свих 60 поменутих пермутација, тада је индекс циклуса групе $(G, \circ)$ дат са:

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{60} (24x_1^2x_5^2 + 20x_3^4 + 15x_2^6 + x_1^{12}).$$

Доделимо свакој боји тежину $w(\text{плава}) = p$, $w(\text{црвена}) = c$ и $w(\text{зелена}) = z$.
Нека је $x_1 = p + c + z$, $x_2 = p^2 + c^2 + z^2$, $x_3 = p^3 + c^3 + z^3$ и $x_5 = p^5 + c^5 + z^5$.
Применом Пољине теореме добијамо израз:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{60} (24(p+c+z)^2(p^5+c^5+z^5)^2 + 20(p^3+c^3+z^3)^4 + 15(p^2+c^2+z^2)^6 \\ & \quad + (p+c+z)^{12}) \\ &= c^{12} + pc^{11} + zc^{11} + 3p^2c^{10} + 3pzc^{10} + 5p^3c^9 + 5z^3c^9 + 11pz^2c^9 + 11p^2zc^9 + \\ & 12p^4c^8 + 12z^4c^8 + 33pz^3c^8 + 57p^2z^2c^8 + 33p^3zc^8 + 14p^5c^7 + 14z^5c^7 + 66pz^4c^7 + \\ & 132p^2z^3c^7 + 132p^3z^2c^7 + 66p^4zc^7 + 24p^6c^6 + 24z^6c^6 + 94pz^5c^6 + 246p^2z^4c^6 + \\ & 312p^3z^3c^6 + 246p^4z^2c^6 + 94p^5zc^6 + 14p^7c^5 + 14z^7c^5 + 94pz^6c^5 + 278p^2z^5c^5 + \\ & 462p^3z^4c^5 + 462p^4z^3c^5 + 278p^5z^2c^5 + 94p^6zc^5 + 12p^8c^4 + 12z^8c^4 + 66pz^7c^4 + \\ & 246p^2z^6c^4 + 462p^3z^5c^4 + 600p^4z^4c^4 + 462p^5z^3c^4 + 246p^6z^2c^4 + 66p^7zc^4 + 5p^9c^3 + \\ & 5z^9c^3 + 33pz^8c^3 + 132p^2z^7c^3 + 312p^3z^6c^3 + 462p^4z^5c^3 + 462p^5z^4c^3 + 312p^6z^3c^3 + \\ & 132p^7z^2c^3 + 33p^8zc^3 + 3p^{10}c^2 + 3z^{10}c^2 + 11pz^9c^2 + 57p^2z^8c^2 + 132p^3z^7c^2 + \\ & 246p^4z^6c^2 + 278p^5z^5c^2 + 246p^6z^4c^2 + 132p^7z^3c^2 + 57p^8z^2c^2 + 11p^9zc^2 + p^{11}c + \\ & z^{11}c + 3pz^{10}c + 11p^2z^9c + 33p^3z^8c + 66p^4z^7c + 94p^5z^6c + 94p^6z^5c + 66p^7z^4c + \\ & 33p^8z^3c + 11p^9z^2c + 3p^{10}zc + p^{12} + z^{12} + pz^{11} + 3p^2z^{10} + p^3z^9 + 12p^4z^8 + 14p^5z^7 + \\ & 24p^6z^6 + 14p^7z^5 + 12p^8z^4 + 5p^9z^3 + 3p^{10}z^2 + p^{11}z \end{aligned}$$

Читањем коефицијента уз $p^4z^3c^5$ добијамо да имамо 462 тражена бојења.

Задатак 4: Колико имамо различитих комбинација за једну страну Рубикове коцке (3x3) тако да користимо само црвену, плаву и белу боју?

Посматрајмо једну страну Рубикове коцке и обележимо поља бројевима од 1 до 9:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Слика 21: Једна страна Рубикове коцке.

Посматрајмо сада све ротације и осне симетрије стране Рубикове коцке представљене преко пермутација скупа $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и запишимо их преко дисјунктних циклуса:

$$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)$$

$$(1793)(2486)(5)$$

$$(19)(28)(37)(46)(5)$$

$$(1397)(2684)(5)$$

$$(13)(2)(46)(5)(79)(8)$$

$$(17)(28)(39)(4)(5)(6)$$

$$(1)(24)(37)(5)(68)(9)$$

$$(19)(26)(3)(48)(5)(7)$$

Нека је G скуп свих 8 поменутих пермутација, тада је индекс циклуса групе $(G, \circ)$ дат са:

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{8} (x_1^9 + 2x_4^2x_1 + x_2^4x_1 + 4x_2^3x_1^3).$$

Доделимо свакој боји тежину $w(\text{бела}) = b, w(\text{зелена}) = z, w(\text{црвена}) = c, w(\text{роза}) = r, w(\text{плава}) = p$ и $w(\text{наранџаста}) = n$ и обележимо са $x_1 = b + z + c + r + p + n, x_2 = b^2 + z^2 + c^2 + r^2 + p^2 + n^2$ и $x_4 = b^4 + z^4 + c^4 + r^4 + p^4 + n^4$.

На основу Пољине теореме добијамо израз:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} & ((b + z + c + r + p + n)^9 + 2(b^4 + z^4 + c^4 + r^4 + p^4 + n^4)^2(b + z + c + r + p + n) \\ & + (b^2 + z^2 + c^2 + r^2 + p^2 + n^2)^4(b + z + c + r + p + n) \\ & + 4(b^2 + z^2 + c^2 + r^2 + p^2 + n^2)^3(b + z + c + r + p + n)^3). \end{aligned}$$

Увођењем смене $z = r = n = 0$ и $b = c = p = 1$ добијамо израз:

$$\frac{1}{8} (3^9 + 2 \cdot 3^2 \cdot 3 + 3^4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^3 \cdot 3^3).$$

Можемо закључити да имамо 2862 различите комбинације.

8. Закључак

Као што смо могли да се уверимо кроз рад, Пољина теорема енумерације је много флексибилнија од Бернсајдове леме. Коришћењем једног израза добијеног из теореме, можемо дати одговор на више различитих питања. Број свих различитих бојења можемо добити из Бернсајдове леме али нам Пољина теорема даје много више од тога у шта смо могли да се уверимо у задацима са краја рада.

9. Литература:

- [1] Fred S. Roberts, Barry Tesman, *Applied Combinatorics second edition*, Taylor & Francis Group, London, 2009.
- [2] Matias von Bell, *Pólya's enumeration theorem and its applications*, Master teza na Helsinki Univerzitetu, 2015.
- [3] Mirjana Vuković, *Teorija grupa i reprezentacija s primjenama u fizici*, Prirodno-matematički fakultet u Sarajevu, 2003.
- [4] Зоран Петровић, *Алгебра 1*, Предавања за школску 2014/15 годину