Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

УПОРЕДНИ ПРЕГЛЕД ОСНОВА МОРСОВЕ И ЉУСТЕРНИК-ШНИРЕЉМАНОВЕ ТЕОРИЈЕ

Студент:
Стефан Матијевић

Ментор:
др Дарко Милинковић

У Београду, 2020-2021.

Садржај

Предговор

Почетком претходног века појавила су се два приступа која су остварила везу између анализе и топологије на многострукостима. Марстон Морс је креирао Морсову теорију која реконструише многострукост помоћу функције која има само недегенерисане критичне тачке на основу индекса критичних тачака.

У Русији Љустерник и Шнирељман су такође изучавали критичне тачке функција, али како су посматрали и дегенерисане критичне тачке концентрисали су се на повезивање критичних тачака функције са новим типом хомотопске инваријанте која се данас зове Љустерник Шнирељманова категорија (у ознаци $cat(M)$).

У наредним годинама појавиле су се многе генерализације ових теорија и нашле широку примену у областима топологије, диференцијалне геометрије, симплектичке геометрије, анализе и варијационог рачуна.

У првом поглављу изложићемо основне резултате класичне Морсове теорије. Премда је Морсова теорија велика тема сама по себи нама ће највише служити за мотивацију и поређење са Љустерник Шнирељмановом теоријом. Због тога је ово поглавље више прегледног типа.

У другом поглављу дефинисаћемо Љустерник Шнирељманову категорију. Како је $cat(M)$ скоро немогуће експлицитно израчунати увешћемо разне реформулације категорије и апроксимационе инваријанте чиме ћемо приближити категорију теорији хомотопије. Израчунаћемо категорију стандардних простора, нискодимензионих многострукости, просто повезаних и симплектички асферичних многострукости.

Треће поглавље намењено је везама топологије и броја критичних тачака минималне функције на затвореној многострукости (у ознаци $crit(M)$). Овај одељак ће углавном пратити резултате радова [19], [20] и [21]. Као наставак инспирације коју је донела Гаус Бонеова теорема овде се јавља једно природно и веома важно питање. Да ли су $crit(M)$ и $\widetilde{crit}(M)$ ($\widetilde{crit}(M)$ је број критичних тачака минималне Морсове функције) хомотопске инваријанте? Као што ћемо видети одговор на ово питање није нимало једноставан.

Рад ћемо завршити са четвртом главом у којој ћемо изложити примене Љустерник-Шнирељманове теорије у Римановој и симплектичкој геометрији.

На крају бих желео да се захвалим свом ментору, професору Дарку Милинковићу, који ми је помогао при одабиру и изради ове тезе. Његови савети су умногоме изградили и унапредили мене као математичара. Такође, желео бих да се захвалим и члановима комисије професорима Игору Уљаревићу и Јелени Катић на корисним сугестијама и посвећености при читању текста. Захваљујем се Филипу Броћићу, Максиму Стокићу и Душану Дробњаку на бројним корисним дискусијама у току израде мастер тезе.

1 Кратак преглед Морсове теорије

Везе анализе и топологије успостављене Љустерник Шнирељмановом и Морсовом теоријом произилазе из тополошке комплексности простора у критичним тачакама функције. Како функције које немају изоловане критичне тачке не дају корисну аналитичку информацију јер имају бесконачно много критичних тачака у произвољној околини неке критичне тачке, наша пажња ће бити усмерена ка функцијама са изолованим критичним тачкама. Једна подкласа тих функција су и Морсове функције.

1.1 Морсове функције

Дефиниција 1.1.1 Функција $f : M \to \mathbb{R}$ је Морсова ако диференцијал $df : M \to T^*M$ трансверзално сече нулто сечење $0_M \subset T^*M$.

Докажимо сада да Морсове функције заиста имају изоловане критичне тачке.

Став 1.1.3. Ако је f Морсова функција скуп $crit(f)$ је дискретан потпростор од M па су критичне тачке функције f изоловане.

Доказ: Нека је $n = dim(M)$. Пресликавање $df : M \to T^*M$ трансверзално сече 0_M па је $crit(f) = df^{-1}(0_M)$ подмногострукост од M таква да је $codim(crit(f)) = codim(0_M)$. Како је $dim(0_M) = n$, а $dim(T^*M) = 2n$ закључујемо да је $crit(f)$ многострукост димензије 0, одакле следи тврђење. $\square$

Присуство нултог сечења омогућава нам да на њему канонски разложимо тангентни простор котангентог раслојења на вертикалну и хоризонталну компоненту. Прецизније

$$i_{0_M} : M \to T^*M, \qquad i_{0_M}(p) = 0_p$$

даје канонски избор хоризонталног простора $di_{0_M}(T_pM)$ у $T_{(p,0)}T^*M$. Како пројекција

$$\pi : T^*M \to M, \ \ \pi(\alpha_p) = p$$

дефинише вертикални простор $ker(d\pi_{(0,p)})$ можемо закључити да важи:

$$T_{(p,0)}T^*M = Di_{0_M}(T_pM) \oplus ker(D\pi_{(0,p)}) \cong T_pM \oplus T_p^*M.$$

Означимо са:

$$\pi_1 : T_{(p,0)}T^*M \to T_pM, \qquad \pi_2 : T_{(p,0)}T^*M \to T_p^*M$$

одговарајуће пројекције при разлагању.

Нека је $p \in crit(f)$. Разлагање тангентног простора $T_{(p,0)}T^*M$ нам омогућава да дефинишемо вертикалну компоненту извода диференцијала од f у критичној тачки p:

$$k_p(f) : T_pM \to T_p^*M, \ \ \ k_p(f) = \pi_2 \circ D(df)(p).$$

Због овога можемо другачије интерпретирати трансверзалност пресека $df(M)$ и нултог сечења.

Став 1.1.4. Нека је $p \in crit(f)$. Подмногострукост $df(M)$ трансверзално сече 0_M у $(p,0)$ акко је $k_p(f)$ бијекција.

Доказ: Нека је $n = dim(M)$. Јасно је да је df улагање па је $df(M)$ n-димензиона подмногострукост од T^*M. Одатле следи да $df(M)$ трансверзално сече нулто сечење у $(p,0)$ акко

$$T_{(p,0)}df(M) \oplus T_{(0,p)}0_M = T_{(p,0)}T^*M.$$

Како је $\pi_2|_{T_{(0,p)}0_M} = 0$ закључујемо да то важи акко је пресликавање $\pi_2 : T_{(p,0)}df(M) \to T_p^*M$ сурјективно. Наравно како су $T_{(p,0)}df(M)$ и T_p^*M простори исте димензије то је еквивалентно услову да је пресликавање π_2 бијективно. Из релације $T_{(p,0)}df(M) = D(df)(T_pM)$ следи твђење. $\square$

Став 1.1.5. У локалним координатама линеарно пресликавање $k_p(f)$ је други извод функције f.

Доказ: Нека су $(x_1, \ldots, x_n)$ локалне координате у околини U тачке p. Тада је

$$df(q) = (x_1(q), \ldots, x_n(q), \frac{\partial f}{\partial x_1}(q), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(q)),$$

па је

$$\frac{\partial (df)}{\partial x_i}(p) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(p), \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n}(p)),$$

одакле можемо закључити да важи:

$$D(df)(p) = \begin{bmatrix} I & \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right]_{1 \le i,j \le n} \end{bmatrix}$$

па одатле једноставно следи да је матрица $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right]_{1 \le i,j \le n}$ матрица линеарног пресликавања $\pi_2 \circ D(df)(p)$. $\square$

Дакле, у критичној тачки функције имамо канонски дефинисан други извод. Како други извод најчешће посматрамо као билинеарно пресликавање имамо следећу дефиницију.

Дефиниција 1.1.6. Пресликавање

$$H_p : T_pM \times T_pM \to M, \quad H_p(f)(X,Y) = k_p(X)(Y)$$

називамо Хесијаном функције f у критичној тачки p.

Из записа у локалним координатама јасно је да је пресликавање H_p симетрично.

Напомена 1.1.7. Хесијан функције у критичној тачки се може без координата дефинисати и у терминима векторских поља. Нека је $p \in crit(f)$, и нека су $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ два произвољна продужења вектора $X_p, Y_p \in T_pM$ респективно. Тада није тешко видети из локалне репрезентације да важи $H_p(f)(X_p, Y_p) = X(Yf)(p)$.

Напомена 1.1.8. Ако p није критична тачка онда немамо канонски дефинисан хоризонтални простор у $T_{df(p)}T^*M$, па нам је потребан избор конексије (погледати [1]). На тај начин добијамо глобално дефинисану пројекцију на вертикални простор те можемо дефинисати вертикалну компоненту извода у свакој тачки. Другим речима конексија индукује коваријантно диференцирање ∇ па је Хесијан глобално дефинисан $H(f) = \nabla^2 f = \nabla(\nabla f) = \nabla(df)$. Ипак уколико конексија има торзију може се догодити да Хесијан није симетричан, па се Хесијан најчешће дефинише у амбијенту Римановых многострукости. Из релације

$$H_p(f)(X_p, Y_p) = (\nabla_{X_p} df)(Y_p) = \nabla_{X_p}(Y(f)) - df_p(\nabla_{X_p} Y) = X_p(Y(f)) - df_p(\nabla_{X_p} Y)$$

јасно је да је ова дефиниција Хесијана у критичној тачки независна од избора конексије и еквивалентна са претходном. Ово се такође може схватити као последица канонског разлагања (погледати [6]).

Дефиниција 1.1.9. Критична тачка p функције f је недегенерисана ако је Хесијан H_p недегенерисан.

Како је $k_p(f)$ бијективно акко је Хесијан $H_p(f)$ недегенерисан, можемо закључити да је наредна дефиниција Морсове функције еквивалентна претходној.

Дефиниција 1.1.10. Функција f је Морсова ако су све критичне тачке те функције недегенерисане.

Дефиниција 1.1.11. Индекс критичне тачке p функције f је максимална димезија подтростора од тангентног простора T_pM на коме је Хесијан негативно дефинитан. Означавамо га са $ind_f(p)$.

Сада можемо боље разумети како локално изгледају Морсове функције.

1. $p \notin crit(f)$.

   Како p није критична тачка могуће је пронаћи карту (U, φ) у којој функција има локалну репрезентацију $f \circ \varphi^{-1}(t_1, \ldots, t_n) = f(p) + t_n$. За детаље погледати доказ теореме о рангу у [4].

2. $p \in crit(f), \ \ ind_f(p) = k$.

   Јасно је да у координатама индекс представља број негативних сопствених вредности матрице Хесијана. Стога није тешко наћи карту (U, φ) такву да је $\varphi(p) = 0$ и да је матрица Хесијана у p Морсове функције f

$$diag\{\overbrace{-1, \ldots, -1}^{k}, 1 \ldots, 1\}.$$

За такав избор карте важи

$$f \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n) = f(p) - t_1^2 - \dots - t_k^2 + t_{k+1}^2 + \dots + t_n^2 + o(||(t_1, \dots, t_n)||^2)$$

кад $(t_1, \dots, t_n)$ тежи 0. Због недегенерисаности p важи и много више.

Теорема 1.1.12 (Морсова лема) Нека је $p \in crit(f)$ недегенерисана критична тачка индекса k. Тада постоји карта (U, φ) таква да је $\varphi(p) = 0$ и важи

$$f \circ \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_n) = f(p) - t_1^2 - \dots - t_k^2 + t_{k+1}^2 + \dots + t_n^2.$$

Доказ: Како је тврђење локалног карактера можемо претпоставити да је $M = \mathbb{R}^n$ и да је $p = f(p) = 0$. Нека је $g(x) = \frac{1}{2} d^2 f(0)(x,x)$ и нека су $\omega_0 = dg$ и $\omega_1 = df$. Довољно је да нађемо локални дифеоморфизам ϕ такав да је $\phi^* \omega_1 = \omega_0$ и да је $\phi(0) = 0$. Тада је $f \circ \phi^{-1} = g$, те можемо применити одговарајућу линеарну трансформацију на функцију $f \circ \phi^{-1}$ и добити жељени резултат.

Дефинишимо пут $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$, $t \in [0,1]$. Желимо наћи глатку изотопију ϕ_t такву да важи

$$\phi_t^* \omega_t = \omega_0, \qquad \phi_t(0) = 0.$$

Применом Картанове формуле добијамо да је то еквивалентно услову:

$$0 = \frac{d}{dt} \phi_t^* \omega_t = \phi_t^* (d(i_{X_t} \omega_t) + i_{X_t} d\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}).$$

Како је су ω_0 и ω_1 тачне (а самим тим и затворене) форме, следи да је ω_t затворена форма. Поред тога јасно је да је $\frac{d\omega_t}{dt} = \omega_1 - \omega_0 = d(f-g)$. Из ова два аргумента добијамо

$$0 = \phi_t^* (d(i_{X_t} \omega_t) + d(f-g)) = \phi_t^* (d(i_{X_t} \omega_t + f - g)).$$

Из овога можемо закључити да је довољно наћи глатку фамилију векторских поља X_t такву да важи

$$i_{X_t} \omega_t = g - f, \qquad X_t(0) = 0.$$

Решење ове једначине увек постоји на довољно малој околини 0 (погледати [5]). □

1.2 Томова декомпозиција

Сада ћемо мало боље разумети глобалну структуру функција са изолованим критичним тачкама (а самим тим и Морсових функција).

Нека је (M, g) Риманова многострукост. Тада је за произвољну функцију $f \in C^\infty(M)$ дефинисан градијент релацијом $df(q) = g(\nabla f(q), \cdot)$. Посматрајмо негативну градијентну једначину

$$\frac{d\varphi_t}{dt} = -\nabla f \circ \varphi_t, \qquad \varphi_0 = id.$$

Овом једначином дефинисане су (барем локално) трајекторије за сваку тачку $x \in M$ релацијом

$$\gamma_x(t) = \varphi_t(x).$$

У случају да је M затворена многострукост ток је дефинисан глобално. Прецизније негативна градијентна једначина индукује једнопараметарску групу дифеоморфизама. Решење $\varphi : M \times \mathbb{R} \to M$ називамо негативним градијентним током а $\gamma_x : \mathbb{R} \to M$ линијом или трајекторијом тог тока.

Лема 1.2.1. f опада дуж линија свог негативног градијентног тока.

Доказ:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_x(t)) = df(\gamma_x(t)) \left(\frac{d\gamma_x(t)}{dt}\right) = g(\nabla f(\gamma_x(t)), -\nabla f(\gamma_x(t))) = -\|\nabla f(\gamma_x(t))\|^2 \leq 0.$$

□

Став 1.2.2 Трајекторије не могу почињати и завршавати се у регуларним тачкама.

Доказ: Претпоставимо да је

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma_x(t) = q.$$

Посматрајмо функцију $h = f \circ \gamma_x$. Јасно је да је она ограничена у околини $+\infty$ јер је $\lim_{t\to+\infty} h(t) = \lim_{t\to+\infty} f(\gamma_x(t)) = f(q)$. Додатно постоји лимес

$$\lim_{t\to+\infty} h'(t) = -\lim_{t\to+\infty} \|\nabla f(\gamma_x(t))\|^2 = -\|\nabla f(q)\|^2.$$

Из Лагранжеве теореме имамо и да важи

$$h(n+1) - h(n) = h'(\epsilon_n), \qquad \epsilon_n \in (n, n+1),$$

па када пустимо да $n \to +\infty$ закључујемо да је $\lim_{n\to\infty} h'(\epsilon_n) = 0$. Са друге стране јасно је да је $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = +\infty$ па из Хајнеа закључујемо да је $\|\nabla f(q)\|^2 = 0$ одакле је $q \in crit(f)$. Слично се показује да трајекторија не може почети у регуларној тачки.

□

Из овог става видимо да једини кандидати за почетак и крај трајекторије остају критичне тачке.

Нека је $p \in crit(f)$ такво да је $f(p) = c$ и нека су $\epsilon > 0$ и $\tau > 0$ произвољни. Дефинишимо скуп

$$N_p^{\epsilon,\tau} = \{x \in M | f(x) \leq c + \epsilon,\ f(\varphi_\tau(x)) \geq c - \epsilon\}_p,$$

где $\{\dots\}_p$ означава компоненту путне повезаности која садржи p.

Напомена 1.2.3. Јасно је да је $N_p^{\epsilon,\tau}$ затворена околина од p. Поред тога ако трајекторија једном изађе из ове околине више се никад не може вратити у њу што је последица претходне леме.

Лема 1.2.4. Нека је f глатка функција на Римановој многострукости (M, g), и нека је c једина критична вредност у $[a, b]$ $(a < c < b)$, при чему је $f^{-1}([a, b])$ компактан. Ако је $p \in crit(f) \cap f^{-1}(c)$ изолована критична тачка, онда за сваку околину U тачке p постоје $\epsilon > 0$ и $\tau \geq 1$ такви да важи:

$$N_p^{\epsilon,\tau} \subset U$$

Доказ: Из поставке теореме имамо да је $crit(f) \cap f^{-1}(c) = \{p\} \cup C$ где су $\{p\}$ и C два дисјунктна затворена (компактна) скупа. Како су затворени и дисјунктни можемо их одвојити са отвореним скуповима $\tilde{U} \ni p$ и $\tilde{V} \supset C$. Изаберимо $\tilde{U}$ тако да је $\tilde{U} \subset U$ (можемо узети $\tilde{U} \cap U$).

Претпоставимо сад да не постоји скуп $N_p^{\epsilon,\tau} \subset \tilde{U}$. Нека су $\epsilon_m > 0$ и $\tau_m \geq 1$ низови такви да $\epsilon_m \to 0$ и $\tau_m \to +\infty$. Тада је

$$N_m = N_p^{\epsilon_m,\tau_m} \not\subseteq \tilde{U}.$$

Како је $\tilde{U} \cup \tilde{V}$ неповезан а $p \in \tilde{U} \cap N_m$ можемо закључити да важи и

$$N_m \not\subseteq \tilde{U} \cup \tilde{V}$$

јер би у супротном добили да је $N_m \subseteq \tilde{U}$ пошто је N_m путно повезан. Одатле следи да можемо пронаћи низ $r_m \in (\tilde{U} \cup \tilde{V})^c \cap N_m$. Приметимо да за довољно велико m $N_m \subset f^{-1}[a, b]$, те почевши од неког члана $r_m \in K = f^{-1}([a, b]) \backslash (\tilde{U} \cup \tilde{V})$. K је компактан скуп па можемо пронаћи подниз који у њему конвергира. Задржавајући исту ознаку имамо да је $r = \lim\limits_{m\to\infty} r_m$. Како је K затворен (јер је компактан) скуп који не садржи критичне тачке закључујемо да r није критична тачка.

Са друге стране, како је $r_m \in N_m$ добијамо

$$f(r_m) \leq c + \epsilon_n$$

и

$$f(\varphi_1(r_m)) \geq f(\varphi_{\tau_m}(r_m)) \geq c - \epsilon_m.$$

Пуштајући лимес закључујемо да је $f(\phi_1(r)) = f(r)$. Па како функција опада дуж трајекторија можемо закључити да је за свако $t \in [0,1]$ $f(\varphi_t(r)) = c$ одакле следи да је $r \in K$ критична тачка па смо добили контрадикцију.

$\square$

Теорема 1.2.5. Нека је (M, g) затворена Риманова многострукост и нека је $f : M \to \mathbb{R}$ функција која има изоловане критичне тачке. Тада свака негативна градијентна трајекторија почиње и завршава се у некој критичној тачки.

Доказ: Нека је $x \in M$ произвољно. Како је $crit(f)$ дискретан потпростор компактне многострукости можемо закључити да је

$$crit(f) = \{p_1, \dots, p_k\}.$$

Претпоставимо да постоје отворени скупови $U_i \ni p_i$ такви да их за неко $s > 0$ $\gamma_x([s, \infty))$ не сече. Како је $\|\nabla f(x)\|^2$ непрекидна функција на компактном скупу $K = M \setminus \bigcup_i U_i$ па како K не садржи критичне тачке можемо закључити да дата функција достиже минимум $m > 0$ на K. Одатле би следило да је

$$\frac{d}{dt} f(\gamma_x(t)) = -\|\nabla f(\gamma_x(t))\|^2 \leq -m, \qquad t \geq s$$

па би функција $f \circ \gamma_x$ била неограничена што је немогуће јер се факторише кроз компактан скуп K. Због тога и чињенице да критичних тачака има коначно много имамо да за свако $s > 0$ $\gamma_x([s, +\infty))$ сече произвољну околину бар једне критичне тачке. Означимо неку такву тачку са q и докажимо да мора бити $\lim\limits_{t \to +\infty} \gamma_x(t) = q$.

Нека је $U \ni q$ произвољан отворен скуп. Из претходне леме имамо да за неке $\epsilon > 0, \tau > 0$ важи да је $N = N_q^{\epsilon,\tau} \subset U$. Како је N околина од q мора бити да за неко s' $\gamma_x(s') \in N$.

Претпоставимо да $\gamma_x([s', \infty)) \not\subseteq N$. То значи да је трајекторија изашла из скупа у неком тренутку. Из напомене 1.2.3. знамо да се она након тога не може враћати у N. Одавде закључујемо да постоји $s'' > s'$ такво да је

$$\gamma_x([s', +\infty)) \cap N = \gamma_x([s', s'']) \cap N.$$

па је $\gamma_x([s', +\infty)) \cap N$ затворен па можемо наћи околину $\tilde{U} = \tilde{U}(q)$, такву да је $\tilde{U} \subset N$ такву да је $\tilde{U} \cap \gamma_x([s', +\infty)) = \emptyset$ што је контрадикција.
Дакле мора бити да је $\gamma_x([s', +\infty)) \subset N \subset U$, па како је U било произвољно закључујемо да је

$$\lim_{t \to +\infty} \gamma_x(t) = q.$$

$\widetilde{\gamma}_x(t) = \gamma_x(-t)$ је негативна градијентна трајекторија од $-f$ из претходног следи да ће се $\widetilde{\gamma}_x$ завршавати у некој критичној тачки p. Онда из једнакости

$$\lim_{t \to -\infty} \gamma_x(t) = \lim_{t \to +\infty} \widetilde{\gamma}_x(t) = p$$

закључујемо да важи тврђење.

$\square$

Дефиниција 1.2.6. Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција и нека је $p \in crit(f)$. Стабилни и нестабилни скуп критичне тачке p су

$$W^s(p) = \{x \in M | \lim_{t \to -\infty} \varphi_t(x) = p\}$$

$$W^u(p) = \{x \in M | \lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) = p\}$$

респективно.

Из претходне леме јасно је да важи следеће тврђење.

Став 1.2.7. Нека је (M, g) затворена Риманова многострукост и нека је f функција са изолованим критичним тачкама. Тада је M дисјунктна унија нестабилних (стабилних) многострукости. Односно важи

$$M = \bigcup_{p \in crit(f)} W^u(p),$$

$$M = \bigcup_{p \in crit(f)} W^s(p).$$

Напомена 1.2.8. Из претходног става је јасно да критичне тачке представљају опструкцију да простор колабира у тачку при негативном градијентном току. Отуда занимљива топологија у њима.

1.3 Ћелијски комплекс придружен Морсовој функцији

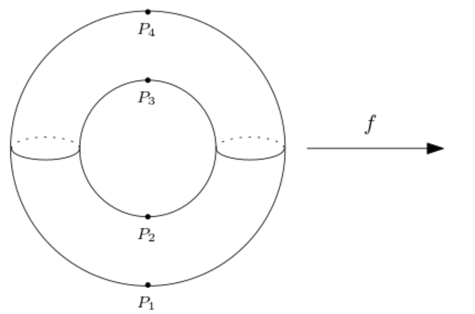
Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција. Дефинишимо скуп

$$M^a = f^{-1}((-\infty, a]) = \{x \in M | f(x) \leq a\}.$$

На затвореној многострукости непрекидна функција достиже максимум, па је тада за разумевање топологије многострукости M довољно разумети топогију M^a за довољно велико a. Ово нас мотивише да изучавамо промене хомотопског типа скупова M^a како повећавамо a. Другим речима посматраћемо како се мења топологија многострукости M када је „градимо” од мањих ка већим вредностима функције.

Из претходног одељка знамо да за произвољну метрику g на M трајекторије негативног градијентног тока пара (f, g) не могу почињати и завршавати се регуларним тачкама. Из тога закључујемо да неће постојати препрека да уједначавајући брзине спустимо M^b дуж тока до M^a ако $[a, b]$ садржи само регуларне вредности, па следи да ће се промене у топологији дешавати само у критичним вредностима. Додатно како многострукост реконституишемо од већих ка мањим вредностима функције а индекс критичне тачке представља максималну димензију подпростора тангентног простора у коме када се крећемо вредности функције опадају, јасно је да ће нам индекси критичних тачака Морсове функције f дати виталну тополошку информацију о многострукости M. Илуструјмо ово боље једним примером.

Пример 1.3.1 Нека је $M = \mathbb{T}^2$ торус и нека је $f : M \to \mathbb{R}$ функција висине.

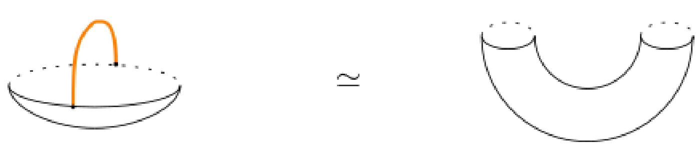


Критичне такче ове функције одговарају тачкама у којима је тангентна раван на торус хоризонтална. Одатле је јасно да функција има четири критичне тачке означене на слици са p_1, p_2, p_3 и p_4. Такође није тешко видети да су све ове тачке недегенерисане. Посматрајмо сада како се мења топологија M^c како повећавамо c.

(1) $f(p_1) < c < f(p_2)$

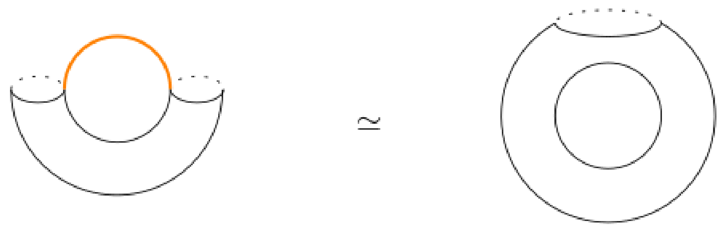
p_1 је тачка у којој функција висине достиже минимум, па је јасно да да је $ind_f(p_1) = 0$. Са друге стране M^c је хомеоморфно диску $\mathbb{D}^2$ па има хомотопски тип тачке односно 0 ћелије.

(2) $f(p_2) < c < f(p_3)$



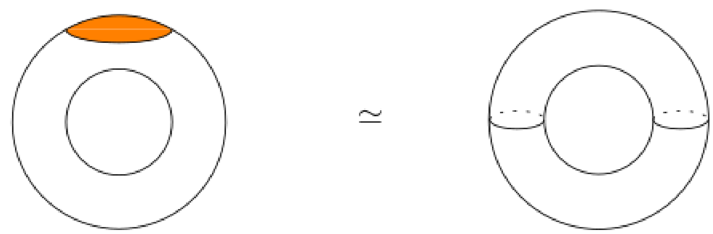
Тачка p_2 је седластог типа, односно $ind_f(p_2) = 1$ а M^c има хомотопски тип диска са залепљеном 1 ћелијом.

(3) $f(p_3) < c < f(p_4)$



Тачка p_3 је такође седластог типа и $M^c \simeq M^b \cup e^1, \quad f(p_2) < b < f(p_3)$.

(4) $f(p_4) > c$



$ind_f(p_4) = 2$ јер је p_2 тачка максимума и важи $M = M^c \simeq M^b \cup e^2, \quad f(p_3) < b < f(p_4)$.

Дакле пролазак кроз критичну тачку индекса k одговара лепљењу k ћелије. Сада ћемо претходна запажања уопштити кроз наредна два тврђења и даћемо скице њихових доказа. За више детаља погледати [5] или [7].

Теорема 1.3.2 Нека је $f \in C^\infty(M)$ глатка функција на многострукости са границом M, и нека је $f^{-1}([a,b])$ компактан скуп такав да не садржи критичне тачке функције f. Тада је M^a дифеоморфан са M^b, и M^a је деформациони ретракт од M^b. Штавише постоји дифеоморфизам $F : f^{-1}(a) \times [a,b] \to f^{-1}([a,b])$ такав да дијаграм

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(a) \times [a,b] \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & f^{-1}([a,b]) \arrow[d, "f"] \\ & {[a,b]} \end{tikzcd}$$

комутира.

Скица доказа: Нека је g произвољна метрика на многострукости M, и нека је ∇f градијент функције f у тој метрици. Како је $f^{-1}([a,b])$ компактан можемо дефинисати глатку функцију ρ тако да је $\rho(p) = \frac{1}{||\nabla f(p)||^2}$ на $f^{-1}([a,b])$, и $supp(\rho)$ садржано у некој компактној околини $f^{-1}([a,b])$. Тада векторско поље $X(p) = \rho(p)\nabla f(p)$ има компактан носач па дефинише једнопараметарску групу дифеоморфизама:

$$\frac{d\varphi_t}{dt} = X \circ \varphi_t, \qquad \varphi_0 = id.$$

Приметимо да дуж тог тока вредности функције расту расту константном јединичном брзином на $f^{-1}([a,b])$.

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t(x)) = df(\varphi_t(x)) \left(\frac{d\varphi_t}{dt}(x) \right) = g(\nabla f(\varphi_t(x)), X(\varphi_t(x))) = 1, \qquad x \in f^{-1}([a,b]).$$

Односно важи:

$$f(\varphi_t(x)) = f(x) + t.$$

Одатле није тешко закључити да φ_{b-a} успоставља жељени дифеоморфизам.

Ретракцију $r : M^b \to M^a$ можемо дефинисати на следећи начин:

$$r(x) = \begin{cases} \varphi_{a-f(x)}(x), & x \in M^b \setminus M^a \\ x, & x \in M^a \end{cases}.$$

Тада пресликавање

$$H(x,t) = \begin{cases} \varphi_{t(a-f(x))}(x), & x \in M^b \setminus M^a \\ x, & x \in M^a \end{cases}.$$

успоставља жељену хомотопију.

Остало је још да дефинишемо пресликавање $F : f^{-1}(a) \times [a,b] \to f^{-1}([a,b])$. Није тешко видети да пресликавање

$$F(x,t) = \varphi_{t-a}(x)$$

задовољава тражене услове.

□

Теорема 1.3.3 Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција и нека је $f^{-1}([a,b])$ компактан и такав да садржи тачно једну критичну тачку индекса k. Тада M^b има хомотопски тип M^a са залепљеном једном k ћелијом. Штавише, постоји скуп e^k дифеоморфан са $k-$диском $\mathbb{D}^k$ тако да је $M^a \cup e^k$ деформациони ретракт од M^b.

Идеја доказа: Нека је $p \in crit(f)$ и $f(p) = c$. Функцију f деформишемо на тај начин да не мењамо број критичних тачака. При томе добијемо функцију F тако да је она једнака функцији f свуда осим у Морсовој околини критичне тачке p где је $F < f$. За довољно мало $\epsilon > 0$ важиће:

1. $F^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$ не садржи критичне тачке.
2. $F^{-1}((-\infty, c+\epsilon]) = f^{-1}((-\infty, c+\epsilon]) = M^{c+\epsilon}$
3. $F^{-1}((-\infty, c-\epsilon]) = M^{c-\epsilon} \cup H$. При томе постоји одговарајућа k ћелија $e^k \subseteq H$ таква да је $M^{c-\epsilon} \cup e^k$ деформациони ретракт од $M^{c-\epsilon} \cup H$, при чему важи да $\partial e^k \in f^{-1}(c-\epsilon)$.

Из 1. можемо закључити да је $F^{-1}((-\infty, c-\epsilon])$ деформациони ретракт од $F^{-1}((-\infty, c+\epsilon])$ па из 2. и 3. следи да је $M^{c-\epsilon} \cup H$ деформациони ретракт од $M^{c+\epsilon}$. Како у $[c+\epsilon, b]$ нема критичних вредности функције f, из 3. можемо закључити да је $M^{c-\epsilon} \cup e^k$ деформациони ретракт од M^b.

Из Теореме 1.3.2. знамо да је $f^{-1}(c-\epsilon) \times [a, c-\epsilon]$ дифеоморфорно са $f^{-1}[a, c-\epsilon]$. Означимо одговарајући дифеоморфизам са G. Како $\partial e^k \in f^{-1}(c-\epsilon)$ за нову ћелију можемо узети $G(\partial e^k \times [a, c-\epsilon]) \cup e^k$. Задржавајући исту ознаку за ћелију јасно је да добијамо да је $M^a \cup e^k$ деформациони ретракт од M^b.

□

Напомена 1.3.4 Овај резултат се једноставно може уопштити. Ако су $p_1, \dots, p_m$ критичне тачке индекса $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ респективно које одговарају критичној вредности c онда важи:

$$M^{c+\epsilon} \simeq M^{c-\epsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \cup_{\varphi_2} \dots \cup_{\varphi_m} e^{\lambda_m}$$

за неке функције лепљења $\varphi_1, \dots \varphi_m$.

Сада ћемо навести два тополошка резултата који ће нам заједно са претходне две теореме омогућити да докажемо главно тврђење овог одељка. Докази наредне две леме се могу наћи у [5].

Лема 1.3.5. Нека је X тополошки простор, и нека су $f_0 : S^{k-1} \to X$ и $f_1 : S^{k-1} \to X$ хомотопна пресликавања. Тада се идентитета на X може проширити до хомотопске еквиваленције

$$h : X \cup_{f_0} D^k \to X \cup_{f_1} D^k.$$

Лема 1.3.6. Нека су X и Y тополошки простори, и нека је $f : S^{k-1} \to X$ функција лепљења. Тада се хомотопска еквиваленција $h : X \to Y$ може проширити до хомотопске еквиваленције

$$H : X \cup_f D^k \to X \cup_{h \circ f} D^k.$$

Теорема 1.3.7. Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција на глаткој многострукости M. Ако је M^t компактан за све $t \in \mathbb{R}$ онда M има хомотопски тип CW комплекса. Притом свакој $k-$ћелији придруженог ћелијског комплекса одговара тачно једна критична тачка индекса k.

Скица доказа: Нека је $\{c_i\}$ скуп критичних вредности функције f. Како је за свако t, M^t компактан, и како су критичне тачке Морсове функције изоловане можемо закључити да $\{c_i\}$ нема тачку нагомилавања, па самим тим мора бити највише пребројив. Нека је скуп индекса такав да одговара растућем поредку критичних вредности, односно нека важи

$$c_0 < c_1 < c_2 < c_3 < \dots$$

За $t < c_0$ M^t је празан скуп. Ако је $c_0 < t_0 < c_1$ M^{t_0} ће бити хомотопан дискретном скупу тачака $\{p \in crit(f) | f(p) = c_0\}$.

Нека је сад $c_{i-1} < t_{i-1} < c_i$, и нека постоји хомотопска еквиваленција $h_{i-1} : M^{t_{i-1}} \to X_{i-1}$ где је X_{i-1} неки CW комплекс.

Из напомене 1.3.4. знамо да за неко $\epsilon > 0$ $M^{c_i+\epsilon}$ има хомотопски тип

$$M^{c-\epsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \cup_{\varphi_2} \cdots \cup_{\varphi_m} e^{\lambda_m}.$$

где су $p_1, \ldots, p_m \in f^{-1}(c_i)$ критичне тачке индекса $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ респективно, а $\varphi_1, \ldots \varphi_m$ функције лепљења. Из теореме 1.3.2. знамо да постоји хомотопска еквиваленција $g_{i-1} : M^{c_i-\epsilon} \to M^{t_{i-1}}$. Комбинујући све ово закључујемо да за свако $k \in \{1, \ldots, m\}$ можемо дефинисати пресликавање

$$h_{i-1} \circ g_{i-1} \circ f_k : S^{\lambda_k - 1} \to X_{i-1}.$$

Сада смо скоро у могућности да дефинишемо нов ћелијски комплекс X_i који ће имати хомотопски тип простора $M^{c_i+\epsilon}$. Потребно је да λ_k-ћелију залепимо на $\lambda_k - 1$ скелетон комплекса X_{i-1}. Захваљујући теореми о ћелијској апроксимацији можемо закључити да је пресликавање $h_{i-1} \circ g_{i-1} \circ f_K$ хомотопно неком пресликавању

$$\psi_k : S^{\lambda_k - 1} \to X_{i-1}^{\lambda_k}.$$

где $k \in \{1, \ldots, m\}$. На тај начин добијамо CW комплекс:

$$X_i := X_{i-1} \cup_{\psi_1} D^{\lambda_1} \cup_{\psi_2} \cdots \cup_{\psi_m} D^{\lambda_m}.$$

Из лема 1.3.5. и 1.3.6. можемо закључити да $M^{c+\epsilon}$ има хомотопски тип овог ћелијског комплекса.

Одавде индукцијом није тешко закључити да за свако $t \in \mathbb{R}$ простор M^t има хомотопски тип CW комплекса при чему број k ћелија одговара броју критичних тачака индекса k које се налазе у M^t. Надаље су могућа три случаја:

- M компактна многострукост

  $M = M^t$ за неко $t \in \mathbb{R}$, па је доказ у овом случају готов.

- M није компактан али се све критичне тачке налазе у неком M^t.

  За такво M^t се може показати да је деформациони ретракт од M користећи се сличном идејом као у доказу теореме 1.3.2.

- Функција f има бесконачно много критичних тачака.

  У овом случају добијамо низ хомотопских еквиваленција $\{h_i : M^{t_i} \to X_i\}_i$ таквих да свака хомотопска еквиваленција проширује претходну. Ово нам омогућава да дефинишемо пресликавање $h : M \to X$ помоћу директног лимеса, где је $X = \bigcup_i X_i$ CW комплекс са топологијом директног лимеса. Пресликавање h индукује изоморфизме хомотопских група свих димензија па је због тога ово хомотопска еквиваленција (погледати [8]).

$\square$

1.4 Егзистенција и генеричност Морсових функција

Из Теореме 1.3.5. знамо да је довољно пронаћи Морсову функцију која задовољава услове те теореме да бисмо могли закључити да M има хомотопски тип CW комплекса па ћемо се сада позабавити питањем егзистенције Морсових функција.

Став 1.4.1. Нека је $M \subset \mathbb{R}^n$ подмногостукост. За скоро све $p \in \mathbb{R}^n$, функција

$$f_p : M \to \mathbb{R}, \qquad f_p(x) = \|x - p\|^2$$

је Морсова функција.

Доказ: Извод функције f_p у тачки x је

$$Df_p(x)(v) = 2(x - p) \cdot v.$$

Одатле можемо закључити да је $x \in crit(f_p)$ акко $x - p \perp T_x M$. Због тога ћемо посматрати нормално раслојење многострукости M у $\mathbb{R}^n$.

$$NM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n | v \perp T_x M\} \subset M \times \mathbb{R}^n.$$

На њему ћемо дефинисати пресликавање

$$E : NM \to \mathbb{R}^n, \qquad (x, v) \mapsto x + v.$$

Како NM има структуру многостругости применом Сардове теореме можемо закључити да је скуп критичних вредности овог пресликавања мере нула. Користећи наредни став закључујемо да важи тврђење. □

Став 1.4.2 f_p је Морсова функција акко је $p \in \mathbb{R}^n$ регуларна вредност пресликавања E.

Доказ: p је критична вредност пресликавања E акко постоји неко $(x_0, v) \in crit(E)$ тако да је $E(x_0, V) = p$. Како је M подмногострукост од $\mathbb{R}^n$, постоји карта у околини U од x_0 таква да слика $U \cap M$ у $\mathbb{R}^m \times 0 \subset \mathbb{R}^n$. У тој карти првих m координатних вектора даје локалну базу од TM. Тада ортонормирањем базе од преосталих координатних вектора добијамо за свако $q \in U \cap M$ базу $(v_1(q), \dots, v_{n-m}(q))$ од $(T_q M)^\perp$. На тај начин добијамо локалну параметризацију од NM:

$$(u_1, \dots, u_m, t_1, \dots, t_{n-m}) \mapsto (x(u_1, \dots, u_m), \sum_{i=1}^{n-m} t_i v_i(u_1, \dots, u_m)).$$

Одатле је јасно да је NM многострукост. У овим координатама добијамо:

$$\frac{\partial E}{\partial u_i} = \frac{\partial x}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{n-m} t_i \frac{\partial v_k}{\partial u_i}, \qquad \frac{\partial E}{\partial t_j} = v_j.$$

Рачунањем скаларних производа ових n вектора са базним векторима

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_m}, v_1, \ldots, v_{n-m}$$

добијамо матрицу која има исти ранг као Јакобијан од E:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + \sum_{k=1}^{n-m} t_k \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}\right) & \left(\sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \cdot v_l\right) \\ 0 & Id \end{bmatrix}$$

Одатле закључујемо да је Јакобијан од E пуног ранга акко је матрица

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + \sum_{k=1}^{n-m} t_k \frac{\partial v_k}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}\right)_{i,j=1}^{m}$$

инвертибилна.

Како је $v_k \perp \frac{\partial x}{\partial u_j}$ добијамо:

$$\frac{\partial}{\partial u_i}(v_k \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}) = \frac{v_k}{u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + v_k \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i u_j} = 0.$$

Одатле закључујемо да је $(x_0, V) \in crit(E)$ акко је матрица

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u_i}(x_0) \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j}(x_0) - V \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i u_j}(x_0)\right)_{i,j=1}^{m}$$

инвертибилна.

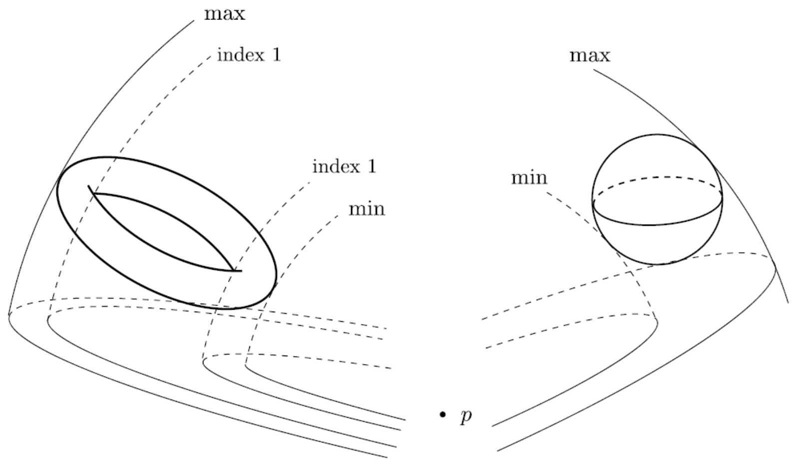
Са друге стране када запишемо функцију f_p у овој карти добијамо

$$\frac{\partial f_p}{\partial u_i} = 2(x-p) \cdot \frac{\partial x}{\partial u_i}, \qquad \frac{\partial^2 f_p}{\partial u_i \partial u_j} = 2\left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} + (x-p) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}\right)$$

Како је $p - x_0 = V$ можемо закључити да $(x_0, V) \in crit(E)$ акко је x_0 дегенерисана критична тачка од f_p. $\square$

Напомена 1.4.3. Ако је M хиперповрш у $\mathbb{R}^n$ и ако схватимо M као извор светлости, при чему се светлост креће у правцу вектора нормале на M, критичне вредности пресликавања E ће бити тачке у којима је обасјаност најинтензивнија. Отуда долази мотивација за назив ових тачака. Кажемо да је p тачка фокуса (жижа) подмногострукости $M \subset \mathbb{R}^n$ ако је p критична вредност од E ($Lat.focus$- огњиште, камин). На пример у случају кружнице једина жижа је њен центар. За више детаља погледати [7].

Напомена 1.4.4. Реконструкцију подмногострукости $M \subset \mathbb{R}^n$ помоћу функције f_p можемо разумети на следећи начин. Поставимо извор светлости у тачку $p \in \mathbb{R}^n$. Под претпоставнком да се светлост креће радијално у свим правцима јединичном брзином и да је светлост кренула из извора у тренутку $t = 0$, M^t је део многострукости M који је обасјан у тренутку $\sqrt{t}$.



$x \in M$ је критична такча функције f_p ако је подмногострукост M тангентна на сферу са центром у p која садржи ову тачку.

Јасно је да уколико је М затворен скуп у $\mathbb{R}^n$, за свако $t \in \mathbb{R}$ скуп $M^t = B[p, \sqrt{t}] \cap M$ је компактан.

Теорема 1.4.5. (Витнијева теорема о улагању) Нека је M^n многострукост без границе. Тада постоји улагање $i : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ такво да је $i(M)$ затворен у $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Доказ: Погледати [9].

Напомена 1.4.6. У случају када је i инјективно услов да је $i(M)$ затворен еквивалентан је услову да је инверзна слика произвољног компактног скупа компактан скуп.

Став 1.4.7. На свакој многострукости M постоји Морсова функција $f : M \to \mathbb{R}$ таква да је за свако $t \in \mathbb{R}$, M^t компактан.

Доказ: Нека је $dim(M) = n$. Тада знамо да постоји улагање $i : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ из Витнијеве теореме. Изаберимо $p \in \mathbb{R}^{2n+1}$ такво да је $f_p : i(M) \to \mathbb{R}^{2n+1}$ Морсова функција. Пошто је $i(M)$ затворен за свако $t \in \mathbb{R}$, $f_p^{-1}((-\infty, t])$ је компактан. Одатле из напомене 1.4.6. следи да је $f = f_p \circ i$ тражена функција. □

Последица 1.4.8. Многострукост има хомотопски тип ћелијског комплекса.

Доказ: Комбинујући претходни став и теорему 1.3.5. закључујемо да важи тврђење. □

Морсових функција има много. Штавише може се показати да су на затвореној многострукsти скоро све глатке функције Морсове функције. Да би смо заиста видели да то важи треба да дефинишемо топологију на $C^\infty(M)$.

Нека су сада M и N две C^r многострукости ($0 \leq r < \infty$). Са $C^r(M, N)$ означићемо скуп свих функција $f : M \to N$ класе C^r.

Дефиниција 1.4.9. Нека је $f \in C^r(M, N)$ произвољна функција и нека су (U, φ) и

(V, ψ) две произвољне карте на M и $\mathbb{R}$ редом при чему је $K \subset U$ неки компакт такав да је $f(K) \subset V$. За произвољно $0 < \epsilon \leq \infty$ скуп

$$N^r(f, (U, \varphi), (v, \psi), K, \epsilon)$$

свих функција $g \in C^r(M, N)$ таквих да је $g(K) \subset V$ и $\|D^\alpha(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x) - D^\alpha(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(x)\| < \epsilon$ за произвољано $|\alpha| \leq r$ називамо предбазном околином од f.

Дакле систем предбазних околина $\{N^r(f, (U, \varphi), (v, \psi), K, \epsilon)\}$ нам даје топологију на $C^r(M, N)$ коју називамо C^r топологија.

Ако је M једна C^r многострукост, где је $0 \leq r \leq \infty$, редукцијом постојећих или додавањем нових карата можемо добити C^k глатку структуру за произвољно $0 \leq k \leq \infty$. Одатле следи да је произвољна C^r многострукост C^r дифеоморфна глаткој многострукости.

Из претходног запажања можемо закључити да је $C^\infty(M, N) \subseteq C^r(M, N)$ те можемо дефинисати C^r топологију на $C^\infty(M, N)$ за произвољно $0 \leq r < \infty$ тиме што захтевамо да то буде топологија потпростора. Ипак природно је захтевати да топологија на $C^\infty(M, N)$ на неки начин контролише понашање парцијалних извода произвољног реда, па дефинишемо топологију на следећи начин.

Дефиниција 1.4.10 C^∞ топологија је минимална топологија таква да су све инклузије

$$i_k : C^\infty(M, N) \to C^r(M, N), \qquad r \in \mathbb{N}_0$$

непрекидне.

Напомена 1.4.11. Некада се овако дефинисана топологија назива компактно отвореном топологијом на $C^r(M, N)$, или Витнијевом слабом C^r топологијом. Оправдање за други назив долази из чињенице да ова топологија не контролише добро понашање функција у „бесконачности”. То се може поправити тако што узмемо да нам фундаментални систем базних околина на $C^r(M, N)$ буду пресеци пребројивих фамилија $\{N^r(f, (U_n, \varphi_n), (v_n, \psi_n), K_n, \epsilon_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. На овај начин добијамо финију топологију на $C^r(M, N)$ коју називамо јака Витнијева топологија. Истим поступком као и код слабе топологије добијамо јаку Витнијеву C^∞ топологију. Неки аутори ову топологију називају C^r топологијом. Ипак може се десити да јака Витнијева топологија није метризабилна јер не мора задовољавати 1. аксиому пребројивости, док је слаба Витнијева топологија увек метризабилна. Наравно ове две топологије се поклапају уколико је многострукост M компактна. За више о овоме погледати [10].

Лема 1.4.12. Скуп Морсових функција је свуда густ у $C^\infty(M)$.

Доказ: Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ произвољна глатка функција и Нека је $i : M \to \mathbb{R}^N$ неко улагање многострукости M такво да је $i(M)$ затворен у $\mathbb{R}^N$. Дефинишимо пресликавање

$$h : M \to \mathbb{R}^{N+1}, \qquad h(x) = (f(x), i_1(x), \ldots, i_N(x))$$

Није тешко приметити да је и h улагање и да је $h(M)$ затворена подмногострукост.

Знамо из става 1.4.1. да за скоро свако

$$p = (-c + \epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$$

функција $f_p : h(M) \to \mathbb{R}$ је Морсова. Одатле можемо закључити да је функција

$$g(x) = \frac{f_p(h(x)) - c^2}{2c}$$

такође Морсова. Расписивањем функције g добијамо

$$g(x) = f(x) + \frac{f(x)^2 + \sum_{i \geq 1} h_i(x)^2}{2c} - \frac{\epsilon_1 f(x) + \sum_{i \geq 1} \epsilon_i h_i(x)}{c} + \sum_{i \geq 1} \epsilon_i^2 - \epsilon_1.$$

Нека је сада $r \in N_0$ произвољно, и нека је $\bigcap\limits_{j=1}^{m} N^r(f, (U_j, \varphi_j), (v_j, \psi_j), K_j, \delta_j)$ произвољна базна C^r околина од f.

Једноставно видимо да за довољно велико c и за довољно мале ϵ_i мора бити да за свако $j \in \{1, \dots, m\}$ важи

$$g(K_j) \subset V_j, \qquad |D^\alpha(\psi_j \circ f \circ \varphi_j^{-1})(x) - D^\alpha(\psi_j \circ \tilde{f} \circ \varphi_j^{-1})(x)| < \delta_j, \qquad |\alpha| \leq r.$$

Пошто је r било произвољно закључујемо да важи тврђење.

$\square$

Напомена 1.4.13. Можемо приметити да се претходни доказ могао применити и у случају да је M^n глатка C^r многострукост $r \geq 2$, јер се C^r многострукост може C^r уложити као затворен скуп у $\mathbb{R}^{2n+1}$. Због тога можемо констатовати да је скуп Морсових функција густ у $C^r(M)$ $(r \geq 2)$.

Лема 1.4.14. Нека је $f \in C^2(M)$ функција на C^2 многострукости M, и нека је $K \subset U$ компактан скуп такав да је $f(K) \subset V$ где су су (U, φ) и (V, ψ) неке карте на M и $\mathbb{R}$ респективно. Ако f нема дегенерисане критичне тачке на K онда постоји $\delta > 0$ такво да све функције које припадају скупу

$$N^2(f, (U, \varphi), (V, \psi), K, \delta)$$

немају дегенерисане тачке на K.

Доказ: Како је тврђење локалног карактера можемо претпоставити да је $f : U \to \mathbb{R}$ C^2 функција где је $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$.

$h : U \to \mathbb{R}$ нема дегенерисане критичне тачке на K акко је функција

$$\rho(h) = \sum \left| \frac{\partial h}{\partial x_j} \right| + \left| det \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right|$$

позитивна на K. Како је K компактан скуп и f нема дегенерисане критичне тачке на K можемо закључити да $\rho(f)$ достиже минимум $m > 0$ на K. Нека је $\delta > 0$ такво да ако је

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial h}{\partial x_j}\right| < \delta, \qquad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}\right| < \delta,$$

онда је

$$\left|\sum\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right| - \sum\left|\frac{\partial h}{\partial x_j}\right|\right| < \frac{m}{2}, \qquad \left|\left|det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right| - \left|det\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}\right)\right|\right| < \frac{m}{2}.$$

Јасно је да за такво $\delta > 0$ важи да је $\rho(h) > \rho(f) - m \geq 0$ одакле можемо закључити да h нема дегенерисане критичне тачке на K.

□

Теорема 1.4.15. (Генеричност Морсових функција) Нека је M затворена многострукост. Скуп морсових функција је отворен и густ $C^\infty(M)$.

Доказ: Нека је f произвољна Морсова функција. Означимо са

$$(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_m, \varphi_m), \qquad (V_1, \psi_1), \ldots, (V_m, \psi_m)$$

карте на M и $\mathbb{R}$ респективно такве да постоје компактни скупови $K_1, \ldots, K_m$ за које важи

$$K_i \subset U_i, \qquad f(K_i) \subset V_i,$$

при чему је $\bigcup_i K_i = M$. Из леме 1.3.14. следи да постоје бројеви $\delta_i > 0$, $1 \leq i \leq m$ такви да скупови $N^2(f, (U_i, \varphi_i), (V_i, \psi_i), K_i, \delta_i)$ не садрже функције са дегенерисаним критичним тачкама на K_i. Одатле је јасно да је

$$U = \bigcap_{i=1}^{m} N^2(f, (U_i, \varphi_i), (V_i, \psi_i), K_i, \delta_i).$$

једна базна C^2 околина од f која садржи само Морсове функције.

Тиме смо показали да је скуп Морсових функција отворен у $C^\infty(M)$, а из леме 1.4.12. знамо и да је густ па је доказ теореме завршен.

□

Напомена 1.4.16. Како је из претходног доказа јасно да је скуп Морсових функција отворен у $C^2(M)$ ако је M затворена многострукост и како је инклузија $i : C^r(M, N) \to C^2(M, N)$ непрекина за $r \geq 2$, следи да је скуп Морсових функција отворен у $C^r(M)$. Комбинујући овај закључак са напоменом 1.4.13. можемо закључити да су Морсове функције генеричне у $C^r(M)$, $(2 \leq r \leq \infty)$ ако је M затворена многострукост.

1.5 Морсове неједнакости

За сад не можемо много рећи о CW комплексу придруженом Морсовој функцији, јер ништа не можемо рећи о хомотопском типу функција лепљења. Ипак знамо да је број

k ћелија једнак броју критичних тачака индекса k. То ће нам дати прву везу анализе и топологије.

Дефиниција 1.5.1. Нека је X тополошки простор и нека је $\mathbb{F}$ поље. k-ти Бетијев број је димензија k-те хомолошке групе $H_k(X;\mathbb{F})$. k-ти Бетијев број означавамо са $\beta_k(X;\mathbb{F})$.

Слично дефинишемо Бетијеве бројеве и за тополошке парове.

Дефиниција 1.5.2. Нека је (X, A) тополошки пар и нека је $\mathbb{F}$ поље. k-ти Бетијев број $\beta_k(X, A;\mathbb{F})$ је димензија k-те хомолошке групе $H_k(X, A;\mathbb{F})$.

Напомена 1.5.3. Бетијеви бројеви се могу дефинисати и за $\mathbb{Z}$ коефицијенте и тада је k-ти Бетијев број ранг слободног дела k-те хомолошке групе.

Став 1.5.4. Нека је X CW комплекс, и нека је $\mathbb{F}$ поље или $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$. Тада важи

$$\beta_k(X;\mathbb{F}) \leq \beta_k(X_k, X_{k-1};\mathbb{F}).$$

Доказ: Тополошка тројка $A \subseteq B \subseteq C$ индукује дуги тачан низ

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(B, A;\mathbb{F}) \xrightarrow{i_*} H_k(C, A;\mathbb{F}) \xrightarrow{j_*} H_k(C, B;\mathbb{F}) \to \ldots$$

Одатле је

$$H_k(C, A)/ker(j_*) \cong im(j_*) \Leftrightarrow H_k(C, A)/im(i_*) \cong im(j_*),$$

па је

$$\beta_k(C, A) \leq rank(i_*) + rank(j_*) \leq \beta_k(B, A) + \beta_k(C, B).$$

У случају да је $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$ све претходно се односи на слободан део. Примењујући ово на тројку $X_{k-1} \subseteq X_k \subseteq X_{k+1}$ добијамо

$$\beta_k(X_{k+1}, X_{k-1};\mathbb{F}) \leq \beta_k(X_k, X_{k-1};\mathbb{F}) + \beta_k(X_{k+1}, X_k;\mathbb{F}).$$

Индукцијом добијамо

$$\beta_k(X_{k+1}, X_{-1};\mathbb{F}) \leq \sum_{i=0}^{k+1} \beta_k(X_i, X_{i-1};\mathbb{F}),$$

где је $X_{-1} = \emptyset$. Одатле како је $H_k(X_i, X_{i-1}) = 0$ за $i \neq k$, и како је

$$H_k(X;\mathbb{F}) = H_k(X_{k+1};\mathbb{F}) = H_k(X_{k+1}, X_{-1};\mathbb{F})$$

можемо закључити да важи тврђење.

□

Напомена 1.5.5. Како је X_k/X_{k-1} букет k-сфера, где свакој сфери одговара тачно једна k ћелија, закључујемо да је $H_k(X_k, X_{k-1};\mathbb{F}) = H_k(X_k/X_{k-1};\mathbb{F})$ генерисана k-ћелијама. Одатле је јасно да је $\beta_k(X_k, X_{k-1};\mathbb{F})$ број k ћелија у датом CW комплексу.

Означимо са $c_k(f)$ број критичних тачака индекса k функције f. Тада није тешко видети да важи следећа теорема.

Теорема 1.5.6. (Слабе Морсове неједнакости) Нека је $f \in C^\infty(M^n)$ Морсова функција и нека је $\mathbb{F}$ поље или $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$. Тада важи

$$c_k(f) \geq \beta_k(M; \mathbb{F}), \qquad k \in \{0, \ldots, n\}.$$

Доказ: Нека је X CW комплекс придружен Морсовој функцији f. Из теореме 1.3.7. и напомене 1.5.5. је јасно да је $c_k(f) = \beta_k(X_k, X_{k-1}; \mathbb{F})$. Па како је $M \simeq X$ закључујемо да је $\beta_k(M; \mathbb{F}) = \beta_k(X; \mathbb{F})$ одакле из претходног става следи тврђење. $\square$

Дефиниција 1.5.7. Кажемо да је Морсова функција $f : M \to \mathbb{R}$ минимална ако свака друга Морсова функција има барем онолико критичних тачака колико и f.

Означимо са

$$\widetilde{crit}(M)$$

број критичних тачака минималне Морсове функције на M.

Додатно нека је

$$\beta(M; \mathbb{F}) := \sum_{i=0}^{n} \beta_i(M; \mathbb{F}).$$

Последица 1.5.7. Нека је M^n многострукост и нека је $\mathbb{F}$ поље или $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$. Тада је

$$\widetilde{crit}(M) \geq \beta(M; \mathbb{F}).$$

Морсове неједнакости из теореме 1.5.6. се могу уопштити.

Теорема 1.5.8. (Јаке Морсове неједнакости) Нека је $f \in C^\infty(M^n)$ Морсова функција и нека је $\mathbb{F}$ поље или $\mathbb{F} = \mathbb{Z}$. Тада

(1) $\sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^{k+m} c_k(f) \geq \sum\limits_{k=0}^{m} (-1)^{k+m} \beta_k(M; \mathbb{F}), \qquad m \in \{0, \ldots, n\}.$

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k c_k(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \beta_k(M; \mathbb{F}) = \chi(M).$

Доказ: Погледати [5].

Напомена 1.5.9. Једнакост 2. у претходној теореми показује да је Ојлерова карактеристика $\chi(M)$ независна од избора $\mathbb{F}$.

Последица 1.5.10. Нека је M затворена многострукост непарне димензије. Тада је Ојлерова карактеристика $\chi(M) = 0$.

Доказ: Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција и нека је n димензија многострукости. Тада како је $c_k(f) = c_{n-k}(-f)$ важи

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_{n-k}(-f) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} c_{n-k}(-f)$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k(-f) = (-1)^n \chi(M).$$

Одавде је јасно да ако је n непарно мора бити да је $\chi(M) = 0$.

$\square$

2 Љустерник-Шнирељманова категорија

Љустерник Шнирељманова категорија је у извесном смислу мера комплексности тополошког простора. Ова хомотопска инваријанта нам даје информацију колико је најмање отворених хомотопски најједноставнијих (контрактибилних) скупова потребно да се покрије цео простор. Наравно како ова нумеричка вредност треба да носи информацију о самом простору говоримо о скуповима који су контрактибилни у њему.

Дефиниција 2.1. Подскуп A тополошког простора X је контрактибилан у X ако је инклузија $i : A \to X$ хомотопски тривијално пресликавање.

Дефиниција 2.2. Љустерник Шнирељманова категорија (или само категорија) тополошког простора је најмање $n \in \mathbb{N}_0$ такво да постоји отворен покривач $\{U_1, U_2, ..., U_{n+1}\}$ од X при чему је сваки U_i контрактибилан у X. У том случају пишемо $cat(X) = n$. Ако такво n не постоји пишемо $cat(X) = \infty$.

Покривач $\{U_i\}$ из дефиниције називамо покривачем категорије. Приметимо да U_i може садржати више компоненти докле год су оне садржане у истој компоненти путне повезаности од X. Докажимо прво да категорија простора заиста јесте једна хомотопска инваријанта.

Став 2.3. Ако $g : Y \to X$ има десни хомотопски инверз онда је $cat(X) \leq cat(Y)$.

Доказ: Нека је $f : X \to Y$ пресликавање такво да је $g \circ f \simeq id_X$ и нека је $cat(Y) = n$. Означимо са $\{U_1, ..., U_{n+1}\}$ покривач категорије у Y. Како је јасно да је тада $\{\tilde{U}_i = f^{-1}(U_i)\}$ једно отворено покривање од X показаћемо само да су $\tilde{U}_1, ..., \tilde{U}_{n+1}$ контрактибилни у X.

$g \circ f \simeq id_X$ па одатле следи да је $g \circ f \circ i_{\tilde{U}_i} \simeq id_X \circ i_{\tilde{U}_i} = i_{\tilde{U}_i}$. Са друге стране је $f(\tilde{U}_i)$ подскуп од U_i и U_i контрактибилан у X па је $f \circ i_{\tilde{U}_i}$ хомотопски тривијално одакле следи да је и $g \circ f \circ i_{\tilde{U}_i}$ хомотопски тривијално. Из транзитивности релације закључујемо да је $\tilde{U}_i$ контрактибилан у X.

Дакле $\tilde{U}_1, ..., \tilde{U}_{n+1}$ је једно отворено покривање од X скуповима који су контрактибилни у X па је $cat(X) \leq n = cat(Y)$. Одавде како је $cat(X) \leq n < \infty$ закључујемо да на X постоји покривач категорије. $\square$

Као резултат претходног става добијамо да је категорија хомотопска инваријанта односно важи следећа последица.

Последица 2.4. Ако је $X \simeq Y$ онда је $cat(X) = cat(Y)$.

Напомена 2.5. Категорија се може дефинисати уз разлику да се уместо отвореног узима затворен покривач. У случају многострукости ове две дефиниције су исте.

У поглављу 1.3. смо видели да за функцију f на затвореној Римановој многострукости (M, g) имамо Томову декомпозицију:

$$M = \bigcup_{p \in crit(f)} W^u(p).$$

У случају Морсових функција може се много више рећи о нестабилним скуповима.

Теорема 2.6. Нека је f Морсова функција на затвореној многострукости M^n, и нека је p критична тачка индекса k. Тада су $W^u(p)$ и $W^s(p)$ уложени отворени дискови димензија k и $n-k$ респективно.

Структура многострукости нам омогућава да на једноставан начин видимо везу између критичних тачака Морсове функције и категорије.

Последица 2.7. Нека је f Морсова функција на затвореној многострукости M, и нека је $k = \#crit(f)$. Тада се M може покрити са k отворених скупова контрактибилних у M.

Доказ: Нестабилни скупови покривају многострукост M (Томова декомпозиција). Јасно је да су они контрактибилни па како су уједно и подмногострукости узимајући цевасте околине добијамо тражени покривач.

□

Напомена 2.8. Нестабилни (стабилни) скупови се могу задебљати до отворених скупова контрактибилних у M и у случају произвољне функције са изолованим критичним тачкама као што ћемо видети у поглављу 3, па се наредна оцена може уопштити на произвољне глатке функције за разлику од оцене из последице 1.5.7.

Став 2.9. Нека је M затворена многострукост. Тада је број критичних тачака произвољне Морсове функције већи од категорије односно важи

$$cat(M) + 1 \leq \widetilde{crit}(M).$$

Доказ: Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција. и нека је $k = \#crit(f)$. Из последице 2.6. знамо да се многострукост M може покрити са k отворених контрактибилних скупова па је $cat(M) < k$ одакле следи тврђење. □

Израчунајмо сада категорију два једноставна простора.

Примери 2.10.

1. $cat(\mathbb{S}^n) = 1$

   Сфера $\mathbb{S}^n$ се може прекрити са два контрактибилна скупа. На пример можемо узети $U = \mathbb{S}^n \backslash \{N\}$, и $V = \mathbb{S}^n \backslash \{S\}$, где су N и S северни и јужни пол сфере. Из стереографске пројекције знамо да су ова два скупа хомеоморфна са $\mathbb{R}^n$ па су контрактибилни, а самим тим су и контрактибилни у $\mathbb{S}^n$. Одатле закључијемо да је $cat(\mathbb{S}^n) \leq 1$. Са друге стране сфера је компактна оријентабилна многострукост па форма оријентације задаје нетривијалну кохомолошку класу у $H^n_{dR}(\mathbb{S}^n)$ одакле закључујемо да сфера не може бити контрактибилна, односно да $cat(\mathbb{S}^n) \neq 0$ па је $cat(\mathbb{S}^n) = 1$.

2. $cat(M) = 1$, M- Мебијусова трака

   Централна кружница Мебијусове траке M је њен деформациони ретракт па је $M \simeq \mathbb{S}^1$. То даље имплицира да је је $cat(M) = cat(\mathbb{S}^1) = 1$.

Категорију тополошког простора је често тешко израчунати па су нам потребне инваријанте којима можемо оценити категорију. Приметимо да смо у примеру 1 видели да ако је категорија многострукости M^n нула онда је $H^n_{dR}(M) = \{0\}$. Штавише ако је $cat(M) = 0$ онда је $M \simeq *$ па је $H^k_{dR}(M) = \{0\}$ за $k \geq 1$. Овај резултат се може уопштити.

2.1 Кохомолошка дужина

Како је у Де Рамовој кохомологији добро дефинисан клинасти производ две класе можемо закључити да је:

$$(H^*_{dR}(M), +, \cdot, \wedge), \quad H^*_{dR}(M) = \bigoplus_{k=0}^{dimM} H^k_{dR}(M)$$

градуисана асоцијативна алгебра над пољем $\mathbb{R}$.

Дефиниција 2.1.1. $cup_{\mathbb{R}}(M)$ је највећи број $n \in \mathbb{N}_0$ такав да постоје хомогени градуисани елементи $[\alpha_1], ..., [\alpha_n] \in H^*_{dR}(M)$ степена већег од 0 такви да $[\alpha_1] \wedge ... \wedge [\alpha_n] \neq 0$. $cup_{\mathbb{R}}$ називамо кохомолошком дужином (*cuplength*) простора M у $\mathbb{R}$.

Резултат да је $H^k_{dR}(M) = \{0\}$ за $k \geq 1$ уколико је M контрактибилан се заснива на чињеници да уколико су идентитета и константно пресликавање хомотопни онда по Витнијевој теореми морају бити и глатко хомотопни (јер су оба пресликавања глатка). Одатле из Картанове формуле имамо да је $[\alpha] = [id^*\alpha] = [C^*_{x_0}\alpha] = 0$ кад је $deg(\alpha) \geq 1$. Међутим уколико покривач категорије $\{U_1, \ldots, U_k\}$ садржи више од једног скупа $i^*_j\alpha$ и $i^*_j\beta$ за $i \neq j$ не припадају истом простору, па је онда природно питање како треба да схватимо $[i^*_j\alpha] \wedge [i^*_j\beta]$. Ово се да решити на два начина, или другачијом дефиницијом категорије или алатима кохомолошке алгебре. Овде ћемо приказати оба приступа.

Дефиниција 2.1.2. Нека је M глатка многострукост. $A \subseteq M$ је глатко амбијентално контрактибилан ако постоји глатко пресликавање $f : M \to M$ такво да је $f|_A = const.$ и $f \simeq id$.

Дефиниција 2.1.3. Глатка амбијентална Љустерник Шнирељманова категорија $cat^a(M)$ глатке многострукости M је најмање $n \in \mathbb{N}_0$ такво да постоји отворен покривач

$$\{U_1, U_2, \ldots, U_{n+1}\}$$

од M такав да је сваки U_i глатко амбијентално контрактибилан у M.

Приметимо да је сваки скуп који је амбијентално контрактибилан уједно и контрактибилан у M. Одатле можемо закључити да важи $cat(M) \leq cat^a(M)$. Са друге стране није сваки амбијентално контрактибилан скуп контрактибилан у M.

Пример 2.1.4. Већ смо видели да је $\mathbb{S}^n \backslash \{N\}$ контрактибилан у $\mathbb{S}^n$. Овај скуп није амбијентално контрактибилан у $\mathbb{S}^n$ јер би из чињенице да је $f|_{\mathbb{S}^n \backslash \{N\}} = const$ и непрекидности функције f следило да је $f = const$ одакле би из релације $f \simeq id$ добили да је $\mathbb{S}^n$ контрактибилан што знамо да не важи.

Ово међутим не значи да је $cat^a(\mathbb{S}^n) > 1$ јер можемо смањити скупове $\mathbb{S}^n \backslash \{N\}$ и $\mathbb{S}^n \backslash \{S\}$ тако да добијемо скупове $U \subset \mathbb{S}^n \backslash \{N\}$ и $V \subset \mathbb{S}^n \backslash \{S\}$ који покривају $\mathbb{S}^n$ а амбијентално су контрактибилни.

На пример можемо узети да је U неки скуп који садржи доњу полусферу $\mathbb{S}^n_- = \{x \in \mathbb{S}^n | x_{n+1} \leq 0\}$ а не садржи неку околину северног пола. Ово је могуће јер су и $\mathbb{S}^n_-$ и $\{N\}$ затворени и дисјунктни па их можемо раздвојити отвореним скуповима. Одатле следи да ће $\overline{U}$ бити садржан у $\mathbb{S}^n \backslash \{N\}$ па опет користећи чињеницу да су $\overline{U}$ и $\{N\}$ затворени и дисјунктни можемо наћи отворен скуп U', такав да је $\overline{U} \subset U'$ и $\overline{U'} \subset \mathbb{S}^n \backslash \{N\}$.

Како скупове $\overline{U}$ и $(U')^c$ можемо функционално раздвојити глатком функцијом можемо модификовати постојећу хомотопију $i_{\mathbb{S}^n \backslash \{N\}} \simeq const.$ тако да добијемо глатку хомотопију H којом U контрахујемо у тачку при чему ће на $(U')^c \backslash \{N\}$ важити $H(x,t) = x$. Јасно је да ову хомотопију можемо глатко продужити у $\{N\}$. Слично можемо конструисати и V тако да садржи горњу полусферу.

Приметимо да смо у горњој конструкцији користили чињеницу да је $\mathbb{S}^n$ нормалан и да два дисјунктна затворена скупа можемо раздвојити глатком функцијом (што је последица егзистенције разбијања јединице). Како свака многострукост има разбијање јединице (а самим тим је и нормалан тополошки простор) сличним поступком можемо доказати наредно тврђење.

Став 2.1.5. Нека је M многострукост. Тада важи $cat^a(M) = cat(M)$.

Доказ: Како знамо да је $cat(M) \leq cat^a(M)$ довољно је да докажемо другу неједнакост.

Нека је $\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$ покривач категорије. Како су одговарајуће инклузије хомотопне константним пресликавањима оне морају бити и глатко хомотопне (Витнијева теорема), односно постоје глатка пресликавања

$$H_j : U_j \times I \to X \qquad H_j(x, 0) = x \qquad H_j(x, 1) = x_j, \qquad j \in \{1, \ldots, n+1\}.$$

Примењујући конструкцију из леме 2.3.1 (у глаткој формулацији) добијамо жељену неједнакост.

□

Сада можемо доказати следећу оцену.

Став 2.1.6. $cup_{\mathbb{R}}(M) \leq cat(M)$.

Доказ: Нека је $cat(M) = cat^a(M) = l$ и нека је $U_1, \ldots, U_{l+1}$ одговарајући покривач амбијентално контрактибилним скуповима. Показаћемо да је $[\alpha_1] \wedge \cdots \wedge [\alpha_{l+1}] = 0$, за произвољне $[\alpha_i] \in H^*_{dR}(M)$, $deg(\alpha_i) \geq 1$.

Са $f_i : M \to M$ означићемо неко глатко пресликавање такво да је $f|_{U_i} = const.$ и $f \simeq id$. Из $f \simeq id$ следи да је $\alpha_i = f_i^*\alpha_i + d\omega_i$. Због тога имамо да је:

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{l+1} = f_1^*\alpha_1 \wedge \cdots \wedge f_{l+1}^*\alpha_{l+1} + \sum_j \beta_{1,j} \wedge \cdots \wedge \beta_{i+1,j}$$

где је за свако j бар једна од форми $\beta_{1,j}, \ldots \beta_{i+1,j}$ тачна док су све остале затворене. Одатле је и $\beta_{1,j} \wedge \cdots \wedge \beta_{i+1,j}$ тачна форма, па можемо закључити да је $[\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{l+1}] = [f_1^*\alpha_1 \wedge \cdots \wedge f_{l+1}^*\alpha_{l+1}]$.

Са друге стране из $f|_{U_i} = const.$ и чињенице да је $deg(\alpha_i) \geq 1$ можемо закључити да је $(f_i^*\alpha_i)|_{U_i} = 0$. Одатле како је $\{U_i\}$ покривач од M закључујемо да је $f_1^*\alpha_1 \wedge \cdots \wedge f_{l+1}^*\alpha_{l+1} = 0$.

Из свега претходног следи да је $[\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{l+1}] = 0$ па је $cup_{\mathbb{R}}(M) \leq cat(M)$. □

Како је Де Рамов кохомолошки прстен изоморфан сингуларном кохомолошком прстену са коефицијентима у $\mathbb{R}$, природно је уопштити претходно доказану оцену за произвољан комутативан прстен.

Дефиниција 2.1.7. Нека је R комутативан прстен и нека је X тополошки простор. R-кохомолошка дужина од X је најмањи цео број тако да су сви $(k+1)$ - тоструки cup производи једнаки 0 у редукованом кохомолошком прстену $\tilde{H}^*(X; R)$. Овај број означавамо са $cup_R(X)$ и називамо га $R-$кохомолошком дужином.

Напомена 2.1.8. Ова дефиниција еквивалентна је са претходном у случају $R = \mathbb{R}$ јер редукцијом кохомолошког прстена искључујемо $0-$форме из прстена те није потребан додатан услов за степен.

Став 2.1.9. $R-$кохомолошка дужина простора X је мања или једнака од категорије тог простора. Односно:

$$cup_R(X) \leq cat(X).$$

Доказ: Нека је $U_1, \ldots, U_{l+1}$ један покривач категорије, и нека су $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l+1} \in \tilde{H}^*(X; R)$. За свако $k \in \{1, \ldots, l+1\}$ имамо дуги тачан низ:

$$\ldots \xleftarrow{\delta^*} \tilde{H}^*(U_k;R) \xleftarrow{i_k^*} \tilde{H}^*(X;R) \xleftarrow{j_k^*} \tilde{H}^*(X,U_k;R) \xleftarrow{\delta^*} \ldots$$

Како је U_k контрактибилан у X закључујемо да је $i^*\alpha_k = 0$. Из дугог тачног низа следи да постоји $\beta_k \in \tilde{H}^*(X,U_k;R)$ тако да је $j^*\beta_k = \alpha_k$.

Производ $\beta_1 \smile \cdots \smile \beta_{l+1}$ је елемент прстена $\tilde{H}^*(X,\cup_{i=1}^{l+1}U_i;R)$. Инклузија $j:(X,U_k) \to (X,\cup_{i=1}^{l+1}U_i)$ индукује хомоморфизам прстена $j^*:\tilde{H}^*(X,\cup_{i=1}^{l+1}U_i;R) \to \tilde{H}^*(X,U_k;R)$ при чему је:

$$j^*(\beta_1 \smile \cdots \smile \beta_{l+1}) = j_1^*\beta_1 \smile \cdots \smile j_{l+1}^*\beta_{l+1} = \alpha_1 \smile \cdots \smile \alpha_{l+1}.$$

Како је $\cup_{i=1}^{l+1}U_i = X$ следи да је $\tilde{H}^*(X,\cup_{i=1}^{l+1}U_i;R) = \tilde{H}^*(X,X;R) = 0$ па је $\alpha_1 \smile \cdots \smile \alpha_{l+1} = 0$, одакле следи тврђење.

$\square$

Пример 2.1.10. $cat(M^{2n}) \geq n$, где је M затворена симплектичка многострукост.

$\omega^{\wedge n} = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ је форма запремине на M па је због тога њена кохомолошка класа нетривијална. Одатле је је $cup_{\mathbb{R}}(M) \geq n$.

Последица 2.1.11. Сфера $\mathbb{S}^n$ допушта симплектичку структуру само за $n = 2$.

Доказ: Симплектичке многострукости морају бити парне димензије. Додатно знамо да је $cat(\mathbb{S}^{2k}) = 1$, па неједнакост из претходног примера важи само за $k = 1$.

Са друге стране како је у димензији 2 симплектичка форма заправо форма оријентације, и како је $\mathbb{S}^2$ оријентабилна, можемо закључити да $\mathbb{S}^2$ допушта симплектичку структуру.

$\square$

2.2 Лебегова димензија

Дефиниција 2.2.1. Нека је $\mathbf{U} = \{U_i\}$ отворен покривач простора X. Ред покривача (у ознаци $ord(\mathbf{U})$ је најмањи број $n \in \mathbb{N}$ (ако такав постоји) такав да свака тачка простора X налази у највише n скупова из покривача.

Дефиниција 2.2.2. Нека је X тополошки простор. Лебегова (покривајућа) димензија је најмањи број $n \in \mathbb{N}_0$ тако да сваки отворен покривач простора X има отворено профињење реда $n+1$ или мањег. Лебегову димензију од X означавамо са $dim(X)$.

Напомена 2.2.3. У случају да је X CW комплекс или многострукост Лебегова димензија је једнака димензији ћелијског комплекса односно димензији многострукости (погледати [12]). Тиме оправдавамо ознаку $dim(X)$.

Показаћемо да је димензија једно горње ограничење категорије у случају паракомпактиних локално контрактибилних путно повезаних простора. Пре тога доказаћемо једно помоћно тврђење.

Лема 2.2.4. Нека је X паракомпактан Хаусдорфов тополошки простор и нека $\mathbf{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ отворено покривање простора реда n. Тада постоји отворено профињење овог покривача

$$\mathbf{V} = \{V_{i\beta}\}, \qquad i \in \{1, \ldots, n+1\}$$

такво да је $V_{i\beta} \cap V_{i\beta'} = \emptyset$, за $\beta \neq \beta'$.

Доказ: Како је X паракомпактан имамо разбијање јединице подређено произвољном покривачу. Штавише како је ред покривача $\mathbf{U}$ коначан можемо индексирати разбијање јединице овог покривача са A. Односно постоји разбијање јединице $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ такво да је $supp(\varphi_\alpha) \subseteq U_\alpha$.

Нека је сада

$$B_i = \{\beta = \{\alpha\}_{\alpha\in A_0} | A_0 \subseteq A,\ |A_0| = i\}, \qquad i \in \{1, \ldots, n+1\}.$$

За произвољно $\beta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_i\} \in B_i$ дефинишемо

$$V_{i\beta =} \{x \in X | \forall j \in \{1, \ldots, i\}\ \varphi_{\alpha_j}(x) > 0, \quad (\forall \alpha \in A \backslash \beta)\ \varphi_\alpha(x) < \varphi_{\alpha_j}(x)\}.$$

Пошто $\mathbf{U}$ има коначан ред следи да је за свако $x \in X$ коначно много функција φ_α различито од нуле у некој околини x па је $V_{i\beta}$ отворен. Такође како не може за $\alpha \neq \alpha'$ бити истовремено $\varphi_\alpha(x) < \varphi_{\alpha'}(x)$ и $\varphi_\alpha(x) > \varphi_{\alpha'}(x)$ закључујемо да за $\beta \neq \beta'$ мора важити:

$$V_{i\beta} \cap V_{i\beta'} = \emptyset.$$

Из релације

$$V_{i\beta} \subseteq \bigcap_{\alpha\in\beta} supp(\varphi_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha\in\beta} U_\alpha$$

имамо да $\{V_{i\beta}\}$ профињује $\mathbf{U}$, па је остало још да покажемо је $\{V_{i\beta}\}$ покривач.

Нека је $x \in X$ произвољно. Тада $x \in \bigcap_{i=1}^m U_{\alpha_i}$ па како је $ord(\mathbf{U}) = n+1$ мора бити да је $m \leq n+1$. Нека је

$$\varphi_{\alpha_1}(x) = \varphi_{\alpha_2}(x) = \cdots = \varphi_{\alpha_k}(x) > \varphi_{\alpha_{k+1}}(x) \geq \cdots \geq \varphi_m(x).$$

Тада $x \in V_{k\beta}$ где је $\beta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$.

□

Став. 2.2.5. Нека је X паракомпактан локално контрактибилан путно повезан тополошки простор. Тада је

$$cat(X) \leq dim(X).$$

Доказ: Нека је $\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$ покривач категорије, и нека је $dim(X) = k$. Тада постоји профињење $\mathbf{W}$ покривача категорије реда највише $k+1$. Користећи претходну лему можемо профинити $\mathbf{W}$ тако да добијемо покривач

$$\mathbf{V} = \{V_{i\beta}\}, \qquad i \in \{1, \ldots, k+1\}$$

при чему је $V_{i\beta} \cap V_{i\beta'} = \emptyset$, за $\beta \neq \beta'$. Јасно је да је онда $\mathbf{V}$ профињење од $\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$.

Нека је сада $G_i = \bigcup_\beta V_{i\beta}$. Сваки $V_{i\beta}$ је контрактибилан у X јер је садржан у неком U_j. Како је простор X путно повезан и како је G_i дисјунктна унија отворених скупова контрактибилних у X можемо закључити да је G_i отворен и контрактибилан у X. Поред тога $\{G_1, \ldots, G_{k+1}\}$ је покривач од X јер је $\mathbf{V}$ покривач.

Из дефиниције категорије сада можемо закључити да мора бити $n + 1 \leq k + 1$.

$\square$

Како су многострукости (а и CW комплекси) локално контрактибилни паракомпакни Хаусдорфови простори можемо израчунати категорију следећих простора.

примери 2.2.6.

1. $cat(\mathbb{T}^n) = n$

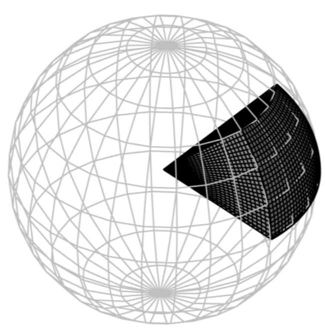
   $d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_n$ је форма запремине на торусу, па можемо закључити да је $n = cup_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}^n) \leq cat(\mathbb{T}^n)$. Са друге стране $dim(\mathbb{T}^n) = n$, одакле следи закључак.

2. $cat(\mathbb{R}P^n) = n$

   $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^{n+1} \rangle$. Одатле следи да је $cup_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}P^n) = n$, па како је димензија $\mathbb{R}P^n$ n можемо закључити да је $cat(\mathbb{R}P^n) = n$.

Последица 2.2.7. Ако је $\mathbb{S}^n$ покривена затвореним скуповима $B_1, \ldots, B_{n+1}$ тада бар један скуп B_i садржи пар антиподалних тачака.

Доказ: Претпоставимо да скупови $B_1, \ldots, B_{n+1}$ не садрже антиподалне тачке. Нека је $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{D}^{n+1}$. Означимо са C_k скуп тачака који радијално повезује центар лопте и тачке из скупа B_k (погледати слику испод).



Јасно је да су скупови C_k контрактибилни па ако $\mathbb{R}P^{n+1}$ схватимо као $\mathbb{D}^{n+1}/\sim$, где је $\sim$ идентификација антиподалних тачака на $\mathbb{S}^n$, из чињенице да су инклузије

$$i_k : C_k \to \mathbb{R}P^n, \qquad k \in \{1, \ldots, n+1\}$$

инјективне (јер B_k не садржи пар антиподалних тачака) добијамо да су скупови $i(C_k)$ контрактибилни у $\mathbb{R}P^{n+1}$. Комбинујући то са чињеницом да су затворени и да покривају $\mathbb{R}P^{n+1}$ из напомене 2.5. закључујемо да је $cat(\mathbb{R}P^{n+1}) \leq n$ што је контрадикција.

$\square$

Напомена 2.2.8. Како је претходна последица заправо једна формулација Борсук-Уламове теореме, видимо да се и она а самим тим и Брауерова теорема о фиксној тачки могу схватити као последице тога што је $cat(\mathbb{R}P^n) = n$, што говори у прилог нетривијалности категорије.

Видели смо већ да је $cat(M) + 1 \leq \widetilde{crit}(M)$. Одатле је јасно да је $cat(M) + 1$ једно доње ограничење за број ћелија Морсових комплекса. Ово се може схватити и као последица следећег тврђења.

Став 2.2.9. Нека је $f : X \to Y$ непрекидно и нека је $C_f = Y \cup_f CX$ конус пресликавања f. Тада важи

$$cat(C_f) \leq cat(Y) + 1.$$

Доказ: Нека је

$$B = \{(x,t) \in CX | t < 2/3\}.$$

Означимо са $A = Y \cup_f B$. A има хомотопски тип од Y јер се идентификација дешава у $t = 1$, па је Y деформациони ретракт од A. Одатле је $cat(A) = cat(Y)$.

Са друге стране скуп $C = \{(x,t) \in CX | t > 1/3\}$ је контрактибилан ($C \simeq CX \simeq *$). Како су A и C отврени у C_f такви да је $A \cup C = C_f$ можемо из наредне леме закључити да важи

$$cat(C_f) = cat(A \cup C) \leq cat(A) + cat(C) + 1 = cat(Y) + 0 + 1 = cat(Y) + 1.$$

$\square$

Лема 2.2.10. Нека су X и Y отворени у $X \cup Y$. Тада важи $cat(X \cup Y) \leq cat(X) + cat(Y) + 1$.

Доказ: Нека је $\{U_1, \dots, U_{n+1}\}$ покривач категорије од X и нека је $\{V_1, \dots, V_{m+1}\}$ покривач категорије од Y. Како су X и Y отворени у $X \cup Y$ можемо да закључимо да су сви скупови из покривача отворени у $X \cup Y$. Поред тога како су контрактибилни у X односно Y морају бити контрактибилни у $X \cup Y$. Одатле следи да је $\{U_1, \dots, U_{n+1}, V_1, \dots, V_{n+1}\}$ један отворен покривач од $X \cup Y$ скуповима контрактибилним у $X \cup Y$.

$\square$

Како је лепљење $k-$ћелије одговара конусу пресликавања функције лепљења можемо закључити да додавањем једне ћелије можемо повећати категорију највише за 1. Одатле индукцијом лако закључујемо да важи следеће тврђење.

Став 2.2.11. Нека је X CW комплекс. Тада је укупан број ћелија већи или једнак од $cat(X) + 1$.

Ипак како је категорија хомотопска инваријанта било би добро проценити је са нечим што не зависи од избора декомпозиције. Посматрајмо следећу конструкцију.

Хомолошка декомпозиција CW комплекса

Нека је X просто повезан CW комплекс такав да је $H_n(X) \neq 0$ и $H_q(X) = 0$ за $q > n$. Тада хомотопски тип може бити реконструисан низом подкомплекса

$$X_2 \subseteq X_3 \subseteq \cdots \subseteq X_n = X$$

таквих да је $H_i(X_j) = 0$ за $i > j$ и $H_i(X_j) \cong H_i(X)$ за $i \leq j$. X_{j+1} добијамо као конус пресликавања

$$M(H_{j+1}(X), j) \to X_j.$$

где је $M(H_{j+1}(X), j)$ Муров простор такав да важи

$$H_j(M(H_{j+1}(X), j)) = H_{j+1}(X)$$

и све остале хомолошке групе су тривијалне. Одатле следи да ако је $H_{j+1}(X) = 0$ мора важити $X_{j+1} \simeq X_j$, па је јасно да само нетривијалне хомолошке групе могу променити категорију за 1. Оваква декомпозиција се назива хомолошка декомпозиција (погледати [13]).

Ако са $\mathbf{H}(X)$ означимо број позитивних k за које је $H_k(X)$ нетривијална из претходне дискусије можемо закључити да важи следеће тврђење.

Став 2.2.12. Нека је X просто повезан тополошки простор који има хомотопски тип CW комплекса. Ако је $H_q(X) = 0$ за $q > n$, онда важи

$$cat(X) \leq \mathbf{H}(X).$$

Ова оцена уопштава оцену дату димензијом у случају просто повезаних простора. Још општије важи следеће тврђење.

Став 2.2.13. Нека је X $(p-1)$-повезан $(p \geq 2)$ и $E = \{q \in \mathbb{Z} \mid q > 0, H_q(X) \neq 0\}$. Ако је E садржан у k затворених интервала дужине $p - 2$ тада је $cat(X) \leq k$.

Напомена 2.2.14. Приметимо да из става 2.2.12 можемо закључити да је $cat(\mathbb{C}P^n) \leq n$. Поред тога без експлицитне конструкције покривача може се видети да је $cat(\mathbb{S}^n) \leq 1$ за $n \geq 2$.

2.3 Вајтхедова категорија

У овом одељку ћемо поправити претходно показану горњу оцену категорије. Већ смо видели да није сваки контрактибилан скуп амбијентално контрактибилан (пример 2.1.4). Међутим, важи следећа лема.

Лема 2.3.1. Нека је X нормалан тополошки простор. Тада је $cat(X) \leq n$ акко постоји покривање $\{V_1, \ldots, V_{n+1}\}$ тако да је сваки V_j амбијентално контрактибилан у X, односно постоји хомотопија

$$H_j : X \times I \to X, \qquad H_j(x, 0) = x, \;\; x \in X, \qquad H_j(v, 1) = x_j, \;\; v \in V_j$$

где је x_j фиксирана тачка придружена V_j

Доказ: Јасно је да ако постоје овакве хомотопије важи $cat(X) \leq n$. Докажимо супротан смер.

Нека је $cat(X) \leq n$. Тада постоји отворен покривач $\{U_1, \dots, U_{n+1}\}$ и хомотопије

$$G_j : U_j \times I \to X, \qquad G_j(u, 0) = u, \;\; u \in U_j, \qquad G_j(u, 1) = x_j, \;\; u \in U_j.$$

Приметимо да је релација $\bigcup_j U_j = X$ еквивалентна релацији $\bigcap_j U_j^c = \emptyset$. Из нормалности онда знамо да можемо пронаћи отворен скуп T_1 такав да је

$$U_1^c \subset T_1, \qquad \overline{T_1} \cap \bigcap_{j \neq 1} U_j^c = \emptyset.$$

Даље понављајући поступак можемо пронаћи T_2 тако да

$$U_2^c \subset T_2, \qquad \overline{T_1} \cap \overline{T_2} \bigcap_{j \neq 1,2} U_j^c = \emptyset.$$

Индукцијом долазимо до отворених скупова $T_1, \dots, T_{n+1}$ таквих да важи

$$U_j^c \subset T_j, \qquad \bigcap_{j=1}^{n+1} \overline{T_j} = \emptyset.$$

Одатле узимајући да је $W_j = \overline{T_j}^c$ добијамо отворене скупове $W_1, \dots, W_{n+1}$ такве да важи

$$W_j \subset \overline{W_j} \subset U_j, \qquad \bigcup_{j=1}^{n+1} W_j = X.$$

Понављајући још једном овај поступак добијамо отворен покривач $\{V_j\}$ од X такав да је

$$V_j \subset \overline{V_j} \subset W_j \subset \overline{W_j} \subset U_j, \qquad j \in \{1, \dots, n+1\}.$$

Сада можемо (опет због нормалности X) функционално раздвојити скупове $\overline{V_j}$ и W_j^c. Прецизније постоје непрекидне функције

$$\lambda_j : X \to [0,1], \qquad \lambda_j(\overline{V_j}) = 1, \qquad \lambda_j(W_j^c) = 0$$

што нам омогућава да дефинишемо тражене хомотопије

$$H_j(x,t) = \begin{cases} x, & x \in (\overline{W_j})^c \\ G(x, t\lambda_j(x)), & x \in U_j \end{cases}.$$

Када је $x \in U_j \cup (\overline{W_j})^c \subset W_j^c$ знамо да је $\lambda_j(x) = 0$ па је

$$G(x, t\lambda_j(x)) = G(x, 0) = x$$

одакле следи да је H_j добро дефинисано. Осим тога H_j је непрекидно на $U_j \times I$ и на $\overline{W_j}^c \times I$ па је H_j непрекидно на $X \times I$ јер је $U_j \times I \cup \overline{W_j}^c \times I = X \times I$.

$\square$

Напомена 2.3.2. Уколико је покривач категорије $\{U_1, \dots, U_{n+1}\}$ такав да за одговарајуће инклузије важи

$$i_j \simeq C_{x_j}, \qquad (rel\ \ x_j)$$

тада скупове V_i из претходне леме можемо изабрати тако да $x_j \in V_j \subset T_j \subset U_j$. Из доказа је онда јасно да ће важити и

$$H_j(x_j, t) = x_j, \qquad t \in [0, 1].$$

Кажемо да је x_0 недегенерисана базна тачка тополошког простора X ако пар (X, x_0) има својство проширења хомотопије (погледати одељак A).

Последица 2.3.3. Нека је X путно повезан нормалан простор са недегенерисаном базном тачком x_0. Ако је $cat(X) = n$ тада постоји отворен покривач категорије

$$\{V_1, \dots, V_{n+1}\}$$

такав да $x_0 \in \bigcap_j V_j$ и непрекидне функције $f_j : X \to X$, $j \in \{1, \dots, n+1\}$ такве да је

$$f_j(V_j) = x_0, \qquad f \simeq id\ \ (rel\, x_0).$$

Доказ: Из претходне леме и напомене јасно је да је довољно пронаћи отворен покривач $\{U_1, \dots, U_{n+1}\}$ такав да је сваки U_i контрактибилан у X релативно базној тачки x_0.

Нека је $\{W_1, \dots, W_{n+1}\}$ покривач категорије. Тада је

$$i_j \overset{H_j}{\simeq} C_{x_j}, \qquad j \in \{1, \dots, n+1\},$$

где је $i_j : W_j \to X$ инклузија и $x_j \in X$, а H_j одговарајућа хомотопија.

Пошто је x_0 недегенерисана базна тачка можемо пронаћи њену отворену околину N и контрахујућу хомотопију

$$G : N \times I \to X, \qquad G(x, 0) = x, \qquad G(x, 1) = x_0, \qquad G(x_0, t) = x_0.$$

Такође како је простор X нормалан можемо пронаћи отворен покривач $\{T_1, \dots, T_{n+1}\}$ такав да је

$$T_j \subset \overline{T_j} \subset W_j.$$

Без губљења на општости можемо претпоставити да је $x_0 \in T_j$, $j \in \{1, \dots, k\}$ и $x_0 \notin T_j$, $j \in \{k+1, \dots, n+1\}$. Тада можемо дефинисати нову околину базне тачке

$$N' = N \cap W_1 \cap W_2 \cap \dots \cap W_k \cap (X \backslash \overline{T_{k+1}}) \cap \dots \cap (X \backslash \overline{T_{n+1}}).$$

Приметимо да је N' отворена околина базне тачке x_0 таква да је $N' \cap T_j = \emptyset$, $j \in \{k+1, \ldots, n+1\}$. Ако са M означимо неку отворену околину тачке x_0 за коју важи

$$M \subset \overline{M} \subset N'$$

можемо закључити да је M контрактибилна релативно x_0 путем хомотопије G јер је $M \subset N' \subset N$. Дефинишимо сада покривач $\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$. Нека је

$$U_j = (W_j \cap (X \backslash \overline{M})) \cup M, \qquad j \in \{1, \ldots, k\}$$

и

$$U_j = T_j \cup N', \qquad j \in \{k+1, \ldots, n+1\}.$$

Приметимо да како $\{T_i\}$ покрива X мора бити да је $\{U_i\}$ такође отворен покривач од X јер $U_j = (W_j \cap (X \backslash \overline{M})) \cup M$ садржи све тачке из T_j $(1 \leq j \leq k)$ осим тачака које припадају $\overline{M} \backslash M$ а оне су свакако садржане у U_j за $j > k$. Осим тога свако U_j саджи x_0 и при томе је дисјунктна унија два отворена скупа таква да је онај који садржи x_0 контрактибилан релативно x_0. Ово и чињеница да је простор путно повезан ће нам омогућити конструкцију жељене хомотопије. Означимо са γ_j пут од x_j до x_0 $(1 \leq j \leq n+1)$.

За $j \in \{1, \ldots, k\}$

$$\overline{H}_j(x,t) = \begin{cases} \begin{cases} H_j(x, 2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_j(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}, & x \in W_j \cap (X \backslash \overline{M}) \\ G(x,t), & x \in M \end{cases},$$

а за $j \in \{k+1, \ldots, n+1\}$

$$\overline{H}_j(x,t) = \begin{cases} \begin{cases} H_j(x, 2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_j(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}, & x \in T_j \\ G(x,t), & x \in N' \end{cases}.$$

Применом конструкције из претходне леме на покривач $\{U_1, \ldots, U_{n+1}\}$ и хомотопије $\overline{H}_j$ уз коришћење напомене 2.3.2. добијамо жељени покривач $\{V_j\}$.

$\square$

Овај резултат мотивише увођење нове категорије.

Дефиниција 2.3.4. Нека је (X, x_0) простор са базном тачком. k-ти *fat wedge* производ је тополошки простор

$$T^k(X, x_0) = \{(x_1, \ldots, x_k) \in X^k \mid (\exists j \in \{1, \ldots, k\})\ x_j = x_0\}.$$

Дефиниција 2.3.5. Нека је (X, x_0) нормалан путно повезан тополошки простор са недегенерисаном базном тачком. Вајтхедова категорија је најмањи број $n \in \mathbb{N}_0$ такав да постоји пресликавање $\Delta' : X \to T^{n+1}(X, x_0)$ такво да следећи дијагам

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta'"] \arrow[dr, "\Delta"'] & T^{n+1}(X,x_0) \arrow[d, "i"] \\ & X^{n+1} \end{tikzcd}$$

комутира у хомотопској категорији (са Δ је означено дијагонално пресликавање). Овако дефинисану категорију означавамо са $cat^{Wh}(X, x_0)$.

Напомена 2.3.6. Као што ћемо видети из следећег тврђења ова дефиниција је независна од избора недегенерисане базне тачке па ову категорију означавамо са $cat^{Wh}(X)$.

Став 2.3.7. Нека је X нормалан путно повезан тополошки простор са недегенерисаном базном тачком x_0. Тада важи

$$cat(X) = cat^{Wh}(X, x_0).$$

Доказ: Докажимо прво да је $cat(X) \leq cat^{Wh}(X, x_0)$.

Нека је $cat^{Wh}(X, x_0) = n$. Тада постоји пресликавање $\Delta' : (X, x_0) \to (T^{n+1}(X, x_0), X_0)$ такво да је

$$\Delta \overset{H}{\simeq} \Delta' \circ i.$$

При томе нека је $\Delta = H(\cdot, 0)$ и $\Delta' \circ i = H(\cdot, 1)$ Означимо са $p_j : X^{n+1} \to X$ пројекцију на j-ту координату ($1 \leq j \leq n+1$). Дефинишимо пресликавања $H_j = p_j \circ H$, и $h_j = H_j(\cdot, 1)$. Како је

$$T^{n+1}(X, x_0) = \bigcup_{j=1}^{n+1} p_j^{-1}(x_0), \qquad (\Delta' \circ i)(X) \subseteq T^{n+1}(X, x_0)$$

можемо закључити да ће за неку контрактибилну отворену околину N базне тачке x_0 скупови

$$U_j = h_j^{-1}(N), \qquad j \in \{1, \ldots, n+1\}$$

дефинисати један отворен покривач од X. Покажимо још да су ови скупови контрактибилни. Нека је G хомотопија која контрахује N у тачку при чему је $G(x, 0) = x$, а $G(x, 1) = x_0$. Тада су

$$L_j : U_j \times I \to X, \qquad L_j(x,t) = \begin{cases} H_j(x, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(h_i(x), 2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}, \qquad 1 \leq j \leq n+1$$

тражене контрахујуће хомотопије па је $cat(X) \leq n$.

Покажимо сада да важи и $cat(X) \geq cat^{Wh}(X, x_0)$.

Нека је $cat(X) = n$. Из последице 2.3.2. знамо да постоји покривач $\{V_1, \ldots, V_{n+1}\}$ такав да $x_0 \in \bigcap_j V_j$ и непрекидне функције $f_j : X \to X$, $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ такве да је

$$f_j(V_j) = x_0, \qquad f \overset{H_j}{\simeq} id \;\; (rel\, x_0).$$

Дефинишимо пресликавање

$$\Delta' : X \to T^{n+1}(X, x_0), \qquad \Delta'(x) = (f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x)).$$

Ово пресликавање је добро дефинисано јер је $\{V_1, \ldots, V_{n+1}\}$ покривач. Дефинишимо сада хомотопију

$$H : X \times I \to X^{n+1}, \qquad H(x,t) = (H_1(x,t), \ldots, H_n(x,t)).$$

Како за свако $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ имамо да је $H_j(x,0) = x$ и $H_j(x,1) = f_j(x)$ можемо закључити да важи:

$$H(x,0) = \Delta(x), \qquad H(x,1) = i \circ \Delta'(x).$$

одакле следи да је $cat^{Wh}(X, x_0) \leq n$.

□

Напомена 2.3.8. Из последице 2.3.2 је јасно да је хомотопија пресликавања Δ и $i \circ \Delta'$ уствари хомотопија релативно базној тачки x_0. Сходно томе еквивалентно смо могли рећи да је Вајтхедова категорија најмање n такво да дијаграм

$$\begin{tikzcd}
(X, x_0) \arrow[r, "\Delta'"] \arrow[dr, "\Delta"'] & (T^{n+1}(X, x_0), X_0) \arrow[d, "i"] \\
 & (X^{n+1}, X_0)
\end{tikzcd}$$

комутира у хомотопској категорији ($X_0 = (\overbrace{x_0, \ldots, x_0}^{n+1})$).

Сада када имамо Вајтхедову дефиницију категорије можемо доказати главни резултат овог одељка. Пре тога наводимо једну лему.

Лема 2.3.9. n-повезан CW комплекс X је хомотопски еквивалентан CW комплексу X' са тривијаланим n-скелетоном таквим да важи $dim(X') \leq dim(X)$.

Доказ: погледати [14].

Теорема 2.3.10. Нека је X $(n-1)$-повезан CW комплекс $(n \geq 1)$. Тада важи

$$cat(X) \leq \frac{dim(X)}{n}.$$

Доказ: Из претходне леме можемо претпоставити да X има једну нула ћелију e^0, коју ћемо узети за (недегенерисану) базну тачку и нема других ћелија димензије мање од n. Ово даље имплицира да се $T^{k+1}(X)$ разликује од X^{k+1} почевши од димензије $n(k+1)$ где X^{k+1} има $n(k+1)$-ћелију добијену као производ $k+1$ n-ћелија. Нека је k такво да важи

$$nk \leq dim(X) < n(k+1).$$

Из теореме о ћелијској апроксимацији имамо да је дијагонала $\Delta : X \to X^{k+1}$ хомотопна неком ћелијском пресликавању. Како је $dim(X) < n(k+1)$ и како се $T^{k+1}(X)$ разликује од X^{k+1} почевши од димензије $n(k+1)$, закључујемо да се то ћелијско пресликавање факторише кроз $T^{k+1}(X)$ па се дијагонала хомотопно факторише кроз $T^{k+1}(X)$ Одатле закључујемо да важи

$$cat(X) = cat^{Wh}(X) \leq k \leq dim(X)/n.$$

□

Последица 2.3.11. Нека је M $(n-1)$-повезана многострукост $(n \geq 1)$. Тада је

$$cat(M) \leq \frac{dim(M)}{n}.$$

Доказ: Из последице 1.3.8 знамо да постоји ћелијски комплекс X такав да је $M \simeq X$. Осим тога, из природе тог комплекса (теорема 1.2.5.) јасно је да важи $dim(X) \leq dim(M)$ па из претходне теореме имамо да важи

$$cat(M) = cat(X) \leq \frac{dim(X)}{n} \leq \frac{dim(M)}{n}.$$

□

Примери 2.3.12.

1. $cat(M) = n$ (M^{2n}-просто повезана симплектичка многострукост)

   Већ знамо да је $cup_{\mathbb{R}}(M) \geq n$ па комбинујући са претходном последицом добијамо

   $$n \leq cup_{\mathbb{R}}(M) \leq cat(M) \leq \frac{dim(M)}{2} = n.$$

2. $cat(\mathbb{C}P^n) = n$

   Фубини-Студијева форма

   $$\omega := \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\, ln\, \|\eta\|^2, \qquad [\eta_0 : \cdots : \eta_n] \in \mathbb{C}P^n$$

   је симплектичка форма на $\mathbb{C}P^n$ и $\pi_1(\mathbb{C}P^n) = 0$ па из претходног примера следи закључак.

Из Вајтхедове формулације категорије можемо видети и везу фундаменталне групе простора и категорије.

Став 2.3.13. Нека је X нормалан путно повезан простор са недегенерисаном базном тачком x_0. Ако је $cat(X) = 1$ онда је $\pi_1(X)$ слободна група.

Доказ: Простор $T^2(X, x_0)$ можемо схватити као $X \vee X$ па из Вајтхедове дефиниције категорије имамо да дијаграм

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\Delta"'] & X \vee X \arrow[d, "j"] \\ & X \times X \end{tikzcd}$$

комутира у хомотопској категорији. Одатле следи да дијаграм

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\Delta_*"'] & \pi_1(X) * \pi_1(X) \arrow[d, "j_*"] \\ & \pi_1(X) \times \pi_1(X) \end{tikzcd}$$

комутира. Како је $p_1 \circ \Delta = id_X$ можемо закључити да је $(p_1)_* \circ \Delta_* = id_{\pi_1(X)}$ па Δ_* мора бити инјективно. Из претходног дијаграма можемо закључити да је и φ_* инјективно. Одатле следи да $\pi_1(X)$ можемо схватити као подгрупу $\pi_1(X) * \pi_1(X)$, штавише важи

$$\pi_1(X) \cong im(\varphi_*) \subset F, \qquad F = (j_*)^{-1}(im(\Delta_*)).$$

Покажимо да је F слободна група.
Означимо са α_i произвољан ненула елемент $\pi_1(X)$ у првом чиниоцу слободног производа $\pi_1(X) * \pi_1(X)$, и са $\overline{\alpha_i}$ одговарајући елемент другог чиниоца. Скуп $\{\alpha_i \overline{\alpha_i}\}_i$ је слободан јер слободан производ $*$ не задаје релације између чинилаца. Нека је

$$G = \langle \{\alpha_i \overline{\alpha_i}\}_i | - \rangle.$$

Јасно је да је $G \subseteq F$.

Са друге стране ако је x реч дужине $n = 1$ у F, мора бити да је $j_* x \in im(\Delta)$ па су прва и друга координата $j_* x$ једнаке. Одатле закључујемо да је x неки од генератора G те је $x \in G$.

Нека је сад свака реч из F дужине строго мање од n садржана у G и нека је $x = \alpha_1 \widetilde{\alpha_1} \ldots \alpha_n \widetilde{\alpha_n}$ реч дужине n у F. Нека је $y = (\overline{\alpha}_1)^{-1} \alpha_1^{-1} x (\overline{\alpha}_n)^{-1} \alpha_n^{-1}$. Одавде имамо да је $y^{-1} = \alpha_n \overline{\alpha}_n x^{-1} \alpha_1 \overline{\alpha}_1$ па је y^{-1} реч дужине мање од n која припада F те по претпоставци y^{-1} (а самим тим и y) припада G. То даље имплицира да

$$x = \alpha_1 \overline{\alpha}_1 y \alpha_n \overline{\alpha}_n$$

припада G. Из свега овога можемо закључити да је $G = F$ па је $\pi_1(x) \cong im(\varphi_*)$ подгрупа слободне групе те је самим тим и она слободна (теорема 2.4.9.).

$\square$

Последица 2.3.14. Нека је X нормалан путно повезан тополошки простор са недегенерисаном базном тачком x_0. Ако $\pi_1(X)$ није слободна група онда је $cat(X) \geq 2$.

Пример 2.3.15. Нека је $M = \mathbb{S}^3/\widetilde{I}$ Поенкареова хомолошка сфера ($\widetilde{I}$ је бинарна икосаедрална група). Како се хомолошке групе овог простора поклапају са хомолошким групама 3− сфере можемо закључити да је $\mathbf{H}(X) = 1$. Са друге стране $\pi_1(M) = \widetilde{I}$ а $\widetilde{I}$ је коначна група па не може бити слободна. Стога из претходне последице можемо закључити да је $cat(M) \geq 2$.

Одавде је јасно да простор задовољава све услове става 2.2.12 (M је многострукост па има хомотопски тип CW комплекса) осим услова да је M просто повезан. Због тога можемо закључити да се оцена

$$cat(X) \leq \mathbf{H}(X)$$

не може генерализовати на просторе који нису просто повезани.

2.4 Генеина формулација категорије

У овом одељку упознаћемо се са још једном реформулацијом категорије коју је увео Тудор Генеа. Заједно са теоријом рационалне хомотопије она даје лавину нових резултата и оцена категорије. За више о томе погледати [11].

Ми ћемо помоћу ове формулације категорије израчунати категорију асферичних симплектичких многострукости.

Да бисмо разумели Генеину категорију искористићемо већ познату Вајтхедову формулацију.

Нека је X простор са базном тачком и нека је $\Delta : X \to X^{n+1}$ дијагонала и $j_{n+1} : T^{n+1}(X) \to X^{n+1}$ инклузија. Означимо са

$$\widetilde{G}_n(X) = P(\delta, j_{n+1}) = \{(\theta, x, y) \in (X^{n+1})^I \times X \times T^{n+1}(X) \mid \Delta(x) = \theta(0), j_{n+1}(y) = \theta(1)\}$$

хомотопски *pullback* датих пресликавања (погледати одељак А)

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G}_n(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\widetilde{p}_n"'] & T^{n+1}(X) \arrow[d, "j_{n+1}"] \\ X \arrow[r, "\Delta"] & X^{n+1} \end{tikzcd} .$$

Са $\widetilde{p}_n$ и δ су означене природне пројекције.

Став 2.4.1. Постоји сечење $s : X \to \widetilde{G}_n(X)$ од $\widetilde{p}_n$ акко је $cat(X) \leq n$.

Доказ: Из одељка A знамо да је $\widetilde{G}_n(X) \xrightarrow{\widetilde{p}_n} X$ фибрација па ако имамо $s' : X \to \widetilde{G}_n(X)$ такво да је $\widetilde{p}_n \circ s' \overset{H}{\simeq} id_x$ из својства подизања хомотопије следи да постоји хомотопија $\tilde{H}$ таква да је $\widetilde{p}_n \circ \tilde{H} = H$ и $\tilde{H}(\cdot, 0) = s'$. Означимо $s = H(\cdot, 1)$. Тада важи $\widetilde{p}_n \circ s = \widetilde{p}_n \circ \tilde{H}(\cdot, 1) = H(\cdot, 1) = id_X$. Одатле можемо закључити да је довољно тражити сечење до на хомотопију.

Нека је $cat(X) \leq n$. Тада постоји пресликавање $\Delta' : X \to T^{n+1}(X)$ такво да је $j_{n+1} \circ \Delta' \simeq \Delta$. Из својства хомотопског *pullback*-а имамо да постоји пресликавање $s : X \to \widetilde{G}_n(X)$ такво да наредни дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "s"] \arrow[drr, bend left, "\Delta'"] \arrow[ddr, bend right, "id_X"'] & & \\
& \widetilde{G}_n(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\widetilde{p}_n"] & T^{n+1}(X) \arrow[d, "j_{n+1}"] \\
& X \arrow[r, "\Delta"] & X^{n+1}
\end{tikzcd}$$

у хомотопској категорији. Одатле је $\widetilde{p}_n \circ s \simeq id_x$.

Нека је сада s сечење и нека је $\Delta' = \delta \circ s$. Из комутативности дијаграма

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G}_n(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\widetilde{p}_n"'] & T^{n+1}(X) \arrow[d, "j_{n+1}"] \\
X \arrow[r, "\Delta"] & X^{n+1}
\end{tikzcd}$$

у хомотопској категорији јасно је да је $j_{n+1} \circ \Delta' \simeq \Delta$ па из Вајтхедове дефиниције категорије имамо да је $cat(X) \leq n$.

□

Да би ова дефиниција била оперативна морамо предефинисати $\widetilde{G}_n(X)$ на неки експлицитнији начин.

Из дефиниције имамо да је $T^1(X) = *$ где је $*$ базна тачка. Одатле можемо закључити да је

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}_0(X) &= \{(\theta, x, y) \in X^I \times X \times T^1(X) \mid x = \Delta(x) = \theta(0), * = j_1(*) = \theta(1)\} \\
&= \{(\theta, x, y) \in (X)^I \times X \times \{*\} \mid \theta(0) = 0, \theta(1) = *\} \approx PX
\end{aligned}$$

где је PX простор путева који почињу у $*$. Одавде је јасно да се $\widetilde{G}_0 \to X$ може схватити као фибрација

$$\Omega X \to PX \to X$$

где је фибра ΩX простор петљи од $(X, *)$. Мотивисани овим закључком дајемо следећу дефиницију.

Дефиниција 2.4.2.

1) Нека $F_0(X) \xrightarrow{t_0} G_0(X) \xrightarrow{p_0} X$ означава фибрацију $\Omega X \to PX \to X$.

2) Нека је дефинисана фибрација $F_n(X) \xrightarrow{t_0} G_n(X) \xrightarrow{p_n} X$. Означимо са $C(i_n) = G_n(X) \cup C(F_n(X))$ конус пресликавања $i_n : F_n(X) \to G_n(X)$. Можемо продужити p_n до $q_n : C(i_n) \to X$ тако да важи $q_n(x) = p_n(x)$ за $x \in G_n(X)$ и $q_n([y,t]) = *$ за $[y,t] \in C(F_n(X))$.

3) Конверзијом пресликавања q_n у фибрацију $p_{n+1} : G_{n+1}(X) \to X$ (погледати одељак А.1.) добијамо да следећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd} G_n(X) \arrow[r] \arrow[dr, "p_n"'] & C(i_n) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "q_n"] & G_{n+1}(X) \arrow[dl, "p_{n+1}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

4) Настављајући на овај начин добијамо комутативан дијаграм Генеиних фибрација.

$$\begin{tikzcd} PX = F_0(X) \arrow[r] \arrow[d, "i_0"'] & F_1(X) \arrow[r] \arrow[d, "i_1"] & F_2(X) \arrow[r] \arrow[d, "i_2"] & \dots \arrow[r] & F_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "i_n"] & \dots \\ \Omega X = G_0(X) \arrow[r] \arrow[d, "p_0"'] & G_1(X) \arrow[r] \arrow[d, "p_1"] & G_2(X) \arrow[r] \arrow[d, "p_2"] & \dots \arrow[r] & G_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "p_n"] & \dots \\ X \arrow[r, "id"] & X \arrow[r, "id"] & X \arrow[r, "id"] & \dots \arrow[r, "id"] & X \arrow[r, "id"] & \dots \end{tikzcd}$$

Из функторијалности ове конструкције следи да важи следеће тврђење.

Став 2.4.3. Нека је $f : X \to Y$ пресликавање које чува базне тачке. Тада за свако $n \in \mathbb{N}_0$ индукује комутативан дијаграм

$$\begin{tikzcd} G_n(X) \arrow[r, "G_n(f)"] \arrow[d, "p_n"'] & G_n(Y) \arrow[d, "p_n"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}.$$

□

Додатно може се показати да је ова конструкција еквивалентна претходној. Прецизније важи следеће тврђење.

Теорема 2.4.4. За све $n \in \mathbb{N}_0$ постоји хомотопски комутативан дијаграм.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G}_n(X) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\widetilde{p}_n"'] & G_n(X) \arrow[dl, "p_n"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Одавде и из става 2.4.1. и из чињенице да је $G_n(X) \to X$ фибрација закључујемо да можемо дати формулацију категорије на језику Генеиних фибрација.

Дефиниција 2.4.5. (Генеина дефиниција категорије)

Категорија повезаног простора X је n (у ознаци $cat(X) = n$) акко је $n \in \mathbb{N}_0$ најмањи број такав да постоји сечење $s : X \to G_n(X)$ од p_n где је

$$F_n(X) \to G_n(X) \to X$$

n-та Генеина фибрација.

Генеини простори све боље и боље описују тополошки простор како се n повећава. Да бисмо видели како се то одражава на категорију Генеиних простора биће нам потребно следеће тврђење.

Став 2.4.6. Ако је

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$$

фибрација, E је путно повезан и B је нормалан простор са недегенерисаном базном тачком тада је

$$cat(E/F) \leq cat(B).$$

Доказ: погледати [11].

Теорема 2.4.7. Нека је X повезан тополошки простор. Категорија Генеиних простора је

- $cat(G_n(X)) = n$ ако је $n \leq cat(X)$
- $cat(G_n(X)) = cat(X)$ ако је $n \geq cat(X)$

Доказ: Нека је $cat(X) = k$.

Како је $G_0(X) \simeq *$ и како се $G_n(X)$ може схватити као конус пресликавања (односно важи $G_n(X) \simeq G_{n-1}(X) \cup C(F_{n-1}(X)))$ индуктивно можемо закључити да је $cat(G_n(X)) \leq n$. Посебно одатле следи да је $G_k(X) \leq k = cat(X)$.

Из последњег добијамо да постоји сечење $s : X \to G_k(X)$ тако да је $p_k \circ s \simeq id_X$ па нам став 2.3. даје $cat(G_k(X)) \geq k$. Одатле следи да је $cat(G_k(X)) = k$.

$G_k(X)$ је конструисано индуктивно преко k конуса пресликавања. Ако за било које $j < k$ важи $cat(G_j(X)) < j$ немогуће је да добијемо $cat(G_k(X)) = k$ (став 2.2.9). Одавде и из првог закључка у доказу следи да је $cat(G_n(X)) = n$ за $n \leq k$.

Нека је $n \geq k$. Тада постоји сечење $s_n : X \to G_n(X)$ такво да је $p_n \circ s_n \simeq id_X$. Одатле из става 2.3 добијамо да је $cat(G_n(X)) \geq cat(X) = k$. Са друге стране је $G_n(X) \simeq G_{n-1}(X) \cup C(F_{n-1}(X)) \simeq G_{n-1}(X)/F_{n-1}(X)$ па из претходног става можемо закључити да је $cat(G_n(X)) \leq cat(X)$. Комбинујући ова два закључка добијамо да је $cat(G_n(X)) = cat(X)$.

$\square$

Категорија Пресликавања

Дефиниција 2.4.8. Нека је $f : X \to Y$ пресликавање. Категоријом пресликавања f (у ознаци $cat(f)$) називамо најмањи број $n \in \mathbb{N}$ такав да X може бити покривен са скуповима $U_1, \ldots, U_{n+1}$ таквим да је $f|_{U_i}$ хомотопски тривијално за свако i.

Навешћемо сада неке од особина категорије пресликавања.

Став 2.4.9. Нека је $f : X \to Y$ пресликавање. Тада важе следеће особине:

1) $cat(f) \leq min\{cat(X), cat(Y)\}$.

2) Ако су $g : X \to Y$ и $h : Y \to Z$ пресликавања тада је $cat(h \circ g) \leq min\{cat(g), cat(h)\}$. Додатно ако је $f : X \to Y$ хомотопска еквиваленција тада је $cat(f) = cat(X) = cat(Y)$.

3) Ако $Im(f^*)$ означава слику индукованог кохомолошког хомоморфизма тада је $cat(f) \geq cup(Im(f^*))$.

4) $cat(f) \leq n$ акко постоји пресликавање $\widetilde{f} : X \to G_n(Y)$ такво да следећи дијаграм хомотопски комутира

$$\begin{tikzcd} & G_n(Y) \arrow[d, "p_n"] \\ X \arrow[ur, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

$\square$

Категоријска тежина

Дефиниција 2.4.8. Категоријска тежина кохомолошке класе $u \in H^*(X; R) \backslash \{0\}$ је дефинисана са

$$wgt(u) \geq k$$

акко за свако $\phi : A \to X$ такво да је $cat(\phi) < k$ важи

$$\phi^*(u) = 0.$$

Лема 2.4.9. $wgt(u) \geq k$ акко $p^*_{k-1}(u) = 0$.

Доказ: Нека је $wgt(u) \geq k$. Како је $cat(p_{k-1}) < k$ (јер је $cat(G_{k-1}(X)) = k - 1$) па је $p^*_{k-1}(u) = 0$ из дефиниције wgt.

Нека је сад $p^*_{k-1}(u) = 0$ и нека је $\phi : A \to X$ произвољно пресликавање такво да је $cat(\phi) < k$. Из Генеине дефиниције категорије пресликавања постоји пресликавање $g : A \to G_{k-1}(X)$ такво да је $p_{k-1} \circ g \simeq \phi$. Како је $p^*_{k-1}(u) = 0$ следи да је $\phi^*(u) = g^* p^*_{k-1}(u) = 0$ па одатле можемо закључити да је $wgt(u) \geq k$.

$\square$

Дефиниција 2.4.9. Ејленберг - Мек Лејнов простор $K(G, n)$ је CW комплекс са особином да

$$\pi_j(K(G, n)) = \begin{cases} G, & j = n \\ 0, & j \neq n. \end{cases}.$$

Став 2.4.10. Нека су $u, v \in H^*(X; R) \backslash \{0\}$. Тада важе следеће особине:

(1) $wgt(u) \leq cat(X)$

(2) $f : Y \to X,\ f^*(u) \neq 0 \implies cat(f) \geq wgt(u)$ и $wgt(f^*(u)) \geq wgt(u)$

(3) $wgt(u \cup v) \geq wgt(u) + wgt(v)$

(4) $u \in H^*(K(\pi, 1); R) \implies wgt(u) \geq s, \qquad \pi = \pi_1(X)$

Доказ:

(1) Нека је $cat(X) = n$. Због сечења $s : X \to G_n(X)$ имамо да је $s^* \circ p_n^* = id$ те је $p_n^* : H^*(X; R) \to H^*(G_n(X); R)$ инјективно. Одавде добијамо да је $p_n^*(u) \neq 0$ па из претходне леме важи

$$wgt(u) \leq n.$$

(2) Нека је $f : Y \to X,\ f^*(u) \neq 0$. Доказ прве импликације је идентичан доказу претходне особине. Нека је сад $wgt(u) = k$. Тада је $p_{k-1}(X)^*(u) = 0$ и $p_k(X)^*(u) \neq 0$. Посматрајмо комутативан дијаграм

$$\begin{tikzcd}
G_{k-1}(X) \arrow[r, "G_{k-1}(f)"] \arrow[d, "p_{k-1}"'] & G_{k-1}(Y) \arrow[d, "p_{k-1}"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}.$$

$p_{k-1}(X) \circ G_{k-1}(f) \simeq f \circ p_{k-1}(Y)$, па је $0 = G_{k-1}(f)^*(p_{k-1}(X)^*(u)) = p_{k-1}(Y)^*(f^*(u))$. Због тога из претходне леме имамо да је $wgt(f^*(u)) \geq k = wgt(u)$.

(3) Нека је $wgt(u) = k$ и $wgt(v) = m$ и нека је $\phi : A \to X$ произвољно пресликавање такво да је $cat(\phi) < k + m$. Желимо да покажемо да је $\phi^*(u \cup v) = 0$. Услов да је $cat(\phi) < k + m$ каже да постоји $k + m$ отворених скупова који покривају A таквих да је рестрикција ϕ на сваки хомотопски тривијална. Означимо ове скупове са $U_1, \ldots, U_k, V_1, \ldots, V_m$ и нека је

$$\mathcal{U} = U_1 \cup \cdots \cup U_k, \qquad \mathcal{V} = V_1 \cup \cdots \cup V_m.$$

Јасно је да онда важи да је $cat(\phi|_{\mathcal{U}}) < k$ и да је $cat(\phi|_{\mathcal{V}}) < m$. Чињеница да је $wgt(u) = k$ и $wgt(v) = m$ онда имплицира да је $\varphi|_{\mathcal{U}}^*(u) = 0 = \varphi|_{\mathcal{V}}^*(v)$. Дуги тачни низови за тополошке парове $(A, \mathcal{U})$ и $(A, \mathcal{V})$ онда дају

$$\overline{u} \in H^*(A, \mathcal{U}), \qquad \overline{v} \in H^*(A, \mathcal{V}),$$

при чему важи $\overline{u} \cup \overline{v} \in H^*(A, \mathcal{U} \cup \mathcal{V})$ и $\overline{u} \cup \overline{v} \mapsto \phi^*(u) \cup \phi^*(v) = \phi^*(u \cup v)$. Додатно $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} = A$ па је $H^*(A, \mathcal{U} \cup \mathcal{V}) = 0$ и последично $\overline{u} \cup \overline{v} = 0$. Због тога је $\varphi^*(u \cup v) = 0$ те је $wgt(u \cup v) \geq k + m$.

(4) Погледати [11].

Категорија симплектички асферичних многострукости

Дефиниција 2.4.11. Нека је (M, ω) симплектичка многострукост. Кажемо да је она симплектички асферична ако је $\omega|_{\pi_2(M)} = 0$.

Услов $\omega|_{\pi_2(M)} = 0$ можемо схватити на следећи начин. Из теореме о универзалним коефицијентима имамо да је $H^2(M;\mathbb{R}) \cong Hom(H_2(M), \mathbb{R})$ па симплектичку форму ω можемо разумети као хомоморфизам $\omega : H_2(M) \to \mathbb{R}$. Хуревићев хомоморфизам $h : \pi_2(M) \to H_2(M)$ је дефинисан као $h(\alpha) = \alpha_*(i)$ где је $\alpha : \mathbb{S}^2 \to M$ представник неке хомотопске класе из $\pi_2(M)$ а $i \in H_2(\mathbb{S}^2) \cong Z$ је изабран и фиксиран генератор. Слика Хуревићевог хомоморфизма $im(h)$ је подгрупа од $H_2(M)$. Услов $\omega|_{\pi_2(M)} = 0$ каже да је $\omega|_{im(h)} = 0$. Геометријски ово значи да за свако $g : \mathbb{S}^2 \to M$ важи

$$\int_{\mathbb{S}^2} g^*\omega = 0.$$

Напомена 2.4.12. Свакако је јасно да симплектичке многострукости које задовољавају услов $\pi_2(M) = 0$ јесу симплектички асферичне. Обрнуто не мора да важи. Р. Гомпф је конструисао бесконачне фамилије симплектички асферичних многострукости за које не важи $\pi_2(M) = 0$.

Означимо са $f : M \to K(\pi, 1)$ класификационо пресликавање универзалног наткривања.

Став 2.4.13. Услов $\omega|_{\pi_2(M)} = 0$ важи акко постоји $\omega_\pi \in H^2(K(\pi, 1); R)$ такво да је $f^*\omega_\pi = \omega$.

Доказ: Погледати [11].

Став 2.4.14. Нека је (M, ω) симплектички асферична многострукост. Тада је $cat(M) = dim(M)$.

Доказ: Из претходног става имамо да је $f^*(\omega_\pi) = \omega$. Одатле можемо закључити да је $f^*(\omega_\pi^n) = \omega^n \neq 0$. Из става 2.4.10. онда имамо

$$2n = dim(M) \geq cat(M) \geq cat(f) \geq wgt(\omega_\pi^n) \geq n \cdot wgt(\omega_\pi) \geq 2n.$$

□

Већ смо видели да уколико је симплекстичка многострукости (M, ω) просто повезана важи да је $cat(M) = n < dim(M) = 2n$.

Пример 2.4.15. Нека је $M = N \times \mathbb{T}^{2k}$ где је N^{2n} просто повезана симплектичка многострукост. Тада је $cat(M) = n + 2k$.

Доказ: Из наредног тврђења имамо да је $cat(M) \leq cat(N) + cat(\mathbb{T}^{2k}) = n + 2k$. Са друге стране ако са ω означимо симплектичку форму од N јасно је да ће важити $[d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_{2k} \wedge (\omega^{\wedge n})] \neq 0$ па имамо да је $cup_{\mathbb{R}}(N) \geq n + 2k$.

□

Став 2.4.16. Нека су X и Y путно повезани простори такви да је $X \times Y$ комплетно нормалан. Тада је
$$cat(X \times Y) \leq cat(X) + cat(Y).$$
□

Из претходних резултата природно се намеће следеће питање.

Отворен проблем 2.4.17. Нека је M^{2n} затворена симплектичка многострукост која није просто повезана и која нема хомотопски тип многострукости $N \times \mathbb{T}^{2k}$ где је N просто повезана симплектичка многострукост. Одредити категорију од M. Да ли је $cat(M) = dim(M)$?

2.5 Категорија нискодимензионих многострукости

У овом одељку ћемо користећи везу фундаменталне групе и категорије израчунати категорију затворених многострукости димензија 2 и 3.

Категорија површи

Теорема 2.5.1. (*Nielsen–Schreier*) Свака подгрупа H слободне групе G је и сама слободна. Штавише ако G има k генератора и H има индекс n у G, онда је H слободна група са $n(k-1)+1$ генератора.

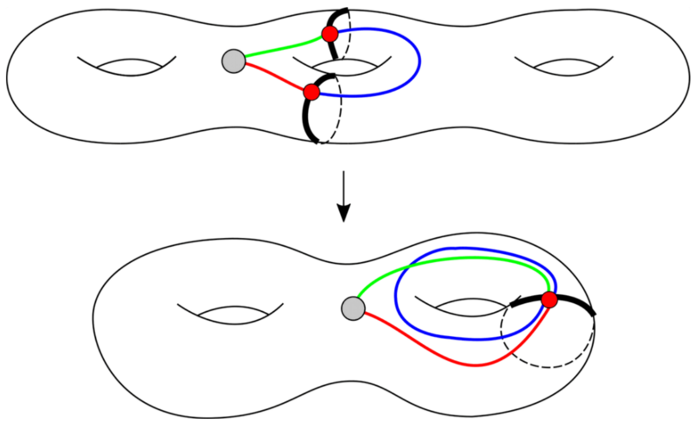
Доказ: Из Ван-Кампенове теореме је јасно да $G = F(S)$ може да се види као фундаментална група букета $|S|$ кружница. Означимо тај тополошки простор са X. Јасно је да је X CW комплекс димензије 1 (повезан граф). Из теорије наткривања (погледати [15]) познато је да су подгрупе фундаменталне групе $\pi_1(X, x) = G$ у бијективној кореспонденцији са наткривањима повезаним просторима $p : (E, e) \to (X, x)$. Нека је (E, e) такво да је $p_1(E, e) \cong H$. Како је p наткривање мора бити да је E повезан граф. Користећи чињеницу да је сваки повезан граф хомотопски еквивалентан букету кружница можемо закључити да је H слободна.

Ако је G слoводна група ранга $\rho(G) = k$, онда је $\pi_1(X)^{ab} = H_1(X) = \mathbb{Z}^k$, па је $\chi(X) = \beta_0(X) - \beta_1(x) = 1 - k$. Поред тога p је n-лисно наткривање јер је H подгрупа индекса n. Како знамо да је $\chi(E) = n\chi(X)$ (свакој $i-$ћелији у X одговара n $i-$ћелија у n-лисном наткривању) можемо закључити да је
$$\rho(H) = 1 - \chi(E) = 1 - n\chi(X) = 1 - n(1-k) = n(k-1) + 1.$$
□

Став 2.5.2. Нека је M компактна површ без границе која није сфера. Тада $\pi_1(M)$ није слободна група.

Доказ: Како абелизација фундаменталне групе $\pi_1(N_h)^{ab} = H_1(N_h) = \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}_2$ није слободна Абелова група можемо заључити да ни фундаментална група неоријентабилних површи не може бити слободна.

Нека је сад $g \neq 0$. Површ M_g може се наткрити дволисно са M_{2g-1}. Ово се може схватити као $\mathbb{Z}_2$ дејство (централна симетрија) на M_{2g-1} (погледати слику испод).



Претпоставимо сада да је $\pi_1(M_g)$ слободна. Како је $\pi_1(M_g)^{ab} = H_1(M_g) = \mathbb{Z}^{2g}$ можемо закључити она има $2g$ генератора. Са друге стране како је $M_{2g-1} \to M_g$ дволисно наткривање из претходне теореме можемо закључити да је $\pi_1(M_{2g-1})$ слободна група ранга $2(2g-1)+1 = 4g-1$. Одатле следи да је $\pi_1(M_{2g-1})^{ab} = H_1(M_{2g-1})$ слободна Абелова група ранга $4g-1$. Са друге стране знамо да је $H_1(M_{2g-1}) = \mathbb{Z}^{4g-2}$ па добијамо контрадикцију.

$\square$

Пример 2.5.3.

- $cat(M_g) = \begin{cases} 1, & g = 0 \\ 2, & g \geq 1 \end{cases}$
- $cat(N_h) = 2$

Доказ: Већ знамо да је $cat(M_0) = cat(\mathbb{S}^2) = 1$. Са друге стране из претходног става и из последице 2.3.14. можемо закључити да је $cat(M) \geq 2$ ако је M компактна површ без границе која није сфера. Такође имамо да је $cat(M) \leq dim(M) = 2$ па одатле следи да је $cat(M) = 2$.

$\square$

Категорија затворених 3-многострукости

Категорија затворених 3-многострукости се такође може израчунати у терминима фундаменталне групе.

Теорема 2.5.4. Нека је M затворена 3-многострукост. Тада је

$$cat(M) = \begin{cases} 3, & \pi_1(M) \text{ - није слободна и није тривијална} \\ 2, & \pi_1(M) \text{ - нетривијална слободна група} \\ 1, & \pi_1(M) = \{0\} \end{cases}$$

Доказаћемо ову теорему у случају да је M оријентабилна многострукост. Случај неоријентабилних 3-многострукости је компликованији (погледати [16] за комплетан доказ).

Дефиниција 2.5.5.

- 3−многострукост је несводљива ако свака уложена 2-сфера $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow M$ ограничава уложен диск $\mathbb{D}^3 \hookrightarrow M$.
- 3−многострукост је проста ако $M = P\#Q$ имплицира да је $P = \mathbb{S}^3$ или $Q = \mathbb{S}^3$.

Лема 2.5.6. Ако је 3−многострукост M је несводљива онда је и проста.

Доказ: Нека је M несводљива. Уколико је $M = P\#Q$ мора постојати уложена сфера $\mathbb{S}^2$ која раздваја M на две компоненте ($P \backslash \mathbb{D}^3$ и $Q \backslash \mathbb{D}^3$). Али такво $\mathbb{S}^2$ ограничава уложен диск $\mathbb{D}^3$ због несводљивости. Одатле следи да је $M = M' \# \mathbb{S}^3$ (јер је $\mathbb{S}^3 \backslash \mathbb{D}^3$ диск $\mathbb{D}^3$). Одатле следи да је M проста.

□

Теорема 2.5.7. Следећа тврђења важе:

(1) $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{S}^3$) је несводљива многострукост.

(2) Ако је $p : \overline{M} \to M$ наткривање и $\overline{M}$ несводљива, онда је и M несводљива

(3) Једина (оријентабилна) проста многострукост која није несводљива је $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$. Штавише, једина затворена оријентабилна многострукост таква да је $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ је $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$.

(4) Ако је $\pi_2(M) \neq 0$ онда постоји уложена сфера $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow M$ која је представник неког нетривијалног елемента од $\pi_2(M)$.

(5) Произвољна 3-многострукост M може бити записана као

$$M = M_1 \# \dots \# M_k$$

где је произвољна M_j проста. Штавише M је оријентабилна акко је свака M_j оријентабилна. Декомпозиција на просте многострукости је јединствена до на пермутацију.

Доказ: Погледати [11].

Став 2.5.8. Нека је M затворена несводљива 3-многострукост. Тада важи следеће.

(1) Ако је $\pi = \pi_1(M)$ бесконачна, тада је $M = K(\pi, 1)$.

(2) Ако је $\pi = \pi_1(M)$ коначна, тада је универзално наткривање од M хомотопска $3-$сфера.

Доказ: Ако је $\pi_2(M) \neq 0$ онда из претходне теореме под (4) следи да постоји уложена сфера $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow M$ која је представник неког нетривијалног елемента од $\pi_2(M)$. Како је M несводљива следи да $\mathbb{S}^2$ ограничава уложен диск. Због тога елемент од $\pi_2(M)$ представљен са $\mathbb{S}^2 \hookrightarrow M$ је тривијалан што је контрадикција. Одатле следи да је $\pi_2(M) = 0$.

Докажимо сада (1). Претпоставимо сада да је $\pi_1(M)$ бесконачна. Одатле је универзално наткривање $\widetilde{M}$ некомпактно па је $H_3(M) = 0$. Одавде следи да је $\pi_3(M) = \pi_3(\widetilde{M}) = H_3(\widetilde{M})$ из Хуревићеве теореме ($\widetilde{M}$ је просто повезан и $\pi_2(M) = 0$). Ово онда имплицира да је $\pi_3(M) = 0$. Хуревићева теорема може бити примењена на $\pi_4(M) = \pi_4(\widetilde{M}) = H_4(\widetilde{M}) = 0$ јер је $dim(\widetilde{M}) = 3$. Слично закључујемо да је $\pi_j(M) = 0$ за $j \geq 2$. Због тога је $M = K(\pi, 1)$ где је $\pi = \pi_1(M)$.

Остало је још да докажемо (2). Нека је $\pi_1(M)$ коначна. Тада је универзално наткривање $\widetilde{M}$ затворена просто повезана 3-многострукост. Одатле следи да је $\widetilde{M}$ оријентабилна па из Поенкареове дуалности имамо да је $H^1(\widetilde{M}) = H_2(\widetilde{M}) = 0$. Из Хуревићеве теореме имамо да је $\pi_3(\widetilde{M}) = \mathbb{Z} = H_3(\widetilde{M})$. Одатле можемо закључити да пресликавање степена 1 $\mathbb{S}^3 \to \widetilde{M}$ индукује изоморфизам на H_3. Како су $\mathbb{S}^3$ и $\widetilde{M}$ просто повезане ово имплицира да је $\widetilde{M} \simeq \mathbb{S}^3$.

□

Последица 2.5.9. Нека је M затворена несводљива 3-многострукост таква да је $\pi_1(M) \neq \{1\}$ и нека је $f : M \to K(\pi_1(M), 1) = K(\pi, 1)$ класификационо пресликавање универзалног наткривања. Онда је

$$f^* : H^3(K(\pi, 1); A) \to H^3(M; A)$$

нетривијално за неке коефицијенте у A. Посебно ни једна несводљива многострукост M не може имати слободну групу за фундаменталну групу.

Доказ: погледати [11].

Напомена 2.5.10. Претходна последица каже да постоји $u \in H^3(M; A)$ такво да је $f^*(u) \neq 0$. Из става 2.4.10. следи да је $cat(M) \geq wgt(u) = 3$. Осим тога важи $cat(M) \leq dim(M) = 3$, па имамо да је $cat(M) = 3$.

Став 2.5.11. Нека је M затворена несводљива 3-многострукост таква да је $\pi_1(M) \neq \{1\}$. Тада је $cat(M) = 2$ акко је $\pi_1(M)$ слободна група.

Доказ: Претпоставимо прво да $\pi_1(M)$ није слободна. Из декомпозиције M на просте многострукости (Теорема 2.5.7.) имамо да је

$$M = M_1 \# \ldots \# M_k.$$

Из Ван Кампенове теореме имамо да је

$$\pi_1(M) = \pi_1(M_1) * \cdots * \pi_1(M_k).$$

Одатле како $\pi_1(M)$ није слободна следи да за неко j, $\pi^j = \pi_1(M_j)$ јесте нетривијална и није $\mathbb{Z}$. Због тога је M_j несводљива поред тога што је проста многострукост (Теорема 2.5.7.). Одатле из последице 2.5.9 $f^* : H^3(K(\pi^j, 1); A) \to H^3(M; A)$ је нетривијално за неке коефицијенте A. Посматрајмо сада комутативан дијаграм

$$\begin{tikzcd}
M = M_1\# \ldots \# M_k \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \vee \cdots \vee M_k \arrow[r] \arrow[d] & M_j \arrow[d] \\
K(\pi_1(M), 1) \arrow[r] & K(\pi^1 * \cdots * \pi^k, 1) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & K(\pi^j, 1) \\
 & K(\pi^1, 1) \vee \cdots \vee K(\pi^k, 1) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Горње хоризонтално пресливање је пресликавање степена 1 које индукује инјекцију у кохомологији са произвољним коефицијентима. Специјално

$$H^3(M_j; A) \to H^3(M_1\# \ldots \# M_k; A)$$

је инјективно. Компонујући ово са f^* видимо да је $H^3(K(\pi_1(M), 1); A) \to H^3(M; A)$ нетривијално. Како и у претходној напомени из става 2.4.10. закључујемо да је $cat(M) \geq 3$.

Доказ друге импликације погледати у [11]. $\square$

Доказ теореме 2.5.4: (оријентабилан случај): Ако је $\pi_1(M) = \{0\}$ онда је $M \simeq \mathbb{S}^3$ па је $cat(M) = 1$. Из става 2.5.11 је $cat(M) = 2$ акко је $\pi_1(M)$ слободна. Ако је $cat(M) = 1$ и $\pi_1(M) \neq \{0\}$ онда из става 2.3.13 следи да је $\pi_1(M)$ слободна група што је контрадикција. Одатле закључујемо да је $cat(M) = 1$ еквивалентно томе да је $\pi_1(M) = \{0\}$. Преостаје још случај када је $cat(M) = 3$ а то је еквивалентно томе да $\pi_1(M)$ није тривијална нити слободна.

$\square$

Пример 2.5.12. Нека је $M = \mathbb{S}^3/\widetilde{I}$ Поенкареова хомолошка сфера ($\widetilde{I}$ је бинарна икосаедрална група). Како је $\pi_1(M) = \widetilde{I}$ коначна нетривијална група следи да није слободна па можемо закључити да је $cat(M) = 3$.

3 Критичне тачке функција и топологија многострукости

Дефиниција 3.1. Кажемо да је функција $f : M \to \mathbb{R}$ минимална ако свака друга глатка функција има барем толико критичних тачака колико и функција f.

Број критичних тачака минималне функције означићемо са $crit(M)$.

У првом поглављу смо видели да на затвореној Римановој многострукости (M, g) нестабилне многострукости $W^u(p)$ Морсове функције f можемо задебљати узимајући њихове цевасте оклине тако да добијемо отворене контрактибилне многострукости. Одатле смо могли закључити да је

$$\widetilde{crit}(M) \geq 1 + cat(M).$$

Иако нестабилни скупови $W^u(p)$ нису нужно многострукости ако су критичне тачке функције f дегенерисане они и даље јесу контрактибилни и можемо их динамички задебљати до отворених контрактибилних скупова одакле из Томове декомпозиције јасно да следи да је

$$crit(M) \geq 1 + cat(M).$$

За ову конструкцију потребан нам је алат да контролишемо динамику.

3.1 Конлијев пар

У овом поглављу ћемо за дефинисан ток φ уместо ознаке $\varphi_t(x)$ користити ознаку $\varphi_t x$. У одељку 1.5. смо за критичну тачку p такву да је $f(p) = c$ и за $\epsilon > 0$ и $\tau > 0$ дефинисали скуп

$$N_p^{\epsilon,\tau} = \{x \in M | f(x) \leq c + \epsilon,\ f(\varphi_\tau x)) \geq c - \epsilon\}_p.$$

Како вредности функције опадају дуж негативних градијентних трајекторија могли смо закључити да кад трајеторија једном изађе из овог скупа више се никад не може у њега вратити.

Управо за ове скупове користићемо задебљање нестабилних (стабилних) многострукости и за то нам је потебна већа контрола излаза из скупа те ћемо дефинисати скуп

$$L_p^{\epsilon,\tau} = \{x \in N_p^{\epsilon,\tau} | f(\varphi_{2\tau} x) \leq c - \epsilon\}.$$

Дефиниција 3.1.1. Нека је $\varphi = \{\varphi_t\}$ непрекидан ток на тополошком простору X. Конлијев пар (N, L) за изоловану фиксну тачку p тока φ састоји се од пара компактних потпростора (N, L) који задовољавају следеће особине:

(i) $p \in int(N) \backslash L$

(ii) $N \cap Fix(\varphi) = p$

(iii) $x \in L$ и $\varphi_{[0,t]}x \subset N \implies \varphi_t(x) \in L$

(iv) $x \in N$ и $\varphi_T(x) \notin N \implies \exists t \in [0, T)$, $\varphi_t(x) \in L$.

Напомена 3.1.2. Скуп N из дефиниције називамо Конлијев блок. Особине (i) и (ii) нам кажу да је N затворена околина од p која не садржи друге фиксне тачке тока φ. Из особине (iii) видимо да ако тачка x уђе у L мора остати у њему докле год не изађе из N. Додатно из (iv) можемо закључити да је једини начин да тачка изађе из N пролазак кроз L. Због тога L називамо излазним скупом од N.

Теорема 3.1.3. Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција на Римановој многострукости (M, g), и нека је c једина критична вредност у $[a, b]$ $(a < c < b)$, при чему је $f^{-1}([a, b])$ компактан. Ако је $p \in crit(f) \cap f^{-1}(c)$ изолована критична тачка, онда је за довољно мало $\epsilon > 0$ и за довољно мало $\tau \geq 1$ пар

$$(N, L) = (N_p^{\epsilon,\tau}, L_p^{\epsilon,\tau})$$

Конлијев пар.

Доказ:

(i) Како је $p \in crit(f)$ и $f(p) = c$ закључујемо да је p фиксна тачка тока φ те је одатле $p \in N$. Како су f и $f \circ \varphi_\tau$ непрекидне можемо закључити додатно да је $p \in int(N)$. Поред тога $f(\varphi_{2\tau}p) = f(p) = c$ па $p \notin L$

(ii) Како је p изолована критична тачка можемо наћи њену околину U која не садржи друге критичне тачке. Из леме 1.5.3 можемо закључити да је за довољно мало $\epsilon > 0$ и довољно велико $\tau \geq 1$ важи

$$N = N_p^{\epsilon,\tau} \subset U.$$

(iii) Како функција f опада дуж тока претпоставка у (iii) је еквивалентна томе да је

$$p \in L, \qquad \varphi_t(p) \in N$$

за неко $t \geq 0$. Из исте премисе имамо и да је

$$f(\varphi_{2\tau}\varphi_t p) \leq f(\varphi_{2\tau}p) \leq c - \epsilon.$$

(iv) Нека је $x \in N$ и $\varphi_T x \notin N$ за неко $T > 0$. Ако је $x \in T$ можемо само узети $t = 0$ па ћемо због тога претпоставити да $x \notin L$.

Дакле x припада $N \backslash L$. Из (ii) добијамо да је p једина критична тачка у N, како x не може бити не може бити критична тачка f јер после неког времена излази из N, и како је N путно повезан можемо закључити да постоји пут од p до x у N. Поред тога имамо да важи

$$f(x) \leq c + \epsilon, \qquad f(\varphi_{2\tau}x) > c - \epsilon, \qquad f(\varphi_{\tau+T}p) < c - \epsilon. \tag{1}$$

Сада ћемо показати да постоји јединствено време $\alpha > 0$ до ког се трајекторија налази у $N \backslash L$ и јединствено време $\beta \in (\alpha, T)$ након кога трајекторија напушта N заувек. Тада било које t из $[\alpha, \beta]$ задовољава услов (iv).

Трајекторија која садржи p не садржи критичне тачке (јединственост решења диференцијалних једначина) па функција f строго опада дуж те трајекторије. Одатле и из друге две неједнакости у (1) добијамо да постоји јединствено време $T_* \in (2\tau, \tau + T)$ за које је $f(\varphi_{T_*} x) = c - \epsilon$. Како $\alpha > 0$ треба бити најраније време за које се трајекторија налази у L закључујемо да треба бити $f(\varphi_{2\tau}\varphi_\alpha) = c - \epsilon$ па је

$$\alpha =: T_* - 2\tau > 0.$$

Са друге стране β је последњи тренутак у коме се трајекторија која почиње у x налази у N па закључујемо да треба бити

$$f(\varphi_{\tau+\beta} x) = f(\varphi_\tau \varphi_\beta x) = c - \epsilon.$$

Одатле добијамо $T_* = 2\tau + \alpha = \tau + \beta$ те је

$$\beta := \alpha + \tau.$$

Покажимо прво да $\varphi_s x \in N$ за $s \geq 0$ акко $s \in [0, \beta]$.

Нека је $s \in [o, \beta]$ произвољно. Тада је $f(\varphi_s x) \leq f(x) \leq c + \epsilon$ пошто је x из N. Додатно $\tau + s \leq \tau + \beta = T_*$ па је $f(\varphi_\tau \varphi_s x) \geq f(\varphi_{T_*} x) = c - \epsilon$. Како је x повезано путем са p унутар N и како дуж пута $t \mapsto \varphi_t(x)$ важи за свако $t \in [0, s]$

$$f(\varphi_t x) \leq f(x) \leq c + \epsilon, \qquad f(\varphi_\tau \varphi_t x) \geq f(\varphi_\tau \varphi_s x) \geq c - \epsilon.$$

закључујемо да $\varphi_s x$ припада истој компоненти путне повезаности скупа

$$\{x \in M | f(x) \leq c + \epsilon,\ f(\varphi_\tau(x)) \geq c - \epsilon\}.$$

као и p па је $\varphi_s x \in N$.

Са друге стране ако је $s > \beta$ онда је $s + \tau > \beta + \tau = T_*$ па како функција строго опада дуж трајекторије можемо закључити да је

$$f(\varphi_\tau \varphi_s x) = f(\varphi_{s+\tau} x) < f(\varphi_{T_*} x) = c - \epsilon.$$

па добијамо да $\varphi_s x \notin N$.

Докажимо сада да за $s \geq 0$, $\varphi_s x \in L$ акко $s \in [\alpha, \beta]$.

Ако $s \in [\alpha, \beta]$ из претходног закључка знамо да је $\varphi_s x \in N$ јер је $\alpha > 0$. Додатно имамо да је

$$f(\varphi_{2\tau}\varphi_s(x)) \leq f(\varphi_{2\tau}\varphi_\alpha x) = f(\varphi_{2\tau}\varphi_{T_*-2\tau} x) = f(\varphi_{T_*} x) = c - \epsilon$$

па $\varphi_s x \in L$.

Ако је $\varphi_s x \in L$ тада не може бити $s > \beta$ јер тада $\varphi_s x$ не припада ни N. Са друге стране ако $s \in [0, \alpha)$ добијамо да је

$$f(\varphi_{2\tau}\varphi_s x) > f(\varphi_{2\tau}\varphi_\alpha x) = c - \epsilon$$

па $\varphi_s x \notin L$.

Узимајући неко $t \in [\alpha, \beta]$ добијамо да за (N, L) важи особина (iv).

□

3.2 Љустерник-Шнирељманова теорема

Сада смо спремни да покажемо да се нестабилни скупови могу задебљати до отворених контрактибилних скупова. Пре тога увешћемо додатну нотацију која ће нам омогућити једноставнију интерпретацију предстојећег резултата.

Нека је $N = N_p^{\epsilon,\tau}$. Са $\mathcal{N}$ ћемо означити унутрашност скупа N. Приметимо такође да се тополошка граница овог скупа може видети као дисјунктна унија три скупа

$$\partial N = N^+ \cup N^- \cup N^0$$

где је

- $N^+ = \{x \in M | f(x) = c + \epsilon,\ f(\varphi_\tau x) > c - \epsilon\}_N$ - место уласка у N
- $N^- = \{x \in M | f(x) < c + \epsilon,\ f(\varphi_\tau x) = c - \epsilon\}_N$ - место изласка из N
- $N^0 = \{x \in M | f(x) = c + \epsilon,\ f(\varphi_\tau x) = c - \epsilon\}_N$ - место одбијања од N

при томе смо са $\{\dots\}_N$ означили унију компоненти повезаности датог скупа саджране у N. Јасно је да су N^+ и N^- некомпактне хиперповрши у M а N^0 је затворена подмногострукост у M кодимензије 2.

Теорема 3.2.1. Нека је f глатка функција на затвореној Римановој многострукости M која има изоловане критичне тачке, а самим тим коначно много њих. Означимо их са $p_1, \dots, p_l$. Тада постоји отворено покривање $\{\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_l\}$ од M задебљањима нестабилних скупова контрактибилних у M, односно важи да су скупови $\mathcal{W}_j$ отворени при чему је

$$\mathcal{W}_j \supset W^u(p_j), \qquad i_{\mathcal{W}_i} \simeq c_{p_j}, \qquad j \in \{1, \dots, l\}.$$

Доказ: Приметимо да како је M локално контракитибилан Хаусдорфов простор и како критичних тачака има коначно много постоје отворени скупови V_i такви да је сваки V_i

контрактибилан у M. Штавише можемо у некој карти изабрати довољно малу отворену лопту око критичне тачке p_i, а њу можемо радијално контраховати у p_i.

На основу теореме 3.1.3 и леме 1.3.3 можемо наћи Конлијеве парове

$$(N_i, L_i) = (N_p^{\epsilon_i,\tau_i}, L_p^{\epsilon_i,\tau_i}), \qquad i \in \{1, \dots, l\}$$

такве да је $N_i \subset V_i$. Дефинишимо сада задебљања:

$$\mathcal{W}_i = \varphi_{[0,+\infty)}\mathcal{N}_i = \bigcup_{t \geq 0} \varphi_t \mathcal{N}_i, \qquad i \in \{1, \dots, l\}.$$

Како су $\varphi_t : M \to M$ дифеоморфизми и како су $\mathcal{N}_i = int(N_i)$ отворени следи да и скупови $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_l$ морају бити отворени. Поред тога

$$\mathcal{N}_i = \{x \in M | f(x) < c + \epsilon_i,\ f(\varphi_{\tau_i} x) > c - \epsilon_i\}_{p_i}.$$

па ако x припада $W^u(p_i)$ из чињенице да трајекторија γ_x почиње у p_i те постоји неко $t \leq 0$ такво да је $f(\varphi_t x) > c - \epsilon_i$. Тада важи да је

$$f(\varphi_{t-\tau_i} x) \leq f(p_i) = c < c + \epsilon_i, \qquad f(\varphi_{\tau i}\varphi_{t-\tau_i} x) = f(\varphi_t) > c - \epsilon_i.$$

одакле можемо закључити да $\varphi_{t-\tau_i} x \in \mathcal{N}_i$ јер је $\varphi_{t-\tau_i} x$ повезан трајекторијом γ_x са p_i. Како је $t - \tau < 0$ добијамо да је

$$x = \varphi_{\tau - t}(\varphi_{t-\tau_i} x) \in \varphi_{\tau - t}\mathcal{N}_i \subset \mathcal{W}_i$$

па је $W^u(p_i) \subset \mathcal{W}_i$ за $i \in \{1, \dots, l\}$.

Остало је још да покажемо да су скупови $\mathcal{W}_i$ контрактибилни.

Нека је $x \in \mathcal{W}_i \backslash N_i$. Како је трајекторија γ_x у неком тренутку $t < 0$ била у N_i а у тренутку $t = 0$ је ван тог скупа можемо закључити да постоји јединствено $T_i(x) < 0$ за које је $f(\varphi_\tau \varphi_{T_i(x)} x) = c - \epsilon$ (f монотоно опада дуж неконстантних трајекторија). Из особина за Конлијеве парове знамо да трајекторија мора изаћи кроз L_i те мора бити да је $\varphi_{T_i(x)} x \in L_i$. Додатно како трајекторија γ_x заправо долази из $\mathcal{N}_i$ можемо закључити да је $f(\varphi_{T_i(x)} x) < c - \epsilon$. Одатле следи да $\varphi_{T_i(x)} x \in N_i^-$.

Посматрајмо сада једначину

$$f(\varphi_t x) = c - \epsilon, \qquad x \in \mathcal{W}_i \backslash N_i, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Из чињенице да је $\frac{d}{dt}(f(\varphi_t x)) = -\|\nabla f(\varphi_t x)\|^2 < 0$ јер је $c - \epsilon$ регуларна вредност можемо закључити да је функција T_i глатка на $\mathcal{W}_i \backslash N_i$.

Нека је сада

$$H_i : \mathcal{W}_i \times I \to \mathcal{W}_i, \qquad H_i(x,t) = \begin{cases} x, & x \in \mathcal{W}_i \cap N_i \\ \varphi_{tT(x)} x, & x \in \mathcal{W}_i \backslash N_i \end{cases}$$

Пошто је $\mathcal{W}_i \cap N_i = \mathcal{N}_i \cup N_i^-$ можемо закључити да када се $x \in \mathcal{W}_i \backslash N_i$ приближава $\mathcal{W}_i \cap N_i$ да се уствари приближава скупу N_i^-. Одатле, из чињенице да је T_i непрекидна и да

$$T_i(x) \to 0, \qquad x \to y, \qquad y \in N_i^-,\ x \in \mathcal{W}_i \backslash N_i$$

следи да је функција H_i непрекидна. Због овога добијамо да је инклузија $i_{\mathcal{W}_i} = H_i(\cdot, 0)$ хомотопна пресликавању $r_i = H_i(\cdot, 1)$. Приметимо да је r_i уствари ретракција $\mathcal{W}_i$ на $\mathcal{W}_i \cap N_i$ па је $\mathcal{W}_i \cap N_i$ јаки деформациони ретракт од $\mathcal{W}_i$. Како је $\mathcal{W}_i \cap N_i$ садржан у V_i а он се може контраховати у тачку p_i закључујемо да тврђење важи.

□

Теорема 3.2.2. (Љустерник Шнирељманова теорема) Нека је M затворена многострукост. Тада важи

$$cat(M) + 1 \leq crit(M)$$

Доказ: Изаберимо произвољну Риманову метрику g на M. Нека је f нека глатка функција. Ако критичне тачке ове функције нису изоловане тада неједнакост

$$cat(M) + 1 \leq \#crit(f)$$

свакако важи. Ако су критичне тачке изоловане применом претходне теореме добијамо да је број критичних тачака већи од категорије па закључујемо да важи тврђење.

□

Примери 3.2.3.

(1) $crit(\mathbb{S}^n) = 2$

Функција

$$h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}, \qquad h(x_1, \ldots, x_n) = x_n$$

је функција висине на сфери. Критичне тачке функције висине су тачке у којима је тангентна хиперраван нормална на x_n-осу, односно у овом случају најнижа и највиша тачка сфере. Одатле је $crit(\mathbb{S}^n) \leq \#crit(h) \leq 2$. Пошто већ знамо да је $cat(\mathbb{S}^n) = 1$ добијамо тражени резултат.

(2) $crit(\mathbb{T}^2) = 3$

Функција

$$f : \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y) \cdot \sin(\pi(x + y))$$

има 3 критичне тачке. То није тешко видети пошто је количничко пресликавање $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ локални дифеоморфизам па је довољно пребројати критичне тачке ове функције дефинисане на $\mathbb{R}^2$ на скупу $[0, 1) \times [0, 1)$. Једноставним рачуном добијамо да су то тачке $(0, 0), (1/3, 1/3)$ и $(2/3, 2/3)$.

Одатле добијамо да је

$$3 = 1 + cat(\mathbb{T}^2) \leq crit(\mathbb{T}^2) \leq \#crit(f) = 3$$

па је $crit(\mathbb{T}^2) = 3$.

(3) $crit(\mathbb{C}P^n) = n + 1$

Посматрајмо функцију

$$f([z_0 : \cdots : z_n]) = \sum_{i=0}^{n} c_i |z_i|^2 / \sum_{i=0}^{n} |z_i|^2$$

где су $c_0 < c_1 < \cdots < c_n$ реални бројеви. Ово је Морсова функција чије су критичне такчке координатне осе $L_0 = [1 : 0 : \cdots : 0]$, ..., $L_n = [0 : \cdots : 0 : 1]$.

Одатле је $crit(\mathbb{C}P^n) \leq n + 1$ па из Љуштерник Шнирељманове теореме како знамо да је $cat(\mathbb{C}P^n) = n$ добијамо жељени резултат.

□

Напомена 3.2.4. Аргумент у примеру (1) да је $crit(M) \geq 2$ може доћи и из чињенице да непрекидна функција на компактном скупу мора достизати минимум и максимум тако да се Љуштерник Шнирељманова теорема може схватити као генерализација Вајештрасове теореме на затвореним глатким многострукостима.

Напомена 3.2.5. Из ова претходна три примера се може приметити да је оцена броја критичних тачака минималне функције категоријом најбоља могућа у општем случају. Такође како је функција висине на $\mathbb{T}^2$ Морсова функција са 4 критичне тачке а сума Бетијевих бројева у Z је такође 4 може се закључити да је $\widetilde{crit}(\mathbb{T}^2) = 4$. Одатле и из примера (2) имамо да је $\widetilde{crit}(\mathbb{T}^2) > crit(\mathbb{T}^2)$.

3.3 Бирхофов минимакс принцип

У прошлом одељку смо видели да категорија даје једно доње ограничење за број критичних тачака функција. Међутим одатле не можемо ништа више рећи о тим тачкама, за разлику од Морсових функција где нам $k-$ти Бетијев број даје информацију о критичним тачкама индекса k. Ово се на известан начин може поправити у случају функција са изолованим критичним тачкама.

Став 3.3.1. Ако су регуларне вредности $a < b$ такве да су M^a и M^b различитог хомотопског типа при чему је $f^{-1}[a, b]$ компактан, онда постоји критична вредност $k \in (a, b)$.

Доказ: Ово је само контрапозиција теореме 1.3.2.

□

Сада када смо констатовали да под условима претходног става постоји критична вредност c, потребно је наћи начин да се она детектује. Како су M^a и M^b различитог хомотопског типа може се десити да ту промену топологије региструју разне хомотопске инваријанте.

Овде ћемо прво изложити најопштији случај. Нека је M Риманова многострукост без границе (погледати 3.5) и нека је $\mathcal{F}$ фамилија подскупова од M. Кажемо да је $\mathcal{F}$ инваријантна у односу на изотопију ако за свака изотопија $\varphi : M \times I \to M$ преноси елементе од $\mathcal{F}$ у друге елементе од $\mathcal{F}$, односно ако важи

$$F \in \mathcal{F} \implies \varphi_1(F) \in \mathcal{F}.$$

Овде под изотопијом сматрамо да је $\varphi_0 = id_M$ и да је за свако t, φ_t дифеоморфизам од M. Ако је $f : M \to \mathbb{R}$ глатка функција и $\mathcal{F}$ фамилија инваријантна у односу на изотопију дефинишимо

$$minimax(f, \mathcal{F}) = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid \exists F \in \mathcal{F}, F \subseteq M_a\}.$$

Назив минимакс долази из еквивалентне дефиниције

$$minimax(f, \mathcal{F}) = \inf_{F \in \mathcal{F}} \sup\{f(x) \mid x \in F\}.$$

Став 3.3.2. Нека пар (M, f) задовољава услов П-С (погледати дефиницију 3.5.5). Тада је $minimax(f, \mathcal{F})$ критична вредност од f.

Доказ: Претпоставимо да је $c = minimax(f, \mathcal{F})$ регуларна вредност. Тада из Деформационе теореме (Теорема 3.5.12) следи да постоји изотопија φ_t и довољно мало $\varepsilon > 0$ такво да је $\varphi_1(M_{c+\varepsilon}) \subseteq M_{c-\epsilon}$. Из дефиниције минимакса имамо да постоји $F \in \mathcal{F}$ такво да је $F \subseteq M_{c+\varepsilon}$. Одатле је $\varphi_1(F) \subseteq M_{c-\epsilon}$ па је

$$\sup\{f(x) \mid x \in F\} \leq c - \epsilon < c = minimax(f, \mathcal{F})$$

те добијамо контрадикцију.

$\square$

Напомена 3.3.3. Услов П-С је увек испуњен у случају да је многострукост M коначне димензије. Ако П-С није испуњен тада $minimax(f, \mathcal{F})$ не мора бити критична вредност већ може бити само лимес низа $\{c_n\}$ критичних вредности.

Дефиниција 3.3.4. Нека је $A \subset X$. $cat_X(A) = n$ акко је n најмањи број такав да постоји $n + 1$ скупова контрактибилних у X који покривају A.

Примери 3.3.5. Нека је $f : M \to \mathbb{R}$. Сада ћемо навести две значајне фамилије инваријантне у односу на изотопију.

(1) $\mathcal{F}_m = \{F \subseteq M \mid cat_M(F) \geq m - 1\}$, $c_m(f) := minimax(f, \mathcal{F}_m)$

(2) $c \in H_*(M^b, M^a)\backslash\{0\}, \mathcal{F}_c = \{im\sigma \cap f^{-1}[a, b] \mid [\sigma] = c\}$, $\mathcal{K}(f, c) := minimax(f, \mathcal{F}_c)$.

Доказ:

(1) φ_1 је дифеоморфизам ако је φ изотопија. Одатле следи да φ_1 преноси скупове контрактибилне у M у скупове контрактибилне у M додатно јасно је да се покривач од F пресликава у покривач од $\varphi_1(F)$. Одавде следи да је $\mathcal{F}_m$ инваријантна у односу на изотопију.

(2) Како изотопија јесте и хомотопија следи да је $[(\varphi_1)_*\sigma] = [\sigma]$.

$\square$

Кохомолошка дужина и критичне вредности функција

Сада ћемо мало дубље изучити природу $\mathcal{K}(f,c)$. Нека је дата нетривијална хомолошка класа

$$c \in H_*(M^a, M^b).$$

Приметимо да за s које је довољно близу b мора бити да је M^s деформациони ретракт од M^b јер је скуп регуларних вредности отворен (Скуп $crit(f) \cap f^{-1}[a,b]$ је затворен скуп у компактном па је и сам компактан. Одатле следи да је скуп критичних вредности компактан). Следи да је у том случају $H_*(M^b, M^s) = 0$. Тада инклузија $j^s : (M^b, M^a) \to (M^b, M^s)$ таква да индукује пресликавање

$$j^s_* : H_*(M^b, M^a) \to H_*(M^b, M^s)$$

за које је $j^s_* c = 0$. Са друге стране за s које је близу a мора бити да је M^a деформациони ретракт од M^s па је $H_*(M^s, M^a) = 0$. Нека је са

$$i^s : (M^s, M^a) \to (M^b, M^a)$$

означена одговарајућа инклузија. Из дугог тачног низа за тројку $M^a \subseteq M^s \subseteq M^b$

$$\ldots \to H_*(M^s, M^a) \xrightarrow{i^s_*} H_*(M^b, M^a) \xrightarrow{j^s_*} H_*(M^b, M^s) \to \ldots$$

следи да је за s које је довољно близу a j^s_* изоморфизам те је $j^s_* c \neq 0$. Одатле је $\mathcal{K} = \inf\{s \in [a,b] | j^s_* c = 0\} \in (a,b)$. Јасно је да је $\mathcal{K}$ вредност у којој се мења хомотопски тип. Потребно је још показати да је $\mathcal{K} = \mathcal{K}(f,c)$. Из става 3.3.2 и примера 3.3.5 (2) онда добијамо да је $\mathcal{K}$ критична вредност. Пре тога доказаћемо једну лему.

Лема 3.3.6. Нека су a и b регуларне вредности такве да је $a < b$ и такве да су M^a и M^b различитог хомотопског типа при чему је $f^{-1}[a,b]$ компактан. Ако је $c \in H_k(M^b, M^a)$ тада је

$$I_c = \{s \in [a,b] \mid j^*_s c = 0\} = \{s \in [a,b] \mid (\exists c' \in H_*(M^s, M^a)),\ \ i^s_* c' = c\}$$

интервал облика $(s_0, b]$ или $[s_0, b]$ за неко $s_0 > a$.

Доказ: Из дугог тачног низа

$$\ldots \to H_k(M^s, M^a) \xrightarrow{i^s_*} H_k(M^b, M^a) \xrightarrow{j^s_*} H_k(M^b, M^s) \to \ldots$$

можемо закључити да је

$$\{s \in [a,b] \mid j_*^s c = 0\} = \{s \in [a,b] \mid (\exists c' \in H_*(M^s, M^a),\ \ i_*^s c' = c\}.$$

Нека је сад $t \in I_c$ такво да је $j_*^t c = 0$ и нека је s такво да је $t < s < b$. Дефинишимо инклузију $j^{ts} : (M^b, M^t) \to (M^b, M^s)$. Приметимо да важи $j^s = j^{ts} \circ j^t$. Одатле следи да је $j_*^s = j_*^{ts} \circ j_t^t$ па је $j_*^s c = 0$, односно $s \in I_c$. Комбинујући то са раније изведеним закључком да је $\inf\{s \in [a,b] \mid j_*^s c = 0\} \in (a,b)$ закључујемо да је I_c интервал.

□

Теорема 3.3.7. Нека су регуларне вредности $a < b$ функције f такве да су M^a и M^b различитог хомотопског типа при чему је $f^{-1}[a,b]$ компактан. Тада свака нетривијална хомолошка класа $c \in H_k(M^b, M^a) \backslash \{0\}$ индукује критичну вредност од f. Прецизније важи да је

$$\begin{aligned}\mathcal{K} = \mathcal{K}(c,f) &= \inf\{s \in [a,b] \mid j_*^s c = 0\}\\ &= \inf\{s \in [a,b] \mid (\exists c' \in H_*(M^s, M^a)),\ \ i_*^s c' = c\}\\ &= \inf_{\sigma \in c} \max f|_{im\sigma \cap f^{-1}[a,b]} \in (a,b).\end{aligned}$$

критична вредност од f односно постоји $p \in crit(f) \cap f^{-1}[a,b]$ такво да је $f(p) = \mathcal{K}$. Штавише ако је f Морсова на $f^{-1}[a,b]$ онда се p може изабрати тако да је $ind_f(p) = k$.

Доказ: Из претходне леме знамо да је

$$I_c = \{s \in [a,b] \mid j_*^s c = 0\} = \{s \in [a,b] \mid (\exists c' \in H_*(M^s, M^a)),\ \ i_*^s c' = c\}$$

па је

$$\inf\{s \in [a,b] \mid j_*^s c = 0\} = \inf\{s \in [a,b] \mid (\exists c' \in H_*(M^s, M^a)),\ \ i_*^s c' = c\}.$$

Нека је сад $\sigma \in c$ произвољно. Означимо за s' максимум функције f на $crit(f) \cap f^{-1}[a,b]$. Јасно је да граница од σ припада M^a ($[\sigma] \in H_k(M^b, M^a)$), а поред тога је $im\sigma \subset M^{s'}$ па c долази из $H_k(M^{s'}, M^a)$. Одатле закључујемо да је

$$s' \geq \inf\{s \in [a,b] \mid (\exists c' \in H_*(M^s, M^a)),\ \ i_*^s c' = c\}.$$

Узимајући инфимумум по $\sigma \in c$ добијамо да је

$$\inf_{\sigma \in c} \max f|_{im\sigma \cap f^{-1}[a,b]} \geq \inf\{s \in [a,b] \mid (\exists c' \in H_*(M^s, M^a),\ \ i_*^s c' = c\}.$$

Са друге стране ако је s такво да c долази из $H_k(M^s, M^a)$ закључујемо да постоји σ' такво да је $im\sigma \subset M^s$ и $[\sigma'] = c$. Одатле је

$$\inf_{\sigma \in c} \max f|_{im\sigma \cap f^{-1}[a,b]} \leq \max f|_{im\sigma' \cap f^{-1}[a,b]} \leq s.$$

Узимајући инфимум по s таквим да c долази из $H_k(M^s, M^a)$ закључујемо да је

$$\inf_{\sigma \in c} \max f|_{im\sigma \cap f^{-1}[a,b]} \leq \inf\{s \in [a,b] \mid (\exists c' \in H_*(M^s, M^a)),\ \ i_*^s c' = c\}.$$

Из свега овога добијамо да је

$$\mathcal{K} = \inf_{\sigma \in c} \max f|_{im\sigma \cap f^{-1}[a,b]} = \mathcal{K}(f, c).$$

Из става 3.3.2 и примера 3.3.5 (2) је јасно да је $\mathcal{K}$ критична вредност.

Закључак да ако је f Морсова постоји $p \in crit(f)$ такво да је $f(p) = \mathcal{K}$ и $ind_f(p) = k$ следи из Морсових неједнакости.

$\square$

Претходна теорема није квантитативног карактера, односно не можемо ништа рећи о томе колико критичних тачака одговара вредности $\mathcal{K}$ као ни да ли различите класе индукују различите критичне вредности.

Нека је X тополошки простор са коначном кохомологијом (нпр. компактна многострукост) и нека је R комутативан прстен. Тада имамо дефинисан *cap* производ:

$$\cap : H^p(X; R) \times H_m(X; R) \to H_{m-p}(X; R), \qquad (\omega, b) \to \omega \cap b.$$

Надаље нећемо користити ознаку за прстен зарад једноставнијег записа. Подразумеваћемо да су хомологија и кохомологија са коефицијентима у R.

Дефиниција 3.3.8. Кажемо да је нетривијална хомолошка класа $b_1 \in H_*(X) \backslash \{0\}$ подређена хомолошкој класи b_2 (у ознаци $b_1 < b_2$) ако постоји класа $\omega \in H^{p>0}(X)$ таква да је

$$b_1 = \omega \cap b_2.$$

Одавде можемо закључити да је b_2 нетривијална класа вишег степена од b_1. Такође није тешко закључити да је релација $<$ транзитивна јер имамо да важи $(\alpha \cup \beta) \cap c = \alpha \cap (\beta \cap c)$.

Дефиниција 3.3.9. R-број подређења (у ознаци $sub_R(X)$ је највећи број $k \in \mathbb{N}_0$ такав да постоји ланац подређених хомолошких класа у $H^*(X, R)$ таквих да је

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_k < b_{k+1}.$$

При томе је $sub_R(X) = 0$ ако нема подређених класа.

Став 3.3.10. Нека је X тополошки простор са коначном кохомологијом и нека је R комутативан прстен. Тада је

$$cup_R(X) = sub_R(X).$$

Доказ: Следи из формуле $(\alpha \cup \beta) \cap c = \alpha \cap (\beta \cap c)$.

$\square$

Напомена 3.3.11. Нека је дата ексцизивна тројка $(X; A_1, A_2)$ (Погледати [17]). Тада имамо дефинисан *cap* производ

$$\cap : H^p(X, A_2) \times H_m(X, A_1 \cup A_2) \to H_{m-p}(X, A_1).$$

Теорема 3.3.12. Нека су регуларне вредности $a < b$ функције f такве да је $f^{-1}[a,b]$ компактан. Нека је дат пар подређених релативних хомолошких класа $\mathbf{c} < \mathbf{d} \in H_*(M^b, M^a; R)$ за неки комутативан прстен R. Тада је

$$\mathcal{K}(\mathbf{c}, f) \leq \mathcal{K}(\mathbf{d}, f).$$

Додатно ако су све критичне тачке функције f изоловане онда важи

$$\mathcal{K}(\mathbf{c}, f) < \mathcal{K}(\mathbf{d}, f)$$

па су одговарајуће критичне вредности различите.

Доказ: Нека је $\mathbf{c} = \omega \cap \mathbf{d}$ за неко $\omega \in H^{p>0}(M^b)$. Из функторијалног својства релативног *cap* прозвода за инклузију тројки

$$j^s : (M^b; M^a, \emptyset) \to (M^b; M^s, \emptyset)$$

имамо да је

$$j^s_*(\mathbf{c}) = j^s_*(\omega \cap \mathbf{d}) = j^s_*(j^{s*}\omega \cap \mathbf{d}) = \omega \cap j^s_*(\mathbf{d})$$

при чему једнакост $j^{s*}\omega = \omega$ важи јер је

$$j^s(M^b, \emptyset) \to (M^b, \emptyset)$$

идентитета. Одатле имамо да ако је $j^s_*\mathbf{d} = 0$ онда је $j^s_*\mathbf{c} = 0$ па можемо закључити да је

$$\mathcal{K}(\mathbf{c}, f) \leq \mathcal{K}(\mathbf{d}, f).$$

Претпоставимо сада да су критичне тачке функције f изоловане у $f^{-1}[a,b]$. Како је $f^{-1}[a,b]$ следи да их има коначно много па самим тим критичних вредности у $[a,b]$ има коначно много.

Нека је $c = \mathcal{K}(\mathbf{c}, f)$. Из претходног можемо закључити да постоји $\epsilon > 0$ тако да интервал $[c-\epsilon, c+\epsilon]$ не садржи друге критичне вредности осим c. Нека је сад $C = \mathcal{K}(\mathbf{d}, f)$. Класу $\mathbf{d}$ можемо пројектовати

$$\mathbf{d}^+ := j^{c+\epsilon}_*(\mathbf{d}) \in H_*(M^b, M^{c+\epsilon}).$$

Ако је $\mathbf{d}^+ \neq 0$ из функторијалности

$$j^s_* j^{c+\epsilon}_* = (j^s j^{c+\epsilon})_* = j^s_*, \qquad s \geq c + \epsilon$$

можемо закључити да је $j^s_*\mathbf{d}^+ = 0$ акко $j^s_*\mathbf{d} = 0$ за $s \geq c + \epsilon$. Додатно имамо да је $\mathbf{d}^+ \in H_*(M^b, M^{c+\epsilon})$ па је $\mathcal{K}(\mathbf{d}^+, f) \in (c + \epsilon, b)$. Из овога следи да је за неко $s' \in (c + \epsilon, b)$ $j^{s'}_*\mathbf{d}_+ \neq 0$ а самим тим важи и $j^{s'}_*\mathbf{d} \neq 0$. Одатле је из леме 3.3.2. $I_\mathbf{d} \subset [c + \epsilon, b]$ па из претходно доказане релације $j^s_*\mathbf{d}^+ = 0$ акко $j^s_*\mathbf{d} = 0$ за $s \geq c + \epsilon$ можемо закључити да је $I_\mathbf{d} = I_{\mathbf{d}^+}$ па самим тим важи

$$C = \mathcal{K}(\mathbf{d}, f) = \mathcal{K}(\mathbf{d}^+, f) \in (c + \epsilon, b)$$

те је $c < C$.

Дакле потребно је још показати да је $\mathbf{d}^+ \neq 0$. Како су критичне тачке p_i на нивоу c изоловане можемо пронаћи задебљања нестабилних многострукости $\mathcal{W}_i$ (Теорема 3.2.1.) таква да су ова задебљања дисјунктна у паровима. Нека је $\bigcup_i \mathcal{W}_i$. Посматрајмо инклузије

$$(\mathcal{W}, \emptyset) \xrightarrow{I} (M^b, \emptyset) \xrightarrow{J} (M^b, \mathcal{W}).$$

Како је $\mathcal{W}$ контрактибилан мора бити да је $I^*\omega = 0$ ($\mathbf{c} = \omega \cap \mathbf{d}$, $\omega \in H^{p>0}(M^b)$). Одатле из кохомолошког дугог тачног низа индукованог овим инклузијама следи да постоји $\Omega \in H^p(M^b, \mathcal{W})$ такво да је $\omega = J^*\Omega$.

Посматрајмо пресликавање између ексцизивних тројки дато са

$$f : (M^b; M^a, \emptyset) \to (M^b; M^{c+\epsilon}, \mathcal{W})$$

и приметимо да је $f^*\Omega = J^*\Omega = \omega$ (Напомена 3.3.11.). Поред тога јасно је да се $f_* : H_*(M^b, M^a) \to H_*(M^b, M^{c+\epsilon})$ поклапа са $j_*^{c+\epsilon}$. Из свега овога имамо

$$j_*^{c+\epsilon}\mathbf{c} = f_*\mathbf{c} = f_*(\omega \cap \mathbf{d}) = f_*(f^*\Omega \cap \mathbf{d}) = \Omega \cap f_*\mathbf{d} = \Omega \cap \mathbf{d}^+.$$

При томе је последњи *cap* производ

$$H^p(M^b, \mathcal{W}) \times H_*(M^b, \underbrace{\mathcal{W} \cup M^{c-\epsilon}}_{\simeq M^{c+\epsilon}}) \xrightarrow{\cap} H_*(M^b, M^{c-\epsilon})$$

дефинисан за ексцизивну тројку $(M^b; \mathcal{W}, M^{c-\epsilon})$. Хомотопија $\mathcal{W} \cup M^{c-\epsilon} \simeq M^{c+\epsilon}$ произилази из чињенице да је $\mathcal{W} \cup M^{c-\epsilon}$ деформациони ретракт од $M^{c+\epsilon}$. Ово важи јер је $\mathcal{W}$ позитивно инваријантан у односу на градијентни ток и да уједначавајући брзину „спуштања” можемо аналагно као у Деформационој теореми (теорема 3.5.12) добити тражени резултат.

Претпоставимо сада да је $\mathbf{d}^+ = 0$. Из претходног следи да је пројекција $j_*^{c+\epsilon}\mathbf{c}$ тривијална већ у $H_*(M^b, M^{c-\epsilon})$, односно важи да је $j_*^{c-\epsilon}\mathbf{c} = 0$ па из леме 3.3.6 следи да је $c = \mathcal{K}(\mathbf{c}, f) \leq c - \epsilon$ што је контрадикција.

$\square$

Последица 3.3.13. Нека је M затворена многострукост и нека је $f : M \to \mathbb{R}$ функција са изолованим критичним тачкама. Тада важи

$$\#crit(f) \geq \#f(crit(f)) \geq 1 + sub_R(M) = 1 + cup_R(M).$$

Доказ: Нека је $sub_R(M) = cup_R(M) = k$. Тада постоји ланац подређених хомолошких класа

$$b_1 < \cdots < b_{k+1}.$$

Како f достиже минимум и максимум јер је M компактан следи да постоје $a, b \in \mathbb{R}$ тако да је $M^a = \emptyset$ и $M^b = M$. Због тога из претходне теореме имамо одговарајуће критичне вредности

$$c_1 < \cdots < c_{k+1}$$

функције f.

$\square$

Напомена 3.3.13. Приметимо да одавде следи да је $crit(M) \geq 1 + sub(M)$ међутим јасно је да је $sub_{\mathbb{F}}(M) + 1 \leq dim\, H_*(M; \mathbb{F})$ како су све хомолошке класе у подређеном ланцу нетривијалне и различите. Такође већ смо показали да је $sub_R(M) = cup_R(M) \leq cat(M)$, тако да и Морсова и Љустерник Шнирељманова теорија дају бољу оцену за број критичних тачака од $sub_R(M)$.

3.4 Димензија многостукости и број критичних тачака минималне функције

У овом одељку ћемо показати да на компактној повезаној многострукости M^n можемо пронаћи глатку функцију која има највише $n+1$ (n ако је $\partial M \neq \emptyset$) критичних тачака. За то ће нам бити потребан следећи резултат.

Лема 3.4.1. Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ непрекидна функција која је глатка на $M \backslash \{p\}$, $p \in int(M)$. При томе нека постоји нека пробушена околина p на којој f нема критичних тачака. Тада за сваку околину $U = U(p)$ постоји подоколина $\widetilde{U} \subset U$ и глатка функција $F : M \to \mathbb{R}$ таква да је $F|_{M \backslash \widetilde{U}} = f|_{M \backslash \widetilde{U}}$ и $crit(F) \cap \widetilde{U} = \{p\}$.

Доказ: Како можемо наћи карту $(\widetilde{U}, \varphi)$ такву да је $\widetilde{U} \subset U$ при чему f нема критичних тачака на $\widetilde{U} \backslash \{0\}$ $\varphi(p) = 0$ и $\varphi(\tilde{U}) = \mathbb{R}^n$ следи да је довољно да покажемо да за непрекидну функцију $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ која је глатка и нема критичних тачака на $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ постоји $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ при чему је 0 једина критична тачка од F, а F се разликује од f на компактној околини 0. Додатно без губљења на општости можемо претпоставити да је $f(0) = 0$.

Нека је N отворена околина 0 у $f^{-1}(0)$ која је ограничена у $\mathbb{R}^n$. Означимо са $U(N, \epsilon)$ скуп свих тачака x таквих да је $|f(x)| < \epsilon$ и таквих да трајекторија γ_x градијентног вектоског поља ∇f или сече N или има координачни почетак као граничну тачку (лимес). Јасно је да свака недегенерисана трајекторија само у једном тренутку може пресећи $f^{-1}(0)$ (f строго расте дуж недегенерисаних градијентних трајекторија). Одатле имамо добро дефинисану глатку ретракцију

$$r : U(N, \epsilon) \to N$$

где свакој тачки x која не припада N доделимо место пресека са M или 0 уколико је 0 лимес трајекторије γ_x.

Нека је $\epsilon > 0$ довољно мало тако да је функција f ограничена на $U(N, \epsilon)$. Конструисаћемо F тако да се разликује од f на $U(N, \epsilon)$. За то нам је довољно да конструишемо функције $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $H : N \to [0, 1]$ које задовољавају следећа својства.

(1) $\lambda \circ f \in C^\infty$

(2) $\lambda(t) = t$ ако је $|t| \geq \frac{1}{2}\epsilon$

(3) $\lambda'(t) > 0, \qquad t \neq 0$

(1′) $H \circ r \in C^{\infty}, \qquad D^k(H \circ r)(0) = 0, \qquad k \geq 0$

(2′) За неко $W \subset \overline{W} \subset N, H(N \backslash W) = 1$

(3′) $H(0) = 0$ и $H(N \backslash \{0\}) = (0, 1]$

Онда можемо дефинисати функцију F на следећи начин

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin U(N, \epsilon) \\ (1 - H \circ r(x)) \cdot \lambda(f(x)) + H \circ r(x) \cdot f(x), & x \in U(N, \epsilon) \end{cases}.$$

Из особине (1′) и услова теореме следи да је функција $H \circ r(x) \cdot f(x)$ глатка на $U(N, \epsilon) \backslash \{0\}$. Поред тога имамо да је

$$\lim_{x \to 0} \frac{H \circ r(x) \cdot f(x)}{\|x\|^n} = \lim_{x \to 0} \frac{H \circ r(x)}{\|x\|^n} \cdot f(x) = 0 \cdot f(0) = 0$$

јер је $D^k(H \circ r)(0) = 0, k \geq 0$ и f непрекидна функција па то даље имплицира да је $D^k(H \circ r \cdot f)(0) = 0$. Из свега овога добијамо да је $H \circ r(x) \cdot f(x)$ глатка на $U(N, \epsilon)$. Додатно из особина (1) и (1′) имамо да су $\lambda \circ f$ и $H \circ r$ глатке на $U(N, \epsilon)$ па је и $F \in C^{\infty}(U(N, \epsilon))$. Особине (2) и (2′) нам дају да је $F(x) = f(x)$ на околини границе $U(N, \epsilon)$ те следи да $F \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Приметимо да комбинујући то да је $d((1 - H \circ r) \cdot \lambda \circ f)|_x = -(\lambda \circ f)|_x \cdot d(H \circ r)|_x + (1 - (H \circ r)|_x) d(\lambda \circ f)|_x$, чињеницу да је $(H \circ r)(0) = 0$, $d(H \circ r)(0) = 0$ и претходно добијен резултат $d(H \circ r \cdot f)(0) = 0$ можемо закључити и да је 0 критична тачка функције F.

Нека је $x \in U(N, \epsilon) \backslash \{0\}$

(*i*) $H \circ r$ је консатнтно дуж трајекторија ∇f па је $(H \circ r)'_{\nabla f(x)}(x) = d(H \circ r)|_x(\nabla f(x)) = 0$.

(*ii*) f строго расте дуж неконстантних трајекторија па је $f'_{\nabla f(x)}(x) > 0$.

(*iii*) $d(\lambda \circ f)|_x = \lambda'(f(x)) df|_x$ па је из особине (3) за $x \notin M$ $d(\lambda \circ f)|_x(\nabla f(x)) > 0$. Како је

$$M \backslash \{0\} \subset \overline{U(N, \epsilon) \backslash \{0\}}$$

добијамо да је $(\lambda \circ f)'_{\nabla f(x)}(x) \geq 0$.

Како важи

$$dF|_x = -(\lambda \circ f)|_x \cdot d(H \circ r)|_x + (1 - (H \circ r)|_x) d(\lambda \circ f)|_x + d(H \circ r)|_x \cdot f|_x + (H \circ r)|_x \cdot df|_x$$

из $(i), (ii)$ и (iii) можемо закључити да је $F'_{\nabla f(x)}(x) > 0$, а самим тим је и $dF(x) \neq 0$ на $U(N,\epsilon)\backslash\{0\}$. Због овога и чињенице да је $F(x) = f(x)$ на $U(N,\epsilon)^c$ можемо закључити да је 0 једина критична тачка функције F.

$\overline{U(N,\epsilon)}$ је компактан ($U(N,\epsilon)$ је ограничен) те треба још показати да функције λ и H постоје.

Нека је $(\lambda_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{i\in\mathbb{N}}$ низ глатких функција таквих да је

- $\lambda_i(t) = t, \qquad |t| \geq \frac{\epsilon}{2i}$
- $\lambda_i(t) = 0, \qquad |t| \leq \frac{\epsilon}{2(i+1)}$
- $\lambda_i'(t) \geq 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$

За свако i $\lambda_i(f(x)) = 0$ у околини нуле па је $\lambda_i \circ f$ глатка на $U(N,\epsilon)$. Ако су $\gamma_i = \max\{|\frac{d^{|\alpha|}(\lambda_i\circ f)}{dx^\alpha}(x)| \; |\alpha| \leq i, \; x \in U(N,\epsilon)\}$, $\beta_i = \frac{2^{-i}}{1+\gamma_i}$, $\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$, и $\alpha_i = \frac{\beta_i}{\beta}$ имамо да је

$$\lambda(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \lambda_i(x)$$

тражена функција. Приметимо да је $\alpha_i|\frac{d^{|\alpha|}(\lambda_i\circ f)}{dx^\alpha}(x)| \leq \frac{2^{-i}}{\beta}$ ако је $|\alpha| \leq i$ па имамо да ред

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \frac{d^{|\alpha|}(\lambda_i \circ f)}{dx^\alpha}(x)$$

апсолутно конвергира на $U(N,\epsilon)$ одакле је $\lambda \circ f$ глатка у 0. Поред тога јасно је да је λ глатка па како знамо да је f глатка на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ није тешко закључити да важи (1). Из дефиниције имамо да је $\lambda_i(t) = t$ за $|t| \geq \frac{1}{2\epsilon}$ па пошто је $\sum_i \alpha_i = 1$ добијамо да важи (2). Такође за довољно велико i важи да је $\lambda_i'(t_0) = 1$ $(t_0 \neq 0)$ а осим тога је $\alpha_i > 0$ па комбинујући ово са чињеницом да је $\lambda_i'(t) \geq 0$ добијамо да важи (3).

Нека је сада W нека околина 0 у N таква да је $W \subset \overline{W} \subset N$. Изаберимо фамилију $\{\overline{U}_{i+1} \subset U_i\}$ отворених околина нуле у N такву да је $\overline{U}_{i+1} \subset U_i$ и $\bigcap_i U_i = \{0\}$. Ово нам омогућава да конструишемо фамилију $(h_i : N \to [0,1])$ такву да је

$$\overline{U}_{i+1} \subset h_i^{-1}(0) \subset U_i, \qquad N\backslash W \subset h_i^{-1}(1)$$

при чему је $h_i|_{N\backslash\overline{U}_{i+2}}$ класе C^∞ ($N\backslash\overline{U}_{i+2}$ је многострукост јер садржи само регуларне вредности f у $f^{-1}(0)$). Приметимо да је $h_i \circ r \in C^\infty$ (h_i је 0 у околини 0). Слично као и за λ избором одговарајућих позитивних бројева a_i таквих да је $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$ добијамо тражену функцију

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i.$$

$\square$

Последица 3.4.2. Нека је M^n компактна многострукост и нека је $f : M \to \mathbb{R}^n$ Морсова функција која има један минимум и при чему је максимална константна и регуларна на ∂M. Ако f има k критичних вредности таквих да је $f^{-1}(c)$ повезан за сваку критичну вредност c онда постоји глатка функција $h : M \to \mathbb{R}$ која има k критичних тачака.

Доказ: Нека је c произвољна критична вредност. Испитајмо прво геометрију $f^{-1}(c)$. Јасно је да је у околини регуларних тачака $f^{-1}(c)$ многострукост. Како је f Морсова и M компактна постоји коначно много критичних тачака које одговарају нашој критичној вредности и у њима се може нарушити глаткост (чак и сама локална структура) многострукости. У Морсовој карти произвољне критичне тачке $p \in f^{-1}(c)$ индекса λ имамо да је

$$f(t_1, \ldots, t_n) = c - t_1^2 - \cdots - t_\lambda^2 + t_{\lambda+1}^2 + \cdots + t_n^2,$$

па у тој карти имамо да је

$$f(t_1, \ldots, t_n) = c \Leftrightarrow t_1^2 + \cdots + t_\lambda^2 = t_{\lambda+1}^2 + \cdots + t_n^2.$$

Јасно је да је произвољна права која садржи неку тачку из $f(t_1, \ldots, t_n) = c$ и $(0, \ldots, 0)$ садржана у $f(t_1, \ldots, t_n) = c$.

Како је $f^{-1}(c)$ повезан из свега претходног можемо закључити да се две произвољне критичне тачке могу спојити глатким путем који је садржан у $f^{-1}(c)$. Одавде следи да постоји део-по-део гладак пут $\gamma : [0, 1] \to M$ који нема самопресеке такав да је $\gamma([0, 1]) \subset f^{-1}(c)$ и повезује све критичне тачке на критичном нивоу c.

$M \backslash \gamma([0, 1])$ је дифеоморфно са $M \backslash \{p\}$ за неку тачку $p \in int(M)$. Штавише можемо изабрати дифеоморфизам

$$\psi : M \backslash \gamma([0, 1]) \to M \backslash \{p\}$$

тако да је идентитета на комплементу произвољно мале околине од $f^{-1}(c)$.
Посматрајмо сада функцију $g = f \circ \psi^{-1}$. Она се разликује од f на комплементу произвољно мале околине од $f^{-1}(c)$.

Нека је p_n низ у $M \backslash \{p\}$ такав да је $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Претпоставимо да $\lim_{n\to\infty} f \circ \psi^{-1}(p_n) \neq c$. Тада постоји подниз од p_n (задржаћемо исту ознаку) такав да је $|f \circ \psi^{-1}(p_n) - c| \geq \epsilon$ за неко $\epsilon > 0$. Због компактности простора M имамо подниз од p_n (опет ћемо задржати исту ознаку) такав да $\psi^{-1}(p_n)$ конвергира ка неком $q \in M$. Притом је $c' = f(q) = \lim_{n\to\infty} f \circ \psi^{-1}(p_n) = c'$ и мора бити да је $c \neq c'$. Али ово онда значи да је $q \in M \backslash \gamma([0, 1])$. Како је ψ дифеоморфизам одавде добијамо да је

$$\psi(q) = \psi(\lim_{n\to\infty} \psi^{-1}(p_n)) = \lim_{n\to\infty} p_n = p$$

што је немогуће.

Одавде закључујемо да је $g = f \circ \psi^{-1}$ глатка функција која се може непрекидно продужити у p. Додатно g нема критичних тачака на довољно малој пробушеној околини p. Примењујући претходну лему добијамо функцију F која се разликује од f на малој околини од $f^{-1}(c)$ и има једну критичну тачку на тој околини.

Понављајући овај поступак за сваку критичну вредност добијамо тражено h.

$\square$

Произвољну Морсову функцију можемо модификовати на начин да не променимо број критичних тачака произвољног индекса а да све критичне тачке истог индекса одговарају истој критичној вредности (погледати [18]).

Дефиниција 3.4.3. Морсова функција $f : M \to \mathbb{R}$ је самоиндексирајућа ако за сваку критичну тачку p индекса k важи $f(p) = k$.

Теорема 3.4.4. Нека је M^n компактна многострукост. Постоји самоиндексирајућа Морсова функција која је регуларна константна и максимална на ∂M таква да је за индекс k, $f^{-1}(k)$ повезан.

Напомена 3.4.5. Приметимо да оваква функција мора имати тачно једну тачку минимума (и једну тачку максимума уколико је $\partial M = \emptyset$, у супротном нема тачака индекса n) јер из чињенице f мора достићи минимум на $int(M)$ (M је компактан а f је максимална на ∂M) следи да тачке у којима се достиже минимум морају бити критичне тачке индекса 0. Како је f самоиндексирајућа закључујемо је 0 глобални минимум. Одатле је $f^{-1}(0)$ скуп изолованих критичних тачака. Како је $f^{-1}(0)$ повезан мора бити и једночлан.

Последица 3.4.6. Нека је M компактна повезана многострукост. Тада је

$$crit(M) \leq dim(M) + 1$$

ако је $\partial M = \emptyset$ и

$$crit(M) \leq dim(M)$$

ако је $\partial M \neq \emptyset$.

Доказ: Нека је f функција из Теореме 3.4.4. Она има k критичних вредности при чему је $k \leq dim(M) + 1$ ($\partial M = \emptyset$) или $k \leq dim(M)$ ($\partial M \neq \emptyset$). Из својстава ове функције и напомене 3.4.5. следи да она задовољава услове теореме 3.4.2, па постоји глатка функција $h : M \to \mathbb{R}$ таква да је $\#crit(h) = k$.

$\square$

Примери 3.4.7.

- $crit(\mathbb{T}^n) = n + 1$
- $crit(\mathbb{RP}^n) = n + 1$
- $crit(M_g) = \begin{cases} 2, & g = 0 \\ 3, & g = 1 \end{cases}$
- $crit(N_h) = 3$
- $crit(M) = 4$, M Поенкареова хомолошка сфера

- $crit(M) = 2n+1$, M^{2n} Асферична симплектичка многострукост

Доказ: у свим примерима осим за $M_0 = \mathbb{S}^2$ (већ смо израчунали $crit(\mathbb{S}^2)$ у претходном одељку) користимо чињеницу да важи $cat(M) = dim(M)$ и неједнакости

$$cat(M) + 1 \leq crit(M) \leq dim(M) + 1.$$

$\square$

Као и у случају категорије и за $crit(M)$ можемо дати хомолошку оцену за број критичних тачака минималне функције.

Теорема 3.4.8. Нека је M p-повезана многострукост ($p \geq 6$) димензије $n \geq 6$. Нека је $r(M) \subset \mathbb{Z}$ скуп свих $i \in \mathbb{Z}$ таквих да је $H_i(M;\mathbb{Z}) \neq 0$ или $H^i(M;\mathbb{Z}) \neq 0$. Ако се $r(M)$ може покрити унијом s затворених интервала дужине p тада је

$$crit(M) \leq s.$$

Доказ: погледати [20].

3.5 Љустерник-Шнирељманова теорема на бесконачнодимензионим многострукостима

Дефиниција 3.5.1. Нека је E Банахов простор и нека је M Хауздорфов тополошки простор. Ако за свако $p \in M$ постоји отворена околина $U \ni p$ таква да је

$$U \approx \widetilde{U}$$

где је $\widetilde{U}$ отворен подскуп од E кажемо да је M тополошка Банахова многострукост моделована на E.

Уколико многострукост M можемо покрити фамилијом сагласних карата онда на M имамо и глатку структуру.

Дефиниција 3.5.2. Нека је E Банахов простор, M Хаусдорфов тополошки простор, и r такво да је $1 \leq r \leq +\infty$. Ако је фамилија $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_i$ таква да задовољава

- $\{U_i\}$ - Отворен покривач од M
- $(\forall i)$ $\varphi_i : U_i \to \varphi(U_i)$ хомеоморфизам на отворен подскуп Банаховог простора E
- $(\forall i, j)$ $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ је пресликавање класе C^r.

фамилију $\mathcal{A}$ називамо C^r атласом на M а кажемо да је $(M, \mathcal{A})$ C^r Банахова многострукост моделована на E.

Напомена 3.5.3. Под C^r структуром на M најчешће подразумевамо максималан C^r атлас (у смислу инклузије) $\mathcal{A}'$ такав да је $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}$.

Напомена 3.5.4. Уколико је E Хилбертов простор кажемо да је M Хилбертова многострукост. На сепарабилној Хилбертовој многострукости увек можемо дефинисати Риманову метрику.

Нека је $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ повезана Риманова многострукост без границе моделована на сепарабилном Хилбертовом простору. Нека је $p \in M$ и $X_p \in T_pM$. Тада имамо дефинисану норму $\|X_p\| = \sqrt{\langle X_p, X_p \rangle}$. Ако су $p, q \in M$ дефинишимо

$$\rho(p, q) = \inf_{\sigma} \int_0^1 \|\sigma'(t)\| dt$$

где се инфимум узима по свим C^1 путевима σ који повезују p и q. Испоставља се да је ово метрика на многострукости M која је конзистентна са топологијом на M. Уколико је (M, ρ) комплетан метрички простор кажемо да је $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ комплетна Риманова многострукост.

Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ функција на Римановој многострукости. Пошто на M имамо дефинисан градијент, то нам омогућава да Љустерник Шнирељманову теорију уопштимо на Хилбертове просторе. Ипак како Хилбертове многострукости нису локално компактне потребно је да пар (M, f) задовољава одговарајући услов компактности који називамо Палес-Смејлов услов (скраћено П-С).

Дефиниција 3.5.5. (Услов П-С) Нека је M Риманова многострукост без границе моделована на Хилбертовом простору и нека је $f : M \to \mathbb{R}$ функција на њој. Кажемо да пар (M, f) задовољава услов П-С ако:

(a) M је комплетна Риманова многострукост.

(b) Ако је $\{p_n\} \subseteq M$ низ тачака такав да је $f(p_n)$ ограничен и $\nabla f(p_n)$ конвергира ка нули, онда $\{p_n\}$ садржи конвергентан подниз.

Сада ћемо навести неколико тврђења из теорије диференцијалних једначина (погледати [3]).

Лема 3.5.6. Нека је X C^1 векторско поље на M. За свако $p \in M$ постоји решење γ_p диференцијалне једначине

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = X(\gamma(t)), \qquad \gamma(0) = p$$

такво да је свако друго решење које почиње у p рестрикција од γ_p.

Ово решење се назива максимално решење диференцијалне једначине

$$\frac{d}{dt}\gamma_p(t) = X(\gamma_p(t))$$

са почетним условом $\gamma(0) = p$. Дефинишимо $l^-(p) < 0$ и $l^+(p) > 0$ тако да је $(l^-(p), l^+(p))$ домен од γ_p.

Лема 3.5.7. Ако је $l^-(p) < s < l^+(p)$ и $q = \gamma_p(s)$, тада је $\gamma_q(t) = \gamma_p(t+s)$ и $l^-(q) = l^-(p) - s$ $(l^+(q) = l^+(p) - s)$.

Лема 3.5.8. Функција l^- (l^+) је полунепрекидна одоздо (одозго). Ако је $l^-(p) > -\infty$ $(l^+(p) < +\infty)$ онда не постоји лимес од $\gamma_p(t)$ када t тежи $-\infty$ $(+\infty)$.

Лема 3.5.9. Нека је M C^{k+1} многострукост и нека је X C^k векторско поље. Тада је пресликавање $(p,t) \mapsto \gamma_p(t)$ класе C^k.

Ово нам даје могућност да дефинишемо ток $\varphi_t(p) = \gamma_p(t)$. Из леме 3.5.7. је јасно да важи $\varphi_{s+t}(p) = \varphi_s(\varphi_t(p))$ када су обе стране једначине дефинисане.

Надаље ћемо претпоставити да пар (M, f) задовољава услов П-С.

Лема 3.5.10. Нека је $\alpha \in C^\infty[0,\infty)$ дефинисана за све $t \geq 0$ тако да $\alpha(t) = 1$ за $0 \leq t \leq 1$, тако да је $t^2\alpha(t)$ монотоно расте за $t \geq 0$ и $t^2\alpha(t) = 2$ за $t \geq 2$. Нека је $V(p) = -\alpha(\|\nabla f(p)\|)\nabla f(p)$. Нека је φ ток који одговара векторском пољу V. Тада је тај ток глобално дефинисан.

Доказ: Из дефиниције функције α јасно је да је векторско поље V униформно ограничено. Означимо то ограничење са K. Како је $\frac{d}{dt}\varphi_t(p) = V(\varphi_t(p))$ из дефиниције метрике ρ имамо да је

$$\rho(\varphi_t(p), \varphi_s(p)) \leq K|s-t|, \qquad l^-(p) < s, t < l^+(p).$$

Ако је $l^+(p) < +\infty$ како је функција $\varphi_\cdot(p) : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (M, \rho)$ Липшицова следи да се може непрекидно продужити у $l^+(p)$ што је контрадикција због леме 3.5.8. па је $l^+(p) = +\infty$. Из истог аргумента следи да је $l^+(p) = -\infty$.

$\square$

Лема 3.5.11. Нека је φ као у претходној леми и нека је $c \in \mathbb{R}$. Означимо са

$$K_c = \{p \in M | f(p) = c, \nabla f(p) = 0\}$$

скуп критичних тачака од f које одговарају критичној вредности c. Тада је

(1) K_c компактан

(2) $N_\delta = \{p \in M | |f(p) - c| < \delta,\ |\nabla f(\varphi_t(p))| < \delta, 0 \leq t \leq 1\}$

За сваку околину U од K_c постоји околина N_δ од K_c садржана у њој.

Доказ: Из услова П-С је јасно да је K_c компактан па требамо доказати само (2). Претпоставимо да постоји околина U таква да не важи (2). Тада постоји низ $p_n \in M\backslash\{U\}$ и низ бројева $0 \leq t_n \leq 1$ такав да је $f(p_n) \to c$ и $\nabla f(\varphi_{t_n}(p_n)) \to 0$ када $n \to \infty$. Прелазећи на подниз можемо претпоставити без губљења на општости да $t_n \to t^*$, $n \to \infty$. Такође имамо да је

$$\frac{d}{dt} f(\varphi_t(p)) = -\alpha(\|\nabla f(\varphi_t(p))\|)\|\nabla f(\varphi_t(p))\|^2.$$

Одавде је јасно да је $\|\frac{d}{dt} f(\varphi_t(p))\|$ униформно ограничена за све $p \in M$ и све $t \in \mathbb{R}$. Због тога постоји константа $K > 0$ таква да је

$$|f(\varphi_t(p)) - f(p)| \leq K|t|.$$

Пошто $f(p_n) \to c$ следи да је $f(\varphi_{t_n}(p_n))$ униформно ограничен. Из услова П-С следи да $f(\varphi_{t_n}(p_n))$ има конвергентан подниз. Задржавајући исту нотацију нека $\varphi_{t_n}(p_n) \to q$. Како $\nabla f(\varphi_{t_n}(p_n)) \to 0$ јасно је да је q критична тачка од f. Одатле имамо

$$p_n = \varphi_{-t_n}(\varphi_{t_n}(p_n)) \to \varphi_{-t^*}(q) = q.$$

Како је $q \in K_c$ лимес низа $\{p_n\}$ а важи да $p_n \notin U$ добијамо контрадикцију.

$\square$

Теорема 3.5.12. (Деформациона теорема) Нека пар (M, f) задовољава услов П-С и нека је φ из претходне леме. Тада за сваку околину U од K_c постоји $\varepsilon > 0$ тако да је $\varphi_1(M_{c+\varepsilon}\backslash\{U\}) \subset M_{c-\varepsilon}$. Посебно ако је c регуларна вредност тада је $\varphi_1(M_{c+\varepsilon}) \subset M_{c-\varepsilon}$.

Доказ: Нека је $\delta > 0$ такво да је N_δ садржано у U и нека је $\varepsilon = \frac{\delta^2}{2}$. Узмимо $p \in M_\varepsilon$ произвољно тако да $p \notin U$. Тада је $p \notin N_\delta$ па ако је $|f(p) - c| \geq \delta$ тривијално важи да је $\varphi_1(p) \leq c - \varepsilon$. У супротном $\|\nabla f(\varphi_t(p))\| \geq \delta$ за $0 \leq t \leq 1$. Како је

$$f(\varphi_1(p)) - f(p) = -\int_0^1 \alpha(\|\nabla f(\varphi_t(p))\|)\|\nabla f(\varphi_t(p))\|^2 dt$$

и $t^2\alpha(t)$ монотоно растућа можемо закључити да је

$$f(\varphi_1(p)) - f(p) \leq -\delta^2$$

па одатле следи да је $f(\varphi_1(p)) \leq c + \frac{\delta^2}{2} - \delta^2 \leq c - \frac{\delta^2}{2} = c - \varepsilon$.

Ако је c регуларна вредност тврђење важи због услова П-С.

$\square$

У одељку 3.3. смо видели да је

$$c_m(f) = \inf\{a \in \mathbb{R} | cat_M(M_a) \geq m - 1\}$$

критична вредност за свако $m \in \mathbb{N}$. Да бисмо ово искористили да докажемо Љустерник-Шнирељманову теорему требаће нам следећа два тврђења (за доказ погледати [11] и [21]).

Лема 3.5.13. Нека је X тополошки простор. Тада

1. $A \supseteq B \implies cat_X(A) \geq cat_X(B)$
2. $cat_X(A_1 \cup A_2) \leq cat_X(A_1) + cat_X(A_2) + 1$
3. $cat_X(A) \leq dim(A)$
4. Ако је пресликавање $\tau : A \to N$ хомотопно инклузији $i : A \to N$, онда је $cat_X(\tau(A)) \geq cat_X(A)$.

Лема 3.5.14. Нека је A компактан подскуп од M и нека је $cat_X(A) \leq k$. Тада постоји околина U од A таква да је $cat_X(\overline{U}) \leq k$.

Теорема 3.5.15. Нека (M, f) задовољава П-С услов и нека је $m \leq n$ при чему је $-\infty < c = c_m(f) = c_n(f) < +\infty$. Тада је $cat(K_c) \geq n - m$. Посебно ако је $m = n$ скуп K_c је непразан.

Доказ: Нека је $c = c_m = \cdots = c_n$. Из претходне леме постоји отворена околина U таква да је $cat_M(U) = cat_M(\overline{U}) = cat_M(K_c)$. Из теореме 3.5.12. и леме 3.5.13. имамо да за довољно мало $\varepsilon > 0$ имамо

$$cat_M(M_{c-\varepsilon}) \geq cat_M(\varphi_1(M_{c+\varepsilon} \backslash U)) \geq cat_M(M_{c+\varepsilon} \backslash U).$$

Комбинујући ово и лему 3.5.13. следи да је

$$cat_M(M_{c+\varepsilon}) = cat_M((M_{c+\varepsilon} \backslash U) \cup U) \leq cat_M((M_{c+\varepsilon}) + cat_M(U) + 1$$

$$\leq cat_M(\varphi_1(M_{c+\varepsilon} \backslash U)) + cat_M(K_c) + 1 \leq cat_M(M_{c-\varepsilon}) + cat_M(K_c) + 1.$$

Односно имамо да је

$$cat_M(K_c) \geq cat_M(M_{c+\varepsilon}) - cat_M(M_{c-\varepsilon}) - 1.$$

Како је $c = c_n(f)$ јасно је из дефиниције да је $cat_M(M_{c+\varepsilon}) \geq n - 1$. Са друге стране $c = c_m$ имплицира да је $cat_M(M_{c-\varepsilon}) \leq m - 2$. Комбинујући све ово имамо да је

$$\begin{aligned} cat_M(K_c) &\geq cat_M(M_{c+\varepsilon}) - cat_M(M_{c-\varepsilon}) - 1 \\ &\geq (n-1) - (m-2) - 1 = n - m. \end{aligned}$$

Ако је $m = n$ у одељку 3.3. смо већ показали да је $c_m(f) = c_n(f) = c$ критична вредност па K_c мора бити непразан.

□

Последица 3.5.16. Нека су задовољени услови претходне теореме. Тада је $dim(K_c) \geq n - m$.

Лема 3.5.17. Нека (M, f) задовољава услов П-С, и нека је нека од константи $c_m(f) = +\infty$. Тада f узима произвољно велике вредности на скупу критичних тачака, па их последично има бесконачно много.

Доказ: Претпоставимо супротно. Нека постоји константа $L < +\infty$ таква да нема критичних вредности које су веће или једнаке од L. Одатле следи из теореме о имплицитној функцији да је скуп

$$N = \{p | f(p) = L\}$$

регуларно уложена многострукост од M. Нека је $W(p)$ C^1 тангентно векторско поље дефинисано на $M \backslash K$ формулом

$$W(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|^2}.$$

Оно нам даје ток ϕ_t. Јасно је да је

$$\frac{d}{dt} f(\phi(p)) = 1$$

па добијамо да је

$$f(\phi_t(p)) = f(p) + t.$$

Нека је p тачка таква да је $l^+(p) < +\infty$. Пошто је M комплетан из леме 3.5.8. следи да $\phi_t(p) \to l_+(p)$ или да је

$$\int\limits_0^{l^+(p)} \|w(\phi_t(p))\| dt = \int\limits_0^{l^+(p)} \|\nabla f(\phi_t(p))\|^{-1} dt = +\infty.$$

У оба случаја следи да постоји низ $t_n \to l^{+\infty}(p)$ тако да је $\nabla f(\phi_t(p)) \to 0$. Како је низ $\{f(\phi_{t_n}(p))\}$ ограничен следи из П-С услова да низ $\{\phi_t(p)\}$ има конвергентан подниз који конвергира ка некој критичној тачки q. Ако је $p \in N$ то не може да се деси па можемо закључити да је $l^+(p) = +\infty$.

Из сличног аргумента ако је $l^{-1}(p) > -\infty$ постоји низ $t_n \to l^-(p)$ такав да $\phi_t(p)$ конвергира ка критичној тачки. Због тога за свако $p \in M$ такво да је $f(p) \geq L$ постоји неко $t > l^{-1}(p)$ такво да је $f(\phi_t(p)) = L$. Нека је

$$X : [0, +\infty] \times N \to \{p \in M | f(p \geq L)\}, \qquad X(t, p) = \phi_t(p).$$

X је непрекидно а јасно је и да је сурјективно из претходне аргументације. Такође

$$q \mapsto [f(q) - L, \phi_{L-f(q)}(q)]$$

је непрекидно инверзно пресликавање од X па можемо закључити да је X хомеоморфизам.

Због егзистенције X можемо закључити да постоји хомотопија φ_t таква да је φ_0 идентитета а $\varphi_t(M) = \{f(p) \leq L + 1\}$. Због овога из леме 3.5.13. можемо закључити да је $cat_M(M^{L+1}) \geq cat(M)$. Ово онда имплицира из дефиниције $c_m(f)$ да је $c_m(f) \leq L + 1$ за $m \leq cat(M) + 1$.

$\square$

Одавде једноставно индукцијом можемо закључити да важи следећа теорема.

Теорема 3.5.18. Нека (M, f) задовољава услов П-С и нека је функција f ограничена одоздо. Тада важи
$$cat(M) + 1 \leq crit(f).$$

3.6 Поређење Морсове и Љустерник-Шнирељманове теорије и нека нерешена питања

Топологија многострукости у много већој мери условљава особине Морсових функција него функција које имају дегенерисане критичне тачке. Илуструјмо то на следећи начин.

Нека је функција $f : M \to \mathbb{R}$ таква да је $\#crit(f) = crit(M)$. Из леме 3.4.1. јасно је да ову функцију можемо модификовати у околини произвољне регуларне тачке тако да додамо тачно једну критичну тачку. Одатле је јасно да важи следећи став.

Став 3.6.1. Нека је M затворена многострукост и нека је $k \geq crit(M)$ произвољно. Тада постоји функција $g : M \to \mathbb{R}$ таква да $\#crit(g) = k$.

Са друге стране видели смо да ако је M непарне димензије мора бити да је $\chi(M) = 0$. Из формуле за Ојлерову карактеристику (Јаке Морсове неједнакости) онда следи да произвољна Морсова функција на M мора имати паран број тачака. Дакле већ и сама димензија многострукости има импликације на особине Морсових функција.

Такође слабе Морсове неједнакости дају доње ограничење за број критичних тачака произвољног индекса Морсове функције што није случај за функције са дегенерисаним критичним тачкама.

Дуално Морсове функције одређују хомотопски тип многострукости што их чини погодним за проблеме класификације, док функције са дегенерисаним критичним тачкама јако мало говоре о топологији. Илуструјмо то једним примером.

Нека је M оријентабилна затворена површ без границе. Јасно да ако поставимо површ M усправно (ако је уложимо на одговарајућ начин) функција висине $h : M \to \mathbb{R}$ ће бити Морсова функција. Додатно ако је $M = M_g$ имамо да је $\#crit(h) = 2g + 2$ па како знамо да је
$$\beta(M; \mathbb{Z}) \leq \widetilde{crit}(M) \leq \#crit(h)$$
закључујемо да важи да је $\widetilde{crit}(M) = 2g + 2$, па је $g = \frac{\widetilde{crit}(M)-2}{2}$. Односно $\widetilde{crit}(M)$ у потпуности одређује на којој се оријентабилној површи налазимо као што и сума Бетијевих бројева $\beta(M; \mathbb{Z})$ то чини.

Са друге стране $cat(M_g) = 2$ и $crit(M_g) = 3$ за $g \geq 1$ а $cat(M_0) = 1$ и $crit(M_0) = 2$ па $cat(M)$ и $crit(M)$ само могу рећи да ли се налазимо на сфери или не.

Разлог зашто нам овде Морсова теорија даје много више информација лежи у чињеници да су $cat(M)$ и $crit(M)$ ограничени димензијом многострукости док $\widetilde{crit}(M)$ и $\beta(M;\mathbb{Z})$ нису.

Управо Морсова теорија се може користити за доказивање познате класификације затворених површи без границе.

Ипак у неким ситуацијама за мање вредности категорије може се показати да однос $cat(M)$ и $crit(M)$ доста говори о многострукости. На пример у категорији хомотопских сфера S једнакост

$$crit(S) = cat(S) + 1$$

еквивалентна је Поенкареовој хипотези (погледати [11]).

Ово говори у прилог нетривијалности односа $cat(M)$ и $crit(M)$. Наиме, још увек није утврђено да ли је $crit(M)$ инваријанта хомеоморфизма, хомотопска инваријанта или само инваријанта дифеоморфизма.

Осим тога, јако је тешко одвојити $crit(M)$ од $cat(M)$. Познати су примери простора за које важи $crit(M) = cat(M) + 2$. Ово се добија конструкцијом $ballcat(M)$ категорије где многострукост покривамо затвореним дисковима. Јасно је да имамо $cat(M) \leq ballcat(M)$ а испоставља се да важи и

$$ballcat(M) + 1 \leq crit(M).$$

У поменутим примерима имамо да је $cat(M) = ballcat(M) - 1$ и $ballcat(M) + 1 = crit(M)$ одакле јасно следи закључак. Ипак имамо следећи отворен проблем.

Отворен проблем 3.6.2. Наћи затворену многострукост M такву да је

$$crit(M) > cat(M) + 2.$$

Са друге стране питање да ли је $\widetilde{crit}(M)$ хомотопска инваријанта је такође нетривијално, премда $\widetilde{crit}(M)$ и $\beta(M)$ можемо више одвојити. На пример у случају Поенкареове хомолошке сфере $\widetilde{crit}(M) = 6$ док је $\beta(M) = 2$.

Ипак Ребова теорема се може модификовати за димензију $n \leq 6$ тако да ако је $\widetilde{crit}(M) = 2$ важи да је M дифеоморфно n-сфери. Одатле ако би $\widetilde{crit}(M)$ била хомотопска инваријанта или чак инваријанта хомеоморфизма следило би да на $\mathbb{S}^4$ имамо јединствену глатку структуру, а питање егзистенције егзотичне структуре на $\mathbb{S}^4$ још увек није решено.

Из примера Поенкареове хомолошке сфере M следи да је $cat(M) + 1 = 4 > 2 = \beta(M)$ па се не може рећи да Морсова теорија у општем случају даје бољу оцену од Љустерник Шнирељманове теорије.

Ипак, уколико је M просто повезана имамо хомолошку оцену

$$cat(M) \leq \mathbf{H}(M),$$

па ако M нема торзију у хомолошким групама можемо закључити да важи

$$cat(M) + 1 \leq \beta(M; \mathbb{Z}).$$

4 Примене Љустерник-Шнирељманове теорије

У овом одељку изложићемо неке примене Љ-Ш теорије у Римановој и симплектичкој геометрији.

4.1 Риманова геометрија

Мотивација за настанак Љуштерник Шнирељманове теорије се управо налази у Римановој геометрији. Њеним коришћењем се може показати да свака сфера $\mathbb{S}^2$ има барем 3 затворене геодезијске криве. Ми ћемо у овом одељку доказати два позната резултата за просто повезане компактне многострукости.

Лема 4.1.1. Нека је N просто повезана компактна $n-$димензиона многострукост. Тада:

(1) Све кохомолошке групе са реалним коефицијентима $H^k(\Omega N;\mathbb{R})$ су коначнодимензионе

(2) Ако је $dim(N)=n$ тада не постоји n узастопних позитивних целих бројева таквих да је $H^k(\Omega N;\mathbb{R})=0$.

(3) Кохомолошка алгебра $H^*(\Omega N;\mathbb{R})=\bigoplus\limits_{k\geq 0} H^k(\Omega N;\mathbb{R})$ је Кронекеров производ спољашње алгебре генерисане са одређеним коциклима непарне димензије и полиномијалне алгебре генерисане одређеним коциклима парне димензије.

Доказ: Погледти [22].

Последица 4.1.2. Нека је N просто повезана компактна $n-$димензиона многострукост. Тада је

$$cup_{\mathbb{R}}(\Omega N)=\infty.$$

Доказ: Претпоставимо да ово не важи. Тада из тврђења (3) претходне леме имамо да је $H^*(\Omega N;\mathbb{R})$ коначне димензије што је контрадикција због тврђења (2).

$\square$

Лема 4.1.3. Нека је N просто повезана компактна C^∞ Риманова многострукост и нека су $p,q\in N$ $(p\neq q)$. Означимо са $\Omega(p,q)=\Omega(N;p,q)$ простор свих апсолутно непрекидних функција $\sigma:[0,1]\to N$ које почињу у p а завршавају се у q при чему је

$$J(\sigma)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\|\sigma'(t)\|^2dt<\infty.$$

Тада важи:

(1) Многострукост N може бити уложена изометрично у $\mathbb{R}^m$ довољно велике димензије. Ако посматрамо N као подскуп од $\mathbb{R}^m$ тада је $\Omega(N; p, q)$ затворена регуларна C^∞ подмногострукост Хилбертовог простора $\Omega(\mathbb{R}^m; p, q)$ и због тога је комплетна повезана C^∞ Риманова многострукост моделована на Хилбертовом простору.

(2) Пар $(\Omega(p, q), J)$ задовољава услов П-С.

(3) Критичне тачке σ функционала J су геодезијске од N које повезују p и q, параметризоване пропорционално дужини. За такве геодезијске $J(\sigma)$ је половина дужине од σ.

(4) Многострукост $\Omega(p, q)$ има исти хомотопски тип као простор петљи ΩN.

Доказ: Погледати [23].

Теорема 4.1.4. Нека је N просто повезана Риманова многострукост и нека су p и q две различите тачке од N. Тада су p и q повезане геодезијским кривама са бесконачно много различитих дужина.

Доказ: Из претходне леме имамо да су $\Omega(p, q)$ и ΩN истог хомотопског типа па одатле и из последице 4.1.2. имамо да је $cup_{\mathbb{R}}(\Omega(p, q)) = \infty$ па самим тим и $cat(\Omega(p, q)) = \infty$. Из претходне леме такође имамо да пар $(\Omega(p, q), J)$ задовољава услов П-С при чему је функционал J такав да су његове критичне тачке су геодезијске криве које спајају p и q.

Претпоставимо сада да тврђење не важи. Из леме 3.5.17. можемо закључити да је $c_m(J) < +\infty$ за свако m. Како је скуп свих геодезијских које почињу у p хомеоморфан са простором свих тангентних вектора на N у p, можемо закључити да је овај скуп највише n-димензион. Из последице 3.5.16. онда добијамо да је бесконачно много константи $c_m(J)$ различито па из теореме 3.5.15. добијамо контрадикцију.

□

Познат је резултат да уколико затворена Риманова многострукост M није просто повезана свака нетривијална класа фундаменталне групе има за представника затворену геодезијску криву. Компликованији случај је да се покаже да на просто повезаној затвореној Римановој многострукости имамо затворену геодезијску криву (за детаљније излагање погледати [11]).

Нека је
$$P_n(M) = \{(x_1, \ldots, x_n) | d(x_1, x_2)^2 + \cdots + d(x_n, x_1)^2 \leq \varepsilon\}$$
где је $d(x, y)$ растојање од x до y на M при чему је $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon(M)$. Овде је $\varepsilon(M)$ број додељен M тако да за свако x и y у M такво да је $d(x, y) \leq \varepsilon(M)$, постоји минимална геодезијска која повезује x и y. Јасно је да је $P_n(M)$ компактна и да свака тачка од $P_n(M)$ представља затворен геодезијски n-тагон са ћошковима у x_i. Због овога можемо посматрати инклузију
$$j : P_n(M) \hookrightarrow LM,$$

где је LM простор слободних петљи. Притом n-тагоне параметризујемо дужином лука. Ботова теорема нам даје да за фиксирано r и све $k \leq r$ постоји n_r тако да за све $n \geq n_r$

$$j_* : \pi_k(P_n(M)) \xrightarrow{\cong} \pi_k(LM).$$

Ово заправо значи да из угла хомотопске теорије $P_n(M)$ све боље и боље апроксимира LM када $n \to \infty$.
Дефинишимо сада функционал

$$E : P_n(M) \to \mathbb{R}, \qquad E(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1})^2$$

где је $x_{n+1} = x_1$. Ово дискретизује уобичајан функционал енергије на простору слободних петљи. Може да се покаже да критична тачка овог функционала индукује полигон без ћошкова где су све стране једнаке, односно даје затворену геодезијску. Приметимо да сечења $s : M \to P_n(M) \subseteq LM$ улажу M као „тривијалне” критичне тачке за које се достиже минимална вредност функционала E ($E = 0$). Наравно нама требају нетривијалне критичне тачке па у контексту тога имамо следећу теорему.

Теорема 4.1.5. На свакој компактној просто повезаној Римановој многострукости постоји нетривијална затворена геодезијска.

Доказ: погледати [11].

4.2 Симплектичка топологија

У овом одељку ћемо навести важна тврђења и дефиниције. Погледати детаље у [2] и [11].

Дефиниција 5.2.1. Пар (M, ω) је симплектичка многострукост ако је $\omega \in \Omega^2(M)$ затворена недегенерисана форма.

Став 5.2.2. Ако M допушта симплектичку стукрутуру тада је $dim(M) = 2n$ или $dim(M) = \infty$.

Став 5.2.3. (Дарбуова теорема) Нека је (M^{2n}, ω) симплектичка многострукост. Тада у околини произвољне тачке постоје локалне координате $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ такве да је

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dq^i \wedge dp_i.$$

Мотивација за симплектичку геометрију долази из Хамилтонове механике, односно другим речима симплектичка геометрија је природан амбијент за Хамилтонову механику.

Нека је дата функција $H : M \to \mathbb{R}$ (Хамилтонијан) и нека је X_H јединствено векторско поље на M одређено релацијом

$$i_{X_H}\omega = dH.$$

У Дарбуовим координатама претходна релација нам даје Хамилтонове једначине

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Другачије ове једначине можемо записати у облику

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t))$$

где је

$$J = \begin{bmatrix} 0 & id \\ -id & 0 \end{bmatrix}$$

а

$$\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}, \frac{\partial H}{\partial p_i}\right).$$

Матрица J има особину да је $J^2 = -id$, па локално даје комплексну структуру на тангентним просторима.

Став 5.2.4. Свака симплектичка многострукост (M, ω) има скоро комплексну структуру J која је компатибилна са њом. Односно важи $J^2 = -id$ при чему је $\omega(\cdot, J\cdot)$ Риманова метрика.

На сличан начин ако имамо временски зависан Хамилтонијан

$$H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

имамо фамилију векторских поља X_t такву да је

$$i_{X_t}\omega = dH_t.$$

Ова фамилија векторских поља дефинише ток φ.

Дефиниција 5.2.5. Дифеоморфизам $\phi : M \to M$ се назива Хамилтоновим дифеоморфизмом ако постоји временски зависан Хамилтонијан H_t такав да генерише ток φ и важи $\phi = \varphi_1$.

Из Картанове формуле једноставно следи следеће тврђење.

Став 5.2.6. Сваки Хамилтонов дифеоморфизам је симплектоморфизам (чува симплектичку форму).

Хамилтонови дифеоморфизми су природна генерализација онога што је Арнолд називао дифеоморфизмима торуса који чувају центар гравитације (погледати [24]). Ови торусни дифеоморфизми имају барем 3 различите фиксне тачке јер долазе из такозваних „генеришућих функција” које за које знамо да према Љуштерник Шнирељмановој теореми морају имати барем 3 критичне тачке. У општем случају Хамилтонови дифеоморфизми не морају имати генеришуће функције, али је Арнолд свеједно претпоставио следеће.

Хипотеза 5.2.7. (Арнолдова Хипотеза) Нека је (M, ω) затворена симплектичка многострукост. Ако је $\phi : M \to M$ Хамилтонов дифеоморфизам и $Fix(\phi)$ број фиксних тачака од ϕ онда је

$$Fix(\phi) \geq Crit(M).$$

Напомена 5.2.8. Већ нам је познато да важи

$$crit(M) \geq 1 + cat(M) \geq 1 + cup(M).$$

Након неког времена усвојена је $1 + cup(M)$ за ограничење у хипотези, и то је верзија Хипотезе коју је доказао Флор и његови наследници. Ми ћемо се овде држати оригиналне хипотезе.

Напомена 5.2.9. Треба још рећи да постоји недегенерисана верзија Арнолдове хипотезе. Кажемо да је $p \in Fix(\phi)$ недегенерисана критична тачка ако $D\phi(p)$ нема 1 за сопствену вредност. Ако је ϕ недегенерисан Хамилтонов дифеоморфизам тада се све може ставити у оквире Морсове теорије односно оцена из Арнолдове хипотезе је

$$Fix(\phi) \geq \sum_{i=0}^{2n} \beta_i(M).$$

Став 5.2.9. Нека је ϕ Хамилтонов дифеоморфизам на M. Тада ϕ долази из 1-периодичног Хамилтонијана.

Значај претходног тврђења је следећи. Због уграђене периодичности Хамилтонијана фиксне тачке од ϕ одговарају 1-периодичним решењима (орбитама) једначине

$$\dot{z} = X_t(z)$$

и сада проблем налажења фиксних тачака постаје динамички проблем налажења одређених затворених орбита у току. Додатно ако је Хамилтонијан H C^1 мали тада су и 1-периодичне орбите мале односно контрактибилне. Управо ове орбите се могу детектовати путем тополошких инваријанти.

На симплектичкој многострукости (M, ω) имамо скоро комплексну структуру J која је сагласна са ω односно даје нам метрику $\omega(\cdot, J\cdot)$.

Нека је H 1-периодичан Хамилтонијан на (M, ω) са одговарајућом Хамилтоновом једначином

$$\dot{u}(t) = X_t(u(t)).$$

1-периодична решења овог система су у бијективној коресподенцији са фиксним тачкама одговарајућег Хамилтоновог дифеоморфизма. Поред тога нека је

$$contract(M) \subset C^{\infty}(\mathbb{S}^1, M)$$

простор глатких, контрактибилних, слободних петљи. На овом простору можемо дефинисати функционал дејства $\mathcal{A}_H$ на следећи начин

$$\mathcal{A}_H(u) = -\int\limits_{\mathbb{D}^2} \widetilde{u}^*\omega - \int\limits_{\mathbb{S}^1} H_t(u(t))dt$$

где је $\widetilde{u} : \mathbb{D}^2 \to M$ продужење на $\mathbb{D}^2$ петље $u : \mathbb{S}^1 \to M$ које постоји због контрактибилности u. Овај функционал није добро дефинисан у општем случају. Ипак за случај асферичних симплектичких многострукости (погледати 2.4.) због услова

$$\int\limits_{\mathbb{S}^2} g^*\omega = 0$$

вредност функционала не зависи од избора продужења.

Теорема 5.2.10. Критичне тачке функционала дејства $\mathcal{A}_H$ су решења Хамилтоновог система.

Како имамо дефинисану метрику $\omega(\cdot, J\cdot)$ интегралним усредњавањем можемо добити метрику на простору петљи. Одатле како нас занимају критичне тачке функционала дејства можемо посматрати трајекторије које их спајају. Трајекторија у простору петљи дефинисана је обичном диференцијалном једначином па нам то даје парцијалну диференцијалну једначину на многострукости чиме добијамо следећи простор.

Дефиниција 5.2.11. Простор ограничених орбита X_∞ је дефинисан на следећи начин

$$X_\infty = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, M),\ \ \frac{\partial u}{\partial s} + J(u)\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla H(t,u) = 0,\ \ u(s) \in contract(M) \right\}$$

при чему је $(\mathcal{A}_H(u(s)))_{s\in\mathbb{R}}$ ограничен у $\mathbb{R}$.

Сада можемо дефинисати евалуацију

$$\tau : X_\infty \to \mathbb{R}, \qquad \tau(u) = u(0,0).$$

Дефиниција 5.2.12. Ток ψ на X је псеудоградијентан ток ако постоји функција $G : X \to \mathbb{R}$ класе C^1 која строго опада дуж неконстантних орбита. Тачније за $t > s$ важи

$$G(\psi_t(x)) < G(\psi_s(x))$$

или

$$\psi_t(x) = x.$$

Овакву функцију G називамо Љапуновљева функција. Тачка $x \in X$ је тачка одмора од ψ ($x \in Rest(\psi)$) акко је орбита која пролази кроз x константна, односно акко $x \in crit(G)$.

Можемо дефинисати ток ψ на X_∞ на следећи начин

$$\psi_r(u)(s,t) = u(r+s,t).$$

Овај ток је псеудоградијентан у односу на функцију

$$G(u) = \mathcal{A}_H(u(0)).$$

Теорема 5.2.13. Нека је (M,ω) симплектичка асферична многострукост и нека је $H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-периодичан Хамилтонијан. Тада важи

(1) X_∞ је компактан метрички простор са одговарајућом топологијом

(2) Псеудоградијентан ток ψ на X_∞ је такав да је $Rest(\psi)$ мањи или једнак од броја контрактибилних 1-периодичних орбита тока ϕ придруженог H

(3) Евалуација $\tau : X_\infty \to M$ индукује инјекцију у кохомологији са произвољним коефицијентима.

Одавде имамо следећи закључак

Став 5.2.14. $Fix(\phi)$ је већи или једнак од броја контрактибилних 1-периодичних орбита, а број контрактибилних 1-периодичних орбита је већи или једнак од $Rest(\psi)$.

Комбинујући ово са наредним тврђењем можемо закључити да важи Арнолдова хипотеза за асферичне симплектичке многострукости.

Став 5.2.15. $Rest(\psi) \geq cat(M) + 1$.

Теорема 5.2.16. Нека је (M,ω) затворена асферична симплектичка многострукост. Ако је $\phi : M \to M$ Хамилтонов дифеоморфизам и $Fix(\phi)$ број фиксних тачака од ϕ онда је

$$Fix(\phi) \geq Crit(M).$$

Доказ: Како већ знамо да је $Fix(\phi) \geq cat(M) + 1$ а показали смо да је $cat(M) + 1 = 2n + 1 = crit(M)$ можемо закључити да важи тврђење.

$\square$

Симплектичко дејство групе

Дефиниција 5.2.17. Дејство групе $G \times X \to X$ је ефективно ако не постоје тривијална дејства односно ако не постоји елемент групе G (осим јединичног елемента) који оставља све тачке фиксираним.

Нека $\mathbb{S}^1$ делује глатко на симплектичкој многострукости (M^{2n},ω). Онда је генератор овог дејства векторско поље X на M које се назива фундаментално векторско поље дуж орбита овог дејства. Ако је свако $g \in \mathbb{S}^1$ такво да је $g^*(\omega) = \omega$ онда се каже да је ово дејство симплектичко и форма $i_X\omega$ је затворена. Ако је ова форма и тачна онда се ово дејство назива Хамилтоновим дејством.

Теорема 5.2.18. Нека је G компактна повезана Лијева група која делује непрекидно на тополошку многострукост M тако да је инклузија сваке орбите $\mathcal{O} \hookrightarrow M$ хомотопски тривијална. Тада је

$$cat(M) \leq dim(M/G).$$

Став 5.2.19. Ако је (M^{2n}, ω) симплектичка многострукост таква да је $cat(M) = dim(M)$ тада ни једно ефективно симплектичко дејство кружнице (било слободно или не) нема контрактибилне орбите.

Доказ: Претпоставимо супротно. Из претходне теореме добијамо да је

$$cat(M) \leq dim(M/\mathbb{S}^1) < dim(M) = cat(M)$$

што је контрадикција.

$\square$

Како знамо да важи $cat(M) = dim(M)$ у случају асферичних симплектичких многострукости јасно је да се претходни став може применити на њих.

A. Фибрације и Кофибрације

Дефиниција A.1. Непрекидно пресликавање $p : E \to B$ је фибрација ако за произвољан простор X, пресликавање $f : Z \to E$ и хомотопију $H : Z \times I \to B$, такве да је $p \circ f = H(\cdot, 0)$, постоји пресликавање $\widetilde{H} : Z \times I \to E$ такво да је $f = \widetilde{H}(\cdot, 0)$ и $p \circ \widetilde{H} = H$, односно такво да дијаграм

$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"] & E \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

комутира. За $b \in B$ скуп $F := p^{-1}(b)$ називамо слој (фибра) фибрације p над тачком b.

Простор B називамо базним а E тоталним простором, а својство описано у претходној дефиницији називамо својство подизања хомотопије.

Напомена A.2. Познато је да свако фибра раслојење задовољава својство подизања хомотопије, уколико је базни простор паракомпактан. Екстраполирајући ову важну тополошку карактеристику добијамо фибрације. Разлика између ова два концепта лежи у томе што ако је B путно повезан простор све фибре од фибра раслојења су хомеоморфне. Код фибрација ово не мора да важи. Ипак уколико је B путно повезан фибре морају имати исти хомотопски тип те има смисла писати

$$F \hookrightarrow B \to E$$

у хомотопској категорији.

Хомотопија $H_z = H(z, \cdot)$ се може схватити и као непрекидно пресликавање из Z у $B^I = C(I, B)$, где на B^I имамо компактно отворену топологију. Ово мотивише следећу еквивалентну дефиницију фибрације.

Дефиниција A.3. Непрекидно пресликавање $p : E \to B$ је фибрација ако за прозвољан комутативан дијаграм пуних стрелица

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dotted, "G'"] \arrow[drr, bend left, "G"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\ & E^I \arrow[r, "p^I"] \arrow[d, "e_0"] & B^I \arrow[d, "e_0"] \\ & E \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

постоји тачкаста стрелица тако да дијаграм и даље комутира. Са $e_0 : Y^I \to Y$ је означена евалуација у нули, односно $e_0(\omega) = \omega(0)$, а p^I је пресликавање индуковано пресликавањем p на следећи начин $p^I(\omega) = p \circ \omega$.

Кофибрација је дуалан објекат фибрације, а својство дуално својству подизања хомотопије је својство проширења хомотопије.

Дефиниција A.4. Непрекидно пресликавање $i : A \to X$ се назива кофибрација ако задовољава својство проширења хомотопије односно ако за сваки простор Y, пресликавање $f : X \to Y$ и хомотопију $H : A \times I \to Y$ такве да је $H(a, 0) = f(a)$ за све $a \in A$, постоји $\widetilde{H} : X \times I \to Y$ такво да је $\widetilde{H}|_{A\times I} = H$ и $\widetilde{H}(x, 0) = f(x)$ за свако $x \in X$.

Кофибрацију можемо разумети и на следећи начин.

Дефиниција A.5. Непрекидно пресликавање $i : A \to X$ се назива кофибрација ако за прозвољан комутативан дијаграм пуних стрелица

$$\begin{tikzcd}
Z & & \\
& X \times I \arrow[ul, dotted, "\widetilde{H}"] & X \arrow[l, "i_0"] \arrow[ull, bend right, "f"'] \\
& A \times I \arrow[u, "i\times id"] \arrow[uul, bend left, "H"] & A \arrow[l, "i_0"] \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

постоји тачкаста стрелица тако да дијаграм и даље комутира. Притом је $i_0 : Y \to Y \times I$ инклузија простора Y на нулти ниво односно $i_0(y) = (y, 0)$.

Из ове дефиниције и дефиниције A.3. је јасно да су кофибрација и фибрација дуални објекти у смислу теорије категорија јер су дијаграми идентични са разликом да су смерови свих стрелица супротни.

Став A.6. Свака кофибрација је утапање.

Став A.7. Утапање $i : A \hookrightarrow X$ је кофибрација акко пар $(X, i(A))$ задовољава својство проширења хомотопије.

Дефиниција A.8. Нека је $i : A \hookrightarrow X$ кофибрација. Тада се $F = X/i(A)$ назива кофибром кофибрације i.

Ако је A деформациони ретракт простора X тада је инклузија $i : A \hookrightarrow X$ кофибрација.

Став A.9. Нека је $j : A \hookrightarrow X$ затворена кофибрација (j је затворено пресликавање) и нека је X локално компактан. Тада је за сваки простор Y пресликавање

$$j^* : C(X, Y) \to C(A, Y), \qquad j^*(f) = f \circ j$$

кофибрација.

Примери A.10. Нека је X тополошки простор. Тада је:

1) за свако $t \in [0, 1]$ евалуација $e_t : X^I \to X$, $e_t(\omega) = \omega(t)$ фибрација.

2) пресликавање $e_{0,1} : X^I \to X \times X,\ e_{0,1}(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$ фибрација.

Доказ:

1) $i_t : * \to I,\ i_t(*) = t$ је затворена кофибрација а I је локално компактан па примењујући претходни став за $Y = X$ добијамо резултат.

2) Инклузија $i : \partial I \to I$ је такође затворена кофибрација па као и у претходном примеру добијамо тражени резултат.

$\square$

A.1. *pullback* фибрације и хомотопски *pullback*

Дефиниција A.1.1. Нека су $p : E \to B$ фибрација и $f : X \to B$ произвољно пресликавање. Додатно нека је

$$E \times_f X = \{(e, x) | p(e) = f(x)\}$$

фибра производ са наслеђеном топологијом из $E \times X$. Тада имамо комутативан дијаграм

$$\begin{tikzcd} E \times_f X \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

а природна пројекција $E \times_f X \to X$ се назива *pullback*-ом фибрације p инудкованим пресликавањем f

Став A.1.2. *pullback* фибрације је фибрација.

Нека је x_0 базна тачка простора X. Означимо са PX све путеве који почињу у x_0, а са ΩX простор петљи у x_0 (сви путеви који почињу и завршавају се у x_0).

Пример A.1.3. Нека је X тополошки простор. Пресликавање $e_1 : PX \to X$ је фибрација са фибром ΩX.

Доказ: $e_1 : PX \to X$ је *pullback* фибрације $e_{0,1}$ што се види из следећег дијаграма

$$\begin{tikzcd} PX \arrow[r] \arrow[d, "e_1"'] & X^I \arrow[d, "e_{0,1}"] \\ X \arrow[r, "f"] & X \times X \end{tikzcd}$$

При томе је $f = (c_{(x_0,x_0)},\, id_X)$.

$\square$

Пример A.1.4. Нека је $f : A \to X$ непрекидно пресликавање и нека је $E_f = \{(a, \gamma) \in A \times B^I | \gamma(0) = f(a)\}$. Конверзија пресликавања f у фибрацију је $p_f : E_f \to B$, $p_f(\gamma) = \gamma(1)$.

Доказ: $p_f : E_f \to B$ је *pullback* фибрације $e_{0,1}$ што се види из следећег дијаграма

$$\begin{tikzcd} E_f \arrow[r] \arrow[d, "p_f"'] & X^I \arrow[d, "e_{0,1}"] \\ X \arrow[r, "(f, id_X)"] & X \times X \end{tikzcd}.$$

$\square$

Напомена A.1.5. Простор A из претходне теореме можемо видетити као потпростор од E_f који се састоји од елемената (a, γ) са константним путевима у $f(a)$. Може се показати да је ово деформациони ретракт од E_f. Због тога се пресликавање $f : A \to B$ факторише као композиција

$$A \hookrightarrow E_f \to B$$

хомотопске еквиваленције и фибрације.

Дефиниција A.1.6. Нека су дата два пресликавања $f : X \to W$ и $g : Y \to W$. Хомотопски *pullback* дијаграма пресликавања

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

је простор

$$P(f, g) = \{(\theta, x, y) \in W^I \times X \times Y | f(x) = \theta(0), g(y) = \theta(1)\}.$$

Став A.1.7. Природна пројекција $P(f, g) \to X \times Y$ је фибрација.

Доказ: Приметимо да важи да је $W^I \times_{(f,g)} X \times Y = P(f, g)$. Одатле имамо

$$\begin{tikzcd} P(f,g) \arrow[r] \arrow[d] & W^I \arrow[d, "e_{0,1}"] \\ X \times Y \arrow[r, "(f,g)"] & W \times W \end{tikzcd}$$

па је $P(f, g) \to X \times Y$ *pullback* фибрације $e_{0,1}$.

$\square$

Како су $X \times Y \to X$ и $X \times Y \to Y$ фибрације можемо закључити да су природне пројекције $P(f, g) \to X$ и $P(f, g) \to Y$ фибрације као композиције фибрација. Додатно дијаграм

$$\begin{tikzcd}
P(f,g) \arrow[r, "P_Y"] \arrow[d, "P_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & W
\end{tikzcd}$$

комутира у хомотопској категорији. Хомотопију остварује пресликавање $H((\theta, x, y), t) = \theta(t)$. Штавише важи следеће тврђење.

Став А.1.8. Нека је Z произвољан тополошки простор и нека дијаграм

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
X \arrow[r, "f"] & W
\end{tikzcd}$$

комутира у хомотопској категорији. Тада постоји пресликавање $\omega : Z \to P(f,g)$ тако да је $h \simeq P_Y \circ \omega$ и $k \simeq P_X \circ \omega$ односно такво да дијаграм

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "\omega"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "k"'] & & \\
& P(f,g) \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"] & W
\end{tikzcd}$$

комутира у хомотопској категорији.

Пресликавање ω не мора бити јединствено чак ни до на релацију хомотопије.

Литература

[1] В. Драговић, Д. Милинковић - *Анализа на многострукостима*, МФ, Београд, 2003.

[2] Д. Милинковић - *Мини курс о симплектичким многострукстима* - скрипта.

[3] Д. Милинковић - *Летак о диференцијалним једначинама.*

[4] Д. Милинковић - *Математичка анализа 2* - скрипта.

[5] A. Banyaga, D. Hurtubise - *Lectures on Morse Homology*, Kluwer Academic Publishers, 2004.

[6] C. Wendl - *Lecture Notes on Bundles and Connections.*

[7] J. Milnor - *Morse theory.*

[8] J.H.C. Whitehead - *Combinatorial homotopy*, I , Bull. Amer. Math. Soc. 55,213{245. MR 11,48b, 1949.

[9] H. Whitney - *Geometric Integration Theory.*

[10] M. W. Hirsch - *Differential topology*, Springer-Verlag, 1994.

[11] O. Cornea, G. Lupton, J. Opera, D. Tanre - *Lusternik-Schnirelmann Category*, American Mathematical Society, 2003.

[12] J. van Mill - *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces*, Elsevier, 2001.

[13] *Homotopy Theory and Duality*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1965.

[14] Белешке М. Јовановић са предавања професора Б. Првуловића - *Увод у теорију хомотопије.*

[15] E. H. Spanier - *Algebraic Topology*, Springer, 1966.

[16] J. C. Gomez-Larranaga, F. Gonzalez-Acuna - *Lusternik-Schnirelmann category of 3-manifolds*, Topology 31, 791-800, 1992.

[17] A. Dold - *Lectures on algebraic topology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[18] J. Milnor - *Lectures on the h-cobordism theorem.*

[19] J. Weber - *Conley pairs in geometry – Lusternik-Schnirelmann theory and more*, arXiv, 2017.

[20] F. Takens - *The Minimal Number of Critical Points of a Function on a Compact Manifold and the Lusternik-Schnirelman Category*, Invent. Math. 6, 197-244, 1968.

[21] J. T. Schwartz - *Generalizing the Lusternik-Schnirelman theory of critical points*, Comm. Pure Appl. Math. 17, 1964.

[22] I. Berstein, T. Ganea - *Homotopical ndpotency, Illinois J. Math.*, Vol. 5, pp. 99-130, 1961.

[23] R. S. Palais - *Lectures on Morse Theory*, Lecture Notes, Brandies and Harvard Universities, 1962.

[24] V. Arnold - *Mathematical Methods in Classical Mechanics*, Grad. Texts in Math, vol. 60, Springer, Berlin, 1989.