UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET
Katedra za metodiku nastave matematike i računarstva

Branka Ćirić

POLINOMI U SREDNJOJ ŠKOLI

master rad

Beograd, Februar 2021.

Sadržaj

1 Uvod

Kada bi se istraživalo dokle seže pojam algebre, stiglo bi se čak do doba Vavilona i do njihovog traženja načina za rešavanje matematičkih problema. U isto vreme su Grci te probleme rešavali geometrijski da bi potom nastavili da razvijaju matematiku koja je dosta napredovala još do doba Platona.

Slika 1: Stari Grci

Školska algebra se, grubo rečeno, bavi izučavanjem odnosa između brojeva, kao i povezivanjem između poznatih i nepoznatih veličina. Da bi učenici lepo razumeli algebru koja se uči u srednjoj školi, bitno je na pravi način ih uvesti u taj svet brojeva još u osnovnoj školi.

Kao što vremenom proširuju svoje znanje iz skupa prirodnih brojeva na skup celih brojeva, pa kasnije na skupove racionalnih i realnih, tako i one temelje o polinomima sada šire i na skup kompleksnih brojeva. Kvadrat binoma i zbir i razlika kvadrata će i sada koristiti, samo dopunjeni kubom binoma i zbirom i razlikom kubova. Traženje najvećeg zajedničkog delioca i najmanjeg zajedničkog sadržaoca više nije vezano samo za cele brojeve, već se na određeni način traži NZD i NZS i za polinome. Kako se to radi u školi, kako znati da li se mogu uvek pronaći i da li uopšte postoje? O tome će, između ostalog, biti reči u daljem tekstu.

Operacije sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja su definisane nad polinomima i kada je reč o kompleksnim koeficijentima. Važno je naglasiti da je ovde uvek moguće deljenje sa ostatkom, za razliku od deljenja bez ostatka, slično kao i za cele brojeve. Kada bi se posmatrali svi polinomi nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva i njihove operacije sabiranja i množenja, dobila bi se algebarska struktura prsten.

Za razliku od polinoma nad skupom $\mathbb{R}$, za polinome sa kompleksnim koeficijentima važi Osnovna teorema algebre. U vezi sa tim, biće reči i o nulama polinoma: realnim, kompleksnim, jednostrukim, dvostrukim itd. Zahvaljujući njima, polinom se može faktorisati, tj. rastaviti na činioce.

I Vijetove formule će se proširiti na polinome sa kompleksnim brojevima. One omogućavaju nov način za rešavanje algebarskih jednačina oblika $P(x) = 0$, pri čemu će se koristiti veza između nula polinoma i njegovih koeficijenata.

Kada se učila Pitagorina teorema, rečeno je da su piramide u Egiptu sagrađene zahvaljujući njoj, da ima dosta primena od tada pa do danas. Razmera se koristi svakodnevno, mi ili nase mame i bake praveći neke od omiljenih jela. Gde se sve može primeniti znanje vezano za polinome?

Neka znanja koja se steknu iz matematike možda nisu uvek direktno primenjiva. Ona deluju pritajeno, iz pozadine. Polinomi se prožimaju kroz mnoge grane matematike. Jedna od prvih stvari koja je naučena vezano za geometriju je površina kvadrata. Njena formula je polinom. Mnoge druge formule za površinu i zapreminu su takođe polinomi. Funkcije koje čine neke realne konstante i promenljiva su polinomi. Njihova primena je široka, pa i sve novo što se nauči o polinomima biće od koristi za traženje novih načina za rešavanje pojedinih zadataka.

2 Stepen čiji je izložilac prirodni broj

Još u četvrtom razredu učenici su se susreli sa pojmom površine kvadrata i da je ona $P = a \cdot a$, ako je a njegova stranica. U sedmom razredu su se ponovo vratili na to kada je bilo reči o kvadratu racionalnog broja i tada su naučili novi zapis za površinu kvadrata. Sada se ona obeležava sa $P = a^2$. Dakle, zapis $a \cdot a$ se može zapisati i kao a^2.

Treba primetiti da se u zapisu a^2 broj a pojavljuje dva puta. Shodno tome, $a \cdot a \cdot a = a^3$, $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$ itd.

Definicija: Stepen čiji je izložilac prirodni broj je zapis a^n, gde je a iz skupa realnih brojeva i naziva se **osnova stepena**, a n neki prirodan broj i naziva se **izložilac**. Ukoliko je $n = 1$, onda je $a^n = a$.

Vrednost a^n zavisi od toga da li je n paran ili neparan broj. Ukoliko je n paran, onda je a^n uvek pozitivno, a ukoliko je n neparan, razmatraju se slučajevi u zavisnosti od a:
- Ukoliko je a negativno i a^n je negativno.
- Ukoliko je a pozitivno i a^n je pozitivno.
- Ukoliko je $a = 0$ i $a^n = 0$.

Primer:
a) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$
b) $5^2 = 25$
c) $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$
d) $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

3 Operacije sa stepenima

3.1 Množenje stepena jednakih osnova

Kako se množe stepeni koji imaju jednake osnove? Odgovor na ovo pitanje se lako vidi iz sledećeg primera.

$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

Odavde sledi da je $2^2 \cdot 2^3 = 2^5$.

Tvrđenje: Proizvod stepena a^m i a^n, gde su m i n prirodni brojevi, se dobija tako što osnova stepena ostaje ista, a izložioci se saberu.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

3.2 Deljenje stepena jednakih osnova

Kako se dele stepeni jednakih osnova, najlakše će se zaključiti na primeru.
$\frac{3^4}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = 3^2 = 3^{4-2}$
Zaključuje se da se, za razliku od množenja stepena jednakih osnova, kod deljenja izložioci oduzimaju.

Tvrđenje: Stepeni jednakih osnova se dele tako što osnova ostaje ista, a izložioci se oduzmu.
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad$ gde je $m, n \in \mathbb{N}, m > n, a \neq 0$.

3.3 Stepen stepena

Sada kada je naučeno množenje i deljenje stepena, postavlja se pitanje kako da se stepenuje stepen? Kako, na primer, izračunati $(2^2)^2$? Može li se iskoristiti znanje o stepenima koje je već stečeno? Naravno da da. Sve ono što se nauči, predstavlja temelj za nešto što će se tek raditi.

Primer:
$(3^2)^3 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$.

Tvrđenje: Stepen stepena $(a^m)^n$, gde su m i n prirodni brojevi, se dobija tako što se izložioci pomnože, a osnova ostaje ista. Dakle, važi sledeće:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

3.4 Stepen proizvoda i količnika

3.4.1 Stepen proizvoda

Primer: $(3 \cdot 5)^2 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5) = 3^2 \cdot 5^2$
Kako bi se sada mogao definisati stepen proizvoda?

Tvrđenje: Proizvod dva broja a i b se stepenuje tako što se stepenuje svaki činilac posebno.

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

gde je m iz skupa prirodnih brojeva.

3.4.2 Stepen količnika

Slično stepenu proizvoda se definiše i stepen količnika.

Može se uzeti količnik dva broja, na primer 2 i 5, i treba odrediti treći stepen ovog količnika. To se radi na sledeći način.
$(\frac{2}{5})^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2\cdot2\cdot2}{5\cdot5\cdot5} = \frac{2^3}{5^3}$

Tvrđenje: Količnik brojeva se stepenuje tako što se stepenuje i brojilac i imenilac datim stepenom.

To znači da je:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

gde je m iz skupa prirodnih brojeva. *Bitno je naglasiti da imenilac, u ovom slučaju b, mora biti različit od 0.*

4 Algebarski izraz, brojevna vrednost izraza

Još u ranijim razredima đaci su se susreli sa pojmom izraz. Najprostije rečeno, izraz je sastavljen od brojeva i znakova matematičkih operacija koji ih povezuju. Takvi izrazi se nazivaju **brojevni izrazi**. U izraz se, pored brojeva, može ubaciti i promenljiva. U tom slučaju se dobija **algebarski izraz**.

Primer:
a) *brojevni izraz*: $-5 \cdot 8$, $\frac{1}{2} - 2^4$
b) *algebarski izraz*: $6 - x$, $2 \cdot x + 10$, $\frac{11}{z} + 2$ itd.

Definicija: Kada se u izrazima pojavljuju samo racionalne operacije (sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje), takvi izrazi se nazivaju **racionalni algebarski izrazi**.[1]

Ako se u racionalni algebarski izraz ubaci operacija korenovanja, onda to više nije racionalni algebarski izraz jer korenovanje nije racionalna operacija. Primer za to je $\sqrt{y} + 6$.

Promenljivoj u izrazu se može dodeliti konkretna vrednost, neki realan broj, i potom izračunati izraz. Tako se dobija **brojevna vrednost izraza**.

Ako se u racionalni algebarski izraz $10 \cdot x + 7$ ubaci vrednost $x = 5$, dobija se sledeće:
$10 \cdot 5 + 7 = 50 + 7 = 57$, što je brojevna vrednost izraza ili kraće rečeno vrednost izraza.

Primer: *Izračunaj vrednost izraza* $3a^2 + 4a - 8$ ako je $a = 4$.
Rešenje:

$$3a^2 + 4a - 8 =$$

$$3 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 8 =$$

$$3 \cdot 16 + 16 - 8 = 48 + 16 - 8 = 56.$$

5 Polinomi

Kao što je na početku rečeno, najvažniji među izrazima o kojima je bilo reči su polinomi.

Definicija: Polinom je ceo racionalni algebarski izraz, i on sadrži brojeve, kao i promenljive. Oni se međusobno povezuju operacijama sabiranja, oduzimanja i množenja.

Definicija: Celi racionalni algebarski izrazi su izrazi u čijem formiranju ne učestvuje operacija deljenja izrazom koji sadrži promenljive.

Neki od primera za polinome su: x^2+x, $11\cdot x$, $\frac{2}{5}-x$, $\sqrt{5}+2\cdot x$, $x^2+6\cdot x+8$.

U zavisnosti od toga od čega se sastoje, polinomi se mogu podeliti na **monome, binome, trinome**...

Definicija: Monomi su vrsta polinoma koji sadrži samo brojeve, promenljive i operaciju množenja, bez sabiranja i oduzimanja.

Primer: $4x^2y^3$, $8yz^5$, $13xyz$...

Brojevi koji se nalaze u monomu se nazivaju **koeficijenti monoma**. Ako se monomi razlikuju samo po koeficijentima, oni su **slični** ($2x$ i $5x$, $3x^2y$ i $-5x^2y$).

Kada se dva monoma saberu ili oduzmu, dobiće se **binom**, a ako se saberu ili oduzmu tri monoma, dobiće se **trinom**. Bitno je naglasiti da se kod binoma i trinoma sabiraju i oduzimaju neslični monomi, jer da su u pitanju slični, kao rezultat bi se opet dobio monom ($4x^2 - 6x^2 = -2x^2$).

Primeri za monome, binome i trinome:

- **monomi:** $4x^3$, $\quad -2xy^2z^3$
- **binomi:** $5x + y$, $\quad 2x^2 - yz$
- **trinomi:** $x + y + z$, $\quad 3x - 2y + 4z^2$.

Svaki polinom se može napisati u *kanonskom obliku*

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0, \tag{1}$$

x je promenljiva, a koeficijenti $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ su realni brojevi, dok n pripada proširenom skupu prirodnih brojeva.

$P(x)$ je zapravo funkcija koja zavisi od promenljive x i slika neki realan broj u drugi realan broj, tj.

$$P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Ukoliko je prvi koeficijent polinoma predstavljenog u svom kanonskom obliku $a_n \neq 0$, onda se on naziva **najstarijim koeficijentom polinoma**.

Pošto se svaki polinom može posmatrati kao funkcija, tako se može izračunati i njegova vrednost u nekoj tački. Ako, na primer, treba izračunati vrednost polinoma u tački $x = 5$, računaće se $P(5)$.

Primer: *Izračunati vrednost polinoma* $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 6$ *u tački 2.*

$$P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 - 6 = 8 + 8 + 2 - 6 = 12.$$

U prethodnom primeru poslednji član, tj. broj 6, se naziva **slobodni član**. On se dobija za vrednost polinoma u tački 0, tj. $P(0)$. Ako polinom ima samo slobodni član, kaže se da je on *nultog stepena*, dok se *za polinom* $P = 0$*, kaže da nema stepen.*

Da bi se izračunao zbir koeficijenata nekog polinoma, potrebno je naći njegovu vrednost u tački 1, tj. $P(1)$.

Primer: *Izračunati zbir koeficijenata polinoma* $P(x) = -3x^3 + 4x^2 - x + 5$.

Rešenje: Posmatra se polinom u tački $x = 1$.

$$P(1) = -3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 1 + 5 = -3 + 4 + 4 = 5.$$

$\Rightarrow$ Zbir koeficijenata je 5.

Uzimajući u obzir sve navedeno, polinomi se mogu definisati na sledeća dva načina:

Definicija 1: Dva polinoma P i Q su jednaka ako imaju identične kanonske oblike, tj. ako imaju jednake stepene i jednake sve odgovarajuće koeficijente:[3]

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$
$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$$
$$a_n = b_n, ..., a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

Definicija 2: Polinomi P i Q su jednaki ako su jednake odgovarajuće funkcije, tj. ako važi da je $P(x) = Q(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$.[3]

Napomena: Šta bi to bila promenljiva, a šta nepoznata? Bitno je dobro razgraničiti jedan pojam od drugog.

Promenljiva govori o ponašanju neke funkcije, tj. bliže je opisuje. Za nepoznatu se računa konkretna vrednost. Promenljiva se pojavljuje kao argument funkcije, dok se nepoznata nalazi u jednačinama, sistemima itd.

Polinom je na početku ovog poglavlja definisan kao ceo racionalan algebarski izraz koji sadrži brojeve i promenljive, dok je u nastavku teksta posmatran polinom koji sadrži samo jednu promenljivu. Zbog čega je to tako? Objašnjenje je usko povezano sa prstenom polinoma jedne promenljive $K[x]$ i prstenom polinoma više promenljivih, $K[x_1, x_2, ..., x_n]$, za neko n iz skupa prirodnih brojeva. Dobro je prvo podsetiti se šta je to prsten i koje su njegove karakteristike.

Definicija: Prsten je algebarska struktura sa sledećim osobinama. Neka je S neprazan skup i neka su $*$ i $\circ$ binarne operacije koje važe na tom skupu. Ako važe sledeće osobine, onda se struktura $(S, *, \circ)$ naziva prsten[4]:
1. $(S, *)$ je **komutativna grupa**;
2. $(S, \circ)$ je **semigrupa**;
3. za svako x, y, z iz skupa S važi da je

$$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$$

i

$$(y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x).$$

U prethodnim osobinama bilo je reči o pojmovima komutativna grupa i semigrupa. Komutativna grupa je uži pojam grupe, dok je semigrupa vrsta grupoida, ili tačnije rečeno asocijativan grupoid.

Komutativna (Abelova) grupa je grupa u kojoj važi zakon komutativnosti. *Semigrupa* je grupoid u kome važi zakon asocijativnosti.

U toku osnovnoškolskog i srednješkolskog obrazovanja je predviđeno da se učenici upoznaju sa polinomima jedne promenljive iz razloga što prsten polinoma $K[x]$ ima ista svojstva kao i prsten celih brojeva. Otuda je u daljem tekstu reč o polinomima jedne promenljive.

5.1 Kvadrat binoma i razlika kvadrata

Kada je reč o polinomima, u školskoj matematici postoje dve jako bitne formule: **formula za kvadrat binoma i formula za razliku kvadrata**. I jedna i druga se lako izvode primenjujući znanje o polinomima koje je već stečeno. Prvo će biti prikazana formula za kvadrat binoma.

$$(X+Y)^2 =$$
$$(X+Y)\cdot(X+Y) =$$
$$X\cdot X + X\cdot Y + Y\cdot X + Y\cdot Y =$$
$$X^2 + 2XY + Y^2$$

Kvadrat binoma jednak je zbiru kvadrata prvog člana, dvostrukom proizvodu prvog i drugog člana i kvadrata drugog člana.[1]

Kada je u pitanju oduzimanje, ono se oslanja na prethodnu formulu:

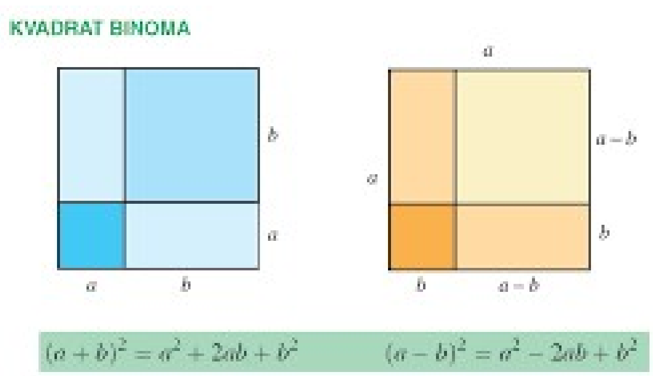
$$(X-Y)^2 = (X-Y)\cdot(X-Y) = X\cdot X - X\cdot Y - Y\cdot X + Y\cdot Y = X^2 - 2XY + Y^2$$

Dakle, formule za kvadrat binoma su sledeće:

$$(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2,$$

ako je u pitanju zbir, a ako je u pitanju razlika:

$$(X-Y)^2 = X^2 - 2XY + Y^2.$$



Slika 2: Kvadrat binoma prikazan geometrijski. Slika preuzeta sa sajta www.mathos.unios.hr/ mdjumic/uploads/diplomski/TOM20.pdf

Kada se posmatra površina velikog kvadrata, njegove stranice su $a + b$. S druge strane, ona se može posmatrati i kao zbir dva mala kvadrata, jedan je stranice a, a drugi ima stranicu b i dva ista pravougaonika čije su stranice a i b. Odatle sledi formula za kvadrat binoma $a + b$. Na identičan način se geometrijski dokazuje formula za kvadrat binoma $a - b$, samo je u pitanju kvadrat sa drugim stranicama.

Primer: *Izračunati kvadrat binoma* $2x + 5$:

$(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25.$

Druga formula je formula za razliku kvadrata. Ona se, takođe, dokazuje samo primenom već naučenog. Kreće se od proizvoda razlike i zbira dva monoma. Dobija se sledeće:

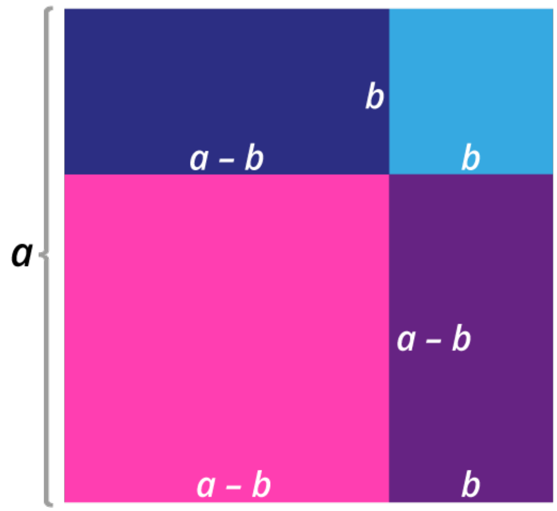
$$(X - Y) \cdot (X + Y) =$$

$$X \cdot X + X \cdot Y - Y \cdot X - Y \cdot Y =$$

$$X^2 - Y^2$$

Razlika kvadrata dva monoma jednaka je proizvodu njihovog zbira i razllike i glasi:[1]

$$X^2 - Y^2 = (X - Y) \cdot (X + Y).$$



Slika 3: Razlika kvadrata prikazana geometrijski. Slika preuzeta sa sajta https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/73c5bb27-be21-4b73-8c51-b870346153a7/html/2674_Razlika_kvadrata.html

Kako se sa prethodne slike izvodi formula za razliku kvadrata? Ako se od velikog kvadrata stranice a, oduzme mali kvadrat stranice b, dobiće se $a^2 - b^2$. Sada se ljubičasti pravougaonik može prebaciti uz gornju ivicu plavog tako da sa desne strane ostaje samo mali kvadrat stranice b, dok se sa leve strane nalazi novi pravougaonik čije su stranice $a + b$ i $a - b$.

Formule za kvadrat binoma i za razliku kvadrata znatno mogu olakšati računanje nekih brojevnih izraza kao na primer:
$15 \cdot 25 = (20 - 5)(20 + 5) = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375$.

Zbog ovakvih primena, trebalo bi ih učiti u ranijim razredima. Tu je i njihova primena u fizici u sedmom razredu.

Primer: *Stranice pravougaonika su $2x + 1$ i $2x - 1$, a površina 99 m^2. Izračunati dužine stranica tog pravougaonika.*

Rešenje:

$$(2x+1)(2x-1) = 99$$
$$(2x)^2 - 1^2 = 99$$
$$4x^2 - 1 = 99$$
$$4x^2 = 100$$
$$x^2 = 25$$
$$x = 5 \quad \vee \quad x = -5$$

Dužina stranice ne može biti negativan broj, pa je rešenje $x = 5$. Odavde sledi da su stranice pravougaonika 11 i 9.

5.2 Zbir i razlika kubova. Kub binoma

Formulama za kvadrat binoma i razliku kvadrata se pridružuju i formule za zbir i razliku kubova, kao i kub binoma. Kao što i sam naziv kaže, one se primenjuju kada ima treći stepen u polinomu.

Teorema(Zbir i razlika kubova): Za neke izraze X i Y važi sledeće:

$$X^3 + Y^3 = (X+Y)(X^2 - XY + Y^2) \tag{2}$$

$$X^3 - Y^3 = (X-Y)(X^2 + XY + Y^2) \tag{3}$$

Dokaz se lako izvodi primenom znanja o množenju polinoma.

Dokaz:

$$(X+Y)(X^2 - XY + Y^2) = X^3 - X^2Y + XY^2 + X^2Y - XY^2 + Y^3 =$$
$$X^3 + Y^3,$$
$$(X-Y)(X^2 + XY + Y^2) = X^3 + X^2Y + XY^2 - X^2Y - XY^2 - Y^3 =$$
$$X^3 - Y^3$$

Teorema(Kub binoma): Za neke izraze X i Y, važi da je:

$$(X+Y)^3 = X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3 \tag{4}$$

$$(X-Y)^3 = X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - Y^3 \tag{5}$$

Dokaz:

$$(X+Y)^3 = (X+Y)(X+Y)^2 = (X+Y)(X^2+2XY+Y^2) =$$

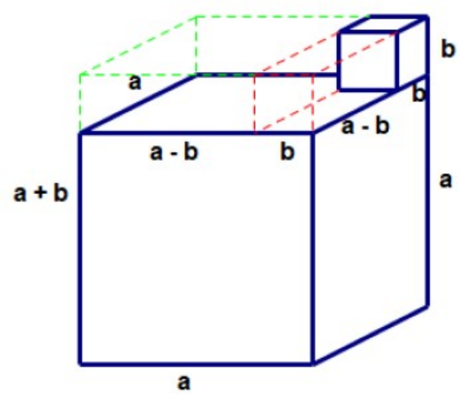
$$X^3+2X^2Y+XY^2+X^2Y+2XY^2+Y^3 = X^3+3X^2Y+3XY^2+Y^3$$

$$(X-Y)^3 = (X-Y)(X-Y)^2 = (X-Y)(X^2-2XY+Y^2) =$$

$$X^3-2X^2Y+XY^2-X^2Y+2XY^2-Y^3 =$$

$$X^3-3X^2Y+3XY^2-Y^3$$

Postoji još jedan zanimljiv geometrijski dokaz teoreme o zbiru kubova. Treba posmatrati formulu X^3+Y^3 kao zbir zapremina dve kocke.



Slika 4: Zbir kubova prikazan geometrijski. Slika preuzeta sa sajta https://profesorka.wordpress.com/

Kada se od velike prizme oduzme zelena i crvena, dobija se[5]

$$V = a^2(a+b) - (ab(a-b) + b^2(a-b))$$

$$V = a^2(a+b) - b(a-b)(a+b)$$

$$V = (a+b)(a^2 - b(a-b))$$

$$V = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

odakle sledi da je

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Primer: *Odrediti kub binoma* $2x - 3$.
Rešenje:

$$(2x-3)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot 4x^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2x \cdot 3^2 - 3^3 =$$

$$8x^3 - 36x^2 + 54x - 27.$$

5.3 Rastavljanje polinoma na činioce

U petom razredu je bilo reči o rastavljanju brojeva. To je koristilo za mnoge zadatke koji su posle toga rađeni. Kako se sada mogu rastaviti polinomi i čemu će sve to da koristi? Broj 72 je rastavljen na sledeći način:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

pa se piše da je $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

Isto se može raditi i sa monomima, a posle i sa polinomima. Kako, vidi se na sledećem primeru.

$$y^3 = y \cdot y \cdot y$$

$$24yz = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y \cdot z$$

$$50x^3y = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y$$

Uz pomoć ovoga mogu se rastaviti polinomi. Za to će od koristi biti i formule za razliku kvadrata i kvadrat binoma.

Kako rastaviti binom $25x + 5y$?
$25x + 5y = 5 \cdot 5 \cdot x + 5 \cdot y = 5(5x + y)$.

Primer: *Rastaviti na činioce*:

a) $16y^3+8xy = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot y\cdot y\cdot y+2\cdot2\cdot2\cdot x\cdot y = 2\cdot2\cdot2\cdot y(2y^2+x) = 8y(2y^2+x)$

b) $15x^3+20x^2 = 3\cdot5\cdot x\cdot x\cdot x+2\cdot2\cdot5\cdot x\cdot x = 5\cdot x\cdot x(3x+4) = 5x^2(3x+4)$

Rastavljanjem polinoma na činioce, zapis se čini lepšim i kompaktnijim.

Kao što je već bilo reči, za rastavljanje se mogu koristiti i formule za razliku kvadrata, za kvadrat binoma, kub binoma itd. Kako? Ako treba da se rastavi polinom $25-4x^2$, to se radi na sledeći način:
$25-4x^2 = 5^2-(2x)^2 = (5-2x)(5+2x)$ *Polinom je rastavljen uz pomoć formule za razliku kvadrata*

$x^2+8x+16 = (x+4)^2$ *Polinom je rastavljen uz pomoć formule za kvadrat binoma*

U nekim situacijama će biti potrebno da se malo sredi polinom pre nego što bude mogućnosti da se rastavi.

I mozda se neki pitaju "Pa šta će nam sad to?".

Da bi se rešile neke jednačine, potrebno je znanje o rastavljanju polinoma na činioce jer drugačije ne bi moglo. To je samo jedan od razloga zašto je ovo bitno znati.

Primer: *Reši jednačinu:*

$$x^2-25=0$$

$$x^2-5^2=0$$

$$(x-5)(x+5)=0$$

Ovde postoje dva rešenja. Treba prizvati u pomoć gradivo ranijih razreda. Kada je proizvod nula? **Proizvod je nula kada je bar jedan od činilaca nula.** To se primenjuje i ovde. Mora biti bar jedna od zagrada nula, pa samim tim postoje dva rešenja.

Prvo rešenje:

$$x-5=0$$

$$x=5$$

Drugo rešenje:

$$x+5=0$$

$$x = -5$$

Dakle, rešenja su 5 i -5.

5.4 Sabiranje i oduzimanje polinoma

Kada su rađeni skupovi prirodnih, celih i racionalnih brojeva, učilo se njihovo sabiranje, oduzimanje, množenje... Isto tako je bitno naučiti "rukovati"polinomima sa jednom promenljivom i operacijama vezanim za njih.

Postavlja se pitanje kako sabrati dva ili više polinoma jedne promenljive?

Za početak, bitno je napomenuti da kod polinoma važe zakoni **komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti**. Podsećanje kako oni glase:
- KOMUTATIVNOST: $a + b = b + a \quad a \cdot b = b \cdot a$
- ASOCIJATIVNOST: $(a + b) + c = a + (b + c) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- DISTRIBUTIVNOST:
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Kako se primenjuje zakon distributivnosti, zavisi isključivo od onoga šta nama treba. Neke situacije će zahtevati da se polinom rastavi na činioce, i tada će se koristiti smer zdesna nalevo. Kada, pak, treba napisati neki polinom u obliku zbira monoma, to će se uraditi koristeći suprotan smer.

Kako se sabiraju dva monoma, najlakše se vidi na primeru.

Primer: *Sabrati monome* $6x$ i $11x$.

$6x + 11x = (6 + 11)x = 17x$

Monomi koji su slični se sabiraju tako što se sabiraju koeficijenti tih monoma.

Kako se sabiraju dva binoma, trinoma itd.? Za to će biti potrebno sabiranje monoma. Opet videti na primeru kako se to radi.

Primer: *Sabrati polinome* $A = 5x^2 + 3x - 5$ *i* $B = 8x^2 + 6x + 10$.

Rešenje:

$$A + B = (5x^2 + 3x - 5) + (8x^2 + 6x + 10) =$$

$$5x^2 + 3x - 5 + 8x^2 + 6x + 10 =$$

$$5x^2 + 8x^2 + 3x + 6x - 5 + 10 =$$

$$13x^2 + 9x + 5$$

Polinomi jedne promenljive se sabiraju tako što se sabiraju njihovi slični monomi. S tim u vezi, stepen zbira dva polinoma ne može nikada biti veći od stepena polinoma koji se sabiraju. Isto važi i za razliku polinoma.

Kada je reč o oduzimanju polinoma, ono se svodi na sabiranje s tim što je potrebno znati šta su to suprotni monomi.

Kada su rađeni celi brojevi, rečeno je da su suprotni brojevi 5 i -5, 10 i -10. Slično je i sa monomima.

Definicija: Suprotni monomi su monomi čiji su koeficijenti suprotni brojevi. Na primer $8x$ i $-8x$.

Isto tako je i sa polinomima. Polinomu A je suprotan polinom $-A$ i oni imaju sve monome suprotne. Recimo, polinomu $6x^2 - 5x + 8$ je suprotan polinom $-6x^2 + 5x - 8$.

Sada, pošto je utvrđeno šta su suprotni polinomi, oni se mogu oduzimati. Oduzimanje se svodi na sabiranje na sledeći način:

$$A - B = A + (-B)$$

Umesto da se oduzme polinom B od polinoma A, sabira se polinom A i polinom $-B$.

Primer: *Oduzeti polinome* $C = 10x^2 + 5x - 3$ *i* $D = 5x^2 - 3x + 8$.

$$C - D = (10x^2 + 5x - 3) - (5x^2 - 3x + 8) =$$

$$(10x^2 + 5x - 3) + (-5x^2 + 3x - 8) =$$

$$10x^2 + 5x - 3 - 5x^2 + 3x - 8 =$$

$$10x^2 - 5x^2 + 5x + 3x - 3 - 8 =$$

$$5x^2 + 8x - 11$$

Polinom C iz prethodnog primera se može zapisati i kao $C = 10x^2 + 2x + 3x - 3$. Ovo je nesređeni oblik.

Definicija: Za polinom se kaže da je u **sređenom obliku** ako je zbir međusobno nesličnih monoma.[1]

Još je bitno pomenuti **stepen polinoma**. Može se opet posmatrati prethodni primer. Stepen polinoma C je 2, isto kao i stepen polinoma D. *Kako se to određuje?*

Definicija: Stepen polinoma je najviši stepen svih monoma koji čine taj polinom.[1]

Primer: *Odrediti stepene sledećih polinoma.*
a) $6x^4 + 3x$ Ovaj polinom je stepena 4.
b) 8 **Ovaj polinom je stepena 0 pošto je sačinjen samo od konstante koja nije 0**.

Tvrđenje: Zbir i razlika dva polinoma je polinom.

5.5 Množenje polinoma

Slično kao i kod sabiranja, da bi se pomnožili binomi, trinomi... potrebno je znati množiti monome. Obratiti pažnju da su monomi "temelj na kome se gradi kuća". Dakle, mora se prvo naučiti množenje monoma.

Primer:

$$-8x^3y \cdot 5xy = -8 \cdot 5 \cdot x^3 \cdot x \cdot y \cdot y = -40x^4y^2$$

Da bi se izvršilo množenje dva monoma, prvo se množe koeficijenti, a potom iste promenljive. Kako sad sve to primeniti na množenje monoma binomom, trinomom - na sledeći način, primenom zakona distributivnosti:

$$5x \cdot (x^2 + 5) = 5x \cdot x^2 + 5x \cdot 5 = 5x^3 + 25x.$$

Sada ostaje da se nauči kako se množi binom binomom, a na isti način i polinomi višeg stepena.

$$(2x+3) \cdot (5x^2 - 2) = 2x \cdot 5x^2 + 2x \cdot (-2) + 3 \cdot 5x^2 + 3 \cdot (-2) = 10x^3 + 15x^2 - 4x - 6.$$

Kod množenja ovog tipa, primenjuje se čuveno "množenje svaki sa svakim". Monomi iz prvog dela (prve zagrade) se množe svim monomima iz druge zagrade vodeći računa o znaku koji se nalazi ispred broja. Podrazumeva se da su polinomi poređani po opadajućem stepenu.

Tvrđenje: Proizvod dva polinoma je polinom.

Kako odrediti stepen proizvoda dva ili više polinoma? U prethodnom primeru se vidi da je *stepen proizvoda polinoma jednak zbiru stepena polinoma koji učestvuju u množenju.*

5.6 Deljenje polinoma

Za razliku od sabiranja, oduzimanja i množenja polinoma jedne promenljive, kada je reč o deljenju, situacija je nešto drugačija. Kao što je bilo reči o deljenju celih brojeva bez ostatka i sa ostatkom, isto to se može preneti i na polinome jedne promenljive. Neće se svaka dva polinoma moći podeliti, a da se dobije "lep polinom". Česte su situacije kada će postojati ostatak, a kada se to dešava, kako se dele polinomi i kako naći ostatak, videće se u daljem tekstu.

Definicija 1: Data su dva polinoma A i B. Ako postoji neki polinom Q tako da se polinom A može zapisati kao proizvod polinoma B i Q, tj.

$$A = BQ,$$

onda je to deljenje bez ostatka i kaže se da je polinom A deljiv polinomom B. Polinom B se naziva **delilac**, i on mora biti različit od 0, dok je polinom Q **količnik**.

Primer: *Da li je polinom $A = x^4 - 1$ deljiv polinomom $B = x - 1$?*

Za ovo će biti od koristi rastavljanje polinoma na proste činioce.

Rešenje: Polinom A se može zapisati kao $A = (x-1)(x+1)(x^2+1)$. Sada je očigledno da se polinom A može podeliti polinomom B, gde je količnik $Q = (x+1)(x^2+1)$.

Kao što je već spominjano, neće uvek biti moguće ovakvo deljenje polinoma, ali će kao i kod celih brojeva uvek biti moguće deljenje sa ostatkom.

Teorema: Neka su A i B polinomi jedne promenljive koji su različiti od 0. Tada postoje i jedinstveno su određeni polinomi Q i R, takvi da važi[3]

$$A = BQ + R. \tag{6}$$

Polinom R je ostatak, pa samim tim on mora biti stepena manjeg od B.

Postoji više metoda za deljenje dva polinoma.Na primeru je prikazan metod koji je sličan metodu deljenja celih brojeva.

Primer: *Podeliti polinome A i B.*

$A = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 1$
$B = x^2 + 3x + 5$

$$\begin{array}{l}
\big(\;\; 3x^3 \;\; - 4x^2 \;\; + 5x \;\; - 1\big) \div \big(x^2 + 3x + 5\big) = 3x - 13 + \dfrac{29x + 64}{x^2 + 3x + 5} \\
\underline{\;\; - 3x^3 \;\; - 9x^2 - 15x} \\
\qquad\quad - 13x^2 - 10x \;\; - 1 \\
\qquad\quad \underline{\;\;\; 13x^2 + 39x + 65} \\
\qquad\qquad\qquad\; 29x + 64
\end{array}$$

Kako se polinom A deli polinomom B? U prvom koraku se posmatra koliko puta se polinom x^2 sadrži u $3x^3$. Potom se izvršava množenje i oduzimanje kao kod celih brojeva. Postupak se ponavlja dokle god se ne dobije ostatak koji je manji od delioca.

Dakle, u ovom primeru količnik je,

$$Q = 3x - 13,$$

a ostatak

$$R = 29x + 64.$$

Jedna od jako bitnih teorema algebre je Bezuova teorema. Ona se koristi kada treba naći ostatak pri deljenju polinoma, a da se ne izvrši operacija deljenja. To svakako skraćuje postupak nepotrebnog računanja i samim tim štedi vreme.

Bezuova teorema: Ostatak pri deljenju nekog polinoma P nekim drugim polinomom $x - a$, pri čemu $a \in \mathbb{R}$, se dobija kada se nađe vrednost polinoma u tački a, tj. $P(a)$.

Dokaz: Bezuova teorema se lako dokazuje. Pošto se polinom P deli linearnim binomom $x - a$, polinom P se može zapisati u sledećem obliku:

$$P(x) = Q(x)(x - a) + r.$$

Treba voditi računa o tome da, pošto se deli polinomom prvog stepena, ostatak mora biti ili 0 ili neki broji iz skupa realnih brojeva. Polazi se od dokaza iz suprotnog smera, tj. od činjenice da se uzima vrednost polinoma u tački $x = a$. Sada se dobija:

$$P(a) = Q(a)(a - a) + r$$

$$P(a) = r \tag{7}$$

Šta se dešava kada je polinom P deljiv linearnim binomom $x - a$. O tome govori sledeća posledica Bezuove teoreme.

Posledica: *Polinom P deljiv je linearnim binomom $x - a$ ako i samo ako je $P(a) = 0$.*

Dokaz: Pošto važi ekvivalencija, posledica će se dokazivati sleva na desno i zdesna na levo.

Sleva na desno:

$$P(x) = Q(x)(x - a)$$

$$P(a) = Q(a)(a - a)$$

$$P(a) = 0.$$

Zdesna na levo:

$$P(a) = 0$$

$$P(a) = Q(a)(a - a) + r$$

$$0 = r$$

Ostatak je 0 pa je polinom P deljiv polinomom $x-a$.

Primer: *Ne izvodeći deljenje dokazati da je polinom* $P(x) = (x^3 - 8)^5 + (x^2 - 4)^3$ *deljiv sa* $x - 2$.[3]
Rešenje: Ovde se koristi posledica Bezuove teoreme. Da bi polinom $P(x) = (x^3 - 8)^5 + (x^2 - 4)^3$ bio deljiv sa $x - 2$, potrebno je da $P(2) = 0$ jer se iz $x - 2$ zaključuje da je $a = 2$.

$$P(2) = (2^3 - 8)^5 + (2^2 - 4)^3$$

$$P(2) = (8 - 8)^5 + (4 - 4)^3$$

$$P(2) = 0^5 - 0^3 = 0$$

Odavde sledi da je polinom $P(x)$ deljiv polinomom $x - 2$.

5.7 Najmanji zajednički sadržalac i najveći zajednički delilac polinoma

Kao što je viđeno u prethodnim poglavljima, između celih brojeva i polinoma postoji dosta sličnosti. Evo još jedne od njih. Najmanji zajednički sadržalac i najveći zajednički delilac postoje i za polinome jedne promenljive, njihova uloga je ista, dok se razlikuju u postupku nalaženja. Kako ih naći, da li oni postoje i ako postoje, da li su jedinstveni, kako odrediti najmanji i najveći? Za početak je bitno definisati šta su to NZD i NZS za polinome da bi se uopšte moglo dalje pričati o njima.

Definicija: Najveći zajednički delilac dva ili više polinoma (NZD) koji su različiti od nultog je polinom najvišeg stepena koji deli početne polinome.

Definicija: Najmanji zajednički sadržalac dva ili više polinoma (NZS) je polinom najnižeg stepena koji ih sadrži.

Pomoću Euklidovog algoritma se može pokazati da će za bilo koja dva ili više polinoma uvek postojati NZD i NZS. (Prvi poznati sačuvani opis Euklidovog algoritma se nalazi u *Elementima (oko 300. p.n.e.)*, što ga čini najstarijim numeričkim algoritmom koji se još uvek aktivno koristi.[2]) Ti sadržaoci i delioci polinoma nisu jedinstveni, tj. ako je neki polinom S najmanji zajednički sadržalac, onda ce uslove definicije zajedničkog sadržaoca ispuniti i kS, za neki broj $k > 1$. Od svih njih će se u najvećem broju slučajeva, za NZS birati oni koji imaju koeficijent 1 uz najveći stepen.

Slika 5: Euklid iz Aleksandrije

Da bi se trazili NZD i NZS za polinome, prvo se moraju rastaviti na činioce.

Primer: *Odredi NZD i NZS za polinome A i B.*

$$A = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

$$B = x - 2$$

Odavde sledi da je NZD polinom oblika $x - 2$ pošto je on delilac i polinoma A i polinoma B. NZS je polinom najnižeg stepena koji sadrži oba polinoma, tj. on je oblika $(x-2)(x+2)$.

6 Polinomi nad poljem kompleksnih brojeva

Za početak: Šta su to kompleksni brojevi?

Definicija: *Kompleksni brojevi su svi brojevi oblika* $z = a + bi$*, gde su* $a, b \in \mathbb{R}$*, a* i *imaginarna jedinica, takva da važi* $i^2 = -1$.

Prvi deo kompleksnog broja, tj. a se naziva njegov **realan deo**, $Re(z)$, dok je realan broj b njegov **imaginarni deo**, $Im(z)$. Skup kompleksnih brojeva se obeležava sa $\mathbb{C}$.

Pošto je definisan pojam kompleksnog broja, sada se mogu definisati i polinomi nad poljem kompleksnih brojeva. Između polinoma nad poljem realnih i polinoma nad poljem kompleksnih brojeva ima dosta sličnosti. Za početak, i polinomi nad poljem $\mathbb{C}$ se definišu kao funkcija koja, u ovom slučaju, ide iz skupa kompleksnih brojeva u skup kompleksnih brojeva. Svaki kompleksni polinom se može napisati u sledećem obliku:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,$$

pri čemu su koeficijenti $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ kompleksni brojevi. Među njima je koeficijent a_n najstariji, i ukoliko je $a_n \neq 0$, onda je n **stepen polinoma**. U vezi sa tim se $a_n z^n$ naziva **najstariji član**. Ukoliko je polinom $P(z) = a_0$, tj. neka konstanta, onda je on **nultog stepena**, a ukoliko je $P(z) = 0$, stepen mu je **neodređen** i tada se $P(z)$ naziva **nula polinom**.

Ukoliko polinom $P(z)$ ima vrednost nula u nekoj tački a, $a \in \mathbb{C}$, onda je a **nula polinoma** i piše se $P(a) = 0$.

Bitno je naglasiti da je opet reč o polinomima koji zavise od jedne promenljive, s tim što oni sada imaju kompleksne koeficijente.

Primer: *Odredi stepen polinoma* $P(z) = 2z^2 + 3z - 2$.

Rešenje: Stepen polinoma P je 2 jer je to najveći stepen u njemu. Za $z = -2$ vrednost polinoma $P = 0$, $2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 2 = 8 - 6 - 2 = 0$, pa je $z = -2$ nula polinoma.

6.1 Sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje polinoma

Kompleksni polinomi se mogu, kao i polinomi nad skupom realnih brojeva, sabirati, oduzimati i množiti, pri čemu dobijeni rezultat ostaje u skupu kompleksnih brojeva. To znači da je **skup polinoma posmatrano nad poljem $\mathbb{C}$ zatvoren**.

Šta se dešava sa stepenom zbira, razlike i proizvoda?

Stepen zbira i stepen razlike ne može biti veći od stepena polinoma koji se sabiraju ili oduzimaju, dok se stepen proizvoda dobija kada se saberu stepenovi činilaca.

Primer: *Sabrati, oduzeti i pomnožiti polinome P i Q.*

$$P(z) = z^3 + zi + 8$$

$$Q(z) = z - 4$$

Rešenje:

$$P(z) + Q(z) = z^3 + zi + 8 + z - 4 = z^3 + (i+1)z + 4$$

$$P(z) - Q(z) = z^3 + zi + 8 - z + 4 = z^3 + (i-1)z + 12$$

$$P(z)Q(z) = (z^3 + zi + 8)(z-4) = z^4 - 4z^3 + z^2 i - 4iz + 8z - 32 =$$

$$z^4 - 4z^3 + z^2 i + (-4i + 8)z - 32$$

Vidi se da je stepen zbira i razlike 3, što je isto kao stepen polinoma $P(z)$. Stepen proizvoda je 4, što predstavlja zbir stepena polinoma $P(z)$ i $Q(z)$.

Kada je u pitanju deljenje, situacija je slična kao kod celih brojeva. Ako se posmatraju dva kompleksna polinoma $P(z)$ i $B(z)$, i ako je polinom P deljiv polinomom B, onda količnik ostaje u skupu kompleksnih brojeva. Polinom P se može zapisati kao

$$P(z) = Q(z)B(z), \tag{8}$$

gde je $Q(z)$ količnik polinoma P i B.

Primer: *Izračunati količnik polinoma P i B.*

$$P(z) = 2(z-1)(2z+2)$$

$$B(z) = z - 1$$

$$\frac{P(z)}{B(z)} = \frac{2(z-1)(2z+2)}{z-1} = 2(2z+2)$$

Primer: *Izračunati količnik polinoma P i B.*

$$P(z) = 2(2z^2+3)$$

$$B(z) = z-1$$

$$\frac{P(z)}{B(z)} = \frac{2(2z^2+3)}{z-1}$$

Nije moguće podeliti polinome P i B bez ostatka. Kao i u skupu celih brojeva, deljenje sa ostatkom je uvek moguće. To znači da se svaki kompleksni polinom $P(z)$ može zapisati kao

$$P(z) = Q(z)B(z) + R(z), \tag{9}$$

gde je polinom $Q(z)$ količnik, a polinom $R(z)$ ostatak. Ukoliko je taj ostatak nula polinom, kaže se da je polinom P deljiv polinomom B. Važi isto pravilo kao kod polinoma u skupu $\mathbb{R}$. *Ostatak $R(z)$ mora imati manji stepen od polinoma $B(z)$.*

Postupak deljenja je isti kao postupak deljenja nad poljem realnih brojeva.

U prvom razredu je rađena Bezuova teorema. Ona se koristila kada je bilo potrebno odrediti ostatak pri deljenju. Zaobilazio se postupak deljenja i direktno je računat ostatak. Ista teorema važi i sada.

Bezuova teorema(kompleksni brojevi): Neka je $P(z)$ polinom, gde je z kompleksan broj, i neka je $B(z) = z-a$, tj. linearan binom. Ostatak pri deljenju polinoma P binomom B je vrednost polinoma P u tački $z = a$, tj.

$$P(a) = R(z).$$

Napomena: Polinom $R(z)$ je ili nula polinom ili konstanta.

Posledice:

- Ukoliko je $P(a) = 0$, polinom $P(z)$ je deljiv linearnim binomom $z-a$.
- Ako je a jedno rešenje jednačine $P(z) = 0$, tada se polinom P može prikazati u obliku[4]

$$P(z) = (z-a)Q(z). \tag{10}$$

Ako je polinom $P(z)$ stepena n, onda stepen polinoma $Q(z)$ mora biti $n-1$.

Slika 6: Etjen Bezu

6.2 Nule polinoma

U skupu realnih brojeva se nije za svaki polinom mogla naći njegova nula. Na primer, polinom $x^2 + 5$ nema vrednost 0 ni u jednoj tački. Za polinome nad poljem kompleksnih brojeva važi nešto drugačija situacija. Nešto više o tome govori jedna od teorema, Osnovna teorema algebre i njene posledice.

Osnovna teorema algebre: Svaki polinom P nad poljem kompleksnih brojeva ima bar jednu nulu.[4]

Posledice:

- Osnovna teorema algebre se koristi prilikom rastavljanja polinoma na činioce:

$$z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$$
$$2z^2 + (7 - 2i)z - 7i = (z - i)(2z + 7)$$

itd.

- Svaki polinom P nad poljem kompleksnih brojeva se može na jedinstven način predstaviti kao

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)...(z - \alpha_n), \tag{11}$$

gde je n stepen polinoma P, a α_1, α_2,...,α_n njegove nule.

Za dokazivanje Osnovne teoreme algebre se koristi druga teorema, Osnovna teorema o simetričnim polinomima, i leme na osnovu koji se zna da svaki realan polinom neparnog stepena ima i bar jednu nulu u $\mathbb{R}$, da svaki kvadratni polinom nad poljem $\mathbb{C}$ ima nule u $\mathbb{C}$ i da je kompleksan broj z nula realnog polinoma ako i samo ako je to i $\bar{z}$.[6] U ovom radu nije bilo reči o tome, pošto gradivo srednje škole to ne obuhvata. Dokaz Osnovne teoreme algebre se zbog svoje težine radi tek na fakultetu, ali je drugu posledicu lako dokazati.

Dokaz: Koristeći Osnovnu teoremu algebre, zna se da svaki kompleksan polinom P ima bar jednu nulu, tj. može se predstaviti kao

$$P(z) = (z - \alpha_1)Q_1$$

Pošto je $z - \alpha_1$ stepena 1, to znači da polinom Q_1 mora biti stepena $n - 1$. Dalje se nastavlja primenjujući Osnovnu teoremu algebre i sada se rastavlja polinom Q_1.

$$P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)Q_2$$

Rastavljajući polinom Q_2 dobija se

$$P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)Q_3$$

Postupak se ponavlja sve dok se ne rastavi polinom $Q_{n-1} = (z - \alpha_n)a_n$, tj. dok se polinom P ne predstavi u obliku

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)...(z - \alpha_{n-1})(z - \alpha_n).$$

Da li se ovaj polinom P može još nekako faktorisati? Pretpostavimo da je odgovor potvrdan. Sada se on predstavlja kao proizvod drugih činilaca

$$P(z) = b_n(z - \beta_1)(z - \beta_2)...(z - \beta_{n-1})(z - \beta_n),$$

gde je n stepen polinoma P, a β_1, β_2,...,β_n njegove nule. *Bitno je napomenuti da su najstariji koeficijenti a_n i b_n različiti od 0.*

Leve strane ovih jednakosti su jednake, pa moraju biti i desne.

$$a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)...(z - \alpha_{n-1})(z - \alpha_n) =$$

$$b_n(z - \beta_1)(z - \beta_2)...(z - \beta_{n-1})(z - \beta_n)$$

Nule polinoma su $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n$. Može se uzeti da je $z = \alpha_1$.

$$a_n(\alpha_1 - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)...(\alpha_1 - \alpha_{n-1})(\alpha_1 - \alpha_n) =$$

$$b_n(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)...(\alpha_1 - \beta_{n-1})(\alpha_1 - \beta_n)$$
$$0 = b_n(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)...(\alpha_1 - \beta_{n-1})(\alpha_1 - \beta_n)$$

Dalje, leva strana je 0, pa jedan od činilaca, izuzev b_n, mora biti 0. Svejedno je koji se uzima. Neka to bude $\alpha_1 - \beta_1$.

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0$$

$$\alpha_1 = \beta_1$$

Ponavljajući postupak dobija se da su nule jednake, tj. da je $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, ..., $\alpha_n = \beta_n$, pa važi da je i $a_n = b_n$. Dakle, faktorizacija polinoma P je jedinstvena.

Primer: *Da li je polinom $P(z) = (z+1)(z-5)^2$ deljiv polinomom $B(z) = z+1$? Da li je, pak, deljiv polinomom $B(z)^2 = (z+1)^2$?*

$$\frac{P(z)}{B(z)} = \frac{(z+1)(z-5)^2}{z+1} = (z-5)^2$$
$$\frac{P(z)}{B(z)^2} = \frac{(z+1)(z-5)^2}{(z+1)^2} = \frac{(z-5)^2}{z+1}$$

Vidi se da je polinom $P(z)$ deljiv polinomom $z+1$, ali nije deljiv polinomom $(z+1)^2$. U tom slučaju, jedinica se naziva *jednostruka* ili *prosta* nula polinoma P.

Definicija: Neka je polinom $P(z)$ deljiv polinomom $(z-a)^k$, pri čemu k nije veće od n, a nije deljiv polinomom $(z-k)^{k+1}$, onda je a nula polinoma P reda k.[4]

U zavisnosti od toga postoje jednostruke, dvostruke itd. nule.

Primer: *Odrediti nule polinoma $P(z) = (z-i)^2(z+1)(z-8i)$.*

Rešenje: Vidi se da polinom P ima četiri nule.

$$z = i \Rightarrow P(z) = 0$$

$$z = -1 \Rightarrow P(z) = 0$$

$$z = 8i \Rightarrow P(z) = 0$$

Nula i je dvostruka, dok su nule -1 i $8i$ jednostruke.

Kao posledica Osnovne teoreme algebre, polinom P se može predstaviti kao

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)...(z - \alpha_n).$$

Svaka od nula $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n$ može biti jednostruka ili višestruka. Zato se polinom P može još preciznije zapisati kao

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2}...(z - \alpha_n)^{k_n}. \tag{12}$$

Ovo se naziva **kanonski oblik polinoma** P.

Tvrđenje: Ako je polinom stepena n, može imati najviše n nula.

Šta to povlači za sobom? **Zbir stepena** $k_1 + k_2 + ... + k_n = n$.

Ako polinom P ima stepen n i nulu α reda n, može se reći ili da ima jednu višestruku nulu, ili n njih.

Ovo tvrđenje ima svoje dve posledice pomoću kojih se saznaju neke osobine polinoma ili njihovi međusobni odnosi.

Posledice:

1. Da bi neki polinom P stepena n bio jednak nuli, svi njegovi koeficijenti moraju biti 0, tj.

$$a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 = 0.$$

2. Da bi neki polinomi bili jednaki, moraju imati jednake koeficijente. Važi ekvivalencija.

Dokaz:

$\Rightarrow$:

Neka je polinom $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$, a polinom $Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0$. Ukoliko važi da je

$$a_n = b_m, a_{n-1} = b_{m-1}, ..., a_1 = b_1, a_0 = b_0,$$

očigledno je da je $P(z) = Q(z)$.

$\Leftarrow$:

Polinomi $P(z)$ i $Q(z)$ su jednaki,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,$$

a polinom

$$Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + ... + b_1 + b_0,$$

$$P(z) = Q(z)$$

Polazi se od pretpostavke da njihovi koeficijenti nisu jednaki. Neka je polinom P većeg stepena, tj. $n > m$. Pošto su polinomi jednaki, važi da je

$$P(z) - Q(z) = 0,$$

$$P(z)-Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + (a_m - b_m) z^m + (a_{m-1} - b_{m-1}) z^{m-1} + ... + (a_1 - b_1) z +$$
$$+ (a_0 - b_0) = 0$$

$\Rightarrow \quad a_n = 0,\ a_{n-1} = 0,\ ...,\ a_m - b_m = 0,\ a_{m-1} - b_{m-1} = 0,\ ...,\ a_1 - b_1 = 0,$ $a_0 - b_0 = 0$. Dakle, $m = n$ i $a_m = b_m$, ... $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$, što je i bilo potrebno dokazati. $\bigtriangledown$

Primer: *Odrediti a, b, c, d tako da važi jednakost:*

$$x^2 = a(x+2)^2 + b(x+2) + c$$

Rešenje:

$$x^2 = ax^2 + 4ax + 4a + bx + 2b + c$$

$$x^2 a + x(4a + b) + 4a + 2b + c$$

Izjednačavanjem koeficijenata dobija se sistem

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ 4a + b &= 0 \\ 4a + 2b + c &= 0 \end{aligned}$$

Dobijen je sistem od tri jednačine sa tri nepoznate. Jednostavnim rešavanjem dobija se

$$a = 1$$

$$b = -4$$

$$c = 4.$$

6.3 Faktorizacija realnih polinoma

Rastavljanje brojeva na proste činioce je prošireno rastavljanjem polinoma nad poljem realnih brojeva. Sada se i to znanje uvećava faktorisanjem kompleksnih polinoma. Šta se zapravo radi? Polinom se faktoriše tako što se rastavlja na nešto što se dalje ne može rastaviti, a što će biti od koristi za mnoge zadatke.

Primer: *Rastaviti polinom* $P(z) = z^2 - 4$ *na činioce.*

Ovde se primenjuje formula za razliku kvadrata i dobija se

$$P(z) = (z-2)(z+2).$$

Isto tako, pri rastavljanju polinoma mogu biti od koristi i kvadrat binoma, zbir i razlika kubova, kub binoma, tzv. "izvlačenje zajedničkog činioca ispred zagrade" itd.

U pomoć pri rastavljanju kompleksnih polinoma priskaču i teoreme kao što su Osnovna teorema algebre, zatim broj nula nekog polinoma, ali i sve ono što je korišćeno kada su faktorisani realni polinomi.

Neka je $P(z)$ polinom oblika

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Ako bi on bio predstavljen u obliku činilaca, bilo bi to

$$P(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)...(z-\alpha_n).$$

Rešenje jednačine

$$P(z) = 0$$

uvek postoji, o čemu govori Osnovna teorema algebre. Njene nule mogu biti sve iste, ili pak sve različite, ali ih može biti najviše n. To važi i za rešenja.

Jednačina $P(z) = 0$ *ima tačno* n *rešenja, istih ili međusobno različitih.*

Bitno je napomenuti da se govori o skupu $\mathbb{C}$.

Šta se dešava na skupu realnih brojeva? Isto, s tim što rešenja realnog polinoma ne moraju biti realni brojevi. Primer koji se često viđa u knjigama je

$$x^2 + 1 = 0.$$

Ova jednačina se ne može rešiti na skupu realnih brojeva, ali na skupu kompleksnih, ona ima dva rešenja, imaginarnu jedinicu i i $-i$. Hajde da se to proveri.

$$i^2 + 1 = -1 + 1 = 0.$$

$$i^2 + 1 = (-i)^2 + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Ovaj primer je dobar uvod u sledeće tvrđenje koje je usko povezano sa brojem rešenja realnih polinoma.

Tvrđenje: Ako polinom sa realnim koeficijentima ima kompleksnu nulu α, onda je njegova nula i konjugovan broj $\bar{\alpha}$.

Prvo sledi podsećanje šta su to konjugovani brojevi.

Defincija: Konjugovan broj nekog kompleksnog broja $z = x + iy$ je kompleksan broj koji ima imaginarni deo suprotnog znaka od njega, tj. ima oblik $x - iy$.

Oznaka za konjugovan broj broja z je $\bar{z}$.

Da bi tvrđenje bilo dokazano, potrebno je podsetiti se i nekih svojstava konjugovanih brojeva:
1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
3. $z = \bar{z}$ akko $z \in \mathbb{R}$
4. $0 = \bar{0}$.

Sada se može vratiti na dokaz tvrđenja.

Dokaz:

Treba posmatrati nule polinoma $P(z)$, tj. jednakost

$$P(z) = 0.$$

Neka je α nula ovog polinoma, $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$P(\alpha) = 0.$$

Pošto je polinom P oblika

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

to važi

$$P(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + ... + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

Sada treba konjugovati prethodnu jednačinu.

$$\overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + ... + a_1 \alpha + a_0} = \bar{0}$$

Primenjujući osobine konjugovanih brojeva koje su gore navedene, dobija se

$$\overline{a_n \alpha^n} + \overline{a_{n-1} \alpha^{n-1}} + ... + \overline{a_1 \alpha} + \bar{a_0} = 0$$

Dalje je

$$\overline{a_n}\overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}}\overline{\alpha^{n-1}} + ... + \bar{a_1}\overline{\alpha} + \overline{a_0} = 0$$

Iz osobine broj 3 sledi

$$a_n\overline{\alpha^n} + a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}} + ... + a_1\overline{\alpha} + a_0 = 0$$

Odavde je očigledno da je

$$P(\overline{\alpha}) = 0.$$

$\bigtriangledown$

Ovim je tvrđenje dokazano.

Kakav zaključak se može izvesti iz ovog tvrđenja? Ako neki realni polinom ima kompleksnu nulu, odmah se zna da ih ima bar dve. Njihov broj mora biti paran.

Ako se, pak, zna da je polinom stepena n, pri čemu je n neparan broj, onda on mora imati realnu nulu kao "razliku"od $n-1$ do n.

Primer: *Faktorisati polinom* $P(z) = 2z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 6z - 12$

Rešenje:

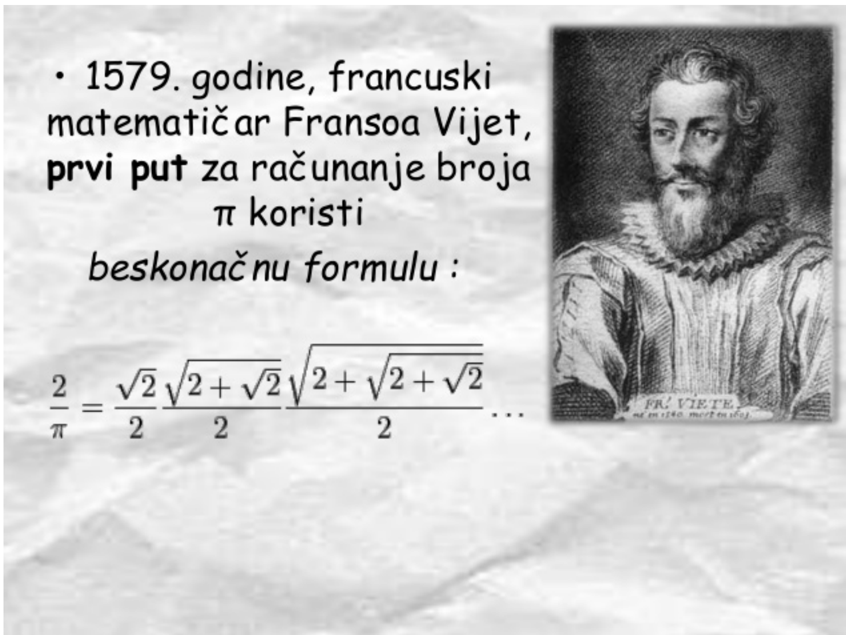
$$2z^4 + 2z^3 + 2z^2 - 6z - 12 =$$

$$(2z+4)(z^3 - z^2 + 3z - 3) =$$

$$(z-1)(z^2+3)(2z+4)$$

Ovaj polinom ima 2 realne nule, a to su $z = 1$ i $z = -2$, i 2 kompleksne $z = i\sqrt{3}$ i $z = -i\sqrt{3}$.

6.4 Vijetove formule



Slika 7: Fransoa Vijet

Vijetove formule su već korišćene kada su rešavane kvadratne jednačine. Sada se mogu proširiti i na kompleksne polinome koji imaju stepen veći od dva. Vijetove formule su dobile ime po matematičaru Fransoa Vijetu. One su od velikog značaja jer povezuju koeficijente polinoma sa njegovim nulama. Izračunavanje nula kod kvadratnih jednačina nije toliko komplikovano, ali kada su u pitanju nule polinoma trećeg i viših stepena, situacija je drugačija. One će u tom slučaju biti od velike koristi.

Svaki polinom P se može predstaviti u obliku

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$$

gde je $a_n \neq 0$. Ako bi se polinom $P(z)$ faktorisao, dobilo bi se

$$P(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)...(z - \alpha_n)$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ nule polinoma koje mogu međusobno biti jednake. Leve strane ovih jednakosti su iste, pa važi:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)...(z - \alpha_n)$$

Treba krenuti od polinoma stepena 2:

$$P(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad a_2 \neq 0$$

i

$$P(z) = a_2(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)$$

Odavde sledi da je

$$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = a_2(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)$$

Nakon množenja činilaca sa desne strane jednakosti, dobija se:

$$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = a_2 z^2 - a_2(\alpha_1 + \alpha_2)z + a_2 \alpha_1 \alpha_2.$$

Nakon izjednačavanja koeficijenata sa leve i desne strane, dobijaju se *Vijetove formule za polinom drugog stepena*

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_2},$$

$$\alpha_1 \alpha_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Isti postupak se primenjuje kada je u pitanju polinom trećeg stepena.

$$P(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad a_3 \neq 0,$$

ili

$$P(z) = a_3(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nule polinoma P.
$\Rightarrow$

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = a_3(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)$$

$$a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0 = a_3z^3-a_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)z^2+a_3(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3)z-$$
$$-a_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

Dobijaju se *Vijetove formule za polinom trećeg stepena*

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$
$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3 = \frac{a_1}{a_3}$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

Kada su u pitanju polinomi četvrtog i viših stepena, na sličan način se dolazi do Vijetovih formula.

$$P(z) = a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0, \quad a_4 \neq 0$$

tj.

$$P(z) = a_4(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4),$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ nule polinoma $P(z)$. *Vijetove formule za polinom četvrtog stepena su*

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 = -\frac{a_3}{a_4},$$
$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4 = \frac{a_2}{a_4},$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -\frac{a_1}{a_4},$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \frac{a_0}{a_4}.$$

Sada se treba vratiti na uopšteni oblik kompleksnog polinoma koji je naveden na početku Vijetovih formula.

$$P(z) = a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0, \quad a_n \neq 0$$
$$P(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)...(z-\alpha_n),$$

pri čemu su $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ nule ovog polinoma. Izjednačavajući desne strane ovih jednakosti, a potom i koeficijente, dobijaju se *Vijetove formule za polinome n-tog stepena*:

$$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+...+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+...+\alpha_2\alpha_n+\alpha_3\alpha_4+...\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+...+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n=-\frac{a_{n-3}}{a_n},$$

...

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4...\alpha_{n-1}\alpha_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

Primer: *Rešiti jednačinu* $4x^3+20x^2-23x+6=0$ *čija su dva rešenja jednaka.*

Rešenje: Neka su x_1, x_2, x_3 nule polinoma. Može se uzeti da je $x_1=x_3$.Primenom Vijetovih formula za polinom trećeg stepena dobija se da je

$$x_2+2x_1=-5$$

$${x_1}^2+2x_1x_2=-\frac{23}{4}$$

$${x_1}^2x_2=-\frac{3}{2}$$

Iz prve jednačine se dobija da je $x_1=\frac{-5-x_2}{2}$. Zamenom ove vrednosti u drugu jednačinu i potom njenim sređivanjem, dobija se kvadratna jednačina $3{x_2}^2+10x_2-48=0$. Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobijaju se dva rešenja:

$$x_{21}=\frac{8}{3}$$

i

$$x_{22}=-6.$$

Iz treće jednakosti je ${x_1}^2x_2=-\frac{3}{2}$, odakle sledi zaključak da x_2 mora biti negativan broj, pa je njegova vrednost $x_2=-6$. Jednostavnom zamenom u prvu jednakost dobija se da je $x_1=\frac{1}{2}$.

Dakle, *jednačina ima tri rešenja*: $\frac{1}{2}$, -6 *i* $\frac{1}{2}$.

7 Zaključak

U osnovnoj školi se učenici prvi put u sedmom razredu sreću sa pojmom polinoma i operacijama vezanim za njih - sabiranjem, oduzimanjem i množenjem. Operacija deljenja se ne radi još uvek. Ona se prvi put pominje u prvom razredu srednje škole, zajedno sa mnogim važnim teoremama algebre, kao što su Bezuova teorema i njene posledice. U trećem razredu srednje škole se sa skupa realnih brojeva, prelazi na skup kompleksnih, a samim tim se polinomi sada posmatraju i na tom skupu. Prvi put se pominje Osnovna teorema algebre. Vijetove formule važe i kod njih, samo se sada rade i za polinome stepena 2 i za polinome stepena većeg od 2. Učenici se postupno uvode u priču o polinomima, s tim što bi formule o razlici kvadrata i kvadratu binoma mogli raditi malo ranije zbog njihove velike primene, kako u matematici, tako i u fizici (npr. veza između vremena i pređenog puta).U matematici se pomoću polinoma rešavaju kvadratne jednačine, računaju brojevne vrednosti izraza itd. Zbog svega toga, veoma je bitno uvesti učenike u pojam polinoma u osnovnoj školi i dati im dobar temelj za ostalo nadograđivanje koje sledi u srednjoj školi. Od velike važnosti je i naučiti ih da nije najbitnije znati rešiti složene zadatke i izraze, već primeniti najbolji način za njihov dolazak do rešenja. Kod učenika treba podstaći sistematičnost, logičko rasuđivanje i upornost pri rešavanju zadataka i te osobine utiču na mnoge aspekte života.

Zahvaljujući svim saznanjima o polinomima i svim njihovim osobinama, moći će se lakše rešavati neki matematički zadaci za koje je do sad bilo potrebno više vremena, ili koji se uopšte nisu mogli rešiti. Postoji još puno stvari o polinomima koje nisu obuhvaćene ovim radom, pa se nadam da će vas bar malo zainteresovati da još više istražujete. Neka ovo bude samo početak na kojem ćete vi graditi svoje znanje vezano za njih i sve ono sa čim su povezani.

Mnogo puta smo čuli da nas matematika ne uči samo da rešavamo zadatke, već i da brže razmišljamo. U dosta situacija će se bolje reagovati zahvaljujući matematici, a da toga nećemo ni biti svesni. Mnoge probleme ćemo lakše rešiti zahvaljujući upravo tome što nas je ona naučila koji put je najbolji.

Ostaje nam samo da sve što smo znali o brojevima, njihovim izrazima i promenljivim ne zaboravimo, a da kroz ovaj rad i mnoge buduće učimo još više i saznajemo nove stvari o njima.

Literatura

[1] S. Ognjanović, Matematika - Udžbenik za 7. razred osnovne škole, Beograd, *Krug 2009.*

[2] https://sh.wikipedia.org/wiki/Euklidov_algoritam

[3] P. Miličić, V. Stojanović, Z. Kadelburg, B. Boričić, Matematika za I razred srednje škole, Beograd, *Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 1994.*

[4] Jovan D. Kečkić, Matematika sa zbirkom zadataka za III razred srednje škole, Beograd, *Zavod za udžbenike i nastavna sredstva 2018.*

[5] https://profesorka.wordpress.com/

[6] http://elibrary.matf.bg.ac.rs/bitstream/handle/123456789/2438/sim