

Универзитет у Београду  
Математички факултет



Снежана Стантић

## ТОПОЛОШКЕ МЕТОДЕ У РОБОТИЦИ

мастер рад

Београд, 2021.

## **Ментор:**

Проф. Др. Бранислав Првуловић, ванредни професор  
Универзитет у Београду, Математички факултет

## **Чланови комисије:**

Проф. Др. Владимир Грујић, ванредни професор  
Универзитет у Београду, Математички факултет

Проф. Др. Александар Вучић, доцент  
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Датум одбране:** ....01.2021.

*Robertu, Annalisi i Cristian Albertu*

## Наслов мастер рада: Тополошке методе у роботици

**Резиме:** Планирање кретања робота је отворено питање, како за инжењере, тако и за математичаре. Захтева проналажење одговарајућег континуираног, непрекидног, кретања које помера уређај из датог почетног положаја у крајњи жељени положај. Кључни проблем јесте суочавање са сингуларитетима који проузрокују нестабилност кретања.

Након техничког разматрања робота, погледаћемо и однос између тополошких својстава простора конфигурација и карактера нестабилности, која се не може избећи никаквим алгоритмом планирања кретања. Прецизније,  $X$  ће нам представљати простор свих могућих конфигурација механичког система.  $X \times X$  ћемо прекрити са  $k$  отворених подскупова,  $U_1, \dots, U_k$ . Са  $X^I$  ћемо означити простор свих непрекидних путања у  $X$  (допустљивих кретања у систему) и са  $\pi : X^I \rightarrow X \times X$  пресликавање путање из  $X$  у њену почетну и крајњу тачку. План кретања ће тада бити дат непрекидним пресликавањем  $s : X \times X \rightarrow X^I$  које задовољава услов да је десни инверз пресликавања  $\pi$ , односно да је  $\pi \circ s = \text{id}$ . Користићемо методе алгебарске топологије да бисмо дошли до минималног броја подскупова  $U_i$ , поменутог прекривача, у произвољном плану кретања преко простора  $X$ .

На крају ћемо се осврнути на планирање кретања везано за руку робота.

**Кључне речи:** Лустерник - Шнирелманова категорија простора, степен увијања, производ простора.

# Садржај:

<b>1</b>	<b>Основни појмови</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Опис положаја и оријентације шаке</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Директно кинематичко пресликавање</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Сингуларитети кинематичких пресликавања</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Локални и глобални проблеми</b>	<b>5</b>
5.1	Основни резултати . . . . .	6
5.1.1	$N$ - зглобни равански механизам . . . . .	8
5.1.2	Механизми усмеравања . . . . .	9
<b>6</b>	<b>Физичка презентација сингуларитета</b>	<b>10</b>
<b>7</b>	<b>Методе решавања локалног проблема</b>	<b>14</b>
7.1	Алгоритам праћења . . . . .	16
7.2	Проширена Јакобијева метода . . . . .	17
7.3	Инверзна кинематичка функција . . . . .	18
7.4	Евивалентност алгоритама . . . . .	19
<b>8</b>	<b>Аналогни резултати за манипулаторе позиционирања</b>	<b>22</b>
<b>9</b>	<b>Тополошка комплексност планирања кретања</b>	<b>24</b>
9.1	Дефиниција тополошке комплексности . . . . .	25
<b>10</b>	<b>Својства тополошке комплексности</b>	<b>28</b>
10.1	Инваријанта хомотопског типа . . . . .	29
10.2	Горња граница за $TC(X)$ . . . . .	29
10.3	Доња граница за $TC(X)$ . . . . .	30
10.4	План кретања на сферама . . . . .	31
10.5	Други примери . . . . .	32
10.6	Неједнакост производа . . . . .	33
10.7	План кретања роботске руке . . . . .	34
<b>11</b>	<b>Закључак</b>	<b>36</b>
	<b>Литература</b>	<b>37</b>

## 1 Основни појмови

Најпре ћемо се упознати са основном терминологијом и основним дефиницијама које су потребне за разумевање даљег излагања.

**Робот** је манипулатор који може да обавља различите задатке који, пре свега, обухватају манипулацију материјалима и предметима, различитим алатима и специјалним направама. Обично је његов изглед више или мање сличан људској руци. На завршетку руке налази се зглоб са шаком. Роботи углавном на цикличан начин обављају неку операцију, али је важно напоменути да их можемо лако прилагодити обављању друге функције без промене самог механизма.

**Роботски механизам** или манипулатор је онај део робота који личи на човекову руку. Покрећу га електрични, пнеуматични или хидраулични мотори. Мотори покрећу зглобове преко посебних преносних система.

**Роботско опажање** омогућава повезивање робота са околином. Сензоре делимо на *проприорецептивне* (посматрају унутрашње стање робота и баве се углом и брзином зглобова робота) и *екстерорецептивне* (скупају информације о окружењу, мерачи су силе додира и системи вештачког вида).

Роботски манипулатор је састављен из два дела: из *шаке* и *вишезглобне руке*. Шака је закључни сегмент роботске руке. Шаке обично имају два или више прстију а могу бити и вакуумске или магнетне. Може бити и мултифункционална. Она тако представља део преко кога робот утиче на околину. Намена вишезглобне руке је да постави шаку у жељену позицију и оријентацију у радном окружењу. Структуру вишезглобне руке називамо и *кинематички ланац*.

## 2 Опис положаја и оријентације шаке

Да бисмо дали математички модел кретања робота, морамо описати позицију и оријентацију појединих делова, одредити ограничења кретања робота узрокована различитим типовима зглобова и израчунати функционални однос између стања појединих зглобова и добијеног положаја и оријентације.

Позиција и оријентација (заједнички назване поза) шаке су одређене савијањем различитих зглобова роботске руке. Претпоставимо да имамо  $n$  зглобова

од којих се сваки савија само у једној равни (ова претпоставка није неопходна). Морамо да спецификујемо  $n$  бројева да бисмо дефинисали стање у којим се налазе зглобови. У случају  $n = 2$  можемо да нацртамо дијаграм на листу папира са по једном осом за сваки зглоб тако да би тачка на дијаграму одговарала могућем стању зглобова. Ако је  $n > 3$  онда би такав дијаграм морао да буде  $n$ -димензионалан па не бисмо могли да га нацртамо. Без обзира, још увек можемо теоријски да резонујемо о  $n$ -димензионом простору (назовимо га  $X$ ) у коме тачка репрезентује стање руке.

На уобичајен начин потребне су нам три координате да одредимо позицију. Даље, требало би да дефинишемо правац на који показује централна оса шаке. За ово су нам потребна два броја:

1. угао нагиба над хоризонталном равни
2. угао пројекције правца.

Приметимо да ова пројекција над хоризонталном равни и угао пројекције правца нису независни и нису добро дефинисани. На пример, ако је правац нормалан на хоризонталну раван, онда је угао пројекције правца безначајан (пројекција је тачка). Такође, физичко значење угла пројекције правца је промењено ако му се дода  $360^\circ$ . Ово можемо да превазиђемо тако што ћемо инсистирати да сви углови морају дабуду између  $0^\circ$  и  $359^\circ$ , али тада имамо другачији проблем у томе што се нумеричка вредност угла изненада може променити (док се рука креће од  $1^\circ$  до  $359^\circ$ ) без икаквог истинског дисконтинуитета у кретању робота.

Постоји тополошко објашњење овог проблема, ако би се простор могућих оријентација шаке једноставно параметризовао са две променљиве, онда би он тополошки био раван, међутим није раван. На место тога, можемо га посматрати као површину сфере чији се центар налази у тачки пресека оса шаке. Ако би шака држала бакљу, она би означила тачке на сфери које би одредиле оријентацију. Још једна променљива коју треба узети у разматрање је

3. увртање шаке око своје осе.

Овим добијамо трећи угао који је у интеракцији на компликован начин са преостала два.

Дакле, робот се састоји из троделне руке са зглобовима  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $\theta_3$  и шаке који се налази на крају руке. Шака се састоји од три зглоба  $\theta_4$ ,  $\theta_5$ ,  $\theta_6$  који могу

бити коришћени за окретање алата на крају руке.

Роботи могу бити програмирани за обављање посла спецификацијом временско зависне путање коју треба да прате у такозваном простору деловања који може да буде  $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$ :  $\mathbf{R}^3$  компонента спецификује позицију алата на крају робота а  $SO(3)$  спецификује оријентацију тог алата. Иако је задатак робота спецификован задавањем путање у простору деловања, ова путања мора бити праћена задавањем команди у зглобним моторима да би извршили одговарајућу путању у простору зглобова.

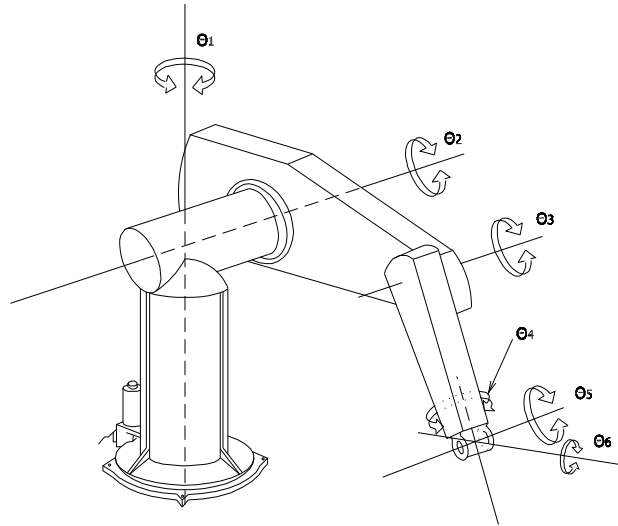
### 3 Директно кинематичко пресликавање

*Простор зглобова* манипулатора је производ простора зглобова свих зглобова робота. *Простор конфигурација* је подпростор простора зглобова који се пак састоји од вредности зглобова које задовољавају сва ограничења одређена геометријском реализацијом манипулатора.

Као што смо видели, потребно нам је шест параметара да бисмо описали позицију и оријентацију шаке. Због тога би требало да посматрамо шестодимензионалан простор  $Y$  у коме свака тачка одговара одређеном стању шаке. Можемо анализирати структуру  $Y$  користећи методе алгебарске топологије и научити много интересантних и нетривијалних ствари о њој. Свака тачка у нашем простору  $X$  одговара одређеном стању зглобова робота. Стање зглобова одређује позицију и оријентацију шаке. То значи да свакој тачки  $x$  у простору  $X$  придружимо тачку у  $Y$  коју би требало да назовемо  $f(x)$ . Ако желимо да постигнемо одређену позицију и оријентацију шаке то можемо урадити на много начина. Другим речима, много различитих тачака у  $X$  биће придружено истој тачки у  $Y$ .

Било би веома zgodно, што се тиче дизајна и примене таквих робота, да имамо такозвано ”инверзно пресликавање”. За сваку позицију и оријентацију шаке (одговарајућа тачка  $y$  у  $Y$ ) желели бисмо да можемо да изаберемо стање зглобова (што одговара тачки  $g(y)$  у  $X$ ) које доводи шаку у тај положај (тако да  $f(g(y)) = y$ ). Штавише, желели бисмо да је  $g(y)$  непрекидна у  $y$  тако да се слични положаји шаке постижу сличним стањем зглобова. Међутим, испоставља се да је ово тополошки немогуће. Стога је неопходно смислити комплекснију стратегију контроле у којој би се иста позиција шаке могла постићи на различите начине у различитим временима.





Слика 1: шестозглобни робот користи се за задатке позиционирања и оријентације. Прва три позиционирају руку а друга три зглоб на крају руке.

За робота на Сlici (1) сви зглобови су ротациони тако да се простор зглобова може посматрати као шестодимензиони торус  $T^6$ . Јасно је да постоји функција

$$f : T^6 \rightarrow \mathbf{R}^3 \times SO(3)$$

позната као *директно кинематичко пресликавање* које повезује сваку тачку  $\theta$  у простору зглобова са одговарајућом позицијом и оријентацијом зглобова кад су му зглобови у позицији  $\theta$ .

Слика директног кинематичког пресликавања назива се *простор деловања*.

Као што је случај код многих конвенционалних робота, овај робот је опремљен са минималним бројем зглобова (шест) потребних за слободно кретање у шестодимензионом простору деловања. Ова економичност у дизајну изгледа на први поглед природно, али има и недостатака. Ако робот ради у простору у коме је гужва, могло би се показати корисним да има додатни зглоб, који пак није неопходан, који омогућава руци да се креће около и избегава препреке док задржава крајњу тачку руке фиксiranу. Ови необавезни зглобови такође пружају још једну потенцијалну предност која није тако очигледна на први поглед. Они могу бити коришћени да би се избегла **сингуларна конфигурација** зглобова, тј. код којих *Јакобијан пресликавања* нема максималан ранг.

## 4 Сингуларитети кинематичких пресликавања

У роботици се термин *кинематичких сингуларитета* користи за означавање смањења слободе кретања у простору деловања који настаје у одређеним конфигурацијама зглобова.

Сингуларна конфигурација производи закључавање онемогућавајући кретање у одређеним смеровима. Овакви примери ће се појавити у даљем излагању где је показано да избегававање сингуларних конфигурација доводи до рестрикције потенцијалног простора деловања робота само са неопходним зглобовима.

Са друге стране ако су додатни зглобови доступни, већина позиција простора деловања може бити достигнута у непрекидном кретању разних зглобних конфигурација. Могућност да се исти покрет у простору деловања обави покретањем зглобова на различите начине, требало би да омогући да се избегну сингуларитети а да се не смањи простор деловања.

## 5 Локални и глобални проблеми

Таква стратегија отвара читаву класу техничких проблема, рецимо требало би одлучити коју од бесконачног броја различитих путања зглобова треба користити да би се следила путања у простору деловања. Егзактна формулација овог проблема зависи од природе роботовог задатка. Две широке класе проблема се јављају захтевајући фундаментално различите методе решавања. На ова два различита типа задатака можемо гледати као на *глобалне* и *локалне* проблеме.

Да бисмо их дефинисали уводимо нотацију  $x(t)$  за позицију у систему деловања као функцију времена  $t$  и нотацију  $\theta(t)$  за позицију зглобова.

*Глобални проблем* је онај код кога је целокупна жељена путања  $x(t)$  позната раније и путања  $\theta(t)$  мора бити изабрана тако да произведе  $x(t)$ . Ово ће бити случај на пример ако робот треба да изводи више пута исти задатак без промена.

*Локални проблеми*, са друге стране, претпостављају да немамо претходно знање путање која треба да буде слеђена. Такви проблеми настају када су роботи вођени сензорима и путања  $x(t)$  се у континуитету мења као реакција на њих. Тако је само локална информација, као делић путање  $x(t)$ , доступна у тренутку одређивања  $\theta(t)$ .

Глобални проблеми се могу решити изван тренутка у коме се кретање изводи,

користећи онолико компјутерског времена и меморије колико је прикладно. Да би се решио локални проблем, путања  $\theta(t)$  мора да се одреди управо у тренутку када се кретање изводи што значи да решења морају бити довољно једноставна да би се извела брзо и уз много скромније компјутерске ресурсе.

Када се решавају глобални проблеми морају се узети у обзир многа практична ограничења, као што су хардверска ограничења брзине кретања зглобова и торзије зглобова, третирајући их као ограничења у варијационим проблемима где један покушава да на целокупној путањи минимизира неку просечну вредност као на пример квадрат брзине зглоба,

$$\int_0^T \|\dot{\theta}(t)\|^2 dt, \quad (1)$$

поштујући још једно додатно ограничење а то је да се, приликом тога, мора пратити путања  $x(t)$ . Треба напоменути да таква стратегија априорно не гарантује избегавање сингуларитета али, као што ћемо видети, брзина кретања зглобова има тенденцију раста кад се приближава сингуларним конфигурацијама и оптимална путања  $\theta(t)$  обично остаје ван сингуларитета.

Варијациони прилаз глобалном проблему истиче да разлика између локалног и глобалног проблема нису само компјутерски ресурси на основу којих се оне виде. Оптимизација интеграла (1) може се урадити једино ако се целокупна путања  $x(t)$  већ познаје и на избор  $\theta(t_0)$ , у неком временском тренутку  $t_0$ , се не утиче само са  $x(t)$  у околини  $t_0$  већ и са  $x(t)$  у каснијем временском тренутку од тренутка времена  $t_0$ . Према томе локални и глобални проблеми су различити и са математичког и рачунарског становишта.

На даље ћемо се фокусирати на објашњење локалних. Већина резултата који ће бити презентовани су се појавили већ негде али у излагањима наменјеним пре свега инжењерима. Испоставља се да постоје нека фундаментална ограничења око тога шта се може урадити приликом решавања локалних проблема и ова ограничења извиру из тополошких разматрања простора зглобова, простора деловања и директног кинематичког пресликавања. Ове чињенице су показане коришћењем техника алгебарске топологије.

## 5.1 Основни резултати

Идеја просторног деловања, требало би да буде генерализована нечим и сада ћемо погледати робота на Слици (3) да бисмо то мало објаснили.

Већ је напоменуто да је простор деловања робота, за извршење неког задатка, простор  $\mathbf{R}^3 \times SO(3)$ . Насупрот овоме, на пример посао бојења, не захтева цео простор оријентације, јер угао ротације спреја око показивача правца је неважан. Једино је битан правац у ком је алат усмерен па, за посао, простор деловања може бити  $\mathbf{R}^3 \times S^2$ . Тај простор је петодимензиони тако да шестозглобни робот има вишак функционалности када се користи за овај посао.

Други примери простора деловања, који нас занимају, су

- $\mathbf{R}^2$ , ако се кретање, без оријентације, посматра у равни
- $\mathbf{R}^3$ , ако се кретање, без оријентације, посматра у тродимензионом простору

и

- $S^2$ , указивањем зглобова који нису закачени за позиционирану руку
- $SO(3)$ , ако желимо да разматрамо кретање зглобова које је оријентисано

Наравно, могуће је користити неколико робота који раде заједно на извршењу задатка тако да су пресеци ових простора такође потенцијално корисни. У делу који следи обележаваћемо простор деловања са  $X$ .

Такође ћемо увећати класу робота коју разматрамо тако што ћемо дозволити да користе општије просторе зглобова. Ово укључује зглобове који су

- ротациони, параметризовани углом круга  $S^1$ ,
- трансляторни (призматични), параметризовани тачкама неког затвореног интервала  $[a, b]$  реалне праве.

Може се десити да ротациони зглобови имају ограничење угла тако да и они могу бити параметризовани интервалом. Простор зглобова ћемо означавати са  $J^n$ , биће пресек параметризованих простора за сваких  $n$  роботских покретних зглобова и увек ће имати хомотопију турса.

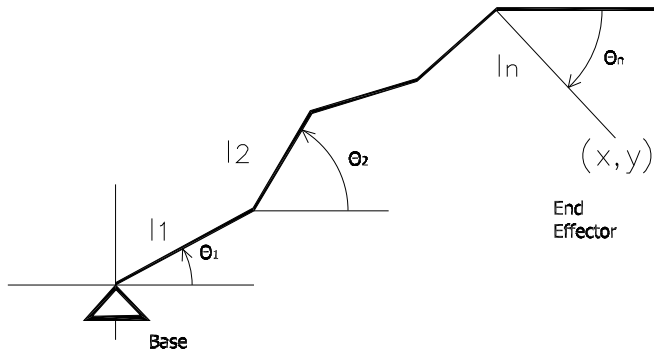
Приметимо да искључујемо лоптасте зглобове, позиције које су параметризоване са  $S^2$  из овог описа. Ово је зато што је веома тешко покретати лоптасте зглобове мотором иако они могу бити коришћени као пасивни зглобови механизма. У таквим случајевима они ће ограничавати кретање моторизованих зглобова ограничавајући кретање зглобова на неки подскуп простора зглобова  $J^n$ . Уопштавање резултата изложених овде, на овај општији концепт, мора се пажљиво извести.

Претпоставићемо да свака тачка у  $J^n$  одређује физички дозвољену конфигурацију зглоба робота која позиционира робота ка некој тачки у простору деловања  $X$ . Ово значи да механизам није ограничен на подпростор од  $J^n$ , као што је описано горе, и зато се може дефинисати *директно кинематичко пресликавање* на целокупном простору зглобова  $f : J^n \rightarrow X$ , као што је описано у једном од предходних делова текста. Задајући трајекторију  $x(t) \subset X$ , морамо наћи путању  $\theta(t) \subset J^n$  са  $f(\theta(t)) = x(t)$ , да би се робот кретао по путањи  $x(t)$ .

Навешћемо сада пар примера оваквих конструкција, који ће бити коришћени на даље.

### 5.1.1 $N$ - зглобни равански механизам

Механизам је приказан на Слици (2) и није тешко направити његов картонски (или груби) модел.



Слика 2:  $N$ - зглобни равански механизам приказан за  $n = 5$ . Механизам се састоји од правих линија повезаних у серији ротационим зглобом на фиксној бази. Алат монтиран на крају може бити позициониран у равни ротирањем зглобова механизма.

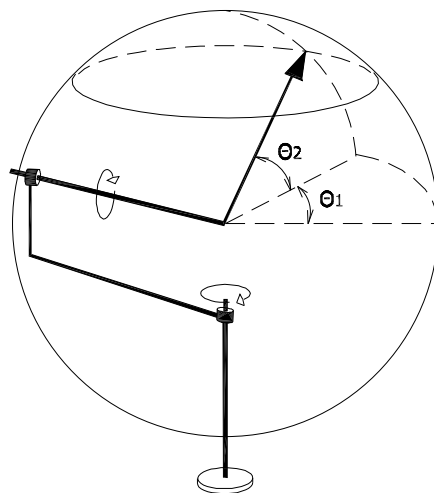
Сваки зглоб је ротационалан и може да се направи коришћењем чиоде која држи картонске везе заједно. Обележаваћемо тачке у простору  $J^n = T^n$  са  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ , где је  $\theta_i$  угао који чини  $i$ -ти крак са хоризонталном осом. Механизам

позиционира своју крајњу тачку у равни тако да је  $X = \mathbf{R}^2$ . Очито долази до понављања кад је  $n > 2$ . Директно кинематичко пресликавање је задато са

$$f(\theta) = \sum_{j=1}^n l_j e^{i\theta_j},$$

где је  $l_j$  дужина  $j$ -ог крака.

### 5.1.2 Механизми усмеравања



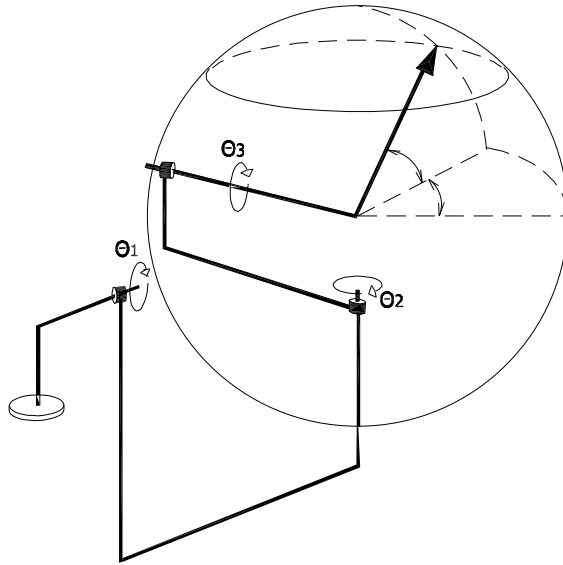
Слика 3: Двозглобни усмеравајући механизам може бити коришћен за усмеравајуће алате (као роботи за бојење аутомобила или завртање шафова). Иако се механизам обично монтира на механичку руку, тако да алат може бити позициониран тако и усмерен, овде је показан у односу на фиксну базу. Сфера праваца, на које показује, такође је приказана позиционирана својим центром у врху механичке стреле. Приметите да осе ротације два зглоба такође пролазе кроз центар сфере. Сфера показује правац кретања. Координате зглобова овог механизма су приказани преко обичних сферних координата.

На Слици (3) је показан двозглобни механизам усмеравања. Бирањем различитих позиција за два зглоба у механизму може се учинити да механичка стрела показује у било ком жељеном правцу. Простор деловања је  $S^2$ . Механизам је

без вишка дејстава и углови  $\theta_1$  и  $\theta_2$  су уствари обичне сферне координате на сфери. Зато директно кинематичко пресликавање можемо задати са

$$f(\theta_1, \theta_2) = (\cos \theta_2 \cos \theta_1, \cos \theta_2 \sin \theta_1, \sin \theta_2)$$

где је  $\theta_2$  ширина и  $\theta_1$  дужина тачке сфере.



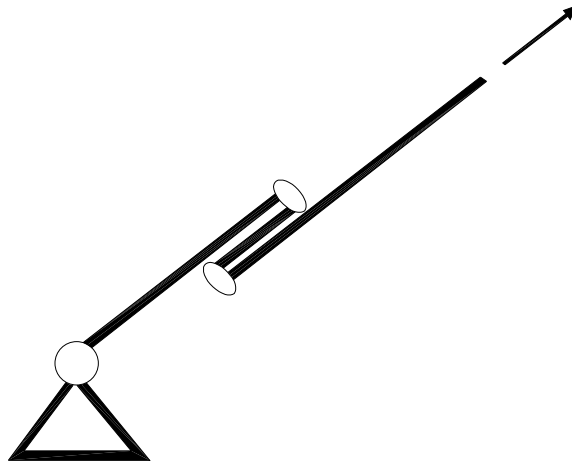
Слика 4: Додавањем механизма са Сликe (3) на трећи зглоб, механизам постаје трозглобни необавезни механизам. Приметимо да, као што је случај код двозглобног, осе свих механизма пролазе кроз центар сфере која показује правац кретања. Као резултат неће променити позицију почетка стреле, који је такође позициониран у центру сфере, али, који искључиво мења правац сфере.

На Слици (4) приказан је трозглобни механизам са вишком дејства.

Сетимо се да се тачка  $\theta \in J^n$  назива *сингуларна конфигурација* ако је Јакобијан  $df$  у  $\theta$  без максималног ранга. Сваки од претходних примера има сингуларну конфигурацију коју ћемо сада испитати.

## 6 Физичка презентација сингуларитета

И без вишка дејства и са вишком дејства, усмеравајући механизми су у сингуларној конфигурацији када се целокупан механизам налази у равни. Једноставним рачуном добијамо да је Јакобијан директног кинематичког пресли-



Слика 5: Сингуларна конфигурација за трозглобни равански механизам. Никаква ротација зглобова не може довести до покретања крајње тачке у смеру стрелице.

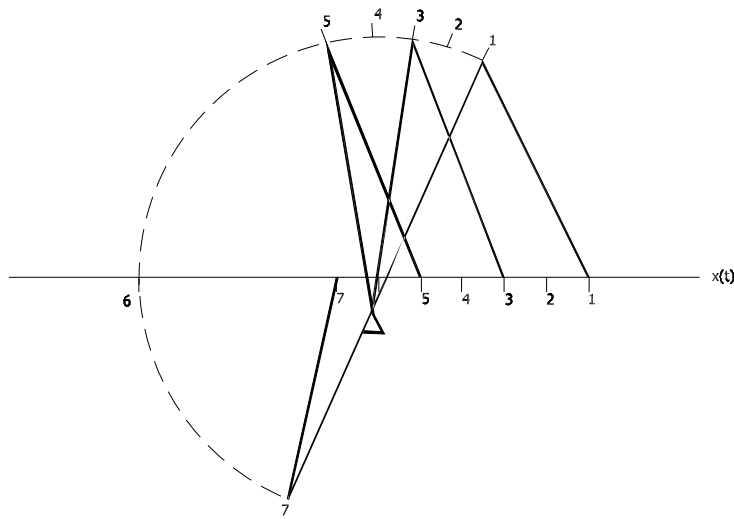
кавања за механизме без вишка дејства једнак  $\cos \theta_2$ . То значи да ће се целокупан механизам налазити у равни када је  $\theta_2 = \pm\pi/2$ , односно при усмеравању у правцу северног или јужног пола. За конфигурацију са вишком дејства на Слици (4) имамо да је Јакобијан пресликавања једнак  $\cos \theta_3 \sin(\theta_2 - \theta_1)$ , што значи да сингуларна конфигурација настаје када је  $\theta_2 = \theta_1$  или је  $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ , или  $\theta_3 = \pm\pi/2$ . Сингуларна конфигурација са вишком дејства усмеравајућег механизма је показана на Слици (9).

Приметимо да варирање  $\theta_1$ , у било којој од ових конфигурација, не производи промену у смеру усмеравања. Како цео механизам лежи у равни, било каква ротација стреле око осе нормалне на раван механизма је немогућа.

За  $n$ -зглобни механизам сингуларна конфигурација настаје када је  $\theta_i = \theta_j$  или је  $\theta_i = \theta_j + \pi$  за све  $i$  и  $j$ . Таква конфигурација је приказана на Слици (5). Приметите да никакво покретање зглоба не може проузроковати покретање у радијалном правцу у простору деловања када је механизам у оваквој конфигурацији.

Сингуларитети су веома неугодни за инжењере роботике зато што брзина зглобова има тендецију брзог раста у њиховој близини. Ово је зато што Јако-





Слика 6: Двозглобни равански механизам има сингуларитет, кад показује на своју основу, ако су оба крака исте дужине. Различите конфигурације су показане за такав механизам, док он прати пут који пролази близу, али не кроз сингуларитет. Показане су одговарајуће позиције лакта за скуп једнако удаљених тачака на путањи. Док механизам пролази поред сингуларитета он је принуђен да се пребаци из позиције лакат-горе у лакат-горе и, што је позиција ближе сингуларитету, ова пребацивања морају брже да се десе. Резултујуће повећање, у близини зглоба, може се видети у повећању дистанце између маркираних места на трајекторији, која приказује кретање лакта.

бијан  $df$  почиње да буде сингуларан, однос брзине на путањи

$$\frac{\|\dot{\theta}\|}{\|\dot{x}\|},$$

са  $df(\dot{\theta}) = \dot{x}$  може тежити бесконачности. Пример овога је приказан на Слици (6) која приказује двокракни равански механизам, без вишка дејства, где су ове везе једнаке дужине. Сингуларитет се јавља када је крај манипулатора у почетку базе манипулатора и Слика (6) показује неколико конфигурација док се путања механизма ближи правој линији али не пролази кроз почетак.

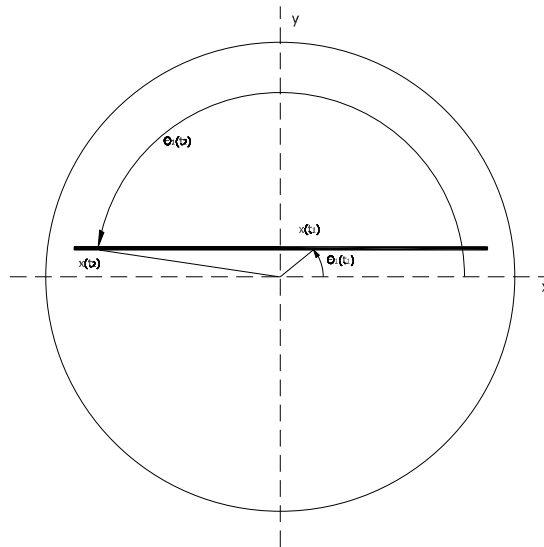
Велики простор између ознака, где се налази лакат, показује да се брзина зглоба увећава када се манипулатор креће ка почетку. Ово је зато што је механизам присиљен да се из позиције лакат-горе, на десној страни, брзо пребаци у позицију лакат-доле, на левој страни. што путања више приближава почетку,

брже су транзиције између положаја лакат-горе и лакат-доле и ово чини да брзина зглоба постане бесконачна.

Занимљиво, проблем се не јавља када пратимо праву линију која пролази директно кроз сингуларитет. У овом случају, манипулатор може да прође кроз обе стране сингуларитета, у лакат-горе позицији, тако да велика брзина зглоба није потребна и не дешава се.

Велика брзина зглоба такође је неопходна када механизам усмеравања без вишка дејства пролази близу сингуларитета, северног и јужног пола.

Погледајмо пресек равни која је паралелна оси север-југ, али која је не садржи, са сфером.



Слика 7: Двозглобни механизам указивања има сингуларитете када показује у правцу северног и јужног пола. Слика показује поглед на сферу показивања гледајући на осе кроз половине, тј са  $z$ -осе. Путања на сфери је приказана тако да иде близу, али не кроз северни пол, и угао првог зглоба је показан у две различите позиције на путањи. Док се механизам креће ка северном полу  $\theta_1$  је приморана да изненада скочи за скоро  $\pi$ . Што ближе ова путања бива северном полу ови скокови се морају брже одиграти.

Слика (7) показује птичју перспективу путање, коју посматрамо, гледајући

је на доле са северног пола сфере. Слика показује да, када се механизам креће од северног пола, први угао  $\theta_1$  је приморан да брзо скочи до  $\pi$  радијана и што ближе путања долази до северног пола, скокови морају брже да се одиграју. Као у случају двокраког раванског механизма проблем се не јавља код путања које пролазе директно кроз сингуларитет. У таквим ситуацијама усмеравајући механизам може да задржи угао  $\theta_1$  константним и да се креће тако што варира угао  $\theta_2$  у ограниченој брзини.

Ове чињенице приморавају инжењере да користе такве механизме не само да би избегли сингуларитете већ и околине сингуларитета и да би ограничили размеру брзине зглобова и брзине у простору деловања када се прати путања. Величина рупе која треба да буде исечена из простора деловања зависи од тога колико стриктно се жели ограничити ова размера брзина. Нека рупа мора бити исечена у сваком случају.

За двозглобне раванске механизме ово значи да не можемо да идемо сувише близу почетку а за усмеравајући механизам да морамо да останемо удаљени од северног и јужног пола. Таква ограничења постају још више иритирајућа, на пример, ако замишљамо механизам усмеравања без вишка дејстава монтиран на позиционирану руку. Како се рука креће, северни и јужни пол ће ротирати заједно са последњим краком руке и рупама, које морају бити искључене на сфери показивања, које исто тако ротирају.

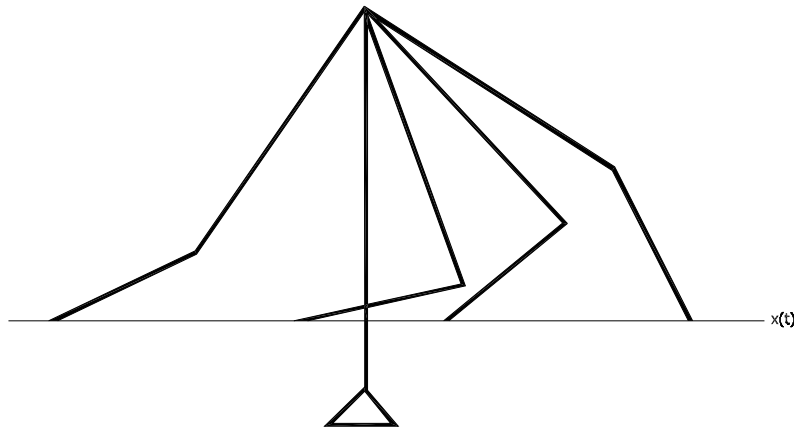
Поента је у томе да се зглобови са вишком дејства могу користити да би се избегли сингуларитети и да прате зглобове високих брзина.

Слика (8) показује трозглобни равански механизам који прати исту путању коју прати двозглобни механизам на Слици (6). Због вишка дејства, механизам је способан да прати целокупну путању у позицији лакат-горе и како се путања ближи почетку брзина остаје у границама.

## 7 Методе решавања локалног проблема

Трозглобни механизам показивања пружа сличне предности. Иако механизам и даље има сингуларитете, сви правци показивања могу се достићи помоћу несингуларних конфигурација. Да бисмо ово видели, разматрајмо сингуларну конфигурацију приказану на Слици (9).

Да бисмо у истом правцу усмерили несингуларну конфигурацију, довољно је ротирати други зглоб тако да ротациона оса трећег зглоба изађе из равни

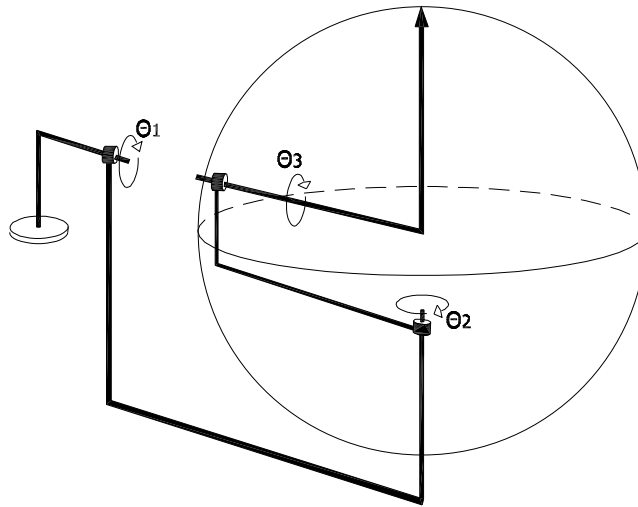


Слика 8: Трозглобни равански механизам прати исту путању која је приказана на Слици (6). Због вишка дејства механизам може остати у позицији лакат-горе на целокупној путањи, и размера брзине зглоба и брзине у простору деловања остаје ограничена док се путања приближава основи механизма.

сингуларне конфигурације док вектор показивања остаје фиксиран. Резултирајућа конфигурација ће бити несингуларна јер ће  $df(\dot{\theta}_3)$  и  $df(\dot{\theta}_2)$  бити линеарно независни.

Ситуација сада веома подсећа на проблем лифтинга путање приликом прекривања простора. Имамо директно кинематичко пресликавање  $f : J^n \rightarrow X$  и дату путању  $x(t) \subset X$ . Треба одредити лифтинг путање  $\theta(t)$  у  $J^n$  са  $f(\theta(t)) = x(t)$ . Међутим, постоје неки нови додаци старог проблема. Пре свега, директно кинематичко пресликавање има сингуларитете и они морају бити избегнути. Даље, алгоритам за извођење овог лифтинга мора бити дат у таквом облику да га компјутер може извести. Кад је све ово речено и урађено, неко бии могао пожелети да се оптимизира алгоритам тако да не избегава само сингуларитет већ и да оптимизује однос брзине зглоба и брзине у простору деловања на неки начин.

Као што је раније речено, овом решењу се може прићи са два различита скупа претпоставки: или знамо целокупну путању пре почетка, што резултира глобалним проблемом оптимизације или, када је путања вођена информацијама добијених од сензора, мора се изабрати начин лифтинга користећи само локалне



Слика 9: Механизам за показивање се налази у сингуларној конфигурацији ако све три осе ротације и стрела леже у равни, као што је показано горе. Конфигурација се налази у *сингуларитету* зато што никаква конфигурација неће моћи да заротира стрелу у смеру који није нормалан на ову раван. Штавише, за показану конфигурацију, ротација другог зглоба не производи промену у правцу показивања и поред тога што механизам више није у сингуларној конфигурацији од оног тренутка када се друга оса заротира.

информације о путањи у простору деловања. Ми ћемо се сконцентрисати на ово локално питање и прво ћемо кратко продискутовати неке методе које су предложене за дизајнирање алгорита.

## 7.1 Алгоритам праћења

Најприроднији пут конструисања алгорита лифтинга локалне путање је коришћење диференцијалних једначина облика

$$\dot{\theta} = G(\theta, \dot{x}),$$

где је

$$df(G(\theta, \dot{x})) = \dot{x}.$$

Ако можемо да конструисемо такву функцију  $G$ , компјутер ће моћи да интегрира диференцијалну једначину дајући путању. Наравно, нема разлога да не

размотримо диференцијалне једначине вишег реда, као што је урађено у [15], да се минимизира торус зглоба, али ми ћемо нашу пажњу ограничити овде на једначине првог реда.

Један начин, који је предложен за дефинисање  $G$ , је да се узме  $G(\theta, \dot{x})$  да се минимизира  $\|\dot{\theta}\|^2$  у скупу

$$\{\dot{\theta} | df(\dot{\theta}) = \dot{x}\}$$

Ово је, наравно, природан избор али је пронађено да има бројне недостатке. Прва, и можда изненађујућа ситуација, ће се јавити кад вас овај метод одведе право у сингуларитет. Иако је ово мало вероватно, ипак је могуће и то значи да, пратећи информације које добијемо од сензора, могу да нас доведу у закључану позицију.

Метод пати од још једног недостатка који је уобичајен и за друге предлоге за решавање локалног проблема. Задата приближна путања  $x(t)$  у простору деловања, биће обично праћена отвореном путањом у простору зглобова. Ова особина је нежељена са инжењерске тачке гледишта јер води до непредвидљивих ситуација. Претпоставимо да ће робот пратити исту путању изнова и изнова (или чак приближно исту путању ако је она модификована информацијама од сензора). Како се путања у простору деловања понавља, путања у простору зглобова може да почне да лута доводећи механизам у непредвиђену позицију. Нека је тема избегавање препрека. Ако желимо да урадимо евалуацију путање и још и њену оптимизацију, евалуација нас може довести до озбиљних опасности. Такође је веома тешко унапред знати када ће манипулатор улетети у сингуларитет и ако неки од зглобова имају ограничење углова, што је уобичајен случај, тешко је предвидети када ће они бити превазиђени. Како ће се ова тема појављивати у нашој дискусији, формализоваћемо је:

**Дефиниција 7.1** *Алгоритам праћења се назива цикличним ако је свака затворена путања у простору деловања праћена затвореном путањом у простору зглобова.*

Иако не мора увек да буде случај, горе описан алгоритам води до нецикличних праћења.

## 7.2 Проширена Јакобијева метода

Постоји још једна општа стратегија за решавање локалних проблема која укључује бројне методе решавања предложене у литератури. У [14] је названа *проширена Јакобијева метода* и користи ограничене функције да би решила

недетерминисаност која се јавља због вишка дејства. Претпоставимо да је  $n$  димензија простора зглоба и  $m$  је димензија простора деловања. Одатле је  $n - m$  степен понављања. Нека је

$$h : J^n \rightarrow M$$

глатка, ограничена функција која слика простор зглобова у  $n - m$  димензиону многострукост  $M$ . Размотримо сада функцију

$$f \times h : J^n \rightarrow X \times M,$$

која је дефинисана између многострукости једнаких димензија. Могуће је прати-ти путању  $x(t)$  у  $X$  захтевајући да

$$f \times h(\theta(t)) = (x(t), \text{const}). \quad (1)$$

Константа ће бити одређена са почетном позицијом манипулатора када праћење започне. Поново овај метод не гарантује избегавање сингуларитета и вештина у његовом коришћењу лежи у предлагању одговарајуће функције  $h$ , која или избегава сингуларитете или их смешта у места која нису тако иритирајућа. Ограничена функција  $h$  може да има ефекат вештачких сингуларитета где их раније није било. Да би се решила (1), мора се инвертовати  $f \times h$  а то захтева да проширена Јакобијева матрица

$$\begin{bmatrix} df \\ dh \end{bmatrix}$$

буде несингуларна. Ова матрица може постати сингуларна чак и у тачкама где  $df$  има максималан ранг.

Да би се решила (1), она се преводи у диференцијалне једначине облика

$$df(\dot{\theta}) = \dot{x}$$

$$dh(\dot{\theta}) = 0.$$

Нажалост, проширена Јакобијева метода може да произведе нециклична праћења.

Последња метода за решавање локалног проблема је концептуално најпростија од свих.

### 7.3 Инверзна кинематичка функција

**Дефиниција 7.2** *Инверзна кинематичка функција (или само инверзна функција) директног кинематичког пресликавања  $f : J^n \rightarrow X$  дефинисана на неком подскупу  $X_0 \subset X$  је диференцијабилна функција  $g : X_0 \rightarrow J^n$ , где је  $f \circ g = \text{id}$ .*

Задајући инверзну функцију, праћење путање изгледа веома једноставно: путања  $x(t)$  у  $X_0$  је праћена са  $\theta(t) = g(x(t))$  у  $J^n$ . Једноставност овога је међутим варљива. Док постоји обиље софтверских алата за решавање диференцијалних једначина помоћу рачунара, конструкција инверзне кинематичке функције, посебно оне која може бити једноставно сачувана и евалуирана од стране рачунара, је много теже.

Примери инверзне кинематичке функције за механизме указивања са вишком дејства дати су у [3] али општи метод за њихово добијање за компликованије манипулаторе још не постоји. Приметимо да смо дозволили да  $X_0$ , домен за  $g$ , буде подскуп од  $X$  иако се тада могу пратити једино путање које целе леже у  $X_0$ . Следећа теорема објасњава зашто.

**Теорема 7.1** *Нека је  $X = S^2$  или  $X = SO(3)$ . Тада не постоји инверзна кинематичка функција која би била дефинисана на целом простору  $X$ .*

Доказ и њен значај у роботизици су дати у [7] и показује да инверзне кинематичке функције не могу никада бити потпуно успешне у превазилежењу проблема сингуларитета код указивања или оријентисања. То не зависи од тога колико смо понављања спремни да допустимо.

## 7.4 Евивалентност алгоритама

С друге стране, привлачи нас да идемо напред тражећи друге методе које могу да обезбеде комплетно решење. Потрага за другим, више задовољавајућим алгоритмима праћења, отвара још једно питање. Како се може рећи да ли је алгоритам праћења еквивалентан алгоритму добијеном инверзном кинематичком функцијом чак иако ова чињеница није очигледна при његовој имплементацији? На пример, инверзна кинематичка функција може лако бити преформулисана у облику диференцијалних једначина тако да није више очигледно да је Теорема (7.1) применљива. Испоставља се да је одговор на ово питање од великог значаја зато што чини очигледним која се цена мора платити ако тражимо решење које није задато инверзном кинематичком функцијом.

**Теорема 7.2** *Алгоритам праћења је еквивалентан алгоритму одређеном инверзном кинематичком функцијом ако и само ако је алгоритам праћења цикличан.*

Да бисмо доказали Теорему (7.2) морамо прво пажљиво да дефинишемо шта се тачно мисли под алгоритмом праћења. Ово је урађено у [5] у облику скупа аксиома. Најважнија од ових аксиома је она која тврди да су делови путање праћења  $\theta(t)$  одређени само деловима путање  $x(t)$  у простору деловања што је



неопходно ако ће алгоритам праћења бити решење локалног проблема.

Ако је задат цикличан алгоритам праћења, није тешко дефинисати одговарајућу инверзну кинематичку функцију. Починемо тако што изаберемо базну тачку  $x_0$  у  $X$  и  $\theta_0$  у  $J^n$  тако да је  $f(\theta_0) = x_0$ . Да бисмо дефинисали инверзну кинематичку функцију у некој тачки  $x_1$  изберимо путању  $x(t)$  која почиње у тачки  $x_0$  и завршава се у  $x_1$ . Нека  $\theta(t)$  путања у простору зглобова одређена алгоритмом праћења која прати  $x(t)$  и почиње у  $x_0$  и завршава се у некој тачки  $x_1$ . Дефинишимо  $g(x_1) = \theta_1$ . Како је алгоритам праћења цикличан тачка  $\theta_1$  мора бити независна од изабране путање од  $x_0$  до  $x_1$ , тако да ова дефиниција има смисла. Доказ да је резултирајућа функција непрекидна је нешто више технички и више детаља се може наћи у [5].

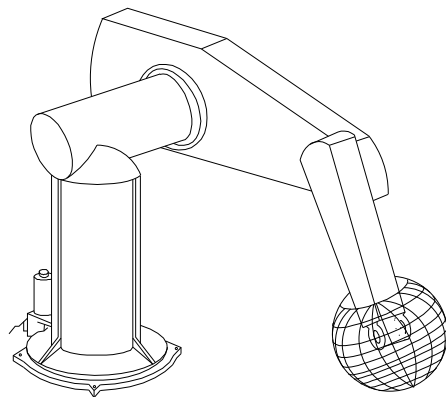
Мане нецикличног праћења, заједно са Теоремом (7.2), дају снажну мотивацију за употребу инверзне кинематичке функције без обзира на ограничења предочена у Теорему (7.1). Штавише, иако проблем сингуларитета и рупа које праве у простору деловања не може у потпуности бити елиминисан, коришћењем манипулатора за показивање и оријентисање са вишком дејства, инверзне функције могу постићи значајно побољшање помоћу ограничења манипулатора без вишка дејства.

Инверзна кинематичка функција за трозглобни механизам показивања оставља непокривеном само једну рупу на сфери за разлику од две рупе за случај без вишка дејства. Како се механизам за показивање обично монтира на руку и показивање у правцу крака, који га повезује са руком, немогуће је из механичких разлога, има смисла покушати да се рупа инверзне функције позиционира на начин који је показан на Слици (10). На жалост, због конфигурације кракова манипулатора на Слици (10), ово је немогуће и у [3] се предлаже промена механичког дизајна да би били у могућности да позиционирамо рупу на месту спајања крака са руком.

Горња дискусија и даље не решава питање да ли је или није могуће праћење на целом  $S^2$  или  $SO(3)$  ако је неко вољан да користи нецикличан алгоритам. Следећа теорема, која је доказана у [5], даје чак и строжу опструкцију да би се ово урадило.

**Теорема 7.3** *Претпоставимо да је  $X = S^2$  или  $X = SO(3)$  и да је алгоритам за праћење дефинисан на целом  $X$ . Тада постоје затворене путање у  $X$  произвољно кратке дужине која су праћене отвореним путањама у  $J^n$ .*

Горња изјава није без смисла. У додатку [5] дат је алгоритам праћења за трозглобни механизам праћења. Уз то да имамо предвиђене особине Теоремом



Слика 10: Позиционирањем рупе у домену инверзне кинематичке функције механизма показивања тако да рука на којој је механизам монтиран пролази кроз рупу.

(7.3) имамо и додатне мане тако да неограничена путања може бити праћена једино ако зглобови имају угаона ограничења и то је чини непрактичном за имплементацију са инжењерске тачке гледишта.

Теорема (7.3) може бити преформулисана тако да буде инструктивна користећи следећу дефиницију.

**Дефиниција 7.3** Алгоритам праћења је локално цикличан ако постоји отворено прекривање  $\{U_i\}$  простора  $X$  тако да је алгоритам праћења цикличан када се уради рестрикција на било који  $U_i$ .

Теорема (7.3) сада значи да не постоји локално цикличан алгоритам праћења на целом  $S^2$  или  $SO(3)$ . Како је проширена Јакобијева метода локално циклична, имамо следеће:

*Проширена Јакобијева метода не може се користити на целом  $S^2$  или  $SO(3)$  без обзира која ограничена функција је коришћена или колики број додатних дејстава је допуштено.*

## 8 Аналогни резултати за манипулаторе позиционирања

До сада, највећи део наше пажње је био фокусиран на проблеме показивања и оријентисања. Ми ћемо сада продискутовати о неким аналогним резултатима за манипулаторе позиционирања.

Фокусираћемо се на  $n$  - зглобни равански механизам и одредити радијус највећег диска, са центром у бази манипулатора, на коме инверзна функција може бити дефинисана. Методи које ћемо користити у овом проблему су нешто различити од кохомологних аргумената коришћених за доказ (7.1). Како диск нема не-нула кохомологију у позитивној димензији и сви дискови су једнаки са тополошког становишта, мораћемо да користимо финије аргументе.

**Теорема 8.1** *Претпоставимо да постоји инверзна функција  $g : D(r) \rightarrow T^n$  за  $n$ -зглобни равански механизам на диску  $D(r)$ , радијуса  $r$ , и нека је*

$$g(x) = (\theta_1(x), \dots, \theta_n(x)).$$

Нека  $x(t)$  буде путања око граница  $D(r)$ ,

$$x(t) = re^{2\pi it}.$$

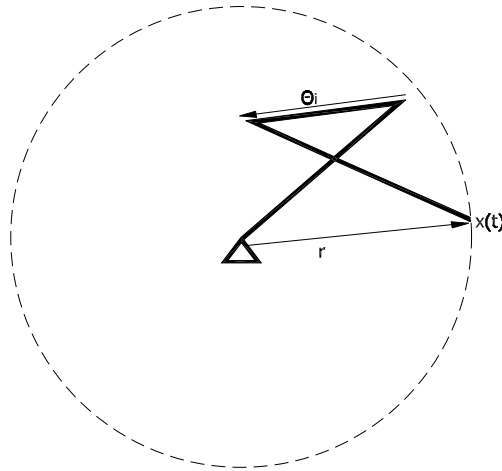
Тада, за сваки  $1 \leq i \leq n$ , постоји вредност  $t$ , таква да је

$$\theta_i(x(t)) = \frac{-x(t)}{\|x(t)\|}.$$

Слика (11) показује како та конфигурација изгледа. Теорема тврди да на неким тачкама границе диска  $i$ -ти крак манипулатора мора показивати у супротном правцу од сегмента линије која повезује базу манипулатора и ту крајњу тачку. Да бисмо видели ово, приметимо да  $i$ -ти крак манипулатора мора имати степен нула, док манипулатор прелази преко спољне границе диска. Ово је зато што је функција  $\theta_i(x)$  дефинисана у унутрашњости диска, као и на границама, тако да путања  $i$ -тог крака на граници може бити деформисана у константну путању у центру диска. С друге стране, путања  $x(t)$  има степен 1. Користећи то, теорему није тешко доказати.

Тада имамо (види [4]):

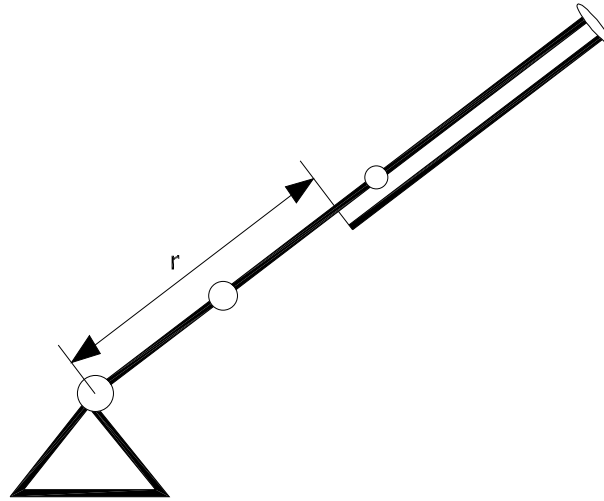
Нека су  $l_1, \dots, l_n$  дужине кракова  $n$ -зглобног раванског манипулатора. Нека је  $L = \sum_{i=1}^n l_i$ , и нека је  $l_M$  најдужа дужина крака. Ако је  $r > L - 2l_M$ , онда не постоји инверзна функција на  $D(r)$ .



Слика 11: Трозглобни равански механизам који прати границу диска центрираног у његовој бази на коме је дефинисана инверзна функција. Конфигурација је показана као што је описана у Теорему (8.1) у којој  $i$ -ти крак показује у супротном смеру од вектора од базе до последњег ефектора (последњи крак механизма).

Радијус, који се помиње, је максимална дистанца коју манипулатор може да досегне, док његов најдужи крак показује у правцу супротном другим крацима, као што је приказано на Слици (12). Вредно је поменути да се аналогна изјава може дати и за тродимензиону руку позиционирања, али се аргументи морају направити тако што се користи степен пресликавања двосфере.

Испоставља се да, ако је  $r < L - 2l_M$ , онда инверзна функција може бити конструисана на  $D(r)$ . Неколико таквих различитих конструкција су дате, али ниједна довољно једноставна да би тренутно била употребљива за публикацију.



Слика 12: Максимални радијус  $r$  који се може достићи када најдужи крак раванског механизма показује у супротном смеру од вектора од базе до ефектора. Ниједна инверзна функција не може бити дефинисана на диску радијуса већег од  $r$  са центром у бази механизма.

## 9 Тополошка комплексност планирања кретања

Концепт тополошке комплексности  $TC(X)$  је увео М. Фарбер у [18] као квалитативну меру комплексности конструисања робустног плана кретања робота.

$TC(X)$  је број који показује прекид у планирању кретања у простору конфигурација  $X$ . Прецизније,  $TC(X)$  је најмањи број  $k$  такав да су  $k$  различитих "планираних правила кретања", од којих је свако дефинисано на подскупу од  $X \times X$ , непрекидни у почетној и крајњој конфигурацији.

Користићемо методе алгебарске топологије (Лустерник - Шнирелманову теорију) да бисмо испитали тополошку комплексност  $TC(X)$ . Даћемо једну горњу границу за  $TC(X)$  (у зависности од димензије  $X$ ) и, наравно, доњу границу (у зависности од структуре кохомолошке алгебре од  $X$ ). Експлицитно ћемо израчунати  $TC(X)$  планирања кретања за сфере, дводимензионалне површине, за производ сфера. Посебно, комплетно ћемо израчунати  $TC(X)$  за проблем планирања покретања роботске руке за избегавање препрека.

### 9.1 Дефиниција тополошке комплексности

Нека је  $X$  простор свих могућих конфигурација механичког система. Проблем планирања кретања у себи садржи програм који узима пар конфигурација  $(A, B) \in X \times X$  као улазне параметре и производи, као излазни параметар, непрекидну путању у  $X$ , која почиње у  $A$  и завршава се у  $B$ .  $A$  је почетна конфигурација а  $B$  је крајња конфигурација система.

Претпоставимо затим да је простор конфигурација  $X$  путно - повезан, што значи да за сваки пар тачака у  $X$  постоји непрекидна путања у  $X$  која их повезује.

Проблем планирања кретања дефинишемо на следећи начин. Нека  $X^I$  означава простор свих непрекидних путања

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X$$

у  $X$ . Означимо са

$$\pi : X^I \rightarrow X \times X$$

пресликавање путање  $\gamma \in X^I$  у њену почетну и крајњу тачку

$$\pi(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1)).$$

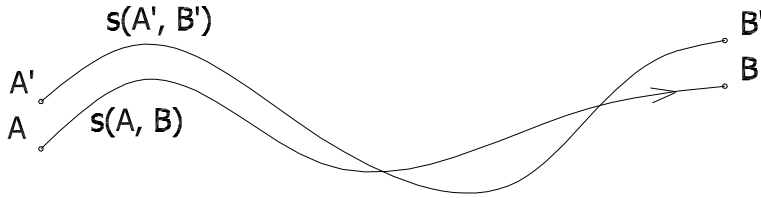
Ако мало преформулишемо ову дефиницију видимо да проблем планирања кретања у  $X$  садржи тражење функције  $s : X \times X \rightarrow X^I$  тако да је  $\pi \circ s = \text{id}$ . Другим речима, мора да буде десни инверз  $\pi$ .

**Питање:** Када је могуће конструисати *план кретања* у конфигурацијском простору  $X$  тако да непрекидна путања  $s(A, B)$  у  $X$ , која описује кретање система од почетне конфигурације  $A$  до крајње конфигурације  $B$ , зависи од пара  $(A, B)$ ? Другим речима, да ли постоји план кретања у  $X$  тако да је  $s : X \times X \rightarrow X^I$  непрекидно?

Планирање непрекидног кретања је веома важан, природан захтев. Недостатак непрекидности би резултовао нестабилност понашања: постојали би произвољни блиски парови  $(A, B)$  и  $(A', B')$ , из почетно - крајњих конфигурација, такви да одговарајуће путање  $s(A, B)$  и  $s(A', B')$  нису блиске.

Нажалост, како ће показати следећа теорема, планирање непрекидног кретања постоји једино у веома специфичним ситуацијама.

**Теорема 9.1** *Непрекидно кретање  $s : X \times X \rightarrow X^I$  постоји ако и само ако је простор конфигурација  $X$  контрактибилан.*



Слика 13: Планирање непрекидног кретања: затворени почетно - крајњи парови  $(A, B)$  и  $(A', B')$  производе блиска кретања  $s(A, B)$  и  $s(A', B')$ .

*Доказ:* Претпоставимо да непрекидно кретање  $s : X \times X \rightarrow X^I$  постоји. Узмимо фиксну тачку  $A_0 \in X$  и размотримо хомотопију

$$h_t : X \rightarrow X, h_t(B) = s(A_0, B)(t),$$

где је  $B \in X$ , и  $t \in [0, 1]$ . Имамо  $h_1(B) = B$  и  $h_0(B) = A_0$ . Према томе  $h_t$  даје контракцију простора  $X$  у тачки  $A_0 \in X$ .

Обрнуто, претпоставимо да постоји непрекидна хомотопија  $h_t : X \rightarrow X$  тако да  $h_0(A) = A$  и  $h_1(A) = A_0$  за неки  $A \in X$ . Задајући пар  $(A, B) \in X \times X$ , можемо направити путању  $t \mapsto h_t(A)$ , са инверзијом  $t \mapsto h_t(B)$ , која даје непрекидно у  $X$ .

Дакле, добили смо план кретања у контрактибилном простору померајући  $A$  у базну тачку  $A_0$  дуж контракције и затим пратећи инверзију путање која даје пут из  $B$  у  $A_0$ .

**Дефиниција 9.1** Нека је дат путно-повезан тополошки простор  $X$ . Дефинишимо тополошку комплексност планирања кретања у  $X$  као најмањи број  $TC(X) = k$ , такав да Декартов производ  $X \times X$  можемо прекрити са  $k$  отворених подскупова

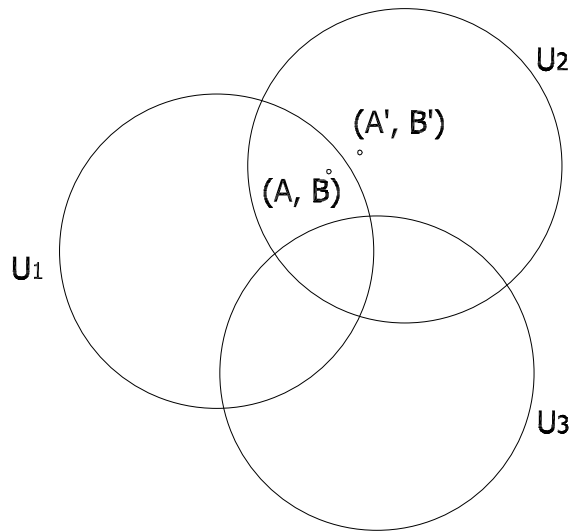
$$X \times X = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k \quad (1)$$

тако да за сваки  $i = 1, 2, \dots, k$  постоји непрекидно кретање

$$s_i : U_i \rightarrow X^I, \pi \circ s_i = \text{id},$$

преко  $U_i$ . Ако такво  $k$  не постоји, означаваћемо  $TC(X) = \infty$

Узимајући отворено прекривање  $X \times X = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k$  и  $s_i$ , као горе, могли бисмо да направимо следећи алгоритам. Узмимо пар почетно - крајње конфигурације  $(A, B)$ . Прво пронађимо подскуп  $U_i$  најмањег индекса  $i$  таквог да је  $(A, B) \in U_i$  и тада ћемо узети  $s_i(A, B)$  као резултат. Дисконтинуитет излаза  $s_i(A, B)$ , као функције улазних параметара  $(A, B)$ , је јасан: претпоставимо да је  $(A, B)$  у границама  $U_1$  и у близини пара  $(A', B') \in U_2 - U_1$ ; тада излаз  $s_1(A, B)$ , у поређењу са  $s_2(A', B')$ , може бити потпуно различито, јер су  $s_1|_{U_1 \cap U_2}$  и  $s_2|_{U_1 \cap U_2}$  у општем случају дисјунктни.



Слика 14: Дисконтинуитет одговарајућег планера кретања у покривачу  $\{U_i\}$

Према тврђењу Теореме 9.1, имамо да је  $TC(X) = 1$  ако и само ако је простор  $X$  контрактибилан.

**Пример:** Претпоставимо да је  $X$  конвексан подскуп Еуклидовога простора  $\mathbf{R}^n$ . Пар почетно крајњих конфигурација  $(A, B)$  можемо померати константном брзином дуж праве која повезује  $A$  и  $B$ . Ово јасно производи непрекидан алгоритам за планирање кретања у  $X$ . Ово је у складу са Теоремом 9.1:  $TC(X) = 1$  јер је  $X$  контрактибилан.

**Пример:** Размотримо случај када је  $X = S^1$ . Како  $S^1$  није контрактибилан значи да је  $TC(S^1) > 1$ . Покажимо да је  $TC(S^1) = 2$ . Дефинишимо  $U_1 \subset S^1 \times S^1$  са  $U_1 = \{(A, B) : A \neq -B\}$ . Планирање непрекидног кретања преко  $U_1$  дато пресликавањем  $s_1 : U_1 \rightarrow (S^1)^I$  које помера  $A$  према  $B$  константном брзином



дуж јединственог најкраћег лука који спаја  $A$  и  $B$ . Преликавање  $s_1$  не може бити продужено у непрекидно пресликавање антиподачних тачака  $A = -B$ . Сада дефинишимо  $U_2 = \{(A, B) : A \neq B\}$ . Фиксирајмо оријентацију  $S^1$ . План непрекидног кретања преко  $U_2$  је дат пресликавањем  $s_2 : U_2 \rightarrow (S^1)^I$  које помера  $A$  према  $B$  константном брзином у позитивној оријентацији дуж  $S^1$ . Поново,  $s_2$  не може бити продужено у непрекидно пресликавање на целом  $S^1 \times S^1$ .

Важно је уочити чињеницу да је пресликавање  $\pi : X^I \rightarrow X \times X$ , претходно дефинисано, заправо фибрација, што подразумева да се секције могу заменити хомотопијама секција у дефиницији  $TC(X)$  а да се ипак добије исти резултат. Ова чињеница повезује тополошку комплексност  $TC(X)$  са такоименованим Шварцовим родом, добро успостављеним и опсежно проучаваним концептом у теорији хомотопије.

Род (genus)  $g(h)$  пресликавања  $h : X \rightarrow Y$  је најмањи број  $n$  такав да се  $Y$  може прекрити са  $n$  отворених подскупова на сваком од којих  $h$  има непрекидну секцију;  $g(h) = \infty$  уколико такво  $n$  не постоји. Дакле, у нашем примеру, имамо да је  $TC(X) = g(\pi)$ , резултат који тополошку комплексност потпуно поставља у домен теорије хомотопије.

## 10 Својства тополошке комплексности

У литератури се могу пронаћи различити резултати и експлицитни прорачуни тополошке комплексности. У [19] се може видети прилично комплетан преглед опште теорије. Наведимо неке од основних својстава тополошке комплексности:

1. Тополошка комплексност је хомотопска инваријанта, односно

$$X \simeq Y \Rightarrow TC(X) = TC(Y).$$

2. Фундаментална процена каже да је:

$$\text{cat}(X) \leq TC(X) \leq \text{cat}(X \times X),$$

где  $\text{cat}(X)$  означава Лустерник - Шнирелманову категорију простора  $X$  (погледати [20]).

- 3.

$$TC(X) \geq \text{nil}(\text{Ker} \Delta^* : H^*(X \times X) \rightarrow H^*(X)).$$

Овде је  $\text{Ker} \Delta^*$  језгро хомоморфизма између кохомолошких прстенова индукковано дијагоналним пресликавањем  $\Delta : X \rightarrow X \times X$ , и  $\text{nil}(\text{Ker} \Delta^*)$  је највећи  $n$  такав да је сваки производ  $n$  елемената из  $\text{Ker} \Delta^*$  нула.

## 10.1 Инваријанта хомотопског типа

Следеће својство хомотопске инваријантности допушта често поједностављење простора конфигурација  $X$  без промене тополошке комплексности  $TC(X)$ .

Наведено Својство 1 тополошке комплексности произилази директно из следећег тврђења.

**Теорема 10.1** *Ако  $X$  доминира над  $Y$  онда је  $TC(X) \geq TC(Y)$ .*

*Доказ:* Претпоставимо да  $X$  доминира над  $Y$ , односно да постоје непрекидна пресликавања  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : Y \rightarrow X$  таква да је  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ . Претпоставимо да је  $U \subset X \times X$  отворен подскуп такав да постоји план непрекидног кретања  $s : U \rightarrow X^I$  преко  $U$ .

Дефинишимо  $V = (g \times g)^{-1}(U) \subset Y \times Y$ . Конструисаћемо  $\sigma : V \rightarrow Y^I$  преко  $V$  експлицитно. Узмимо хомотопију  $h_t : Y \rightarrow Y$  тако да је  $h_0 = \text{id}_Y$  и  $h_1 = f \circ g, t \in [0, 1]$ . За  $(A, B) \in V$  и  $\tau \in [0, 1]$ , нека је

$$\sigma(A, B)(\tau) = \begin{cases} h_{3\tau(A)}, & \text{за } 0 \leq \tau \leq 1/3, \\ f(s(gA, gB)(3\tau - 1)), & \text{за } 1/3 \leq \tau \leq 2/3, \\ h_{3(1-\tau)}, & \text{за } 2/3 \leq \tau \leq 1. \end{cases}$$

Дакле, добили смо да за  $k = TC(X)$  било који отворен покривач  $U_1 \cup \dots \cup U_k = X \times X$  са планом непрекидног кретања преко сваког  $U_i$  дефинише отворен прекривач  $V_1 \cup \dots \cup V_k = Y \times Y$  аналогних својстава. То доказује да је  $TC(Y) \leq TC(X)$  што је и доказ теореме.

## 10.2 Горња граница за $TC(X)$

**Теорема 10.2** *За било који путно-повезан паракомпактан простор  $X$  имамо да је:*

$$TC(X) \leq 2 \cdot \dim X + 1. \quad (1)$$

*Посебно, ако је  $X$  полиедарски подскуп од  $\mathbf{R}^n$ , тада  $TC(X)$  можемо ближе оценити на следећи начин:*

$$TC(X) \leq 2n - 1. \quad (2)$$

На тренутак сачекајмо са доказом теореме.

Користићемо однос између  $TC(X)$  и Лустерник-Шнирелманове категорије  $\text{cat}(X)$ .  $\text{cat}(X)$  је дефинисана као најмањи цео број  $k$  такав да простор  $X$  можемо да прекријемо са  $k$  отворених подскупова  $V_1 \cup \dots \cup V_k = X$  где је свака инклузија  $V_i \rightarrow X$  хомотопна тривијалном пресликавању.

**Теорема 10.3** *Ако је  $X$  путно-повезан и паракомпактан онда је:*

$$\text{cat}(X) \leq TC(X) \leq 2 \cdot \text{cat}(X) - 1. \quad (3)$$

*Доказ:* Нека је  $U \subset X \times X$  отворен подскуп такав да постоји непрекидно кретање  $s : U \rightarrow X^I$  на  $U$ . Нека је  $A_0 \in X$  фиксирана тачка. Означимо са  $V \subset X$  скуп свих тачака  $B \in X$  таквих да  $(A_0, B)$  припада  $U$ . Тада је јасно да је  $V$  отворен скуп и да је контрактибилан у  $X \times X$ .

Ако је  $TC(X) = k$  и  $U_1 \cup \dots \cup U_k$  прекрива  $X \times X$  и постоји непрекидно кретање преко сваког  $U_i$ , тада је скуп  $V_i$ , где је  $A_0 \times V_i = U_i \cap (A_0 \times X)$ , формирају отворено покривање простора  $X$ . Ово показује да је  $TC(X) \leq \text{cat}(X)$ .

Следећа неједнакост произилази из очигледне неједнакости

$$TC(X) \leq \text{cat}(X \times X)$$

у комбинацији са  $\text{cat}(X \times X) \leq 2 \cdot \text{cat}(X) - 1$ , погледати Тврђење (2.3) у [10].

*Доказ претходне теореме:* Имамо да је  $\text{cat}(X) \leq \dim(X) + 1$ . Заједно са десном страном неједнакости претходне теореме добијамо тражену неједнакост. Ако је  $X \subset \mathbf{R}^n$  повезан полиедарски подпростор, тада је  $X$  хомотопског типа као  $(n-1)$ -димензионалан полиедар  $Y$ . Користећи хомотопску инваријантност, налазимо да је  $TC(X) = TC(Y) \leq 2(n-1) + 1 = 2n - 1$ .

### 10.3 Доња граница за $TC(X)$

Нека је  $k$  поље карактеристике различите од 2. Кохомологија  $H^*(X; k)$  је градуисана  $k$ -алгебра са производом:

$$\cup : H^*(X; k) \otimes H^*(X; k) \rightarrow H^*(X; k) \quad (4)$$

Тензорски производ  $H^*(X; k) \otimes H^*(X; k)$  је такође градуисана  $k$ -алгебра са производом:

$$(u_1 \otimes v_1) \cdot (u_2 \otimes v_2) = (-1)^{|v_1| \cdot |u_2|} u_1 u_2 \otimes v_1 v_2. \quad (5)$$

$|v_1|$  и  $|u_2|$  означавају степен кохомолошких класа  $v_1$  и  $u_2$ .

**Дефиниција 10.1** *Језгро хомоморфизма (4) ћемо звати идеалом делитеља нуле у  $H^*(X; k)$ . Затим,  $zdcl$  од  $H^*(X; k)$  (zero – divisors – cup – lenght) је дужина најдужега нетривијалног производа делитеља нуле у  $H^*(X; k)$ .*

**Пример:** Нека је  $X = S^n$ . Нека је  $u \in H^n(S^n; k)$  фундаментална класа и нека је  $1 \in H^0(S^n; k)$  јединица. Тада је  $a = 1 \otimes u - u \otimes 1 \in H^*(S^n; k) \otimes H^*(S^n; k)$  делитељ

нуле јер, ако применимо хомоморфизам (4) на  $a$ , добијамо да је  $1 \cdot u - u \cdot 1 = 0$ . Други делитељ нуле је  $b = u \otimes u$  јер је  $u^2 = 0$ . Рачунајући  $a^2 = a \cdot a$  према правилу (5), имамо да је:

$$a^2 = ((-1)^{n-1} - 1) \cdot u \otimes u.$$

Одатле је  $a^2 = -2b$ , када је  $n$  паран број и  $a^2 = 0$ , када је  $n$  непаран број; производ  $ab$  ишчезава за сваки  $n$ . Закључујемо да је  $\text{zdcl}(H^*(S^n; k))$  једнак 1, за сваки непаран  $n$  и да је једнак 2 за сваки паран број  $n$ .

**Теорема 10.4**  $TC(X) > \text{zdcl}(H^*(X; k))$ .

Да бисмо илустровали ову теорему, узмимо специјалан случај  $X = S^n$ . Рачунањем  $\text{zdcl}(H^*(S^n; k))$  и примењујући ову теорему, имамо да је  $TC(S^n) > 1$ , када је  $n$  непаран и  $TC(S^n) > 2$ , када је  $n$  паран број. То значи да било који планер кретања сфере  $S^n$  мора да има најмање два отворена скупа  $U_i$ ; штавише, било који планер кретања сфере  $S^n$  мора да има најмање три отворена скупа  $U_i$  ако је  $n$  паран.

*Доказ:* Размотримо следећи комутативан дијаграм:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X^I \\ & \searrow \Delta & \downarrow \pi \\ & & X \times X \end{array}$$

$\alpha$  придружује било којој тачки  $x \in X$  константну путању  $[0, 1] \rightarrow X$  у тој тачки.  $\Delta : X \rightarrow X \times X$  је дијагонално пресликавање  $\Delta(x) = (x, x)$ . Запазимо да је  $\alpha$  хомотопска еквиваленција. Композиција

$$H^*(X; k) \otimes H^*(X; k) \cong H^*(X \times X; k) \xrightarrow{\pi^*} H^*(X^I; k) \xrightarrow{\alpha^*} H^*(X; k) \quad (6)$$

се подудару са кап-производом (4). Изоморфизам на левој страни се именује и *Künneth*-ов изоморфизам.

Као што смо напоменули, тополошка комплексност  $TC(X)$  је Шварцов род фибрације  $\pi : X^I \rightarrow X \times X$ . Доказ теореме произилази из поменуте напомене, хомоморфизма (6) и из кохомолошке најмање границе за Шварцов род (погледати Теорему 4 у [1]).

## 10.4 План кретања на сферама

**Теорема 10.5**

$$TC(S^n) = \begin{cases} 2, & n - \text{непаран} \\ 3, & n - \text{паран} \end{cases}$$

*Доказ:* Прво ћемо показати да је  $TC(X) \leq 2$  када је  $n$  непаран.

Нека је  $U_1 \subset S^n \times S^n$  скуп свих парова  $(A, B)$ , где је  $A \neq -B$ . Тада постоји јединствен најкраћи лук на  $S^n$  који повезује  $A$  и  $B$  и можемо да конструишемо план непрекидног кретања  $s : U_1 \rightarrow (S^n)^I$  одређујући да је  $s_1(A, B) \in (S^n)^I$  најкраћи лук по коме се крећемо константном брзином.

Други отворен подскуп је дефинисан као  $U_2 = \{(A, B) : A \neq B\} \subset S^n \times S^n$ . План непрекидног кретања ћемо извести у два корака. Прво ћемо померити тачку  $A$  у антиподалну тачку  $-B$  најкраћим луком, као што смо горе описали. У другом кораку ћемо померити антиподалну тачку  $-B$  у тачку  $B$ . У ту сврху узмимо непрекидно поље  $v$  јединичних тангентних вектора на  $S^n$ . Можемо да померимо  $-B$  у  $B$  дуж следећег лука:

$$-\cos \pi t \cdot B + \sin \pi t \cdot v(B), t \in [0, 1].$$

Ово доказује да је  $TC(S^n) \leq 2$  када је  $n$  непаран број. На основу Теореме (9.1) имамо да је  $TC(X) = 2$ , када је  $n$  непаран број.

Претпоставимо сада да је  $n$  паран број. Покажимо да је  $TC(S^n) \leq 3$ . Дефинисаћемо план непрекидног кретања преко скупа  $U_1 \subset S^n \times S^n$ , као што смо већ радили. Изаберимо тангентно векторско поље  $v$  на  $S^n$  које нестаје у тачки  $B_0 \in S^n$  и различито је од нуле за сваки  $B \in S^n, B \neq B_0$ .

Дефинишимо и други подскуп  $U_2 \subset S^n \times S^n$ , тако да је  $U_2 = \{(A, B) : A \neq B, B \neq B_0\}$ . Сада можемо да дефинишемо  $s_2 : U_2 \rightarrow (S^n)^I$ , као што смо урадили горе. Сада  $U_1 \cup U_2$  прекрива све сем пара тачака  $(-B_0, B_0)$ . Изаберимо тачку  $C \in S^n$  која је различита од тачака  $B_0, -B_0$  и нека је  $U_3 = S^n - C$ . Приметимо да је  $U_3$  хомеоморфан са  $\mathbf{R}^n$  што значи да постоји план непрекидног кретања преко  $U_3$ . То доказује да је  $TC(S^n) \leq 3$ . Са друге стране, према Теореме (10.4) и каснијем примеру, имамо да је  $TC(S^n) \geq 3$ , када је  $n$  парно. Ово комплетира доказ.

## 10.5 Други примери

**Теорема 10.6** *Нека је  $X = \Sigma_g$  компактна, оријентабилна површ роду  $g$ . Тада је*

$$TC(X) = \begin{cases} 3, & g \leq 1, \\ 5, & g > 1. \end{cases}$$

*Доказ:* Погледајмо прво случај за  $g \geq 2$ . Тада можемо наћи кохомолошке класе  $u_1, v_1, u_2, v_2 \in H^1(X; Q)$  такве да је  $u_i^2 = v_i^2 = u_i u_j = v_i v_j = u_i v_j = 0$ , за  $i \neq j$ ,  $u_1 v_1 = u_2 v_2 = A \neq 0$ , где је  $A \in H^2(\Sigma_g; Q)$  фундаментална класа. Тада у алгебри  $H^*(X; Q) \otimes H^*(X; Q)$  имамо

$$\prod_{i=1}^2 (1 \otimes u_i - u_i \otimes 1)(1 \otimes v_i - v_i \otimes 1) = 2A \otimes A \neq 0$$

одакле, користећи Теорему (10.4) имамо да је  $TC(X) \geq 5$ . Обрнута неједнакост следи из Теореме (10.2).

У случају  $g = 0$  погледамо Теорему (10.5) јер је  $X = S^2$ .

Случај  $g = 1$ , који одговара дводимензионом торусу  $T^2$ , ћемо размотрити касније у Теорему (10.9).

## 10.6 Неједнакост производа

**Теорема 10.7** *За било које путно-повезане метричке просторе  $X$  и  $Y$  важи:*

$$TC(X \times Y) \leq TC(X) + TC(Y) - 1$$

*Доказ:* Означимо  $TC(X) = n$  и  $TC(Y) = m$ . Нека је  $U_1, \dots, U_n$  отворен покривач од  $X \times X$  са планом непрекидног кретања  $s_i : U_i \rightarrow X^I$  за  $i = 1, \dots, n$ . Нека  $f : X \times X \rightarrow R$ , где је  $i = 1, \dots, n$ , подела покривача  $\{U_i\}$ . Слично, нека је  $V_1, \dots, V_m$  отворен покривач  $Y \times Y$  са планом непрекидног кретања  $\sigma_j : V_j \rightarrow Y^I, j = 1, \dots, m$  и нека је  $g : Y \times Y \rightarrow R, j = 1, \dots, m$ , подела покривача  $\{V_j\}$ .

За било које непразне подскупове  $S \subset \{1, \dots, n\}$  и  $T \subset \{1, \dots, m\}$ , нека

$$W(S, T) \subset (X \times Y) \times (X \times Y)$$

означава скуп свих четворки  $(A, B, C, D) \in (X \times Y) \times (X \times Y)$  тако да за било који  $(i, j) \in S \times T$  и за било који  $(i', j') \notin S \times T$  важи

$$f_i(A, C) \cdot g_j(B, D) > f_{i'}(A, C) \cdot g_{j'}(B, D).$$

Лако се проверава да је

- (а) сваки скуп  $W(S, T) \subset X \times X$  је отворен;
- (б)  $W(S, T)$  и  $W(S', T')$  су дисјунктни и никада није  $S \times T \subset S' \times T'$ , нити је  $S' \times T' \subset S \times T$ ;
- (в) ако је  $(i, j) \in S \times T$ , тада је  $W(S, T)$  садржан у  $U_i \times V_j$ , па, према томе, постоји план непрекидног кретања преко сваког  $W(S, T)$  (експлицитно их можемо описати условима  $s_i$  и  $\sigma_j$ );
- (г) скупови  $W(S, T)$  (са свим могућим непразним  $S$  и  $T$ ) формирају покривач  $(X \times Y) \times (X \times Y)$ .

Докажимо (г). Претпоставимо да је  $(A, B, C, D) \in (X \times Y) \times (X \times Y)$ . Нека је  $S$  скуп свих  $i \in \{1, \dots, n\}$  таквих да је  $f_i(A, C)$  једнак максимуму  $f_k(A, C)$ , где је  $k = 1, \dots, n$ . Слично, нека је  $T$  скуп свих  $j \in \{1, \dots, m\}$ , таквих да је  $g_j(B, D)$

једнак максимуму  $g_l(B, C)$ , где је  $l \in \{1, \dots, m\}$ . Тада је јасно да  $(A, B, C, D)$  припада  $W(S, T)$ .

Нека  $W_k \subset (X \times Y) \times (X \times Y)$  означава унију свих скупова  $W(S, T)$ , где је  $|S| + |T| = k$ ,  $k = 2, 3, \dots, n + m$ . Скупови  $W_2, \dots, W_{n+m}$  формирају отворен покривач од  $(X \times Y) \times (X \times Y)$ . Ако је  $|S| + |T| = |S'| + |T'| = k$ , тада одговарајући скупови  $W(S, T)$  и  $W(S', T')$  се подударају (ако је  $S = S', T = T'$ ) или су дисјунктни. Сада, из (в), закључујемо да постоји план непрекидног кретања преко сваког отвореног скупа  $W_k$ . Овим је доказ комплетиран.

## 10.7 План кретања роботске руке

Разматрамо руку робота која је састављена од  $n$  полуга  $L_1, \dots, L_n$ , тако да су  $L_i$  и  $L_{i+1}$  спојени флексибилним зглобовима. У раванском случају, конфигурација руке је представљена са  $n$  углова  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , где је  $\alpha_i$  угао који  $L_i$  образује са  $x$ -осом. Слично, простор конфигурација роботске руке (без препрека) је  $n$ -димензионални торус

$$T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1.$$

Слично, простор конфигурација роботске руке у 3-димензионом простору  $\mathbf{R}^3$  је Декартов производ  $n$  копија дво-димензионе сфере  $S^2$ .

**Теорема 10.8** *Тополошка комплексност проблема планирања кретања руке  $n$ -зглобног раванског робота је једнака  $n + 1$ . Тополошка комплексност проблема планирања кретања руке просторног  $n$ -зглобног робота је  $2n + 1$ .*

Доказ теореме произилази директно из следеће теореме.

**Теорема 10.9** *Нека је  $X = S^m \times S^m \times \dots \times S^m$  Декартов производ од  $n$   $m$ -димензионалних сфера. Тада је*

$$TC(X) = \begin{cases} n + 1, & m - \text{непаран} \\ 2n + 1, & m - \text{паран.} \end{cases}$$

*Доказ:* Користећи неједнакост производа Теореме (10.7) и добијени резултат за тополошку комплексност сфере Теореме (10.5), добијамо да је  $TC(X)$  мања или једнака од десне стране израза у теорему. За показивање обрнуте стране неједнакости користићемо Теорему (10.4).

Нека  $a_i \in H^m(X; Q)$  означава кохомолошку класу која је инверзна слика фундаменталне класе од  $S^m$  у пројекцији  $X \rightarrow S^m$  у  $i$ -ти фактор,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тада имамо

$$\prod_{i=1}^n (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1) \neq 0 \in H^*(X \times X; Q).$$

То показује да је  $\text{zdcl}(X)$  најмање  $n$ . Уколико је  $m$  паран тада је

$$\prod_{i=1}^n (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1)^2 \neq 0 \in H^*(X \times X; \mathbb{Q}).$$

Како је  $m$  паран, имамо да је  $\text{zdcl}(X)$  већи од  $2n$ .

Примена Теореме (10.4) комплетира доказ.



## 11 Закључак

За класу механизма која подлеже директном кинематичком пресликавању, резултати које смо дискутовали дају неке веома јасне ставове о томе шта се не може урадити и са каквим компромисима се морамо суочити.

Специјално, показали смо да су циклични алгоритми праћења еквивалентни онима одређеним инверзном функцијом и видели смо бројне ситуације у којима се инверзна функција не може дефинисати на целокупном простору деловања. Ови ставови служе само као позадина за прави инжењерски рад који тек предстоји.

Било би корисно имати репертоар метода за решење питања да ли инверзна функција може бити дефинисана на различитим подскуповима простора деловања разних робота. што је још важније, инжењерима је потребна колекција метода помоћу којих инверзна функција може бити конструисана у специфичној ситуацији. Ове инверзне функције морају бити задате у форми лакој за израчунавање помоћу компјутера у реалном времену. Морамо се позабавити проблемом оптимизације инверзне функције да би постигли неку врсту минимизације односа брзине зглобова са брзином у простору деловања и сасвим је јасно да овај проблем није више тополошке природе.

Супротно многим нецикличним методама праћења, које су биле предложене, инверзне функције представљају тешка питања око имплементације и многи инжењери ће се вероватно склонити од њих, осим ако немају доступну конкретну помоћ у бављењу њима.

Међутим, треба напоменути да је конструкција инверзне функције у основи посао који се обавља у тренутку различитом од тренутка рада робота, тако да можемо себи да приуштимо велокодушност у односу на компјутерске ресурсе које користимо. Само каснија израчунавања инверзне функције као путање која се прати, морају бити урађена у тренутку рада робота.

Сигурно је да будућност инверзних функција у роботици много зависи од развоја метода њихових конструкција. Ако се покаже да ће бити превише болне за имплементацију, разумљиво је претпоставити да ће инжењери фокусирати своју пажњу на развој метода нецикличног праћења, начина да се живи са нецикличним понашањем или прихватити сингуларитете тамо где се јаве и научити како да се ради око њих.

## Литература

- [1] A.S.Schwarz, *The genus of a fiber space*, Amer. Math. Sci. Transl. 55(1966), 49-140.
- [2] C.A. Klein and C.-H. Huang, *Review of pseudoinverse control for use with kinematically redundant manipulators*, IEEE Trans. on Sys., Man, and Cybernetics, Vol.SMC-13, No.3(1983), 245-250.
- [3] Charles W. Wampler, *Inverse kinematic functions for recdundant manipulators*, Proc.of IEEE International Conference on Robotics and Automation, March 31-April 3, Raleigh, NC(1987), Vol 2, 610-617.
- [4] Charles W. Wampler, *Winding number analysis of invertible workspaces for redundant manipulators*, Proc. of 26th IEEE Conference on Decision and control, Dec. 9-11, Los Angeles, CA(1987), Vol. 1, 564-569.
- [5] Daniel R. Baker and Charles W. Wampler, *On the incerse kinematics or redundant manipulators*, International Journal of Robotics Research 7 (2)(1988),3-21.
- [6] Daniel R. Baker and Charles W. Wampler, *Some facts concerning the incerse kinematics of redundant manipulators*, Proc.of IEEE International Conference on Robotics and Automation, March 31-April 3, Raleigh, NC(1987), Vol. 2, 604-609.
- [7] Daniel H. Gottlieb, *Topology and robots*, Proc.of IEEE International Conference on Robotics and Automation, April 7-10, San Francisco, CA(1986), Vol.3, 1689-1691.
- [8] Dubrovin, S. P. Novikov and A. T. Fomenko, *Modern Geometry; Methods of the homology theory*, 1984.
- [9] E. F. Fichter, *A Stewart platform-based manipulator: general theory and practical construction*, International Journal of Robotics 5(2)(1986), 157-182.
- [10] I.M. James, *On category, in the sense of Lusternik - Schnirelman*, Topology, 17(1978), 331-348.
- [11] J. E. Bobrow, S. Dubowsky, and J. S. Gibson, *On the optimal control of fototic manipulators with actuator constrains*, Proc. of Automatic Contorl Conference, June 22-24, San Francisco, CA(1983), Vol.3, 782-787.
- [12] J.-C. Latombe, *Robot motion planning*, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [13] J. T. Schwartz and M. Sharir, *On the piano movers' problem: H. General techniques for computing topological properties of real algebraic manifolds*, Adv. Appl. Math., 4(1983), 298-351.

- [14] John Baillieul, *Kinematic programming alternatives for redundant manipulators*, Proc.of IEEE International Conference on Robotics and Automation, March 25-28, St. Louis, MO(1985), 722-728.
- [15] Ki C. Suh and John M. Hollerbach, *Local versus global torque optimization of redundant manipulators*, Proc.of IEEE International Conference on Robotics and Automation, March 31-April 3, Raleigh, NC(1987), Vol 2, 619-624.
- [16] V.A. Vassiliev, *Topology of complements to discriminants*, Moscow, 1997.
- [17] D. R. Baker, *Some Topological Problems in Robotics*, The Mathematical Intelligencer, 12 (1990) 66-76.
- [18] M. Farber, *Topological Complexity of Motion Planning* Discrete Comput Geom, 29 (2003), 211–221.
- [19] M. Farber, *Invitation to topological robotics*, (EMS Publishing House, Zurich, 2008)
- [20] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, D. Tanre, *Lusternik-Schnirelmann category*, *Mathematical Surveys and Monographs* 103 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2003).
- [21] P. Pavesic, *A Topologist's View of Kinematic Maps and Manipulation Complexity* (American Mathematical Society, Providence, RI, 2017).