

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Марија Јелић Милутиновић

**КОМБИНАТОРНА ТОПОЛОГИЈА
И ГРАФОВСКИ КОМПЛЕКСИ**

докторска дисертација

Београд, 2021.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Marija Jelić Milutinović

**COMBINATORIAL TOPOLOGY
AND GRAPH COMPLEXES**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2021.

МЕНТОР:

проф. др Синиша Вређица, редовни професор
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ, МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

проф. др Владимир Грујић, ванредни професор
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ, МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

проф. др Раде Живаљевић, научни саветник
МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ САНУ

проф. др Зоран Петрић, научни саветник
МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ САНУ

Датум одбране:

Желим да почнем речима свог првог учитеља.

А мој први учитељ је била моја прабаба Миленија Јелић (1913 - 2008), сироче након Првог светског рата, из старинског, другачијег света. Сваки пут кад би ме научила ново слово, песму или број, свечано би рекла:

Мајо, сад си то научила. И утужи (запамти) добро, ако било кад у животу научиш нешто вредно, и неко те пита: „Ко те је то научио?“, никад немој рећи „ја сам“, или „овај или онај ме научио“, него увек прво реци

Бог и Свети Саво.

Обећање да ћу то запамтити, које сам дала као трогодишња девојчица, и које памтим као прву јасну слику из детињства, више није само обећање - већ моје најискреније сведочанство.

Савиндан, 2021. године

Захвалница

На свом математичком путу, захваљујем се ментору, професору Синиши Врећици, за свет тополошке комбинаторике са којим ме је упознао. Професор Врећица ме је својим креативним и геометријски интуитивним идејама мотивисао да идем путем ове области. Захвална сам и за слободу у раду коју ми је дао. Захваљујем се професору Радету Живаљевићу, који ме је повезивањем различитих области и интересантним предавањима увек инспирисао. Професорима Владимиру Грујићу и Зорану Петрићу хвала на пажљивом читању дисертације и корисним саветима. Такође, захвална сам свим својим коауторима са којима сам остварила веома пријатну сарадњу.

Посебно захвалност дугујем изузетном наставнику математике, Миланку Бабићу, на труду и ентузијазму. Захваљујем се професору Владимиру Драговићу, који је сјајним предавањима утврдио моју жељу да будем математичар. Желела бих да се захвалим и Математичкој гимназији и друштву „Архимедес”.

Највећу захвалност дугујем својој породици. Посебно, захвална сам деди Боривоју, чији ме је лик мотивисао да кренем ка просвети и науци, а такође, нани Зори и баби Катарини које су несебично увек биле ту да ми помогну. Мојим сестрама, Магди и Боки, хвала што су увек веровале у мене и што су најбоље другарице које могу замислити.

Захваљујем се протојереју-ставрофору Драгомиру Убипариповићу који је имао посебну улогу на свим мојим путевима, па и овом, математичком.

Мени најближима, Слободану и Нини, хвала за стрпљење и љубав које су показали за време мог рада. Посебно, захваљујем се Слободану за приче које је смишљао за мене, за измишљени плес, за све тренутке када је учинио да верујем у себе као никад до тада. Мојој малој Нини велико хвала што је разумела да „Мама посо јади”, и што ме је радошћу када сам са њом, мотивисала да завршим.

На крају, желим да се захвалим једном непознатом доктору, који је пре 32 године, у ГАК-у Вишеградска, двома студената на почетку студија, рекао да ипак оду кући да размисле још једном.

Највише од свих, захваљујем се тим талентованим студентима, мојим родитељима Снежани и Горану, што су размислили још једном и одлучили да ми дају шансу, свесно жртвујући многе своје. Желим да им се најдубље захвалим за то што су сву своју љубав, сву своју енергију, и целе себе, посветили породици.

Марија Јелић Милутиновић

КОМБИНАТОРНА ТОПОЛОГИЈА И ГРАФОВСКИ КОМПЛЕКСИ

САЖЕТАК

У овој дисертацији изучавамо неколико важних објеката и принципа комбинаторне топологије, користећи и комбинаторне и тополошке методе.

Комплекс упаривања $M(G)$ графа G је комплекс чији скуп темена одговара скупу ивица графа G , а симплекси су задати скуповима по паровима несуседних ивица. Ови комплекси се појављују у разним областима математике. Наш први приступ комплексима упаривања је нов и структурни - дајемо комплетну класификацију свих парова $(G, M(G))$ за које је $M(G)$ хомолошка многострукост, са или без границе. Други приступ овим комплексима се фокусира на одређивање хомотопског типа или повезаности комплекса упаривања неколико класа графова. У том циљу, користимо алат из дискретне Морсове теорије под називом МТА алгоритам, као и индуктивне конструкције хомотопског типа.

Друге две класе комплекса које изучавамо су неизбежни комплекси и праг комплекси. Симплицијални комплекс $K \subseteq 2^{[n]}$ је r -неизбежан ако за сваку партиципу $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_r = [n]$ важи да бар један од скупова A_i припада K . Мотивисани улогом коју неизбежни комплекси имају у теоремама Тверберговог типа и Громов-Благојевић-Фрик-Циглер редукцији, почињемо систематично проучавање њихових комбинаторних особина. Истражујемо везе између неизбежних и праг комплекса. Главни циљ је одређивање неизбежних комплекса који су неизбежни из апстрактнијих разлога него што је обухватање неизбежног праг комплекса. Наши главни примери су конструисани као спојеви ауто-дуалних минималних триангулација $\mathbb{R}P^2$, CP^2 , HP^2 , и спојеви Ремзијевог комплекса.

Такође, дисертација садржи и примену важног „конфигурациони простор - тест пресликавање” метода. Најпре доказујемо кохомолошко уопштење Долдове теореме из еквиваријантне топологије. Затим је примењујемо на Јангов случај Кнастеровог проблема, чиме добијамо нови једноставнији доказ. Такође, делимично уопштавамо још неколико случајева Кнастеровог проблема.

Кључне речи: симплицијални комплекс, комплекс упаривања, хомолошка многострукост, хомотопски тип, неизбежан комплекс, карактеристични праг, ауто-дуална триангулација, МТА алгоритам, Кнастеров проблем, „конфигурациони простор - тест пресликавање” метод

Научна област: Математика

Ужа научна област: Топологија, Комбинаторика

MSC класификација: 05E45, 55U10, 55P15, 05C70, 52A35, 52C99

COMBINATORIAL TOPOLOGY AND GRAPH COMPLEXES

ABSTRACT

In this dissertation we examine several important objects and concepts in combinatorial topology, using both combinatorial and topological methods.

The matching complex $M(G)$ of a graph G is the complex whose vertex set is the set of all edges of G , and whose faces are given by sets of pairwise disjoint edges. These complexes appear in many areas of mathematics. Our first approach to these complexes is new and structural - we give complete classification of all pairs $(G, M(G))$ for which $M(G)$ is a homology manifold, with or without boundary. Our second approach focuses on determining the homotopy type or connectivity of matching complexes of several classes of graphs. We use a tool from discrete Morse theory called the Matching Tree Algorithm and inductive constructions of homotopy type.

Two other complexes of interest are unavoidable complexes and threshold complexes. Simplicial complex $K \subseteq 2^{[n]}$ is called r -unavoidable if for each partition $A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_r = [n]$ at least one of the sets A_i is in K . Inspired by the role of unavoidable complexes in the Tverberg type theorems and Gromov-Blagojević-Frick-Ziegler reduction, we begin a systematic study of their combinatorial properties. We investigate relations between unavoidable and threshold complexes. The main goal is to find unavoidable complexes which are unavoidable for deeper reasons than containment of an unavoidable threshold complex. Our main examples are constructed as joins of self-dual minimal triangulations of $\mathbb{R}P^2$, $\mathbb{C}P^2$, $\mathbb{H}P^2$, and joins of Ramsey complex.

The dissertation contains as well an application of the important “configuration space - test map” method. First, we prove a cohomological generalization of Dold’s theorem from equivariant topology. Then we apply it to Yang’s case of Knaster’s problem, and obtain a new simpler proof. Also, we slightly improve few other cases of Knaster’s problem.

Keywords: simplicial complex, matching complex, homology manifold, homotopy type, unavoidable complex, threshold characteristic, self-dual triangulation, Matching Tree algorithm, Knaster’s problem, “configuration space - test map” method

Scientific area: Mathematics

Scientific field: Topology, Combinatorics

MSC Classification: 05E45, 55U10, 55P15, 05C70, 52A35, 52C99

Садржај

Увод и преглед резултата	1
Преглед структуре и оригиналних резултата дисертације	5
1 Основни појмови и дефиниције	9
1.1 Симплицијални комплекси	9
1.2 Комплекси упаривања и независности графова	14
1.3 Конструкција споја простора	18
1.4 Простори са дејством група и еквиваријантна пресликавања	21
1.5 „Конфигурациони простор - тест пресликавање” метод	24
1.6 Еквиваријантни индекси G -простора	25
1.6.1 Кохомолошки Фадел-Хусеинијев индекс	26
2 Класификација хомолошких многострукости које су комплекси упаривања	29
2.1 Повезаност и дијаметар комплекса упаривања	31
2.2 Многострукости	34
2.3 Сфере малих димензија	36
2.4 Класификација многострукости без границе	40
2.5 Класификација многострукости са границом	46
3 Хомотопски типови комплекса упаривања неких класа дрвета	63
3.1 Комплекси упаривања дрвета	63
3.2 Комплекси упаривања графова гусеница	66
3.3 Теореме о пресликавањима посета и други доказ теореме 3.17	78
4 Повезаност комплекса упаривања и МТА алгоритам	83
4.1 Дискретна Морсова теорија	84
4.2 МТА алгоритам	85
4.3 Линијска полигонална поплочавања	92
4.4 Комплекси упаривања саћа	101
4.5 Повезаност комплекса упаривања савршеног бинарног дрвета	110
5 Комбинаторика неизбежних симплицијалних комплекса	113
5.1 Значај неизбежних комплекса и примене	114
5.1.1 Неизбежни комплекси и метод ограничења	114
5.1.2 Неизбежни комплекси и еквиваријантни нумерички индекс	116
5.2 Неизбежност споја комплекса	117
5.2.1 Спој минимално неизбежних комплекса	118
5.3 Неизбежни комплекси дефинисани мером	120
5.3.1 Праг комплекси и карактеристични праг	120

5.3.2	Геометријска интерпретација и израчунавање карактеристичног прага	122
5.3.3	Карактеристични праг споја комплекса	125
5.4	Ауто-дуалне триангулације пројективних равни $\mathbb{R}P^2$, $\mathbb{C}P^2$ и $\mathbb{H}P^2$ и Ремзијев комплекс	126
5.4.1	Реална пројективна раван $\mathbb{R}P^2_6$	126
5.4.2	Комплексна пројективна раван $\mathbb{C}P^2_9$	128
5.4.3	Кватернионска пројективна раван $\mathbb{H}P^2_{15}$	130
5.4.4	Ремзијев комплекс \mathcal{R}_3	130
5.5	Нелинеарни комплекси и мера нелинеарности	131
5.6	Главна конструкција неизбежних комплекса велике мере нелинеарности	132
6	Примена метода „конфигурациони простор - тест пресликавање” на Кнастеров проблем	135
6.1	Уопштење Долдове теореме	135
6.2	Кнастеров проблем	137
	Литература	142
	Биографија аутора	150

Увод и преглед резултата

Алгебарска топологија, од свог настанка, проучава и користи значајан број комбинаторних и геометријских објеката. Са друге стране, почев од седамдесетих година прошлог века, велики број важних резултата у дискретној геометрији и комбинаторици показан је применама алгебарске топологије, чиме настаје област *тополошке комбинаторике*. Историјски резултат, који означава почетак ове области, је изненађујући доказ Кнезерове хипотезе који је дао Ласло Ловас 1978. године [69]. Наиме, Кнезерова хипотеза се односи на коначне скупове, без икакве повезаности са топологијом: ако n -точлане подскупове скупа од $(2n+k)$ -елемената поделимо у $k+1$ класа, бар једна класа мора садржати два дисјунктна подскупа. Ловас је доказ извео методима алгебарске топологије, одређујући повезаност једне класе графовских комплекса и користећи Борсук-Уламову теорему, чиме је утемељио потпуно нови приступ решавању комбинаторних проблема. Још један од важних почетних резултата ове области је теорема о дељењу огрлице, коју је доказао Нога Алон [2] 1987. године. Затим су уследиле и бројне друге значајне теореме дискретне геометрије, комбинаторике и теоријског рачунарства. Веома леп увод у ову област дао је Матушек [74], уз Бјорнера [12] и Живаљевића [107].

Важно је истаћи да резултати у тополошкој комбинаторици често истовремено захтевају и изузетно креативне комбинаторне конструкције, као и веома захтевне технике алгебарске топологије, па се може рећи да се овде сусрећу комбинаторика, топологија, геометрија и алгебра, на веома неочекиване начине. Временом је препознат један генерални поступак који се провлачи кроз велики број доказа ове области. У питању је метод „*конфигурациони простор - тест пресликавање*”, који је представљен детаљно у раду Живаљевића [104] и поглављу [107] истог аутора. Овим методом се проблем постојања неке комбинаторне или геометријске конфигурације преводи у проблем постојања непрекидног пресликавања тополошких простора са одређеним својствима, што постаје предмет изучавања алгебарске топологије. Посебно, често је то пресликавање обogaћено неком еквиваријантном структуром, чиме се отвара простор за примену техника еквиваријантне топологије. Са друге стране, природно је да постаје важно изучавати тополошке инваријанте простора, посебно симплицијалних комплекса, који се појављују као делови конфигурационих простора. У најпрецизнијој класификацији ова област изучавања се назива *комбинаторна топологија*. Међутим, идеје тополошке комбинаторике и комбинаторне топологије су испреплетане до те мере да се ове области најчешће поистовећују.

Дисертација се заснива на оригиналним радовима [11], [49], [50] и [51], као и прегледном раду аутора [48]. Најкраће речено, предмет изучавања дисертације представљају три важне класе симплицијалних комплекса: *комплекси упаривања*

графова, r -неизбежни комплекси и праг комплекси, као и примена поменутог метода „конфигурациони простор - тест пресликавање” на познати Кнастеров проблем [62]. Ради комплетније слике и контекста, најпре ћемо приказати кратак историјат и резултате од којих полазимо за наведене класе симплицијалних комплекса, а затим прећи на преглед добијених резултата.

Комплекси упаривања графова припадају великој фамилији *графовских комплекса*. Међу веома разноврсним комплексима ове фамилије могу се уочити два најчешћа начина придруживања комплекса графу. Први од њих датом графу $G = (V, E)$ придружује комплекс на скупу темена V , чији су симплекси задати скуповима темена са одређеним својством. На пример, такви су *комплекс независности* $Ind(G)$ и *комплекс суседстава* $\mathcal{N}(G)$, који се управо појављује у поменутом Ловасовом раду [69]. Други тип комплекса се добија тако што посматрамо коначну колекцију графова \mathcal{G} која је затворена у односу на брисање ивица, и њој придружимо симплицијални комплекс $K(\mathcal{G})$, чији скуп темена одговара целокупном скупу ивица, а скуп симплекса одговара скуповима ивица графова фамилије \mathcal{G} . У ове комплексе се убрајају *комплекси упаривања*, затим *комплекси ограниченог степена* (енг. bounded degree complexes), као и *комплекси графова на n темена који нису k -повезани*. Наравно, постоје и разне друге конструкције, у које спадају познати *Вох-комплекси* и *Ном-комплекси*. Већ и сами графовски комплекси повезују појмове из различитих области на неочекиване начине. Илустративан пример је позната теорема Бабсон-Ловас-Козлова, која повезује повезаност Ном-комплекса $\text{Ном}(C_{2r+1}, G)$ и хроматски број $\chi(G)$ графа G , а првобитно је доказана коришћењем спектралних низова [6]. Други веома значајан пример су комплекси повезаних и неповезаних графова, чији хомотопски тип се користи у теорији чворова Васиљева, видети [5, 90, 91].

Графовски комплекс који нас интересује, *комплекс упаривања* $M(G)$, дефинише се за произвољан граф $G = (V, E)$. Скуп темена овог комплекса одговара скупу ивица E , при чему симплекси овог комплекса одговарају свим скуповима ивица које су по паровима неуседне, тј. које чине *упаривање*. Дobar преглед познатих резултата даје Јонсонова дисертација [57], објављена као књига [58], која представља детаљну студију различитих комплекса који се придружују графовима. Највише резултата дато је за комплекс упаривања комплетног графа $M(K_n)$ и комплекс упаривања комплетног бипартитног графа $M(K_{m,n})$. Интересантно је да су се ови комплекси првобитно појавили у алгебарској теорији група.

Комплекс $M(K_n)$ је дефинисао Бук [19] 1992. године, у вези са Брауновим комплексом $\Delta(\mathcal{S}_p(G))$ (то је уређајни комплекс нетривијалних p -подгрупа коначне групе G за прост број p) и Квиленовим комплексом $\Delta(\mathcal{A}_p(G))$ (уређајни комплекс нетривијалних елементарних Абелових p -подгрупа коначне групе) [23, 24, 81]. Бук је проучавао репрезентације симетричне групе Σ_n на хомологији $M(K_n)$ и добио низ интересантних резултата, уз које је као последицу добио и комбинаторну формулу за Бетијеве бројеве комплекса $M(K_n)$. Буковим резултатима почело је детаљно проучавање комплекса упаривања разним техникама. Међутим, и поред веома једноставне формулације, топологија комплекса $M(K_n)$ је и даље велика непознаница. Наиме, комплетна карактеризација хомологије је позната само за $n \leq 12$, док су у вишим димензијама познати само делимични резултати. На пример, чињеница да се у неким случајевима појављују елементи реда 5, 7, 11

и 13 (видети [56]) указује на то да је и сама хомологија необична на неки начин.

Комплекси $M(K_{m,n})$, који се називају још и *шаховски комплекси* $\Delta_{m,n}$, први пут су се појавили у Гарстовој тези [39] при анализи косет комплекса симетричне групе. Мотивисани проблемима тополошке комбинаторике, Бјорнер, Ловас, Врећица и Живаљевић [13] су показали да је комплекс $M(K_{m,n})$ ν -повезан, где је број ν дефинисан са: $\nu = \min\{m, n, \lfloor \frac{m+n+1}{3} \rfloor\} - 2$. Такође, они су поставили хипотезу да је дата оцена тачна, коју су доказали Шаресиан и Вакс [85]. Даље значајне резултате дали су Циглер [103], Атанасиадис [3], Фридман и Ханлон [40], као и Јојић [53]. Шаховски комплекси, њихови спојеви и њима сродни комплекси су нашли велики број примена у разним проблемима тополошке комбинаторике, као на пример у разним варијантама обојене Твербергове теореме (видети [106] и [94]). Веома леп прегледни рад Мишел Вакс [97] о топологији комплекса $M(K_n)$ и $M(K_{m,n})$ детаљно излаже познате резултате и везе ових комплекса са различитим областима.

У изучавању комплекса упаривања коришћени су најразличитији алати, о чему осим горе поменуто литературе говоре и други важни радови [10, 21, 32, 33, 73, 85, 100]. Међутим, осим резултата о комплексима $M(K_n)$ и $M(K_{m,n})$, о комплексима упаривања је и даље познато веома мало. Козлов [64] је одредио хомотопски тип комплекса упаривања путања и циклуса, док су Мариети и Теста [73] показали да су комплекси упаривања шума или контрактибилни или хомотопски еквивалентни букету сфера, али карактеризација димензија сфера у том букету није позната. Комплексе упаривања решетки (енг. grid graphs) проучавали су Браун и Хаг [21] коришћењем дискретне Морсове теорије, као и Матсушита [76] коришћењем индуктивних тополошких конструкција.

У овој дисертацији, комплексима упаривања се приступа на два различита начина, од којих један даје нов поглед на њих, па ћемо га овде поменути у ширем контексту (саме резултате изложићемо у прегледу ниже). Наиме, познати радови на ову тему су се најчешће бавили испитивањем тополошких својстава комплекса упаривања конкретних графова или фамилија графова. Међутим, сасвим је природно поставити и обрнуто питање: *Да ли је посматрани симплицијални комплекс заправо комплекс упаривања неког графа?* Резултати овог типа су веома ретки и дати само под одређеним условима - на пример, Јонсон [58] је дао доњу границу дубине комплекса $M(G)$ у случају када граф G има савршено упаривање. Поменуто питање је природно поставити и из перспективе *комплекса независности*, који обухватају комплексе упаривања. Наиме, комплекс упаривања $M(G)$ је заправо комплекс независности линијског графа придруженог графу G , тј. важи $M(G) = \text{Ind}(L(G))$. Познато је да се барицентричка подела сваког симплицијалног комплекса може видети као комплекс независности одређеног графа (видети [31]), па неформално можемо рећи да су све многострукости комплекси независности. Међутим, ако триангулабилне многострукости желимо да видимо као комплексе упаривања, показаћемо да је то могуће само у ретким ситуацијама.

Друга класа комплекса коју ова дисертација изучава је класа *r -неизбежних комплекса*. Ови комплекси су први пут посматрани 2014. године у раду [16] Благојевића, Фрика и Циглера, под називом *Тверберг - неизбежни комплекси*.

Назив потиче од значајне улоге коју они имају у решавањима проблема Тверберговог типа методом ограничења (енг. constraint method) и редукцијом која се среће под називом Gromov - Blagojević - Frick - Ziegler reduction (видети горе поменути рад [16] и рад Громова [43]). Посматрани r -неизбежни комплекси, прецизније сами 2-неизбежни комплекси, су природно уопштење познатих *Александерових ауто-дуалних* комплекса. У раду [51], на коме се заснива глава 5 ове дисертације, започето је систематично проучавање комбинаторних инваријанти r -неизбежних комплекса и њихових конструкција. У истом раду је проучавана и трећа класа комплекса која нас интересује, а то су *комплекси задати мером*, односно *праг комплекси* (енг. threshold complexes). Ови комплекси су посматрани пре свега у контексту њихове повезаности са r -неизбежним комплексима.

Што се историјата тиче, r -неизбежни комплекси су релативно нов појам, али је зато историја проучавања ауто-дуалних, 2-неизбежних и праг комплекса изузетно разноврсна. При томе треба обратити пажњу на чињеницу да се ови комплекси, осим у комбинаторној топологији, појављују потпуно независно под другим називима у различитим областима, као што су теорија игара, теорија друштвеног избора (енг. social choice theory, reliability theory), геометрија конфигурационих простора, теорија оптимизације и др. Пре свега, у топологији се помоћу ауто-дуалних комплекса конструишу простори који се могу утопити само у еуклидски простор релативно велике димензије, [74, глава 5]. У теорији друштвених избора и теорији игара они се појављују као победничке или губитничке коалиције, али под називом *просте игре* (енг. simple games) Фон Нојмана и Моргенстерна [79, 82, 83]. У теорији оптимизације појављују се у раду [29] (енг. Bottleneck theorem). Такође, у геометрији конфигурационих простора, они се појављују као *комплекси кратких скупова* (енг. short sets). На пример, у раду [41] је показано како се полазећи од ауто-дуалног комплекса G на n темена конструише $(n - 3)$ -димензионална комбинаторна многострукост $K(G)$, за коју се испоставља да је локално изоморфна конфигурационом простору неког флексибилог полигона у Еуклидском простору (енг. polygonal linkages).

Имајући у виду све претходне примене, можемо рећи да постоје два главна разлога за изучавање неизбежних и праг комплекса (наравно, осим саме интригантности комбинаторне структуре коју ови комплекси имају, а која представља довољан самосталан разлог). С једне стране, то су примене у проблемима Тверберговог типа. Са друге, природно је очекивати да ови комплекси могу имати неке сличне улоге оним које имају ауто-дуални комплекси. Скорашњи резултати Јојића, Марзантовича, Врећице и Живаљевића [54] потврђују ово очекивање и настављају се на идеје које се појављују у проблемима Тверберговог типа. Наиме, знамо да ауто-дуални комплекси имају улогу у проблемима утапања, а у поменутом раду је показано да r -неизбежни комплекси имају важну улогу у проблемима r -утапања, тј. у конструисању такозваних almost r -non-embeddable комплекса (то су они комплекси K који испуњавају услов да за свако непрекидно пресликавање $f : |K| \rightarrow \mathbb{R}^d$ по паровима дисјунктних страна $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ комплекса K , таквих да важи $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$).

Преглед структуре и оригиналних резултата дисертације

Дисертација је организована на следећи начин. Прва глава је прегледног типа, док су остале главе базиране на оригиналним радовима.

У **првој глави** је дат преглед основних појмова и метода који се користе у дисертацији. Пре свега, дате су основне дефиниције симплицијалних комплекса, а затим дефиниције и примери комплекса упаривања и независности графова. Затим је описана тополошка конструкција споја, која има важну улогу у различитим конструкцијама које ће се појавити у дисертацији. Наредна три поглавља посвећена су основним појмовима еквиваријантне топологије. Пре свега, то су дејства група и еквиваријантна пресликавања. Затим је детаљно описан метод „конфигурациони простор - тест пресликавање”. На крају, дати су основни појмови еквиваријантне теорије индекса, при чему је посебно разматран кохомолошки Фадел-Хусеинијев индекс, јер је он коришћен у глави 6. Напоменимо да је тешкоћу при писању ове дисертације представљала разноврсност појмова и техника, па је ова прегледна глава значајно сажета, уз наведене додатне референце. Познавање основних инваријанти алгебарске топологије (хомологија, кохомологија, хомотопија и сл.) је подразумевано свуда без додатних објашњења.

Друга глава је базирана на оригиналном раду [11] са коауторима (М. Вауер и В. Гоекнер) и бави се хомолошким многострукостима које су комплекси упаривања графова. Пре свега, показана су нека помоћна тврђења и објашњена разлика између различитих класа симплицијалних комплекса који се посматрају као многострукости. Затим је дат комплетан одговор на следећа два питања:

Које хомолошке многострукости су комплекси упаривања графова?

Које хомолошке многострукости са границом су комплекси упаривања графова?

Под комплетношћу одговора подразумевамо и да су одређени сви графови који као комплексе упаривања имају дате хомолошке многострукости. У случају многострукости без границе, основни резултати су теореме 2.18 и 2.19, којима је показано да су међу овим многострукостима једини комплекси упаривања торус димензије 2 и комбинаторне сфере у свим димензијама. Што се тиче хомолошких многострукости са границом, главни резултати су теорема 2.24 и теорема 2.25. Њима је показано да у димензији 2 комплекси упаривања могу бити диск, цилиндар, Мебијусова трака и торус без једног диска, док у вишим димензијама то могу бити само комбинаторни дискови.

Трећа и четврта глава су базиране на оригиналном раду [50] са коауторима (Н. Јене, А. МцДонаух и Ј. Вега). **Трећа глава** се бави одређивањем тачног хомотопског типа комплекса упаривања неких класа дрвета, помоћу индуктивног приступа, којим се графу додају ивице или скупови ивица, а паралелно се прате промене хомотопског типа посматраног комплекса. Ради комплетности, глава почиње доказом теореме Мариетија и Тесте која каже да је комплекс упаривања шуме или контрактибилан или хомотопски еквивалентан букету сфера. Главни резултат ове главе је тачан хомотопски тип комплекса упаривања произвољне гусенице без тривијалних темена, дат у теорему 3.17. За гусенице које садрже тривијална темена дата је рекурентна формула за одређивања посматраног хомотопског типа. Затим је дат и други доказ теореме 3.17, применом технике која се

заснива на теоремама о фибрама пресликавања посета. Овај доказ даје бољи геометријски увид у интересантан комбинаторни низ димензија који се појављује у хомотопском типу. Поменимо овде да се након објављивања рада [50] на архиву, Синг [86] надовезао на теорему 3.17 и уопштио је за ширу класу графовских комплекса гусеница.

Четврта глава се бави одређивањем повезаности комплекса упаривања неких поплочавања равни, посебно *саћа* (енг. honeycomb graphs), као и савршених бинарних дрвета. У њој се као алат користи *МТА алгоритам* (енг. Matching Tree Algorithm). Овај алгоритам је заправо верзија дискретне Морсове теорије која је прилагођена комплексима независности, и која формирањем једног бинарног дрвета конструише ациклично упаривање на посету страна посматраног комплекса независности. Стога је на почетку ове главе дата главна теорема дискретне Морсове теорије, а затим је детаљно описан МТА алгоритам, са циљем да његове комбинаторно сложене примене у наставку буду што јасније. Графови на које примењујемо овај алгоритам су најпре линијска поплочавања полигонима, у ознаци P_{2n}^t , а оцена њихове повезаности дата је у теорему 4.11, при чему је за $n \equiv 1 \pmod{3}$ одређен тачан хомотопски тип комплекса $M(P_{2n}^t)$. Затим се МТА алгоритам примењује на саћа облика $r \times s \times t$ (видети слику 60 у глави 4). Поменимо да Јонсон предлаже изучавање комплекса упаривања саћа у глави 11 књиге [58]. Интересантно је поменути да се *савршена* упаривања саћа, тј. она упаривања код којих свако теме припада једној ивици из упаривања, појављују у хемији (где су позната као Kekulé structures [61, 46]) као и у поделама равни, тзв. plane partitions, [87, 65]. За саћа облика $2 \times 1 \times t$ процена повезаности дата је у теорему 4.16, а нешто слабија оцена је дата и за сва саћа облика $r \times s \times t$ у теорему 4.19. На крају, комбинацијом МТА алгоритма и индуктивне технике из треће главе, одређена је тачна повезаност комплекса упаривања савршених бинарних дрвета (теореме 4.22 и 4.23). У вези са материјалом ове главе, поменимо да је после објављивања рада [50] на архиву, Матсушита [75] уопштио неке резултате везане за линијска полигонална поплочавања.

Пета глава је посвећена систематичном изучавању комбинаторних особина неизбежних комплекса и праг комплекса који су задати мером на скупу темена. Глава је базирана на оригиналном раду [51] са коауторима (Д. Јојић, М. Тимотијевић, С. Врећица и Р. Живаљевић), и проширеном препринту [52] истог рада. Подељена је на више малих целина које из различитих углова проучавају поменуте комплексе. Уводе се две фундаменталне инваријанте. Прва је *партициона инваријанта* $\pi(K)$, која је мера минималне неизбежности коју комплекс K поседује, а друга је *карактеристични праг* $\rho(K)$, за који се неформално може рећи да описује максимални праг комплекс који је садржан у комплексу K . Један од главних резултата је конструкција нових неизбежних комплекса помоћу споја мањих неизбежних комплекса (теорема 5.7), као и процена карактеристичног прага споја комплекса (теорема 5.26). Главна веза између инваријанти $\pi(K)$ и $\rho(K)$ дата је следећом неједнакошћу (тврђење 5.18):

$$\pi(K) \leq \left\lfloor \frac{1}{\rho(K)} \right\rfloor + 1.$$

Показује се да се ова неједнакост своди на једнакост тачно када комплекс K

садржи $\pi(K)$ -неизбежан комплекс који је индукован мером. Другим речима, строга неједнакост говори да неизбежност комплекса K произилази из неких апстрактнијих особина, па се ови комплекси називају *нелинеарни*, а уводи се *мера нелинеарности* $\epsilon(K) = \lfloor \frac{1}{\rho(K)} \rfloor + 1 - \pi(K)$. Стога је један од главних циљева конструисати нелинеарне комплексе који имају што већу меру нелинеарности (у односу на број темена). Конструкције ових комплекса користе минималне триангулације пројективних равни $\mathbb{R}P^2$, $\mathbb{C}P^2$ и $\mathbb{H}P^2$, које су ауто-дуални комплекси који нису задати мером, о чему детаљно и илустративно говори поглавље 5.4. Теорема 5.31 обједињује скоро све технике и појмове који су коришћени у овој глави, и приказује најбоље примере нелинеарних комплекса који су конструисани.

Шеста глава представља примену метода „конфигурациони простор - тест пресликавање” на Кнастеров проблем, а базирана је на оригиналном раду [49]. Пре ове примене, доказана је теорема 6.1, која је кохомолошко уопштење Долдове теореме из еквиваријантне топологије. Доказ ове теореме је изведен помоћу кохомолошког Лере-Серовог спектралног низа. Затим се прелази на примене ове теореме на Кнастеров проблем. За задате бројеве $n, m, k \in \mathbb{N}$, Кнастеров проблем проучава оне конфигурације тачака $A_1, A_2, \dots, A_k \in S^{n-1}$, које задовољавају услов да за свако непрекидно пресликавање $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$, постоји ротација $\rho \in SO(n)$, таква да важи $f(\rho(A_1)) = \dots = f(\rho(A_k))$. Пошто се резултати који су посматрани у дисертацији природно надовезују на познате резултате, ради целовитости слике овде нећемо говорити о познатим резултатима, већ ће они укратко бити наведени у поглављу 6.2. Главни резултат ове главе је нов и краћи доказ Јанговог случаја Кнастеровог проблема (теорема 6.2). Такође, разматраће се нови случајеви Кнастеровог проблема и уопштења неких постојећих резултата (теореме 6.3 и 6.5).

Глава 1

Основни појмови и дефиниције

Комбинаторна топологија, као што је очекивано, користи велики број комбинаторно-геометријских појмова, уз веома различите технике алгебарске топологије, па је скуп основних концепата заиста разноврстан. У овој глави дајемо кратак преглед најосновнијих појмова који се користе у дисертацији, уз референце на детаљнију литературу. Такође, овде излажемо и неке од основних метода, док ће остали методи бити укратко изложени на прикладнијим местима у наредним главама. При писању ове главе највише се ослањамо на књигу Матушека [74].

Поглавље 1.1 садржи основне појмове везане за симплицијалне комплексе и неколико важних класа комплекса које ћемо користити. У поглављу 1.2 су дефинисани комплекси упаривања и независности графова, уз неколико илустративних примера. У поглављу 1.3 је приказан тополошки спој, који ће имати важну улогу у конструкцијама комплекса упаривања и неизбежних комплекса у овој тези. Наредна три поглавља садрже основне појмове еквиваријанте топологије. Поглавље 1.4 се бави дејствима група, затим поглавље 1.5 представља један од основних метода комбинаторне топологије, тзв. „конфигурациони простор - тест пресликавање” метод, док поглавље 1.6 садржи основне појмове еквиваријантне теорије индекса, са нагласком на кохомолошки Фадел-Хусеинијев индекс.

1.1 Симплицијални комплекси

За дефинисање симплицијалних комплекса постоје два приступа: *комбинаторни* (*апстрактни*) и *геометријски* приступ. С обзиром на то да ће у овој дисертацији комбинаторне инваријанте имати важну улогу, ми ћемо почети од комбинаторног приступа, а затим описати геометријску реализацију.

Дефиниција 1.1. *Апстрактни симплицијални комплекс* K на коначном скупу теме на V је колекција подскупова скупа V ($K \subset 2^V$) која задовољава следећи услов:

$$\text{ако важи } \sigma \in K \text{ и } \tau \subset \sigma, \text{ онда важи и } \tau \in K.$$

Дефинишимо неке основне појмове који се везују за произвољан комплекс K .

- Елементи $\sigma \in K$ се називају *симплекси* или *стране* комплекса K .
- Симплекс $\tau \in K$ је *страна* симплекса $\sigma \in K$ ако важи $\tau \subset \sigma$.

- Скуп $\sigma \subset V$ који не припада комплексу K назива се *не-симплекс*.
- Ако је L симплицијални комплекс и $L \subset K$, онда се L назива *поткомплекс* комплекса K .
- *Димензија симплекса* σ се дефинише са: $\dim \sigma = |\sigma| - 1$, а симплекс димензије k се назива *k -симплекс*. *Димензија комплекса* K се дефинише као максимум димензија свих симплекса из K : $\dim K = \max_{\sigma \in K} \dim \sigma$.
- Ако је $\sigma \in K$ произвољан симплекс, онда се дефинише следећи поткомплекс који се назива *линк стране* σ :

$$\text{Lk}_K \sigma = \{\tau \in K \mid \tau \cup \sigma \in K \text{ и } \tau \cap \sigma = \emptyset\}.$$

Уколико није другачије наглашено, често се подразумева се да су сви једночлани подскупови скупа V садржани у K , тј. да комплекс K садржи сва темена V .

Као што просторе тополошки идентификујемо помоћу непрекидних пресликавања, тако апстрактне симплицијалне комплексе поистовећујемо помоћу такозваних *симплицијалних пресликавања*. Наиме, нека су K и L апстрактни симплицијални комплекси и $f : V(K) \rightarrow V(L)$ пресликавање на њиховим скуповима темена. Уколико f пресликава симплексе у симплексе, тј. ако за сваки симплекс $\sigma \in K$ важи да је $f(\sigma) \in L$, онда кажемо да је f *симплицијално пресликавање*. Ако постоји бијективно симплицијално пресликавање $f : V(K) \rightarrow V(L)$ чији је инверз такође симплицијално пресликавање, тада кажемо да су K и L *изоморфни* симплицијални комплекси, и пишемо $K \cong L$ или $K = L$, јер је јасно да су тада K и L заиста истоветне фамилије које се разликују само по именима темена.

Са друге стране, симплицијални комплекс се може дефинисати као потпуно геометријски објекат. За разлику од претходног приступа, сада прво дефинишемо симплексе, па помоћу њих градимо симплицијални комплекс.

Дефиниција 1.2. Нека је дат произвољан скуп $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ од $n+1$ афино независних тачака у простору \mathbb{R}^d . Конвексни омотач овог скупа се назива *геометријски симплекс димензије n* , или краће *n -симплекс*. Тачке x_0, x_1, \dots, x_n се називају *темена* симплекса, а конвексни омотач било ког подскупа скупа темена се назива *страна* симплекса.

Међу геометријским n -симплексима издваја се *стандардни n -симплекс* Δ^n , који се дефинише као конвексни омотач врхова ортонормиране базе у простору \mathbb{R}^{n+1} :

$$\begin{aligned} \Delta^n &= \text{conv}\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0 \text{ за све } i \in [n+1], \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Сваки геометријски n -симплекс је афино хомеоморфан стандардном n -симплексу. Геометријски симплицијални комплекс градимо „лепљењем” симплекса дуж заједничких страна.

Дефиниција 1.3. Геометријски симплицијални комплекс K у простору \mathbb{R}^n је непразна фамилија симплекса у \mathbb{R}^n која задовољава следећа два услова:

- 1) Страна сваког симплекса $\sigma \in K$ је такође симплекс у K .
- 2) За све $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ важи да је пресек $\sigma_1 \cap \sigma_2$ страна оба симплекса σ_1 и σ_2 .

Унија свих симплекса из K назива се *полиедар комплекса* и означава са $|K|$.

Сада бисмо могли дефинисати одговарајуће појмове димензије, линка и сл. и за геометријске симплицијалне комплексе, али нам није намера да даље изложимо основне појмове (видети [74, глава 1] за детаље), већ да укратко објаснимо везу између апстрактног и геометријског комплекса, са циљем да у наставку не морамо наглашавати разлику.

Геометријски комплекс \rightarrow апстрактни комплекс: сваком геометријском симплицијалном комплексу \tilde{K} одговара апстрактни симплицијални комплекс K , на скупу темена који се добија као унија темена свих симплекса из \tilde{K} , и са скупом апстрактних симплекса који тачно одговара скупу геометријских симплекса. Тада кажемо да је \tilde{K} *геометријска реализација* апстрактног комплекса K , а појмови полиедра $|\tilde{K}|$ од \tilde{K} и полиедра од K се поистовећују.

Апстрактни комплекс \rightarrow геометријски комплекс: сваком апстрактном симплицијалном комплексу K се може придружити геометријски комплекс, тј. геометријска реализација \tilde{K} . На пример, ако је K комплекс на n темена, може му се придружити следећа реализација у простору \mathbb{R}^{n-1} . Нека је V скуп темена стандардног симплекса Δ^{n-1} , дакле $|V| = n$, па V можемо идентификовати са скупом темена од K . На скупу V дефинишемо комплекс $\tilde{K} = \{\text{conv}(\sigma) \mid \sigma \in K\}$. Једноставно се проверава да \tilde{K} заиста јесте геометријска реализација комплекса K . Дакле, сваки апстрактни комплекс на n темена има геометријску реализацију у простору \mathbb{R}^{n-1} . Такође, познато је и да се сваки n -димензионални апстрактни комплекс K може реализовати у простору \mathbb{R}^{2n+1} [74, теорема 1.6.1], док постоји комплекс димензије n који се не може реализовати у простору \mathbb{R}^{2n} (Ван-Кампен Флоресова теорема [74, 5.1.1]). Наравно, геометријска реализација апстрактног комплекса није јединствена, али се показује да су полиедри сваке две геометријске реализације међусобно хомеоморфни простори.

Како ће се у дисертацији највише испитивати комбинаторне инваријанте симплицијалних комплекса, тј. особине које не зависе од геометријске реализације, ми ћемо најчешће комплекс поистовећивати са полиедром и писати знак једнакости уместо очекиваног знака изоморфизма (\cong) или хомеоморфизма (\simeq). На пример, ако је полиедар комплекса K хомотопски еквивалентан тополошком простору X , пишемо $K \simeq X$, и слично. Специјално, уводимо следећи појам.

Дефиниција 1.4. Нека је X тополошки простор, а K симплицијални комплекс. Ако је простор X хомеоморфан полиедру комплекса K , онда кажемо да је K *једна триангулација* простора X .

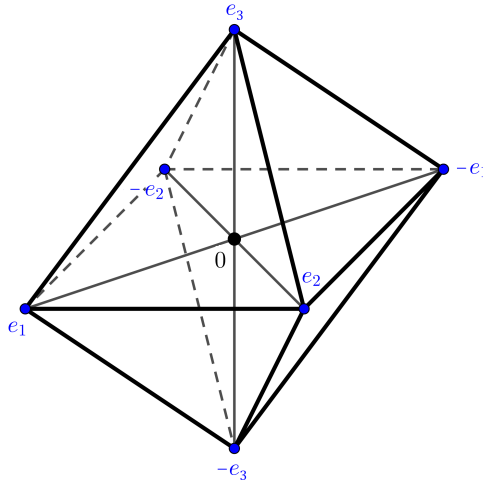
Као пример који се појављује у тези имамо једну триангулацију сфере S^{n-1} .

Пример 1.5. *Кросполитоп* димензије n (n -димензионални *кросполитоп*) се дефинише као конвексни омотач вектора ортонормиране базе и њима супротних:

$$\text{conv}\{e_1, -e_1, \dots, e_n, -e_n\}.$$

Другим речима, у питању је јединична кугла у ℓ_1 -норми простора \mathbb{R}^n . Граница n -димензионалног кросполитопа има структуру симплицијалног комплекса и означава се са \diamond^{n-1} . Показује се да је овај комплекс једна веома симетрична триангулација сфере S^{n-1} (слика 1).

Такође, примећује се да неки скуп $\sigma \subset \{e_1, -e_1, \dots, e_n, -e_n\}$ образује симплекс у комплексу \diamond^{n-1} ако и само ако не постоји $i \in [n]$ тако да важи $e_i, -e_i \in \sigma$.



Слика 1. Кросполитоп димензије 3 и његова граница \diamond^2 .

Истраживање триангулација различитих простора је важан правац у комбинаторној топологији. Посебно, поставља се питање *минималне триангулације* неког простора (посебно многострукости), тј. триангулације са минималним бројем темена (читалац се упућује на прегледни рад [70]). У глави 5 ове дисертације ће од посебног значаја бити минималне триангулације пројективних равни. Такође, у истој глави ћемо посматрати уопштење веома важне класе *ауто-дуалних* комплекса, па овде наводимо основне дефиниције.

Дефиниција 1.6. [74, дефиниција 5.6.1] Нека је $K \subset 2^{[n]}$ симплицијални комплекс. *Александеров дуал* комплекса K , у ознаци \widehat{K} , је симплицијални комплекс на скупу $[n]$ који се дефинише као скуп свих комплемената не-симплекса у K :

$$\widehat{K} = \{\sigma \in 2^{[n]} \mid [n] \setminus \sigma \notin K\} \cup \{\emptyset\}.$$

Једноставно се примећује да је \widehat{K} заиста симплицијални комплекс (празан скуп се додаје да би то било испуњено и у случају када $[n] \in K$).

Дефиниција 1.7. За симплицијални комплекс $K \subset 2^{[n]}$ кажемо да је *ауто-дуалан* ако је једнак свом Александеровом дуалу, тј. ако важи $K = \widehat{K}$.

Поглавље 5.4 садржи детаљно описане интересантне примере ауто-дуалних комплекса. Као што смо поменули у Уводу, ауто-дуални комплекси имају веома

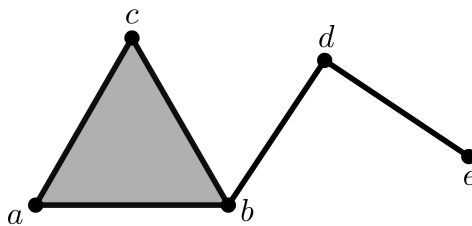
разноврсне примене, а посебно се истиче њихов значај за конструкције простора са релативно малим бројем темена који се могу реализовати само у просторима релативно велике димензије (видети [74, глава 5] и [78]).

На крају овог поглавља опишимо још два важна придруживања између симплицијалних комплекса и посета. Подсетимо се, *посет* (парцијално уређен скуп) (P, \prec) је произвољан скуп P са релацијом поретка \prec . Потпуно уређен подскуп посета се назива *ланац*, а *дужина* ланца се дефинише као број његових елемената умањен за 1. *Дужина* посета P , у ознаци $\ell(P)$, се дефинише као дужина најдужег ланца у P (дужина празног посета је -1).

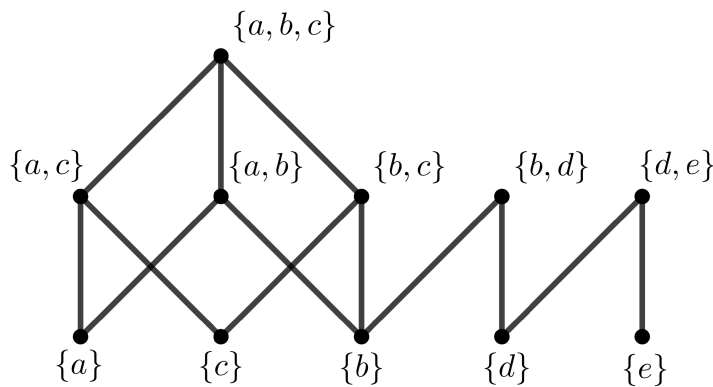
Сваком симплицијалном комплексу K придружујемо *посет страна* (P, \prec) , који се дефинише као скуп свих непразних симплекса из K , са уређењем задатим инклузијом:

$$\tau \prec \sigma \quad \text{ако и само ако је симплекс } \tau \text{ страна симплекса } \sigma.$$

На пример, на слици 2 приказан је симплицијални комплекс K чији је посет страна $P(K)$ дат Хасеовим дијаграмом на слици 3.



Слика 2. Комплекс K .



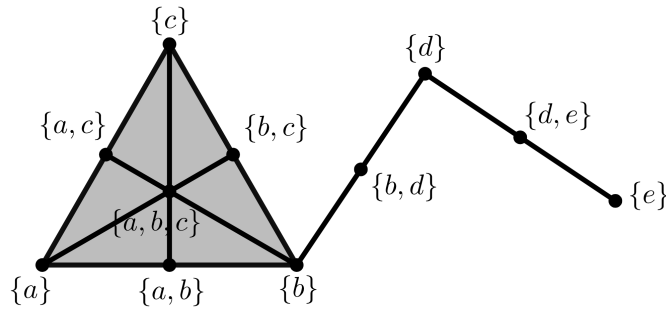
Слика 3. Хасеов дијаграм посета $P = P(K)$.

Са друге стране, сваком посету P можемо придружити апстрактни симплицијални комплекс тако што сваком елементу из P придружимо теме, а сваком ланцу из P придружимо страну комплекса. Тиме добијамо *уређајни комплекс* посета P (енг. *order complex*) који означавамо са $\Delta(P)$. Уређајни комплекси посета представљају изузетно важне комбинаторне објекте са мноштвом примена. Примећује се да важи веза димензије уређајног комплекса и дужине посета: $\dim \Delta(P) = \ell(P)$.

На слици 4 приказана је једна геометријска реализација уређајног комплекса посета P са слике 3. Примећујемо да је у питању барицентричка подела комплекса K са слике 2. То ће важити и у општем случају, тј. ако уочимо симплицијални комплекс K , па његов посет страна $P(K)$, а затим уређајни комплекс овог посета, добијамо комплекс изоморфан барицентричкој подели K_1 комплекса K :

$$K \longrightarrow P(K) \longrightarrow \Delta(P(K)) \cong K_1.$$

Заиста, темена барицентричке поделе K_1 одговарају непразним симплексима из K , док симплекси у K_1 одговарају ланцима симплекса из K уређених инклузијом.



Слика 4. Уређајни комплекс $\Delta(P(K))$.

1.2 Комплекси упаривања и независности графова

Нека је $G = (V(G), E(G))$ прост граф, тј. граф без петљи и вишеструких ивица, са скупом темена $V(G)$ и скупом ивица $E(G)$. Уколико је јасно о ком графу је реч, користимо ознаку $G = (V, E)$, а ради једноставности граф често поистовећујемо са његовим скупом ивица. Ивицу која садржи темена x и y означавамо са $\{x, y\}$. Теме степена 1 називамо *лист*. Такође, за неке важне класе графова користимо стандардне ознаке: C_n означава циклус који садржи n темена (n -циклус); P_n означава пут који садржи n темена (n -пут); K_n означава комплетан граф на n темена; $K_{m,n}$ означава комплетан бипартитан граф са класама од по m и n темена. За дисјунктну унију графова користимо симбол \sqcup , а ако се у дисјунктној унији појављује k копија истог графа G , онда пишемо $G \sqcup \dots \sqcup G = kG$. На пример, nP_1 означава дискретан скуп од n тачака.

Дефиниција 1.8. *Упаривање* на графу $G = (V, E)$ је произвољан скуп ивица графа G које су међусобно дисјунктне по паровима.

Сада дефинишемо симплицијални комплекс који је један од главних предмета проучавања ове дисертације.

Дефиниција 1.9. Нека је $G = (V(G), E(G))$ прост граф. *Комплекс упаривања* графа G , у ознаци $M(G)$, је симплицијални комплекс са скупом темена $E(G)$ чији скуп симплекса одговара скупу свих упаривања на графу G .

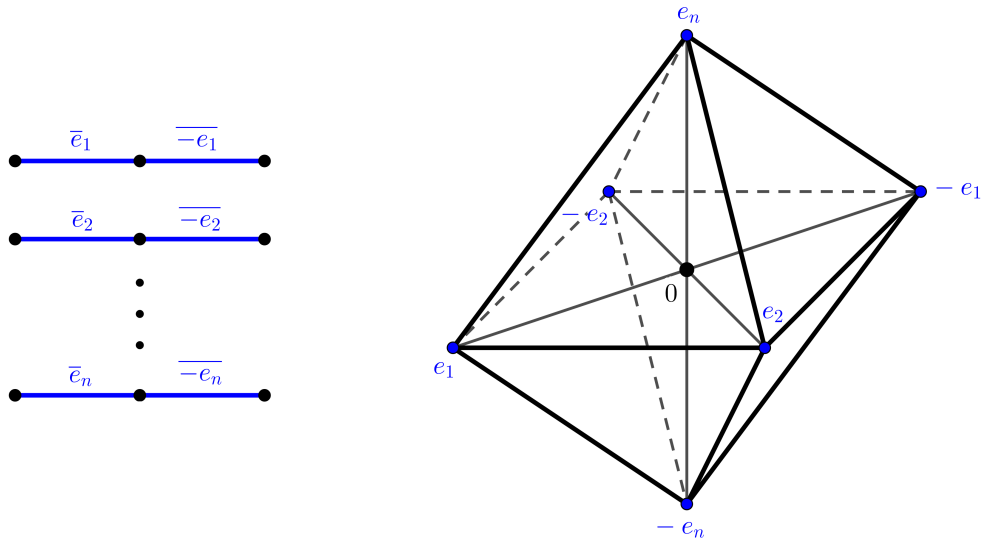
Дакле, свако теме комплекса $M(G)$ једнозначно одговара ивици графа G , па ћемо свуда у дисертацији имати усклађене ознаке:

теме v комплекса $M(G)$ одговара ивици \bar{v} графа G .

Следствено, ако је σ симплекс комплекса $M(G)$, онда $\bar{\sigma}$ означава одговарајуће упаривање на графу G . Такође, када је реч о комплексима упаривања, увек се претпоставља да граф G не садржи изолована темена, петље и вишеструке ивице. Наиме, изолована темена графа G не мењају комплекс $M(G)$. Петља у истом темену не би могла припадати ниједном упаривању, а вишеструка ивица би само „дуплирала” неки поткомплекс посматраног комплекса, па је ова претпоставка природна. Ради илустрације наводимо два елементарна примера.

Пример 1.10. Ако је граф $G = nP_2$ састављен од n по паровима дисјунктних ивица, онда све његове ивице чине једно упаривање. Тада комплекс $M(G)$ има n темена која образују симплекс, тј. $M(nP_2) \cong \Delta^{n-1}$.

Пример 1.11. Нека је $G = nP_3$, тј. граф је састављен од n парова суседних ивица, означених са $\bar{e}_i, \overline{-e}_i, i \in [n]$, као на слици 5. Тада комплекс $M(G)$ садржи $2n$ темена $e_1, -e_1, \dots, e_n, -e_n$, при чему неки скуп темена образује симплекс ако и само ако не садржи два темена која одговарају суседним ивицама, тј. не садржи e_i и $-e_i$ за неко $i \in [n]$. На основу примера 1.5 видимо да је овај комплекс упаривања управо задат као граница n -димензионалног кросполитопа, тј. $M(nP_3) \cong \partial \diamond^{n-1}$.



Слика 5. Комплекс упаривања $M(nP_3)$.

На основу комплекса $M(G)$ не можемо једнозначно одредити граф G . На пример, графови $G_1 = K_{1,3}$ и $G_2 = K_3$ имају исти комплекс упаривања који се састоји од три дискретне тачке: $M(G_i) = 3P_1, i = 1, 2$.

Приметимо једно једноставно својство индукованог поткомплекса комплекса упаривања, које ће бити подразумевано надаље. Пре свега, знамо да је граф $H = (V(H), E(H))$ подграф графа $G = (V(G), E(G))$ ако важи $V(H) \subset V(G)$ и $E(H) \subset E(G)$. Додатно, H је индукован подграф ако је скуп ивица $E(H)$ тачно рестрикција скупа $E(G)$ на $V(H)$, тј. ако важи $E(H) = \{e = \{x, y\} \in E(G) \mid x, y \in V(H)\}$. Аналогно, за поткомплекс N комплекса M кажемо да је индукован поткомплекс

ако су симплекси комплекса N тачно сви они симплекси комплекса M чија су сва темена садржана у N . Доказ следећег става директно следи из дефиниција појмова.

Тврђење 1.12. Нека је $M = M(G)$ комплекс упаривања графа G , а N индукован пот-комплекс комплекса M на скупу темена $V(N) = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V(M)$. Ако уочимо подграф H графа G одређен ивицама $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$, онда је H управо комплекс упаривања графа K .

Напоменимо да подграф H не мора бити индукован подграф графа G .

Још једно битно својство комплекса упаривања, које ове комплексе сврстава у веома значајну фамилију комплекса, дају следећа дефиниција и став.

Дефиниција 1.13. Нека је $K \subset 2^V$ симплицијални комплекс. Претпоставимо да за сваки скуп $\sigma \subset V$ важи импликација:

$$\text{ако за све } i, j \in \sigma \text{ важи } \{i, j\} \in K, \text{ онда важи } \sigma \in K.$$

Тада се K назива *флег* или *заставичаст* комплекс (енг. *flag complex*).

Тврђење 1.14. Сваки комплекс упаривања је флег комплекс.

Доказ. Посматрајмо произвољан граф G и његов комплекс упаривања $M(G)$. Нека је $\sigma = \{v_1, \dots, v_n\}$, $n \geq 3$, подскуп скупа темена комплекса $M(G)$, такав да за све $i, j \in [n]$, $i \neq j$, важи $\{v_i, v_j\} \in M(G)$. Дакле, када посматрамо ивице $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ графа G , знамо да никоје две ивице \bar{v}_i и \bar{v}_j међу њима нису суседне. Стога је $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ једно упаривање графа G , па одговарајући симплекс σ припада комплексу $M(G)$. Закључујемо да је $M(G)$ флег комплекс. \square

Сада ћемо дефинисати већу фамилију графовских комплекса која обухвата комплексе упаривања. У том циљу, ако је $A \subset V$ неки скуп темена графа $G = (V, E)$ такав да никоја два темена у A нису суседна, онда кажемо да је A *независан скуп*.

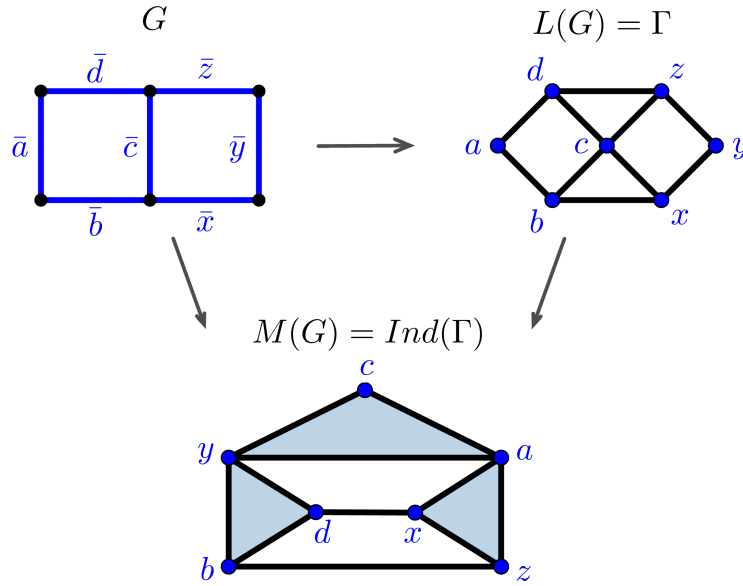
Дефиниција 1.15. Нека је $G = (V, E)$ прост граф. *Комплекс независности* графа G , у ознаци $Ind(G)$, је симплицијални комплекс на скупу темена V , чији су симплекси задати независним скуповима темена графа G .

Дефиниција 1.16. Сваком графу G можемо придружити његов *линијски граф* $L(G)$, чија темена одговарају ивицама $E(G)$ графа G , док су два темена линијског графа повезана ивицом ако и само ако су одговарајуће ивице графа G суседне.

Примећујемо да је комплекс упаривања произвољног графа G једнак комплексу независности линијског графа $L(G)$ (слика 6), тј. важи:

$$M(G) = Ind(L(G)). \quad (1.2.1)$$

Познато је да је произвољан граф Γ линијски граф неког графа ако и само ако Γ не садржи ниједан од 9 забрањених подграфа као индуковани подграф (видети [98, теорема 7.1.18]).



Слика 6. Пример конструкције $M(G) = \text{Ind}(L(G))$.

Интересантно је да се веома једноставно може показати да важи:

за сваки коначан симплицијални комплекс K
 постоји комплекс независности $\text{Ind}(G)$ који је хомеоморфан са K .

Наиме, нека је G граф задат на скупу свих непразних симплекса из K , такав да су темена σ и τ повезана ивицом ако и само ако за одговарајуће симплексе важи $\sigma \not\subset \tau$ и $\tau \not\subset \sigma$ (овај граф је заправо комплемент графа припадности комплекса K , енг. *complement of comparability graph* [31, глава 9]). Тада се примећује да је комплекс $\text{Ind}(G)$ изоморфан барицентричкој подели K_1 комплекса K , па је $K \approx \text{Ind}(G)$. За нас је интересантно то што сваку триангулисану многострукост можемо триангулисати до барицентричке поделе тако да добијемо комплекс независности. У глави 2 ове дисертације разматрамо да ли сваку многострукост можемо видети и као комплекс упаривања. Испоставља се да је одговор у већини случајева одричан, тј. комплекси упаривања чине доста мању фамилију, што је и очекивано с обзиром на везу (1.2.1).

Комплекси независности и упаривања су значајни објекти који су доста изучавани, о чему говоре многобројне референце и резултати које смо навели у Уводу. Ова дисертација је великим делом упућена на комплексе упаривања, па овде кратко понављамо да што се ових комплекса тиче, најзначајнији резултати се односе на комплексе упаривања графова K_n , $K_{m,n}$, шума, путева, циклуса, као и неких случајева решетки (*grid graphs*). Лепа прегледна излагања дају рад [97] и књига [58].

У глави 3 ћемо се бавити испитивањем комплекса упаривања неких врста дрвета, па ћемо као полазну тачку користити теорему из рада [73], која каже да ако је G шума, онда је комплекс упаривања $M(G)$ или контрактибилан или хомотопски еквивалентан букету сфера. Што се тиче сфера у овом букету, не постоји формула која одређује њихове димензије у општем случају. Изузетак су неке специфичне класе дрвета, као што су путеви.

Пример 1.17. (Комплекс упаривања пута P_n)

Директно се проверава да за мале вредности n имамо следеће комплексе упаривања $M(P_n)$: $M(P_2) = P_1 = *$, $M(P_3) = 2P_1 = S^0$, $M(P_4) = P_2 \sqcup P_1 \simeq S^0$, $M(P_5) = P_4 \simeq *$, $M(P_6) \simeq S^1$, $M(P_7) \simeq S^1$. Генерално, Козлов [64, став 4.6] је показао да $M(P_n)$ има следећи хомотопски тип:

$$M(P_n) \simeq \begin{cases} S^{\lceil \frac{n-4}{3} \rceil}, & n \equiv 0, 1 \pmod{3}, \\ *, & n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Истом техником као за путеве, Козлов је показао да следећи резултат важи за циклусе.

Пример 1.18. (Комплекс упаривања циклуса C_n)

За мале n комплекси $M(C_n)$ се одређују директно: $M(C_3) = 3P_1 = S^0 \vee S^0$, $M(C_4) = 2P_2 \simeq S^0$, $M(C_5) = C_5 \approx S^1$, $M(C_6) \simeq S^1 \vee S^1$, $M(C_7) \simeq S^1$. На пример, комплекс $M(C_6)$ можемо видети посматрајући C_6 као подграф графа G приказаног на слици 6 који не садржи ивицу \bar{c} . Самим тим, на истој слици комплекс $M(C_6)$ учавамо као поткомплекс комплекса $M(G)$ који се добија изbacивањем темена c и симплекса који га садрже, за који примећујемо да је хомотопски еквивалентан букету две кружнице.

У општем случају, Козлов [64, став 5.2] је показао да важи:

$$M(C_n) \simeq \begin{cases} S^{\lceil \frac{n-4}{3} \rceil}, & n \equiv 1, 2 \pmod{3}, \\ S^{\lceil \frac{n-4}{3} \rceil} \vee S^{\lceil \frac{n-4}{3} \rceil}, & n \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

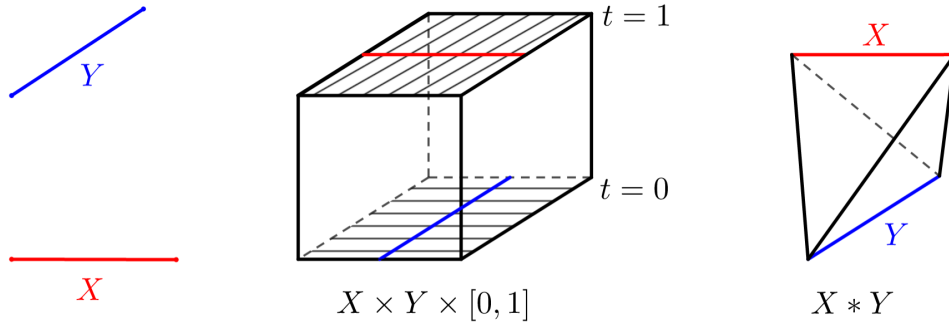
1.3 Конструкција споја простора

На самом почетку дефинишемо спој произвољних тополошких простора, али ћемо нешто касније дати дефиницију прилагођену симплицијалним комплексима, на коју ћемо се позивати у дисертацији. Поглавље је базирано на стандардној литератури [45] и [74].

Дефиниција 1.19. (Тополошки спој) Нека су X и Y тополошки простори. *Спој* $X * Y$ се дефинише као количнички простор производа $X \times Y \times [0, 1]$, који је посечен по релацији еквиваленције \sim задатом идентификацијама:

$$(x, y, 0) \sim (x', y, 0) \text{ и } (x, y, 1) \sim (x, y', 1), \text{ за све } x, x' \in X \text{ и све } y, y' \in Y.$$

На пример, за $X = Y = [0, 1]$, спој $X * Y$ добијамо тако што у коцки $X \times Y \times [0, 1]$ две супротне стране скупимо дуж датих идентификација (слика 7). Примећујемо да $X * Y$ можемо видети као тетраедар, тј. као скуп свих сегмената који повезују тачке дужи X са тачкама дужи Y .



Слика 7. Спој два сегмента.

Генерално, спој $X * Y$ „на крајевима” садржи копије простора X и Y , и може се видети као скуп свих сегмената који повезују тачке из X са тачкама из Y [74, став 4.2.4]. На тај начин се свака тачка (тј. класа) $[(x, y, t)] \in X * Y$, $t \in [0, 1]$, може написати у облику формалне линеарне комбинације

$$tx \oplus (1 - t)y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad t \in [0, 1],$$

при чему подразумевамо идентификације $0x \oplus 1y = y$ и $1x \oplus 0y = x$ (тачно тако добијамо копије X и Y „на крајевима”). Аналогно се спој n простора $X_1 * \dots * X_n$ ($n \geq 2$) може видети као скуп формалних сума:

$$t_1x_1 \oplus \dots \oplus t_nx_n = \sum_{i=1}^n t_ix_i, \quad \text{где је } x_i \in X_i, \quad t_i \in [0, 1] \text{ и } t_1 + \dots + t_n = 1,$$

при чему се изостављају сви чланови облика $0x_i$.

У случају када су простори X и Y симплицијални комплекси, на споју се уочава природна структура симплицијалног комплекса. Заправо, често се прво дефинише спој апстрактних симплицијалних комплекса, да би се затим показало да се ова конструкција подудара са тополошким спојем полиедара посматраних комплекса (видети [74]). У сваком случају, за примене у овој дисертацији је важно да спој симплицијалних комплекса има следећи комбинаторни облик, па то издвајамо у дефиницију на коју ћемо се касније позивати.

Дефиниција 1.20. (Спој симплицијалних комплекса) Нека су K и L апстрактни симплицијални комплекси. *Спој* $K * L$ је симплицијални комплекс на скупу темена $V(K) \sqcup V(L)$, дефинисан на следећи начин

$$K * L = \{\tau \sqcup \sigma \mid \tau \in K \text{ и } \sigma \in L\}.$$

Напоменимо да иако K и L не морају бити дисјунктни, они се у дефиницији посматрају као такви. Формално, теменима комплекса K можемо придружити другу координату 1, а теменима из L другу координату 2, па за све $\sigma \in K$ и $\tau \in L$, под унијом $\sigma \cup \tau$ заправо подразумевамо скуп $(\sigma \times \{1\}) \cup (\tau \times \{2\})$.

Аналогно се дефинише спој n симплицијалних комплекса K_1, \dots, K_n :

$$K_1 * \dots * K_n = \{\sigma_1 \sqcup \dots \sqcup \sigma_n \mid \sigma_i \in K_i \text{ за све } i \in [n]\}.$$

Уколико је у питању спој n копија истог простора K , пишемо K^{*n} .

Конструкција споја има разна лепа својства: поштује класе хомеоморфизма односно изоморфизма комплекса, асоцијативан је, а за полидере симплицијалних комплекса важи $|K * L| \approx |K| * |L|$. Наведимо неколико примера ради илустрације.

- Спој две тачке је дуж, спој три тачке је троугао; генерално, спој n тачака је симплекс димензије $n - 1$, тј. $P_1^{*n} \cong \Delta^{n-1}$.
- Спој k -симплекса и ℓ -симплекса је $(k + \ell + 1)$ -димензионални симплекс.
- Спој n копија S^0 се може видети као омотач кросполитопа димензије n . Наиме, i -ту копију S^0 можемо видети као дискретан скуп од две тачке $+i$ и $-i$. Примећујемо да у споју $(S^0)^{*n}$ скуп темена формира симплекс ако и само ако се у њему ни за једно i не појављују оба темена $+i$ и $-i$. Као што смо видели у примеру 1.5, то је управо комплекс $\diamond^{n-1} \cong S^{n-1}$. Дакле, $(S^0)^{*n} \cong S^{n-1}$.
- *Конус* CX и *суспензија* SX простора X се најчешће дефинишу као количнички простори:

$$CX = (X \times [0, 1]) / (X \times \{1\}), \quad SX = (X \times [0, 1]) / \begin{matrix} (x,0) \sim (x',0), (x,1) \sim (x',1) \\ \forall x, x' \in X \end{matrix},$$

али се лакше могу видети помоћу споја: $CX \approx X * \{*\}$, док $SX \approx S^0 * X$.

У дисертацији ће значајну улогу имати особине споја сфера и дискова, па ћемо их сумирати у следећа два тврђења, од којих се прво тиче тополошких, а друго хомотопских особина.

Тврђење 1.21. *За спој сфера и дискова важе следеће тополошке еквиваленције:*

- $S^m * S^n \approx S^{m+n+1}$,
- $S^m * D^n \approx D^{m+n+1}$,
- $D^m * D^n \approx D^{m+n+1}$,

за све $m, n \in \mathbb{N}_0$. Додатно, ако простори са леве стране имају структуре комплекса, онда и њихов спој има структуру комплекса која је дата спојем.

На основу прве релације претходног става индуктивно следи:

$$S^{a_1} * S^{a_2} * \dots * S^{a_k} \approx S^{a_1 + \dots + a_k + k - 1}, \text{ за све } k \geq 2 \text{ и } a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}_0.$$

Познато је да се спој лепо слаже са хомотопском еквиваленцијом, тј. важи импликација: $X \simeq X', Y \simeq Y' \implies X * Y \simeq X' * Y'$. Такође, при неким елементарним условима, спој је дистрибутиван у односу на букет (при хомотопској еквиваленцији). Овде наводимо одговарајуће тврђење за сфере.

Тврђење 1.22. Нека су дате сфере S^{a_i} , $i = 1, \dots, k$ и S^{b_j} , $j = 1, \dots, \ell$ ($a_i, b_j \geq 0$, $\forall i, j$). Тада важи:

$$(S^{a_1} \vee \dots \vee S^{a_k}) * (S^{b_1} \vee \dots \vee S^{b_\ell}) \simeq \bigvee_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, \ell}} S^{a_i+b_j+1}.$$

Специјално, за суспензију букета сфера важи:

$$S(S^{a_1} \vee \dots \vee S^{a_k}) \simeq \bigvee_{i=1, \dots, k} S^{a_i+1}.$$

Хомотопска својства споја су детаљно описана у литератури [25] и [99].

1.4 Простори са дејством група и еквиваријантна пресликавања

Основни појам еквиваријантне топологије је простор са дејством групе. Нека је X тополошки простор, а G тополошка група. По дефиницији, *лево дејство* групе G на простору X је непрекидно пресликавање $\varphi : G \times X \rightarrow X$ које задовољава услове:

- 1) $\varphi(e, x) = x$, за свако $x \in X$ (e је неутрал групе G),
- 2) $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 g_2, x)$, за све $g_1, g_2 \in G$, и све $x \in X$.

Рестрикције $\varphi_g = \varphi(g, -) : X \rightarrow X$ су хомеоморфизми, па се претходни услови краће записују као $\varphi_e = 1_X$ и $\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \varphi_{g_1 g_2}$. Пар (X, φ) (или сам простор X) се назива (*леви*) G -простор, а дејство елемента $g \in G$ на $x \in X$ се краће означава са $\varphi_g(x)$ или $g \cdot x$. По аналогји са теоријом група, и код тополошког дејства можемо посматрати *простор орбита* X/G и природну пројекцију $\pi : X \rightarrow X/G$. Сва дејства у овој тези су дејства коначних (дискретних) група, па ћемо у наставку подразумевати да је група G коначна.

Потпуно аналогно се дефинише и *десно дејство* групе G на X , као непрекидно пресликавање $X \times G \rightarrow X$, $(x, g) \mapsto x \cdot g$, које задовољава услове $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 g_2)$ и $x \cdot e = x$. Ако је $(g, x) \mapsto g \cdot x$ лево дејство, онда је са $(x, g) \mapsto g^{-1} \cdot x$ дефинисано једно десно дејство. Уколико није другачије наглашено, подразумева се да говоримо о левом дејству, а називамо га само *дејство*.

Ако је X симплицијални (ћелијски) комплекс, и ако су сви хомеоморфизми φ_g симплицијална (односно ћелијска) пресликавања, онда X називамо *симплицијалним (ћелијским) G -комплексом*. За нашу примену су посебно важна такозвана *слободна дејства*. То су дејства код којих за сваки елемент $g \in G$ различит од неутрала важи да хомеоморфизам φ_g нема фиксних тачака.

У класи G -простора значајна су пресликавања која поштују дејство групе G . Наиме, ако (X, φ) и (Y, ψ) два G -простора, за непрекидно пресликавање $f : X \rightarrow Y$ кажемо да је *G -еквиваријантно* ако за свако $g \in G$ важи $f \circ \varphi_g = \psi_g \circ f$, тј. за све $x \in X$ важи $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$. Уколико постоји еквиваријантно пресликавање из

простора X у простор Y , онда користимо ознаку $X \xrightarrow{G} Y$. Можемо рећи да еквиваријантна топологија проучава просторе са дејством групе и еквиваријантна пресликавања међу њима.

Сада ћемо направити кратак преглед неких примера дејства група, са нагласком на дејства која ћемо користити у овој дисертацији.

- Вероватно најпознатији пример дејства групе је антиподално дејство групе $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ на сфери S^n : неутрал 0 дејствује као идентичко пресликавање, док 1 дејствује као антиподално пресликавање $\varphi_1 : x \mapsto -x$. Ово је и пример слободног дејства јер антиподално пресликавање на сфери нема фиксних тачака. Користећи ово дејство можемо формулисати еквивалент Борсук-Уламове теореме у терминима еквиваријантне топологије. Ова позната теорема тврди да за свако непрекидно пресликавање $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ постоји тачка $x_0 \in S^n$ таква да важи $f(x_0) = f(-x_0)$. Једноставно се показује да је ова теорема еквивалентна тврђењу да не постоји пресликавање $h : S^n \rightarrow S^{n-1}$ које је антиподално, тј. пресликавање које задовољава $h(-x) = -h(x)$, за све $x \in S^n$ [74, теорема 2.1.1]. Другим речима, Борсук-Уламова теорема тврди:

не постоји \mathbb{Z}_2 -еквиваријантно пресликавање из сфере S^n у сферу S^{n-1} .

Пример Борсук-Уламове теореме илуструје како је могуће резултате из дискретне геометрије или тополошке комбинаторике формулисати у терминима еквиваријантне топологије.

- Осим групе \mathbb{Z}_2 , важна су дејства и осталих цикличних група. Свако дејство групе \mathbb{Z}_n је одређено дејством јединице, тј. хомеоморфизмом φ_1 , јер за све k важи $\varphi_k = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_1$. Специјално, за прост број p важи да је дејство групе \mathbb{Z}_p слободно ако и само ако је дејство генератора φ_1 слободно [74, тврђење 6.1.3]. Елементаран пример слободног дејства групе \mathbb{Z}_n је дејство на кружници S^1 , где генератор дејствује као ротација за угао $\frac{2\pi}{n}$.
- Свака група дејствује на њој самој помоћу множења, при чему када групу G посматрамо као простор, подразумевамо да је то дискретан скуп од $|G|$ тачака. Дејство дефинишемо на следећи начин: за $g, h \in G$, дејство елемента g на елементу h је $\varphi_g(h) := gh$.
- Ако су X_1, \dots, X_n произвољни G -простори ($n \in \mathbb{N}$), на природан начин можемо дефинисати дејство групе G на њиховом производу и споју, тако што на свакој компоненти уочимо одговарајуће дејство. Прецизније, за $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ и $g \in G$ дефинишемо:

$$g \cdot (x_1, \dots, x_n) := (g \cdot x_1, \dots, g \cdot x_n),$$

док за $\sum_{i=1}^n t_i x_i \in X_1 * \dots * X_n$ ($\sum_{i=1}^n t_i = 1$, $x_i \in X_i$ и $t_i \geq 0$ за све i) имамо:

$$g \cdot \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right) := \sum_{i=1}^n t_i (g \cdot x_i).$$

- За произвољан тополошки простор X можемо дефинисати дејство симетричне групе Σ_n на n -тоструком производу X^n , као и на n -споју X^{*n} . Наиме, за произвољну пермутацију $\pi \in \Sigma_n$ и $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ дефинишемо

$$\varphi_\pi(x_1, \dots, x_n) := (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}),$$

а за произвољан елемент споја $\sum_{i=1}^n t_i x_i \in X^{*n}$:

$$\varphi_\pi \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i \right) := \sum_{i=1}^n t_{\pi(i)} x_{\pi(i)}.$$

Очигледно, ни једно ни друго дејство групе Σ_n није слободно. Често је корисно посматрати наслеђена дејства, добијена смањивањем простора или групе, која су слободна. У случају производа, можемо посматрати потпростор свих n -торки из X^n са свим различитим координатама:

$$F(X, n) := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \text{ за све } i \neq j\}.$$

Овај простор се назива *конфигурациони простор n -торки тачака*. Одговарајуће дејство групе Σ_n на $F(X, n)$ јесте слободно, јер смо тачно избацили све n -торке за које постоји нетривијална пермутација која их оставља фиксним.

Такође, често се користи дејство цикличне подгрупе $\mathbb{Z}_n < \Sigma_n$ генерисане пермутацијом $\pi(1, 2, \dots, n) = (2, 3, \dots, n, 1)$. Дакле, генератор групе \mathbb{Z}_n дејствује на X^n на следећи начин:

$$\varphi_\pi(x_1, x_2, \dots, x_n) := (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1).$$

Посматрајмо случај када је $n = p$ прост број. Дејство групе \mathbb{Z}_p на производу X^p није слободно, али постаје слободно када из X^p избацимо *дијагоналу*:

$$\Delta = \{(x_1, \dots, x_p) \in X^p \mid x_1 = \dots = x_p\}.$$

Наиме, већ смо поменули да је дејство групе \mathbb{Z}_p слободно ако и само ако генератор дејствује слободно, што се једноставно проверава. Дакле,

$$\text{за прост број } p, X^p \setminus \Delta \text{ је слободан } \mathbb{Z}_p\text{-простор.} \quad (1.4.1)$$

Ово дејство ће имати веома значајну улогу у теоремама везаним за Кнастеров проблем у глави 6.

Веома сличну конструкцију имамо и за p -спој X^{*p} у случају када је p прост број. Као и код производа, посматрамо дејство подгрупе $\mathbb{Z}_p < \Sigma_p$ генерисане пермутацијом $\varphi_\pi(x_1, x_2, \dots, x_n) := (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$, која циклично помера координате споја. Ово дејство није слободно, па посматрамо потпростор споја X^{*p} који се назива *умањени p -спој*:

$$X_{\Delta}^{*p} = X^{*p} \setminus \left\{ \frac{1}{n}x \oplus \frac{1}{n}x \oplus \dots \oplus \frac{1}{n}x \mid x \in X \right\}. \quad (1.4.2)$$

Сада се једноставно показује да на умањеном споју X_{Δ}^{*p} група \mathbb{Z}_p дејствује слободно. Напоменимо да се поред овог умањеног споја, у случају када је X симплицијални комплекс, дефинише још неколико врста умањеног споја, које омогућавају слободно дејство и неких других група (видети [74, деф. 6.3.1]). Ова конструкција се показала изузетно корисном у тополошкој комбинаторици.

1.5 „Конфигурациони простор - тест пресликавање” метод

Главна идеја метода „конфигурациони простор - тест пресликавање” је садржана у следећем питању:

Како трансформисати проблем из дискретне геометрије или комбинаторике у проблем еквиваријантне топологије?

Изложимо укратко основне кораке, а детаљна анализа се може наћи у радовима Живаљевића [104] и [107].

Претпоставимо да желимо да докажемо да постоји нека конфигурација тачака у простору, граф, или скуп темена графа, који задовољава одређено својство. Жељену конфигурацију називамо *решењем* посматраног проблема. Да бисмо доказали да решење постоји, поступамо на следећи начин.

- Конструирамо тополошки простор X чији елементи на неки начин означавају све могуће кандидате за решење. Простор X се назива *конфигурациони простор*.
- Конструирамо непрекидно пресликавање $f : X \rightarrow Y$ у неки пажљиво одабрани простор Y , које треба да проверава да ли је елемент $x \in X$ решење или није. То се постиже тако што уочимо потпростор $Z \subset Y$ за који важи: x је решење нашег проблема ако и само ако важи $f(x) \in Z$. Кодомен Y се назива *тест простор*, а f *тест пресликавање*.
- Уколико претпоставимо да наш проблем нема решење, закључујемо да можемо смањити кодомен, тј. да можемо посматрати рестрикцију $f : X \rightarrow Y \setminus Z$.
- Важно је од почетка бирати просторе X и Y тако да они допуштају дејство неке групе G , а пресликавање f тако да оно буде G -еквиваријантно, чиме добијамо $f : X \xrightarrow{G} Y$, а након тога $f : X \xrightarrow{G} Y \setminus Z$.
- Сада је конфигурација спремна и циљ је методима еквиваријантне топологије показати да не постоји еквиваријантно пресликавање $f : X \xrightarrow{G} Y \setminus Z$. Добијена контрадикција указује на то да f мора узимати неку вредност и у Z , чиме је доказано да постоји решење посматраног проблема.

Постоји више техника различите сложености којима се показује да неко еквиваријантно пресликавање не постоји: неколико теорија индекса, еквиваријантна теорија опструкција, спектрални низови итд. У наредном проглављу ћемо описати две теорије индекса.

1.6 Еквиваријантни индекси G -простора

Генерално говорећи, основна идеја сваке еквиваријантне теорије индекса је придруживање инваријанте $\text{индекс}(X)$ сваком G -простору X , која задовољава такозвано *својство монотоности* у односу на неку релацију поретка \prec , облика:

за све G -просторе X и Y важи: $X \xrightarrow{G} Y \implies \text{индекс}(X) \prec \text{индекс}(Y)$, или

за све G -просторе X и Y важи: $X \xrightarrow{G} Y \implies \text{индекс}(Y) \prec \text{индекс}(X)$.

Даље се развијају технике за рачунање ове инваријанте, које омогућују да се независним рачунањем индекса простора X и Y утврди да еквиваријантно пресликавање из X у Y не постоји.

Основни еквиваријантни индекс је *нумерички индекс*, па ћемо најпре укратко описати овај појам. Затим ћемо нешто више пажње посветити доста захтевнијем *кохомолошком индексу*, који се користи у резултатима дисертације у глави 6.

Дефинишимо нумерички индекс простора за коначну групу G . За свако $n \in \mathbb{N}$ уочимо простор $E_n G$ који је коначан симплицијални G -комплекс димензије n , са слободним дејством групе G , и који је $(n-1)$ -повезан [74, деф. 6.2.1]. Показује се да је један пример таквог простора спој $G^{*(n+1)}$, посматран као спој дискретних простора од $|G|$ тачака, са дејством групе G на споју. Нумерички индекс се дефинише у односу на изабрани $E_n G$ простор, али се показује да дефиниција не зависи од избора овог простора.

Дефиниција 1.23. [74, деф. 6.2.3] Нека је X произвољан G -простор. *Нумерички индекс* простора X се дефинише као

$$\text{инд}_G(X) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid X \xrightarrow{G} E_n G\}.$$

Веома леп преглед нумеричког индекса дат је у књизи [74] (глава 6.2). Основно својство је *монотоност*: за свака два G -простора X и Y важи импликација

$$X \xrightarrow{G} Y \implies \text{инд}_G(X) \leq \text{инд}_G Y. \quad (1.6.1)$$

Сасвим неформално говорећи, велики нумерички индекс простора онемогућава постојање одређених еквиваријантних пресликавања из тог простора, док простори са малим индексом не могу бити кодомени одређених еквиваријантних пресликавања. Једна од основних теорема еквиваријантне топологије је такозвана *Долдова теорема*, која се може доказати помоћу нумеричког индекса. Примене ове теореме су веома разноврсне и интересантне, и дале су много значајних резултата.

Теорема 1.24. (Долд [28], [74, теорема 6.2.6]) *Нека је G коначна нетривијална група, X један n -повезан G -простор, а Y ћелијски/симплицијални G -комплекс димензије највише n , на коме група G дејствује слободно. Тада не постоји G -еквиваријантно пресликавање из простора X у простор Y .*

У глави 6 ове дисертације биће представљено уопштење Долдове теореме које користи кохомолошки индекс.

1.6.1 Кохомолошки Фадел-Хусеинијев индекс

Кохомолошки индекс простора су дефинисали Е. Фадел и С. Хусеини [34] у вези са теоријем критичних тачака. У најопштијем облику, овај појам је дефинисан за компактне Лијеве групе G , паракомпактне парове G -простора (X, A) и мултипликативне кохомолошке теорије. Међутим, овде ћемо се ограничити на коначне групе и сингуларну кохомологију, уз даље референце.

Нека је G коначна група. Да бисмо дефинисали кохомолошки индекс, потребно нам је *универзално G -раслојење* $G \rightarrow EG \rightarrow BG$ [88, поглавље I.8]. Простор EG је контрактибилан слободан G -комплекс. Конструира се као директни лимес спојева G^{*n} (које користимо за дефиницију 1.23 нумеричког индекса):

$$EG = \operatorname{colim}_{n \geq 1} G^{*n} = G * G * G * \dots .$$

Елементи простора EG су формалне суме облика

$$\sum_{i \geq 1} t_i g_i, \text{ где за све } i \text{ важи } t_i \in [0, 1], g_i \in G, \sum_{i \geq 1} t_i = 1 \text{ и скуп } \{i \mid t_i \neq 0\} \text{ је коначан.}$$

Иако смо рекли да се најчешће подразумева да је дејство лево, у овој конструкцији се стандардно узима десно дејство групе G на простору EG (видети [15]). Оно се добија тако што произвољан елемент $g \in G$ дејствује множењем са десне стране:

$$\left(\sum_{i \geq 1} t_i g_i \right) \cdot g := \sum_{i \geq 1} t_i (g_i g).$$

Простор орбита $BG := EG/G$ се назива *класификациони простор групе G* . Пошто је посматрано дејство слободно, свака орбита је облика групе G , па тако добијамо G -раслојење $G \rightarrow EG \rightarrow BG$ (детаљна теорија G -раслојења се може наћи у [88]). На пример, за $G = \mathbb{Z}_2$, имамо $E\mathbb{Z}_2 = \operatorname{colim}_{n \geq 1} (\mathbb{Z}_2)^{*n} = \operatorname{colim}_{n \geq 1} (S^0)^{*n} = \operatorname{colim}_{n \geq 1} S^{n-1} = S^\infty$, док је $B\mathbb{Z}_2 = \mathbb{RP}^\infty$.

Посматрајмо сада произвољан (леви) G -простор X и неки комутативан прстен са јединицом \mathbb{K} . Константно пресликавање $c : X \rightarrow *$ је G -еквиваријантно на тривијалан начин. Уочимо производ ових простора са EG и пројекцију $EG \times X \rightarrow EG$. На простору $EG \times X$ посматрамо такозвано *дијагонално дејство* φ групе G , одређено као производ дејстава на EG и X :

$$\text{за } g \in G \text{ и } (a, x) \in EG \times X \text{ дефинишемо } \varphi_g(a, x) := (a \cdot g, g \cdot x).$$

Тада је посматрана пројекција $EG \times X \rightarrow EG$ једна G -еквиваријантна функција, па је добро дефинисано пресликавање орбита $p : (EG \times X)/G \rightarrow EG/G = BG$. Стандардна ознака за први простор је $X_G := (EG \times X)/G$. Показује се да је p раслојење са фибром X :

$$X \rightarrow X_G \rightarrow BG.$$

Ова конструкција се најчешће назива *Борелова конструкција* [88, глава III] или *Борелова фибрација*. Раслојење p индукује хомоморфизам у кохомологији:

$$p^* : H^*(BG; \mathbb{K}) \rightarrow H^*(X_G; \mathbb{K}).$$

Помоћу хомоморфизма p^* дефинишемо кохомолошки индекс простора X .

Дефиниција 1.25. *Фадел-Хусеинијев кохомолошки индекс G -простора X , са коефицијентима у \mathbb{K} , се дефинише као језгро идеал*

$$\text{Ind}_G(X; \mathbb{K}) := \ker(p^* : H^*(BG; \mathbb{K}) \rightarrow H^*(X_G; \mathbb{K})).$$

Најчешће се ознака прстена подразумева у контексту и пише се само $\text{Ind}_G(X)$.

Напомена 1.26. У случају када је X слободан G -простор, може се показати да друга пројекција $EG \times X \rightarrow X$ (која је G -еквиваријантна) у простору орбита индукује раслојење $EG \rightarrow X_G \rightarrow X/G$. С обзиром на контрактибилност слоја EG , између X_G и X/G постоји слаба хомотопска еквиваленција која је у случају ћелијских комплекса и права хомотопска еквиваленција. Дакле, за слободно дејство G на X , можемо писати $\text{Ind}_G(X; \mathbb{K}) = \ker(p^* : H^*(BG; \mathbb{K}) \rightarrow H^*(X/G; \mathbb{K}))$ [34, напомена 3.15].

Основно својство кохомолошког индекса, које даје неопходан услов за постојање G -еквиваријантних пресликавања, дато је следећом теоремом.

Теорема 1.27. (Монотоност кохомолошког индекса, [34]) *Нека су X и Y простори са дејством групе G . Ако $X \xrightarrow{G} Y$, онда важи $\text{Ind}_G(X) \supset \text{Ind}_G(Y)$.*

За даље изучавање кохомолошког индекса могу се користити радови [34] и [105]. Кохомолошки индекс даје прецизнију класификацију G -простора од ну-меричког и показује се као веома користан алат. Самим тим, важно је знати кохомологије класификационих простора група. Специјално, веома често се појављује кохомологија $H^*(B\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)$ за прост број p .

Теорема 1.28. [88, теорема III.2.5]

- Ако је $p \neq 2$ прост број, онда важи $H^*(B\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[t] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda[s]$, где је $\deg t = 2$, $\deg s = 1$, а Λ је спољна алгебра над \mathbb{Z}_p ($s^2 = 0$). Дакле, група H^{2i} је генерисана са t^i , док је H^{2i+1} генерисана са $t^i s$.
- За $p = 2$, $H^*(B\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t]$, где је $\deg t = 1$.

Примера ради, илуструјмо како једноставном применом кохомолошког индекса можемо доказати значајну Борсук-Уламову теорему. Наиме, познато је да је индекс сфере (са одговарајућим коефицијентима) облика идеала $\text{Ind}_{\mathbb{Z}_2}(S^n; \mathbb{Z}_2) = \langle t^{n+1} \rangle \subset \mathbb{Z}_2[t]$. На основу својства идеала $\langle t^n \rangle \not\subset \langle t^{n+1} \rangle$ и монотоности индекса закључујемо да важи $S^n \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} S^{n-1}$, што је управо Борсук-Уламова теорема.

Глава 2

Класификација хомолошких многострукости које су комплекси упаривања

У овој глави ћемо представити класификацију свих хомолошких многострукости, без границе и са границом, које су комплекси упаривања графова. Прецизније, даћемо комплетан одговор на природно питање:

За које графове G је комплекс $M(G)$ хомолошка многострукост?

Цела глава се заснива на оригиналном раду [11], при чему је садржај организован на следећи начин. На самом почетку ћемо увести неколико ознака и издвојити два једноставна својства која ћемо често користити у доказима. У поглављу 2.1 ћемо класификовати графове чији су комплекси упаривања неповезани, и испитаћемо дијаметар комплекса упаривања. Поглавље 2.2 садржи потребне детаље о хомолошким многострукостима. Затим прелазимо на главне резултате. У поглављу 2.3 ћемо дати класификацију сфера димензије 0, 1 и 2, у поглављу 2.4 имамо комплетну класификацију свих хомолошких многострукости без границе, а поглавље 2.5 даје класификацију свих многострукости са границом.

С обзиром на дужину доказа и мноштво детаља, сумирајмо укратко резултате до којих ћемо доћи. Међу хомолошким многострукостима без границе ($\dim \neq 0$), једини комплекси упаривања су торус и комбинаторне сфере свих димензија (теореме 2.18 и 2.19). У случају многострукости са границом, у димензији 2 имамо више могућих комплекса упаривања (теорема 2.24), док ће у вишим димензијама једини комплекси упаривања бити комбинаторни дискови (теорема 2.25).

Прецизирајмо неколико детаља које се односе на целу главу. Свуда ћемо подразумевати да посматрани граф $G = (V, E)$ нема петљи (ивица чији су крајеви у истом темену), вишеструких ивица, ни изолованих темена. Такође, као што смо дефинисали у поглављу 1.2, сагласно ћемо означавати темена комплекса $M(G)$ и одговарајуће ивице графа G :

ивици \bar{v} графа G одговара теме v комплекса $M(G)$.

У складу са овом ознаком, ако је дат симплекс $\sigma = \{v_1, \dots, v_k\} \in M(G)$, онда са $\bar{\sigma}$ означавамо одговарајући скуп ивица $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ графа G (које чине упаривање).

Дефиниција 2.1. Нека је \bar{v} ивица графа G . Тада са $G_{\bar{v}}$ означавамо подграф графа G састављен од свих ивица које нису суседне ивици \bar{v} :

$$E(G_{\bar{v}}) := \{\bar{e} \in E(G) \mid \bar{e} \cap \bar{v} = \emptyset\}.$$

Аналогно, ако је $\bar{\sigma}$ подграф графа G , онда са $G_{\bar{\sigma}}$ означавамо подграф графа G састављен од свих ивица које нису суседне ниједној ивици из $\bar{\sigma}$:

$$E(G_{\bar{\sigma}}) := \{\bar{e} \in E(G) \mid (\forall \bar{v} \in \bar{\sigma}) \bar{e} \cap \bar{v} = \emptyset\}.$$

Ради једноставнијег записа, у неким случајевима ћемо граф идентификовати са његовим скупом ивица. У наставку ће нам бити потребни појмови индукованог подграфа и индукованог поткомплекса. *Индуковани подграф H* графа G се добија избором подскупа темена $V(H) \subset V(G)$, док се за ивице подграфа H узимају све *индуковане ивице*, тј. ивице чија су оба краја у $V(H)$:

$$E(H) := \{\{x, y\} \in E(G) \mid x, y \in V(H)\}.$$

Слично, кажемо да је N *индуковани поткомплекс* комплекса M ако је N рестрикција комплекса M на неком подскупу темена $V(N) \subset V(M)$:

$$N = \{\sigma \in M \mid \sigma \subset V(N)\}.$$

Следећа једноставна чињеница директно следи из дефиниција.

Тврђење 2.2. Нека је $M = M(G)$ комплекс упаривања, а N индуковани поткомплекс на скупу темена $V(N) = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V(M)$. Тада је N комплекс упаривања подграфа од G задатог ивицама $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$.

Напомена 2.3. Подграф задат ивицама $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ у тврђењу 2.2 не мора бити индуковани подграф графа G .

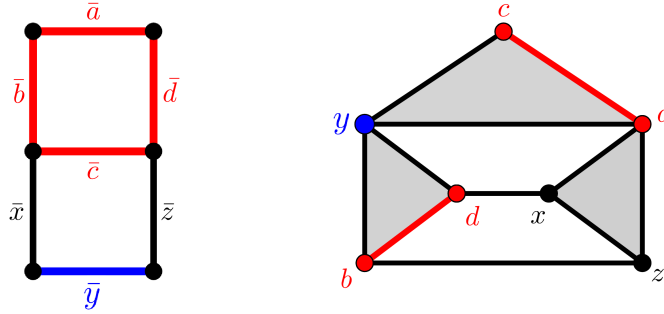
Сада можемо доказати прву од две поменуте корисне леме.

Лема 2.4. (Лема о линку) Нека је $\sigma \in M(G)$ произвољан симплекс. Тада је линк $\text{Lk}_{M(G)} \sigma$ индуковани поткомплекс, и он је једнак комплексу упаривања подграфа $G_{\bar{\sigma}}$:

$$\text{Lk}_{M(G)} \sigma = M(G_{\bar{\sigma}}).$$

Доказ. Покажимо прво да је $\text{Lk}_{M(G)} \sigma$ индуковани поткомплекс. Нека су w_1, \dots, w_k темена у линку $\text{Lk}_{M(G)} \sigma$ за које симплекс $\tau = \{w_1, \dots, w_k\}$ припада комплексу $M(G)$. Треба доказати да тада важи и $\tau \in \text{Lk}_{M(G)} \sigma$. Пошто $\tau, \sigma \in M(G)$, онда одговарајући скупови ивица $\bar{\tau}$ и $\bar{\sigma}$ чине упаривања графа G . Такође, како сва темена w_i припадају $\text{Lk}_{M(G)} \sigma$, онда ниједна ивица \bar{w}_i није суседна ниједној од ивица подграфа $\bar{\sigma}$. Закључујемо да скуп $\bar{\sigma} \cup \bar{\tau}$ чини упаривање графа G , па важи $\sigma \cup \tau \in M(G)$. Дакле, $\tau \in \text{Lk}_{M(G)} \sigma$, па је линк $\text{Lk}_{M(G)} \sigma$ заиста индукован поткомплекс. Даље, знамо да је онда он једнак комплексу упаривања подграфа на ивицама које одговарају теменима $\text{Lk}_{M(G)} \sigma$, а то су тачно оне ивице које нису суседне ниједној од ивица подграфа $\bar{\sigma}$. Дакле, важи $\text{Lk}_{M(G)} \sigma = M(G_{\bar{\sigma}})$. \square

Слика 8 приказује један пример графа G и комплекса $M(G)$. За ивицу \bar{y} , подграф $G_{\bar{y}}$ је састављен од ивица $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и \bar{d} . Са друге стране, линк темена y је састављен од ивица ac и bd , што је тачно комплекс упаривања подрагафа $G_{\bar{y}}$.



Слика 8. Подграф $G_{\bar{y}}$ и поткомплекс $\text{Lk}_{M(G)} y = M(G_{\bar{y}})$.

Друга елементарна лема се односи на комплексе упаривања неповезаних графова.

Лема 2.5. (Лема о споју) *Ако је G дисјунктна унија графова G_1 и G_2 , тј. $G = G_1 \sqcup G_2$, онда важи*

$$M(G) = M(G_1) * M(G_2).$$

*Обрнуто, ако је комплекс $M(G)$ облика споја $M(G) = M_1 * M_2$ два непразна симплицијална комплекса M_1 и M_2 , онда постоје (непразни) графови G_1 и G_2 такви да је $G = G_1 \sqcup G_2$, $M_1 = M(G_1)$ и $M_2 = M(G_2)$.*

Доказ. Тврђење директно следи из дефиниције 1.20 споја симплицијалних комплекса и дефиниције комплекса упаривања. \square

2.1 Повезаност и дијаметар комплекса упаривања

Директно из леме о споју 2.5 примећујемо да ако граф G није повезан, онда је његов комплекс упаривања сигурно повезан комплекс. Зато је природно поставити питање који графови имају неповезан комплекс упаривања. У овом поглављу ћемо дати одговор на то питање, а затим ћемо одредити које вредности може узимати дијаметар комплекса упаривања.

Теорема 2.6. *Комплекс упаривања $M(G)$ није повезан ако и само ако $G \in \{C_4, K_4\}$, или G садржи ивицу која је суседна свим осталим ивицама, при чему је $|E(G)| \geq 2$.*

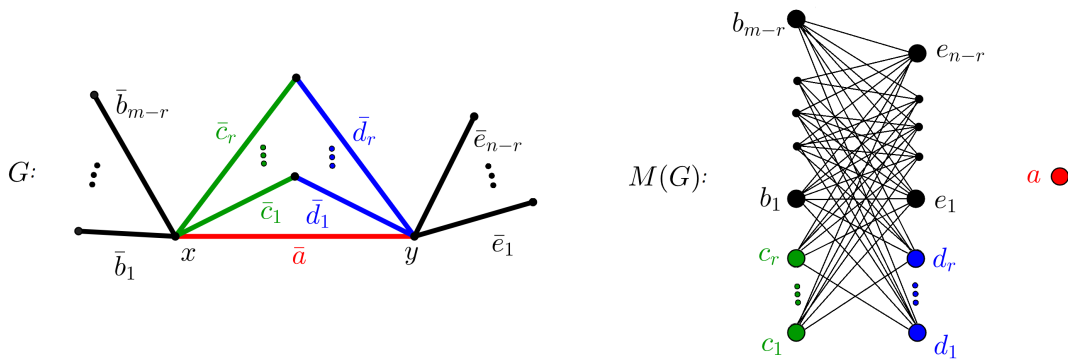
Доказ. (\Leftarrow) Једноставно проверавамо да важи $M(C_4) = 2P_2$ (пр. 1.18) и $M(K_4) = 3P_2$. Ако G садржи ивицу \bar{v} која је суседна свим осталим ивицама, онда је v изоловано теме комплекса $M(G)$ (који због услова $|E(G)| \geq 2$ има бар две компоненте повезаности). Дакле, комплекс $M(G)$ је заиста неповезан у овим случајевима.

(\Rightarrow) Претпоставимо да је $M(G)$ неповезан комплекс упаривања и да је M_1 једна његова компонента повезаности. Нека је $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ скуп тема поткомплекса M_1 , а $\{v_1, v_2, \dots, v_\ell\}$ скуп преосталих тема комплекса $M(G)$ ($\ell \geq 1$). Посматрајмо одговарајуће ивице $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k\} \cup \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_\ell\}$ графа G . Пошто у комплексу $M(G)$ не постоји ниједна ивица између компоненте M_1 и остатка $M(G)$, закључујемо да је свака ивица \bar{u}_i суседна свакој ивици \bar{v}_j у графу G , за све $i \in [k]$, $j \in [\ell]$.

Претпоставимо да у графу G не постоји ниједна ивица која је суседна свим другим ивицама. Тада важи $k \geq 2$ и $\ell \geq 2$. Без умањења општости, можемо претпоставити да ивице \bar{u}_1 и \bar{u}_2 нису суседне, и да ивице \bar{v}_1 и \bar{v}_2 нису суседне (јер знамо да мора постојати ивица која није суседна ивици \bar{u}_1 ; слично за \bar{v}_1). Пошто су сваке две ивице \bar{u}_i и \bar{v}_j суседне, ивице $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_2$ и \bar{v}_2 формирају циклус C_4 . Свака друга ивица \bar{u}_i мора бити суседна обема ивицама \bar{v}_1 и \bar{v}_2 , а свака ивица \bar{v}_j мора бити суседна обема ивицама \bar{u}_1 и \bar{u}_2 . Дакле, граф G има четири темена и садржи циклус C_4 . Пошто не садржи ивицу која је суседна свим другим ивицама, G је или циклус C_4 , или комплетан граф K_4 . Тиме је доказ завршен и у овом смеру. \square

На основу теореме 2.6 једноставном анализом добијамо све графове којима је комплекс упаривања неповезан. То су следећих пет примера.

- (1) $G = C_4$, па је $M(G) = 2P_2$.
- (2) $G = K_4$, па је $M(G) = 3P_2$;
- (3) $G = K_{1,n}$, па је $M(G) = nP_1$ (дискретан скуп од n тачака).
- (4) G је граф који се састоји од ивице $\bar{a} = \{x, y\}$ која има m суседних ивица $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m$ у темену x , и n суседних ивица $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$ у темену y , при чему никоје две ивице \bar{b}_i и \bar{c}_j нису суседне (за све $i \in [m], j \in [n]$). Тада је $M(G) = P_1 \sqcup K_{m,n}$.
- (5) G је граф приказан на слици 9, који се састоји од r троуглова $\bar{a}\bar{c}_i\bar{d}_i$, $i \in [r]$, са заједничком ивицом $\bar{a} = \{x, y\}$, уз додатних $m - r$ ивица $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{m-r}$ у темену x , и додатних $n - r$ ивица $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-r}$ у темену y (као на слици, свака од ивица $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{m-r}$ и $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n-r}$ има једно теме у $\{x, y\}$, а друго теме јој је степена један). Комплекс упаривања графа G је $P_1 \sqcup (K_{m,n} \setminus H)$, где је H скуп од r ивица $\{c_1d_1\}, \dots, \{c_r d_r\}$.



Слика 9. Граф G из примера (5) и његов комплекс упаривања.

Напомена 2.7. Приметимо да су сви неповезани комплекси упаривања димензије 0 или 1 (коначни скупови тачака или горе поменути графови).

Прелазимо на разматрање дијаметра комплекса упаривања. Познато је да се *дијаметар графа* дефинише као најмањи број d такав да између свака два темена графа постоји пут састављен од највише d ивица (тј. пут P_{d+1}). *Дијаметар*

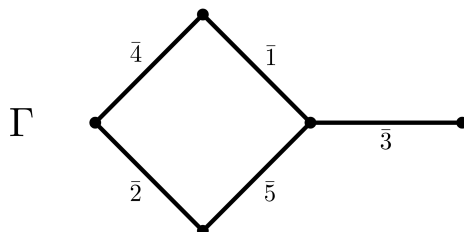
комплекса упаривања се природно дефинише као дијаметар његовог 1-скелетона. Такође, када говоримо о (индукованим) подграфовима у комплексу упаривања, заправо посматрамо одговарајуће (индуковане) подграфике 1-скелетона. Приметимо да пут v_1, v_2, \dots, v_k у комплексу $M(G)$ одговара низу ивица $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ графа G , са својством да сваке две узастопне ивице \bar{v}_i и \bar{v}_{i+1} у низу, нису суседне ивице у графу.

Тврђење 2.8. *Комплекс упаривања графа не садржи индукован пут дужине 5 (тј. не садржи индукован подграф P_6).*

Доказ. Претпоставимо да постоји граф G такав да комплекс $M(G)$ садржи индукован пут P_6 . Означимо темена овог пута редом од 1 до 6. Тада G садржи ивице $\bar{1}$ до $\bar{6}$, при чему важи еквиваленција:

$$\text{ивице } \bar{i} \text{ и } \bar{j} \text{ су суседне} \Leftrightarrow |j - i| \geq 2$$

(имамо тачно десет парова суседних ивица). Посматрајмо ивице $\bar{1}$, $\bar{3}$ и $\bar{5}$. Оне су суседне по паровима, па знамо да или формирају троугао K_3 , или све садрже исто теме, односно формирају $K_{1,3}$. Није могуће да формирају троугао, јер постоји ивица $\bar{2}$ која није суседна ни са $\bar{1}$, ни са $\bar{3}$, а мора бити суседна са $\bar{5}$. Дакле, ивице $\bar{1}$, $\bar{3}$ и $\bar{5}$ морају имати заједничко теме. Даље, ивица $\bar{4}$ је суседна ивици $\bar{1}$, а није суседна ни са $\bar{3}$, ни са $\bar{5}$. Такође, ивица $\bar{2}$ је суседна са $\bar{4}$ и $\bar{5}$, а није суседна ивицама $\bar{1}$ и $\bar{3}$, па закључујемо да ивице $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ и $\bar{5}$ формирају циклус C_4 са додатном ивицом, као на слици 10.



Слика 10. Граф Γ чији је комплекс упаривања пут P_5 .

Сада ивица $\bar{6}$ треба да буде суседна ивицама $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ и $\bar{4}$, а знамо да није суседна ивици $\bar{5}$, што није могуће. Дакле, не постоји граф G такав да комплекс $M(G)$ садржи индукован пут P_6 . \square

Дефиниција 2.9. Граф *змај* је циклус C_4 са додатном ивицом, као на слици 10. У овој глави ћемо га свуда означавати са Γ , а ивицу ван циклуса C_4 називати *истакнутом ивицом*.

Последица 2.10. *Дијаметар сваког комплекса упаривања је мањи од 5.*

Дијаметар комплекса упаривања може узимати све вредности мање од 5 јер су сви путеви дужине мање од 5 комплекси упаривања. Наиме, анализом као у доказу тврђења 2.8 добијамо све графике чији су комплекси упаривања путеви P_i , $i \in [5]$:

$$M(P_2) = P_1, \quad M(2P_2) = P_2, \quad M(P_3 \sqcup P_2) = P_3, \quad M(P_5) = P_4, \quad M(\Gamma) = P_5. \quad (2.1.1)$$

Иако врло једноставни, ови графови ће бити често коришћени у детаљима доказа у наставку, па их зато илуструјемо у табели 1. Тиме смо одредили и све комплексе упаривања који су многострукости са границом димензије 1.

Табела 1. Комплекси упаривања који су путеви P_i , $i \in [5]$.

G	$M(G)$
	P_1
	P_2
	P_3
	P_4
	P_5

2.2 Многострукости

Главни резултати целе ове главе се односе на хомолошке многострукости, па ћемо у овом поглављу разјаснити како тачно дефинишемо тај појам. На почетку, нека је \mathbb{K} неко поље или прстен \mathbb{Z} . Даље подразумевамо да су све хомолошке операције над \mathbb{K} , а ознаку поља изостављамо и подразумевамо. Сви појмови везани за многострукости су дефинисани према раду [60].

Дефиниција 2.11. Дефинишемо следеће појмове:

- *Хомолошка сфера* димензије d је d -димензионални симплицијални комплекс K , такав да за све симплексе $\sigma \in K$ линк $\text{Lk}_K \sigma$ има хомологију $(d - |\sigma|)$ -сфере.
- *Хомолошка многострукост* (без границе) је d -димензионални симплицијални комплекс K , такав да за све непразне симплексе $\sigma \in K$ линк $\text{Lk}_K \sigma$ има хомологију $(d - |\sigma|)$ -сфере.
- *Хомолошка многострукост са границом* је d -димензионални симплицијални комплекс K , такав да за све непразне симплексе $\sigma \in K$ линк $\text{Lk}_K \sigma$ има хомологију или $(d - |\sigma|)$ -сфере или $(d - |\sigma|)$ -диска, и скуп

$$\partial K = \{\sigma \in K \mid \text{Lk}_K \sigma \text{ има хомологију } (d - |\sigma|)\text{-диска}\} \cup \{\emptyset\}$$

је $(d - 1)$ -димензионална хомолошка многострукост.

- *Хомолошки диск* димензије d је d -димензионална хомолошка многострукост са границом K , таква да $\text{Lk}_K \emptyset = K$ има хомологију d -диска.

(Број $|\sigma|$ означава кардиналност апстрактног симплекса, односно број темена у скупу σ .)

Као што је уобичајено, када кажемо само „хомолошка многострукост”, подразумевамо да је без границе. Приметимо да се дефиниција хомолошке сфере и дефиниција хомолошке многострукости разликују само по линку празног скупа; аналогно важи за хомолошки диск и хомолошку многострукост са границом.

Такође, користимо појмове унутрашњости и границе као код тополошких многострукости: симплекс σ је у *унутрашњости* K ако је $\text{Lk}_K \sigma$ хомолошка сфера, а σ је *на граници* K (∂K) ако је $\text{Lk}_K \sigma$ хомолошки диск одговарајуће димензије. Граница d -димензионалне хомолошке многострукости са границом је поткомплекс састављен од свих $(d - 1)$ -димензионалних симплекса који су садржани у тачно једном d -симплексу.

Важно је истаћи да постоје још две сродне класе симплицијалних комплекса које се такође називају многострукостима, па је битно направити разлику. Наиме, за симплицијални комплекс K кажемо:

- K је *симплицијална многострукост* (тј. *триангулисана многострукост*) ако је K триангулација тополошке многострукости M (са или без границе), тј. $K \approx M$ (дефиниција 1.4);
- K је *комбинаторна многострукост* ако је линк сваког непразног симплекса из K део-по-део линеарно хомеоморфан (*PL-homeomorphic*, [59]) или симплексу или граници симплекса одговарајуће димензије.

Једноставно се примећује да је однос ове три класе комплекса описан следећим импликацијама:

$$\begin{aligned} K \text{ је комбинаторна многострукост} \\ \implies K \text{ је симплицијална многострукост} \\ \implies K \text{ је хомолошка многострукост.} \end{aligned}$$

У димензијама 0, 1 и 2, све три дефиниције су еквивалентне, па нећемо правити разлику у наставку. Међутим, то није случај у вишим димензијама. На пример, нека је комплекс K триангулација Поенкареове 3-сфере. K је једна хомолошка 3-сфера над \mathbb{Z} која није симплицијална 3-сфера. Даље, у раду [26] је показано да је двострука суспензија било које хомолошке сфере над \mathbb{Z} тополошка сфера, што значи да је $S^2(K) = S(S(K))$ једна триангулација сфере S^5 , тј. симплицијална многострукост. Уочимо ивицу e која повезује два истакнута темена суспензије у комплексу $S^2(K)$ (једно теме прве суспензије и једно теме друге суспензије). Тада је $\text{Lk}_{S^2(K)}(e) = K \not\approx S^3$. Дакле, $S^2(K)$ је симплицијална многострукост која није комбинаторна.

Значајно је напоменути да ће бити показано да све хомолошке многострукости које се представљају као комплекси упаривања, заправо јесу и комбинаторне многострукости. Посматраћемо многострукости димензије бар 1, јер димензија 0 није интересантна - једно теме P_1 је 0-диск, док је комплекс $2P_1$ заправо 0-сфера, а већ знамо да је дискретан скуп од n тачака комплекс упаривања графа $K_{1,n}$, уз додатни случај $M(K_3) = [3]$.

Сада ћемо формулисати тврђење које ће имати веома значајну улогу у доказима који следе. То је теорема 1 из рада [67] (прилагођена нашем контексту), која се односи на представљање хомолошких многострукости као спој многострукости мањих димензија.

Тврђење 2.12. [67]

1. Нека је K хомолошка многострукост димензије d , таква да важи

$$K \cong \Delta * \Sigma,$$

за неке непразне симплицијалне комплексе Δ и Σ . Тада је K хомолошка сфера димензије d , а Δ и Σ су хомолошке сфере димензија k и $d - k - 1$, редом, за неко $0 \leq k \leq d - 1$.

2. Нека је K хомолошка многострукост са границом димензије d , таква да важи $K \cong \Delta * \Sigma$, за неке непразне симплицијалне комплексе Δ и Σ . Тада је K хомолошки d -диск, а комплекси Δ и Σ су хомолошки дискови или хомолошке сфере, при чему је бар један од њих хомолошки диск. Такође, димензије ових комплекса су k и $d - k - 1$, редом, за неко $0 \leq k \leq d - 1$.

Напоменимо још да ћемо на више места поједноставити запис. Када будемо говорили о сферама и дисковима, подразумеваћемо да су у питању хомолошке сфере и хомолошки дискови (уколико није другачије наглашено). Такође, често ћемо говорити о теменима хомолошких многострукости, која су заправо једночлани симплекси, па ћемо за теме v многострукости M , уместо записа $\{v\} \in M$ користити само $v \in M$.

2.3 Сфере малих димензија

У овом поглављу ћемо класификовати сфере димензија 0, 1 и 2 које су комплекси упаривања. Имамо два разлога за издвајање ових сфера од многострукости које ћемо посматрати у следећем поглављу. Главни разлог је то што овде класификацију 2-сфера добијамо коришћењем својстава планарних графова. Други разлог је то што се испоставља да графови који као комплексе упаривања имају сфере малих димензија, заправо индукују све многострукости осим турса, узимањем одговарајућих дисјунктних унија. Напоменимо да пошто се појмови хомолошке и комбинаторне сфере поклапају у овим димензијама, свуда ћемо користити само појам сфере и подразумевати њену комбинаторну структуру.

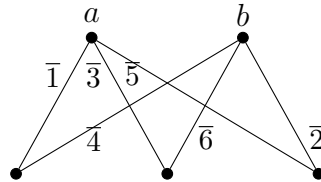
Сфера димензије 0 је скуп од две тачке. То је комплекс упаривања графа који има две ивице које су суседне, тј. $G = P_3$, $M(P_3) = S^0$.

Сфера димензије 1 је циклус C_n , за неко $n \geq 3$. Следећа теорема даје класификацију у овој димензији.

Теорема 2.13. *Комплекси упаривања који су 1-сфере су C_4 , C_5 и C_6 . Графови чији су ово комплекси упаривања су редом $2P_3$, C_5 и $K_{3,2}$.*

Доказ. Нека је G граф такав да је комплекс $M(G)$ један n -циклус C_n за $n \geq 3$. Имамо неколико случајева.

- $n = 3$: Према тврђењу 1.14, комплекс упаривања не може бити C_3 , јер уколико су присутне све три ивице троугла, у комплексу упаривања би морао бити присутан и цео троугао (2-симплекс).
- $n = 4$: Означимо темена циклуса C_4 са 1, 2, 3 и 4, редом. Тада G има четири ивице $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ и $\bar{4}$, при чему су суседне ивице $\bar{1}$ и $\bar{3}$, суседне су ивице $\bar{2}$ и $\bar{4}$, а нема других суседних ивица. Дакле, G је дисјунктна унија два пута, $G = 2P_3$.
- $n = 5$: Поново, означимо темена C_5 циклично са 1, 2, 3, 4 и 5. Граф G садржи одговарајућих 5 ивица, од којих имамо тачно пет суседних парова: $\bar{1}$ и $\bar{3}$; $\bar{3}$ и $\bar{5}$; $\bar{5}$ и $\bar{2}$; $\bar{2}$ и $\bar{4}$; $\bar{4}$ и $\bar{1}$. Примећујемо да је и G циклус, тј. $G = C_5$.
- $n = 6$: Ако означимо темена циклуса $M(G) = C_6$ редом са 1, ..., 6, онда у графу G имамо тачно 9 парова суседних ивица: $\bar{1}$ и $\bar{3}$; $\bar{3}$ и $\bar{5}$; $\bar{5}$ и $\bar{1}$; $\bar{2}$ и $\bar{4}$; $\bar{4}$ и $\bar{6}$; $\bar{6}$ и $\bar{2}$; $\bar{1}$ и $\bar{4}$; $\bar{2}$ и $\bar{5}$; $\bar{3}$ и $\bar{6}$. Знамо да ако су три ивице суседне по паровима, онда оне формирају или K_3 или $K_{1,3}$. На исти начин као у доказу тврђења 2.8, показује се да ивице $\bar{1}$, $\bar{3}$ и $\bar{5}$ морају имати исто заједничко теме; означимо га са a . Аналогно се показује да ивице $\bar{2}$, $\bar{4}$ и $\bar{6}$ морају имати заједничко теме b (слика 11). Помоћу преостала три пара суседних ивица закључујемо које ивице имају заједничка темена различите од a и b : $\bar{1}$ и $\bar{4}$, $\bar{2}$ и $\bar{5}$, $\bar{3}$ и $\bar{6}$. Добијени граф је $G = K_{3,2}$ (слика 11). Дакле, $M(G) = C_6$ ако и само ако $G = K_{3,2}$.



Слика 11. Граф $K_{3,2}$ чији је комплекс упаривања C_6 .

- $n \geq 7$: За $n \geq 7$, циклус C_n садржи индуковани пут P_6 , па према тврђењу 2.8 не може бити комплекс упаривања графа.

Дакле, једини циклуси који су комплекси упаривања су $C_4 = M(2P_3)$, $C_5 = M(C_5)$ и $C_6 = M(K_{3,2})$. \square

Сфера димензије 2

Теорема 2.14. Нека је M сфера димензије 2 за коју постоји граф G такав да важи $M(G) = M$. Тада $G \in \{3P_3, P_3 \sqcup C_5, P_3 \sqcup K_{3,2}\}$, а $M(G)$ је двострука пирамида над циклусом C_n , за $n \in \{4, 5, 6\}$.

Доказ. Нека је G произвољан граф такав да је $M = M(G)$ (комбинаторна) сфера димензије 2. Ако је $v \in M$ теме степена n , онда је линк $Lk_M v$ један n -циклус. Према лемми 2.4 важи $Lk_M v = M(G_v)$, па из теореме 2.13 закључујемо да $n \in \{4, 5, 6\}$. Теорема Еберхарда [44, Поглавље 13.3, теорема 1] тврди да триангулисана 2-сфера мора имати теме степена највише 5. Следећа четири случаја обухватају све могућности.

Случај I : Постоји теме $v \in M$ чији сви суседи имају степен 4.

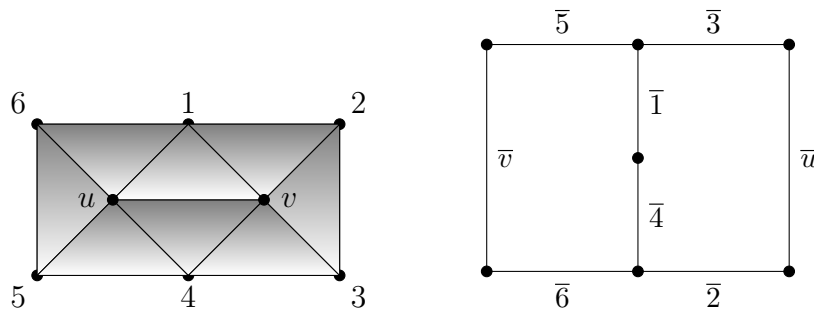
Случај II : Постоје суседна темена u и v таква да важи $\deg u = \deg v = 5$.

Случај III : Постоје суседна темена u и v таква да важи $\deg u = 6, \deg v = 5$.

Случај IV : M не садржи теме степена 5.

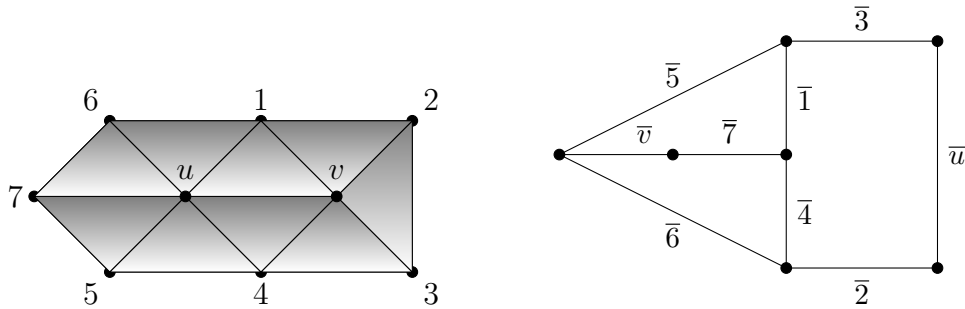
Напоменимо да ће при разматрању случајева приложене скице поткомплекса и подграфова често олакшати праћење детаља.

- **Случај I :** Нека сви суседи темена v имају степен 4. Означимо суседе темена v циклично са $1, \dots, n$, где $4 \leq n \leq 6$, тј. линк темена v је циклус C_n . Покажимо да је M двострука пирамида (суспензија) над C_n . Свака од ивица циклуса C_n је садржана у тачно два троугла, од којих тачно један садржи теме v . Нека је $\{n, 1\}$ ивица троугла $\{n, 1, w\}$, за неко теме $w \neq v$. Приметимо да имамо све 4 ивице које садрже теме 1: $\{v, 1\}$, $\{k, 1\}$, $\{w, 1\}$ и $\{2, 1\}$ (знамо да је $\deg 1 = 4$). Пошто сваки пар суседних ивица припада троуглу у комплексу, троугао $\{1, 2, w\}$ припада M . Другим речима, теме w формира троугао са ивицом $\{1, 2\}$. Понављајући исти поступак, закључујемо да за свако i ивица $\{i, i + 1\}$ формира троугао са теменом w . Дакле, M садржи двоструку пирамиду са базом C_n и врховима v и w . Пошто 2-сфера не може садржати другу 2-сферу као поткомплекс, M је управо ова двострука пирамида. Једноставном анализом закључујемо да су графови који дају двоструке пирамиде над C_4, C_5 и C_6 , управо графови $3P_3, P_3 \sqcup C_5$ и $P_3 \sqcup K_{3,2}$, редом.
- **Случај II :** Пошто важи $\deg u = \deg v = 5$, линкови темена u и v су циклуси C_5 . Означимо њихова темена као на првој слици 12. Тада су подграфови $G_{\bar{v}}$ и $G_{\bar{u}}$ такође циклуси C_5 , са заједничким ивицама $\bar{1}$ и $\bar{4}$: $G_{\bar{v}}$ је циклус $\bar{4}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{u}, \bar{2}$, док је $G_{\bar{u}}$ циклус $\bar{4}, \bar{1}, \bar{5}, \bar{v}, \bar{6}$. Приметимо да су ивице ових подграфова распоређене као на (другој) слици 12. Заиста, ако би ивице $\bar{3}$ и $\bar{6}$ биле суседне, ивица $\bar{6}$ би морала бити суседна једној од ивица $\bar{1}$ и \bar{u} , што није могуће јер M садржи троугао $\{1, u, 6\}$. Дакле, ивице $\bar{3}$ и $\bar{6}$ нису суседне. Слично, ивице $\bar{2}$ и $\bar{5}$ нису суседне, па је подграф од G приказан на слици 12. Због ова два пара несуседних ивица у графу G , комплекс M мора садржати ивице $\{3, 6\}$ и $\{2, 5\}$. Међутим, тада би ивице комплекса M формирале граф који није планаран, што је контрадикција са чињеницом да је M триангулација сфере. Закључујемо да случај II заправо није могућ.



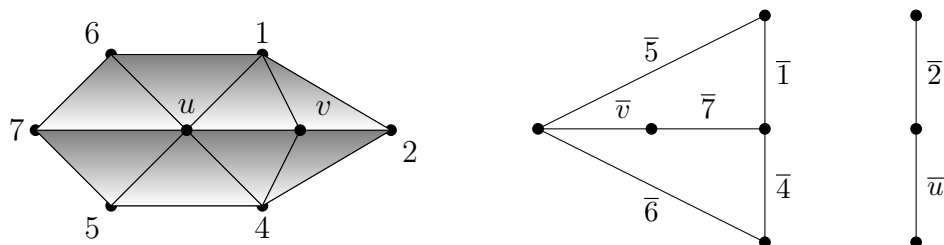
Слика 12. Поткомплекс од M и подграф од G у случају II. [11]

- **Случај III** : Претпоставимо да постоје суседна темена u и v , таква да важи $\deg u = 6$ и $\deg v = 5$ (слика 13). Пошто је $\text{Lk}_M u = C_6$, знамо да је $G_{\bar{u}} = K_{3,2}$, а како је $\text{Lk}_M v = C_5$, онда је $G_{\bar{v}} = C_5$. Као у претходном случају, једноставном анализом добијамо да подграф од G који садржи $G_{\bar{v}}$ и $G_{\bar{u}}$ изгледа као на другом делу слике 13. Тада $\{3, 6\}$ и $\{2, 5\}$ морају бити ивице у M , што није могуће јер би тада ивице комплекса M формирале граф који није планаран. Дакле, ни случај III није могућ.



Слика 13. Поткомплекс од M и подграф од G у случају III. [11]

- **Случај IV** : Претпоставимо да не постоји ниједно теме степена 5. На почетку смо закључили да су сва темена степена 4 или 6, а према теореме Еберхарда мора да постоји бар једно теме v степена 4. Пошто смо случај I већ размотрили, овде можемо претпоставити да теме v има бар једног суседа u степена 6. Нека су темена суседна теменима u и v означена као на слици 14. Одговарајући подграф на другом делу слике добијамо једноставном анализом: ивице $\bar{1}$, \bar{v} , $\bar{4}$, $\bar{5}$, $\bar{7}$ и $\bar{6}$ једнозначно образују $K_{3,2}$; теме 2 је суседно теменима 1, 4 и v , па ивица $\bar{2}$ није суседна ниједној од одговарајућих ивица, али јесте суседна ивици \bar{u} јер темена 2 и u нису суседна у M . Одатле закључујемо да ивица $\bar{2}$ не може бити суседна ниједној од ивица $\bar{5}$, $\bar{6}$ и $\bar{7}$, па у комплексу M морају постојати ивице $\{2, 5\}$, $\{2, 6\}$ и $\{2, 7\}$. Тада M садржи темена и ивице двоструке пирамиде над циклусом 1, 6, 7, 5, 4, v ; са врховима u и 2. На основу тврђења 1.14, M садржи и све троуглове ове двоструке пирамиде, па мора бити управо та пирамида. Специјално, $G = P_3 \sqcup K_{3,2}$.



Слика 14. Поткомплекс од M и граф G у случају IV. [11]

Тиме је доказ теореме завршен. □

Као последицу ове теореме примећујемо да ако је комплекс $M(G)$ једна 2-сфера, онда G није повезан граф. То својство ће важити и у свим вишим димензијама. Штавише, графови који за комплексе упаривања имају многострукости, заправо су дисјунктне уније већ поменутих графова P_3, C_5 и $K_{3,2}$.

2.4 Класификација многострукости без границе

У овом поглављу ћемо одговорити на питање:

Које хомолошке многострукости су комплекси упаривања?

Нека је хомолошка многострукост $M = M(G)$, $\dim M \geq 1$, комплекс упаривања графа G . Посматрамо само повезане многострукости, јер ниједан од неповезаних комплекса упаривања (димензије бар 1) није многострукост (теорема 2.6). У димензији 1, једина хомолошка многострукост је триангулација кружнице:

$$\dim M(G) = 1: \text{ тада је } M(G) = S^1, \text{ док } G \in \{2P_3, C_5, K_{3,2}\}.$$

Поменуते „мале” графове посебно дефинишемо.

Дефиниција 2.15. Графове P_3, C_5 и $K_{3,2}$ називамо *сферним графовима*, а њихов скуп означавамо са

$$\mathcal{SG} = \{P_3, C_5, K_{3,2}\}. \quad (2.4.1)$$

Одмах примећујемо да дисјунктне уније ових графова за комплексе упаривања имају комбинаторне сфере свих димензија.

Тврђење 2.16. *Нека је G дисјунктна унија графова скупа \mathcal{SG} . Тада је $M(G)$ комбинаторна сфера. Прецизније, ако је $G = \ell P_3 \sqcup m C_5 \sqcup n K_{3,2}$ ($\ell, m, n \in \mathbb{N}_0$), онда је комплекс $M(G)$ комбинаторна сфера димензије $\ell + 2m + 2n - 1$.*

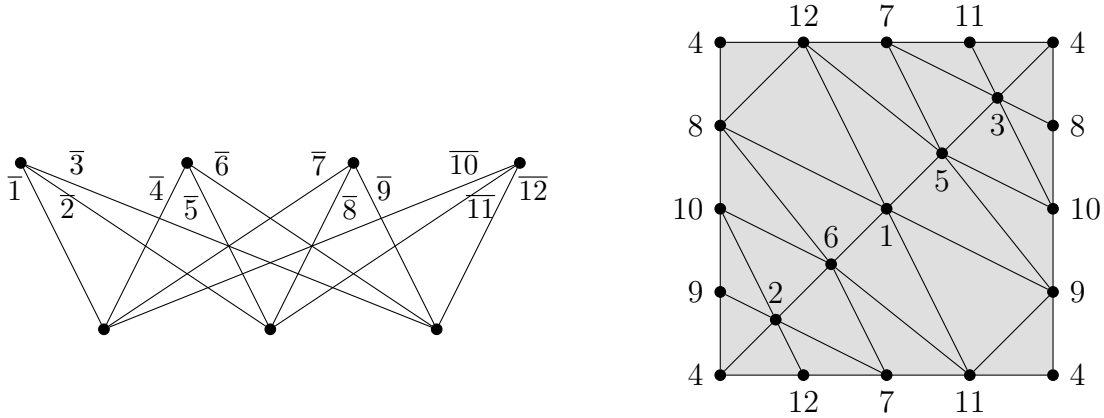
Доказ. Комплекс упаривања графа G је спој ℓ копија сфере S^0 и $m + n$ копија сфере S^1 . Дакле, спој је комбинаторна сфера, а тачну димензију $\ell + 2m + 2n - 1$ добијамо директно, користећи тврђење 1.21. \square

Специјално, још у поглављу 1.2 (слика 5) смо приметили да је комплекс $M(\ell P_3)$ граница ℓ -димензионалног кросполитопа.

Многострукости димензије 2

Ако је $\dim M = 2$, M је комбинаторна многострукост. Теорема 2.14 каже како можемо добити 2-сферу као комплекс упаривања. Међутим, познато је да можемо добити и торус (слика 15).

Тврђење 2.17. [13, стр. 30] *Ако је $G = K_{4,3}$, онда је $M(G)$ триангулација торуса T^2 .*



Слика 15. Граф $K_{4,3}$ и $M(K_{4,3}) = T^2$ (одговарајуће ивице на граници су идентификоване). [11]

У наставку главе ћемо често користити једно познато својство многострукости. Напоменимо да је овде важно да су у питању многострукости без границе.

Ако су M и N затворене и повезане многострукости димензије d за које важи $N \subset M$, онда је $M = N$. Другим речима, повезана и затворена многострукост не садржи повезану и затворену подмногострукост исте димензије.

Покажимо сада да су торус и сфера једине многострукости димензије 2 које су комплекси упаривања.

Теорема 2.18. *Нека је G прост граф такав да је $M(G)$ многострукост димензије 2. Тада важи једна од следећих могућности:*

- (1) $G = K_{4,3}$ и M је триангулација торуса T^2 ,
- (2) $G \in \{3P_3, P_3 \sqcup C_5, P_3 \sqcup K_{3,2}\}$ и M је триангулација сфере S^2 .

Доказ. Претпоставимо најпре да G није повезан граф. Ако је $G = G_1 \sqcup G_2$, при чему су G_1 и G_2 непразни графови, из леме 2.5 следи $M(G) = M(G_1) * M(G_2)$. На основу тврђења 2.12 о представљању многострукости у облику споја, знамо да тада $M(G)$ мора бити 2-сфера. Сви могући графови G су тада одређени у теорему 2.14, чиме добијамо случај (2) ове теореме.

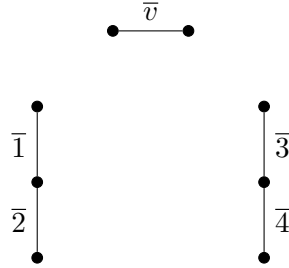
Дакле, даље можемо претпостављати да је G повезан граф. Показаћемо да је једина могућност $G = K_{4,3}$. У доказу ћемо више пута користити линк темена у комплексу и одговарајући подграф графа, Наиме, знамо да за свако теме $v \in M$ важи да је $\text{Lk}_M v$ триангулација кружнице. Са друге стране, важи $\text{Lk}_M v = M(G_{\bar{v}})$ (лема 2.4). На основу теореме 2.13 (о комплексима упаривања који су кружнице) знамо да тада $\text{Lk}_M v$ може бити C_4 , C_5 или C_6 , док је одговарајући подграф $G_{\bar{v}}$ облика $2P_3$, C_5 или $K_{3,2}$, редом. Довољно је размотрити наредна три случаја.

Случај I. За сва темена $v \in M$ важи $\text{Lk}_M v = C_4$.

Случај II. Постоји теме $v \in M$ такво да важи $\text{Lk}_M v = C_5$.

Случај III. Постоји теме $v \in M$ такво да важи $\text{Lk}_M v = C_6$.

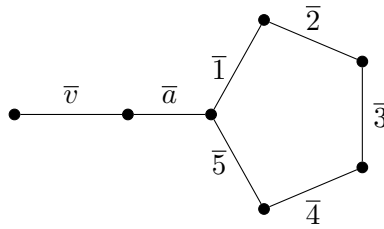
• **Случај I** : У овом случају важи $G_{\bar{v}} = 2P_3$ за свако теме $v \in M$. Ако фиксирамо произвољно теме v , G мора задржати подграф приказан на слици 16. Све остале ивице графа G морају бити суседне ивици \bar{v} .



Слика 16. Подграф у случају I теореме 2.18. [11]

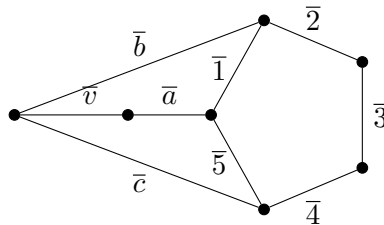
Пошто је G повезан, постоји ивица \bar{a} која повезује \bar{v} и пут P_3 састављен од ивица $\bar{3}$ и $\bar{4}$. Тада $G_{\bar{1}}$ садржи ивице \bar{a} , \bar{v} , $\bar{3}$ и $\bar{4}$; специјално, садржи пут P_4 . Међутим, по претпоставци важи $G_{\bar{1}} = 2P_3$, чиме добијамо контрадикцију. Дакле, овај случај није могућ.

• **Случај II** : Нека је теме v степена 5. Тада граф G садржи ивицу \bar{v} и циклус $G_{\bar{v}} = C_5$ ($\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$) дисјунктан са \bar{v} , док су све остале ивице суседне ивици \bar{v} . Пошто је G повезан, постоји ивица која повезује \bar{v} и циклус C_5 , без умањења општости нека је то ивица \bar{a} приказана на слици 17.



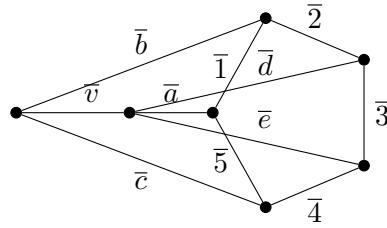
Слика 17. Подграф за случај II теореме 2.18, први део. [11]

Разматрајмо сада подграф $G_{\bar{3}}$. Пошто овај подграф већ садржи \bar{v} , \bar{a} , $\bar{1}$ и $\bar{5}$, једина могућност је $G_{\bar{3}} = K_{3,2}$. Пошто су све преостале ивице суседне ивици \bar{v} , морају постојати ивице \bar{b} и \bar{c} као на слици 18.



Слика 18. Подграф за случај II теореме 2.18. [11]

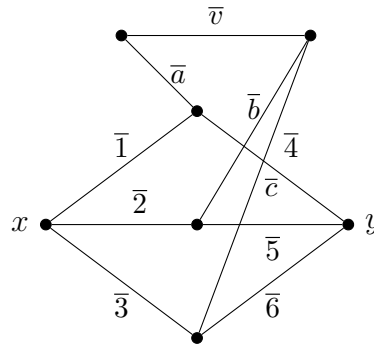
Посматрајући подграфике $G_{\bar{2}}$ и $G_{\bar{4}}$, на исти начин као у претходном делу закључујемо да и они морају бити облика $K_{3,2}$, па постоје ивице \bar{d} и \bar{e} на слици 19. Међутим, тада подграф $G_{\bar{1}}$ садржи троугао $\bar{e}, \bar{d}, \bar{3}$, што је у контрадикцији са могућим облицима $G_{\bar{1}}$, па ни овај случај није могућ.



Слика 19. Подграф за случај II теореме 2.18, са G_2 и G_4 . [11]

• **Случај III**: Нека је $v \in M$ теме степена 6. Тада граф G садржи ивицу \bar{v} и са њом дисјунктан подграф $G_{\bar{v}} = K_{3,2}$, а све остале ивице морају бити суседне са \bar{v} . Означимо темена степена 3 у подграфу $K_{3,2}$ са x и y . Пошто је G повезан, мора постојати ивица која повезује \bar{v} и $K_{3,2}$. Разликујемо случајеве зависно од тога да ли таква ивица садржи неко од темена x и y , или не.

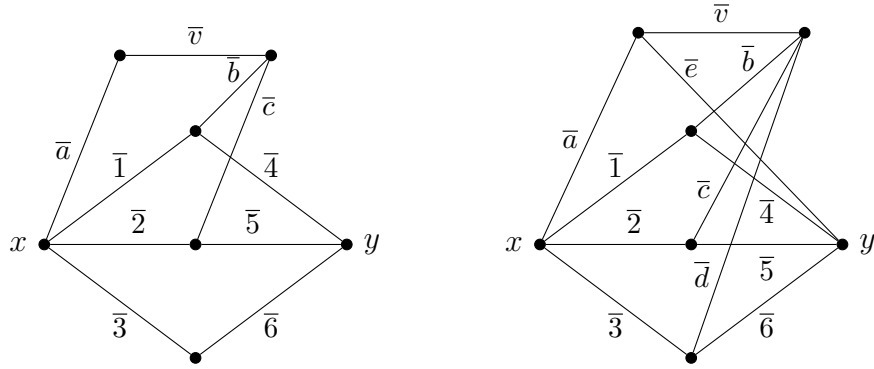
Случај III.1. Не постоји ивица суседна ивици \bar{v} која садржи x или y . Због повезаности графа, тада постоји ивица \bar{a} која повезује неко од темена степена 2 у $K_{3,2}$ са \bar{v} ; без умањења општости можемо претпоставити да је то ивица \bar{a} као на слици 20. Ивице \bar{b} и \bar{c} добијамо следећим закључивањем: пошто $G_{\bar{a}}$ садржи 4-циклус $(\bar{2}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{3})$, мора важити $G_{\bar{a}} = K_{3,2}$, а како све преостале ивице у G садрже неко теме \bar{v} , једина могућност је да постоје ивице \bar{b} и \bar{c} као на слици 20.



Слика 20. Подграф за случај III.1 теореме 2.18. [11]

Посматрајући $G_{\bar{1}}$, видимо да поново мора бити $G_{\bar{1}} = K_{3,2}$, па мора постојати ивица која повезује y и лево теме ивице \bar{v} . Међутим, то је супротно претпоставци у овом случају, па ни овај случај није могућ.

Случај III.2. Нека постоји нека ивица између темена x или y , и неког темена ивице \bar{v} . Без умањења општости можемо претпоставити да постоји ивица \bar{a} као на слици 21 (лево). Као у претходном делу, $G_{\bar{6}}$ мора бити $K_{3,2}$, па постоје ивице \bar{b} и \bar{c} на слици 21 (лево). Такође, подграф $G_{\bar{5}}$, а затим и подграф $G_{\bar{1}}$, мора бити $K_{3,2}$, што даје ивице \bar{d} и \bar{e} , редом, као на слици 21 (десно). Добијени подграф од G је $K_{4,3}$.



Слика 21. Поступно приказан подграф за случај III.2 теореме 2.18. [11]

Пошто је $M(K_{4,3})$ триангулација турса T^2 (тврђење 2.17), а једини начин да T^2 буде подмногострукост од $M(G)$ јесте управо ова (јер су T^2 и $M(G)$ исте димензије), мора да важи $G = K_{4,3}$, што је управо део (1) теореме. Тиме је завршена анализа случајева и доказ је комплетан. \square

Многострукости димензије веће од 2

Појављивање турса у теорему 2.18 би могло навести на претпоставку да се и у вишим димензијама као комплекси упаривања појављују разне многострукости. Међутим, за $d \geq 3$, једина хомолошка d -многострукост која је комплекс упаривања јесте комбинаторна сфера, а графови који је задају су већ уочени у тврђењу 2.16, као што показује следећа теорема.

Теорема 2.19. *Нека је G прост граф такав да је $M(G)$ хомолошка многострукост димензије $d \geq 3$. Тада је G дисјунктна унија сферних графова $\mathcal{SG} = \{P_3, C_5, K_{3,2}\}$, а комплекс $M(G)$ је комбинаторна d -сфера.*

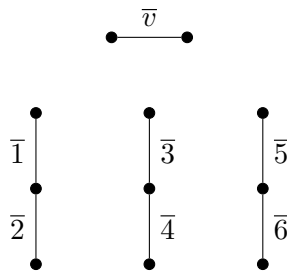
Доказ. Природно би било покушати да се доказ изведе индукцијом, али се одмах види да због појаве турса немамо базу индукције у димензији $d = 2$. Међутим, примећује се да нам заправо за индуктивни корак није потребна цела теорема у претходним димензијама, већ само тврђење за хомолошке сфере. Прецизније, да бисмо доказали теорему у димензији $d \geq 3$, потребно нам је потврђење теореме:

ако је $M(G')$ хомолошка $(d - 1)$ -сфера за неки прост граф G' , онда је G' дисјунктна унија копија сферних графова из \mathcal{SG} .

Ово помоћно тврђење је тачно за $d = 3$ на основу теореме 2.14, па за њега имамо базу индукције. Сада поступамо индуктивно на следећи начин: теорему у димензији d доказујемо претпостављајући да помоћно тврђење важи за све k -сфере, где је $k \in \{2, \dots, d - 1\}$, а ако је $d > 3$, претпостављамо и да цела теорема важи за све $k \in \{3, \dots, d - 1\}$. Доказујући индуктивни корак за теорему у димензији d , доказаћемо и помоћно тврђење у димензији d , па можемо даље индуктивно наставити.

Претпоставимо најпре да је G повезан граф и докажимо да то није могуће. За произвољно теме $v \in M(G)$, линк $\text{Lk}_{M(G)} v$ је хомолошка сфера димензије $(d-1)$ и важи $\text{Lk}_{M(G)} v = M(G_{\bar{v}})$ (лема 2.4). Тада се на основу индуктивне претпоставке подграф $G_{\bar{v}}$ представља као дисјунктна унија сферних графова. Пошто $d-1 \geq 2$, $G_{\bar{v}}$ садржи бар 3 копије пута P_3 , или садржи неки од графова C_5 и $K_{3,2}$, и бар још један сферни граф. Приметимо да $G_{\bar{v}}$ никада не може садржати компоненту повезаности са више од 6 ивица. Разматрамо два случаја.

Случај I: Постоји теме $v \in M(G)$ такво да $G_{\bar{v}}$ садржи три копије пута P_3 . Означимо ивице као на слици 22. Све остале ивице графа G су или дисјунктне са ивицама на слици (припадају остатку $G_{\bar{v}}$), или су суседне са \bar{v} .



Слика 22. Подграф за случај I теореме 2.19. [11]

Пошто је G повезан граф, мора постојати нека ивица \bar{a} која повезује ивицу \bar{v} са левом копијом пута P_3 ($\bar{1}$, $\bar{2}$), као и ивица \bar{b} која повезује \bar{v} са десном копијом P_3 ($\bar{5}$, $\bar{6}$) на слици 22. Међутим, тада $G_{\bar{v}}$ садржи повезан подграф од бар 7 ивица: $\bar{1}$, $\bar{2}$, \bar{a} , \bar{v} , \bar{b} , $\bar{5}$, $\bar{6}$, што није дозвољено. Дакле, овај случај није могућ.

Случај II: Нека је $G_{\bar{v}} = J \sqcup H$, где је $J \in \{C_5, K_{3,2}\}$, $H \neq \emptyset$. Пошто је G повезан, а све остале ивице су суседне ивици \bar{v} , мора постојати ивица \bar{a} која повезује ивицу \bar{v} и неко теме подграфа J . Означимо произвољну ивицу подграфа H са $\bar{1}$. Тада $G_{\bar{1}}$ садржи подграф J , ивицу \bar{v} и ивицу \bar{a} , што је компонента повезаности са бар 7 ивица. Тиме добијамо контрадикцију и у овом случају.

Добијена контрадикција у оба случаја показује да је граф G неповезан, тј. G се представља у облику $G = G_1 \sqcup G_2$, за неке непразне графове G_1 и G_2 , па према леми 2.5 важи $M(G) = M(G_1) * M(G_2)$. Тада на основу тврђења 2.12 закључујемо да су $M(G)$, $M(G_1)$ и $M(G_2)$ хомолошке сфере. Према индуктивној хипотези (за помоћно тврђење које се односи на хомолошке сфере), графови G_1 и G_2 морају бити дисјунктне уније сферних графова из \mathcal{SG} , па такав мора бити и граф G . Дакле, $M(G)$ је заиста комбинаторна сфера (тврђење 2.16). Тиме је завршен доказ индуктивног корака, па и целе теореме. \square

2.5 Класификација многострукости са границом

У овом поглављу ћемо дати комплетан одговор на следеће питање.

Које хомолошке многострукости са границом су комплекси упаривања?

Нека је M хомолошка многострукост са границом, $\dim M \geq 1$, таква да за прост граф G важи $M(G) = M$. Ако је M неповезана многострукост, према последици 2.6 постоје тачно две могућности: за граф $G = C_4$ важи $M(G) = 2P_2$, док је за граф $G = K_4$ имамо $M(G) = 3P_2$. Надаље ћемо посматрати повезане многострукости са границом. За димензију 1, једина повезана хомолошка многострукост са границом је пут, а све путеве који се реализују као комплекси упаривања (и одговарајуће графове) смо одредили у табели 1. То су:

$$M(P_2) = P_1, \quad M(2P_2) = P_2, \quad M(P_3 \sqcup P_2) = P_3, \quad M(P_5) = P_4 \quad \text{и} \quad M(\Gamma) = P_5,$$

где је Γ граф змај (дефиниција 2.9).

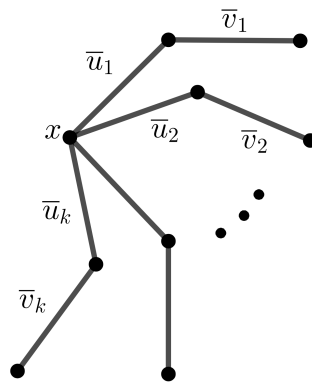
Као што је био случај код многострукости без границе, испоставиће се да се скоро сви посматрани комплекси упаривања добијају од графова који су дисјунктне уније графова из једне фамилије. Да бисмо дефинисали ту фамилију, потребно је да уочимо нову класу графова.

Дефиниција 2.20. За свако $k \in \mathbb{N}$, граф састављен од k копија пута P_3 које све имају једно заједничко крајње теме, назива се *паук* и означава са Sp_k (слика 23).

Граф Sp_k можемо замислити као граф са централним теменом x и k „паукових ногу” дужине 2, које полазе из темена x . Овом дефиницијом смо обухватили и графове P_3 и P_5 , јер важи:

$$\text{Sp}_1 = P_3 \quad \text{и} \quad \text{Sp}_2 = P_5.$$

Напоменимо да се у литератури назив паук чешће користи за општију класу графова, код којих „ноге паука” могу садржати више ивица и бити различите дужине.



Слика 23. Паук Sp_k .

Одредимо комплекс упаривања $M(\text{Sp}_k)$ за $k \geq 2$. Означимо ивице i -те „ноге паука” са \bar{u}_i и \bar{v}_i , где \bar{u}_i садржи централно теме x , као на слици 23. Скуп ивица

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$ је једно максимално упаривање графа Sp_k . Пошто никоје две ивице \bar{v}_i не могу бити у истом упаривању, сва остала максимална упаривања се добијају када у скупу $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$ тачно једну ивицу \bar{v}_i заменимо њој суседном ивицом \bar{u}_i . Закључујемо да комплекс упаривања $M(\text{Sp}_k)$ има један централни $(k-1)$ -димензионални симплекс $C = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ и још k симплекса исте димензије, облика $(C \setminus \{v_i\}) \cup \{u_i\}$, $i \in [k]$. Дакле,

$M(\text{Sp}_k)$ је комбинаторни диск димензије $(k-1)$, за све $k \geq 2$.

Сада можемо дефинисати фамилију графова \mathcal{BG} , која за многострукости са границом има улогу сличну оној коју фамилија \mathcal{SG} има за многострукости.

Дефиниција 2.21. Графове P_2 , Γ и Sp_k за $k \geq 2$ називамо *диск графовима*, а њихов скуп означавамо са

$$\mathcal{BG} = \{P_2, \Gamma\} \cup \{\text{Sp}_k \mid k \geq 2\}, \quad (2.5.1)$$

Истичемо да је овде укључен и граф $P_5 = \text{Sp}_2$, док P_3 није.

Као што смо у тврђењу 2.16 приметили да дисјунктна унија графова из \mathcal{SG} даје комплексе упаривања који су сфере, овде имамо сличан резултат за дискове.

Тврђење 2.22. Нека је граф G дисјунктна унија графова из скупа $\mathcal{BG} \cup \mathcal{SG}$, са бар једном компонентом из скупа \mathcal{BG} . Тада је $M(G)$ комбинаторни диск. Прецизније, ако је

$$G = iP_2 \sqcup j\Gamma \sqcup \bigsqcup_{d \geq 2} k_d \text{Sp}_d \sqcup \ell P_3 \sqcup mC_5 \sqcup nK_{3,2},$$

при чему важи $i+j+\sum k_d \geq 1$, онда је комплекс $M(G)$ комбинаторни диск димензије $i+2j+\sum_d dk_d+\ell+2m+2n-1$.

Доказ. Комплекс упаривања посматраног графа G је спој: i копија тачке (D^0), j копија диска D^1 , по k_d копија диска D^{d-1} за све d , ℓ копија S^0 и $m+n$ копија S^1 . Користећи тврђење 1.21, закључујемо да је овај спој комбинаторни диск наведене димензије. \square

Показаћемо да ово тврђење заправо даје све начине на које се многострукост са границом димензије веће од 2 реализује као комплекс упаривања. У димензији 2 ситуација је другачија, па је посебно разматрамо.

Многострукости са границом димензије 2

Ако је $M = M(G)$ дводимензионална хомолошка многострукост са границом, она је и комбинаторна многострукост са границом, па ћемо је посматрати на тај начин. Раздвојићемо случајеве зависно од тога да ли је граф G повезан или не, због великог броја могућности у оба случаја.

Теорема 2.23. Нека је G неповезан граф такав да је $M = M(G)$ многострукост са границом димензије 2. Тада је M диск, а сви могући случајеви дати су у табели 2.

Табела 2. Парови $G, M(G)$ у теорему 2.23.

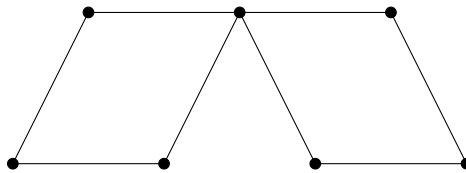
Граф G	$M \cong M(G)$	Опис $M(G)$
$3P_2$	$P_1 * P_2$	Троугао
$2P_2 \sqcup P_3$	$P_1 * P_3$	Два троугла са заједничком ивицом
$P_2 \sqcup P_5$	$P_1 * P_4$	Ланац од 3 троугла који имају заједничко теме
$P_2 \sqcup \Gamma$	$P_1 * P_5$	Ланац од 4 троугла који имају заједничко теме
$P_2 \sqcup 2P_3$	$P_1 * C_4$	Триангулисани квадрат
$P_2 \sqcup C_5$	$P_1 * C_5$	Триангулисани петоугао
$P_2 \sqcup K_{3,2}$	$P_1 * C_6$	Триангулисани шестоугао
$P_3 \sqcup P_5$	$2P_1 * P_4$	6 троуглова: суспензија над стазом P_4
$P_3 \sqcup \Gamma$	$2P_1 * P_5$	8 троуглова: суспензија над стазом P_5

Доказ. Пошто је $G = G_1 \sqcup G_2$, онда је $M(G) = M(G_1) * M(G_2)$, па на основу тврђења 2.12 знамо да се $M(G) = D^2$ представља на један од три начина: $M \cong D^0 * D^1$, $M \cong D^0 * S^1$ или $M \cong S^0 * D^1$. Користећи класификације графова који као комплексе упаривања имају S^0, S^1, D^0 и D^1 , директно добијамо могућности приказане у табели 2. \square

У случају када је G повезан граф, неочекивано се појављују разне многострукости са границом димензије 2, о чему говори следећа теорема.

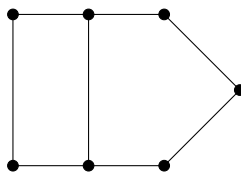
Теорема 2.24. Нека је G повезан граф такав да је $M = M(G)$ дводимензионална многострукост са границом. Тада M има један од следећа 4 тополошка типа, који се могу реализовати помоћу наведених графова G .

1. M је диск D^2 . G је науk Sp_3 .
2. M је цилиндар. G је граф са 7 темена и 8 ивица, приказан на слици 24.



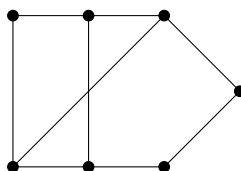
Слика 24. Граф G у случају 2.

3. M је Мебијусова трака.
 - (а) $G = C_7$, 7-циклус;
 - (б) G је граф са 7 темена и 8 ивица, приказан на слици 25;



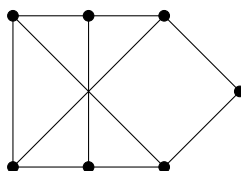
Слика 25. Граф G у случају 3(б).

(в) G је граф са 7 темена и 9 ивица, приказан на слици 26;



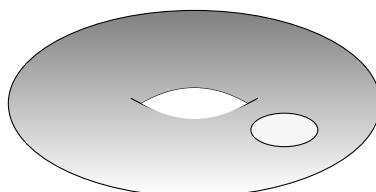
Слика 26. Граф G у случају 3(в).

(г) G је граф са 7 темена и 10 ивица, приказан на слици 27.



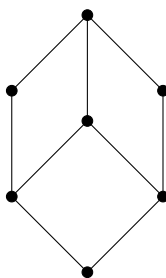
Слика 27. Граф G у случају 3(г).

4. M је торус без малог отвореног 2-диска, као на слици 28.



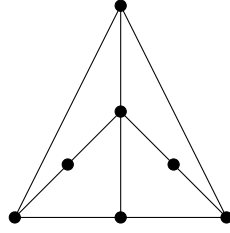
Слика 28. Торус без малог отвореног диска.

(а) G је граф са 7 темена и 9 ивица, приказан на слици 29;



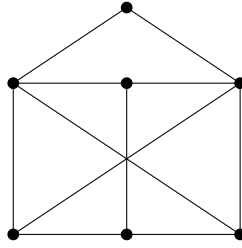
Слика 29. Граф G у случају 4(а).

(б) G је граф са 7 темена и 10 ивица, приказан на слици 30.



Слика 30. Граф G у случају 4(б).

(в) G је граф са 7 темена и 11 ивица, приказан на слици 31.



Слика 31. Граф G у случају 4(в).

Доказ. Доказ се заснива на анализи линкова темена многострукости M . Показали смо да је линк темена $v \in M$ индуковани поткомплекс од M , који је комплекс упаривања подграфа $G_{\bar{v}}$ у G (лема 2.4). За темена ивице \bar{v} у G користићемо свуда ознаке x_v и y_v . Зависно од положаја темена $v \in M$ имамо два случаја.

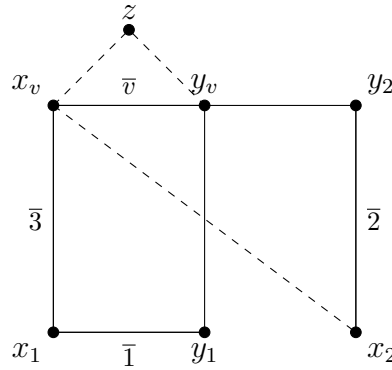
- Теме v је на граници од M , тј. $v \in \partial M$. Тада је линк $Lk_M v = M(G_{\bar{v}})$ заправо диск D^1 , тј. пут P_j , где је $2 \leq j \leq 5$. Одговарајући подграф $G_{\bar{v}}$ се налази у скупу $\{2P_2, P_3 \sqcup P_2, P_5, \Gamma\}$. Приметимо да тада крајеви пута P_j такође припадају граници.
- Теме v припада унутрашњости од M . Тада је $Lk_M v$ кружница, тј. циклус C_j , за $4 \leq j \leq 6$. Одговарајући подграф $G_{\bar{v}}$ припада скупу $\{2P_3, C_5, K_{3,2}\}$.

Приметимо да ни у једном случају $G_{\bar{v}}$ не садржи троугао (циклус C_3). Штавише, **цео граф G не сме садржати троугао**. Наиме, уколико би граф G садржао троугао T , и ако би постојала ивица \bar{v} дисјунктна са T , тада би $G_{\bar{v}}$ садржао троугао, што није могуће. Дакле, једина могућност би била да свака ивица графа G садржи бар једно теме троугла T . Међутим, једноставном провером добијамо да тада за било коју уочену ивицу \bar{u} , $G_{\bar{u}}$ не би био ни у једном од горе наведених скупова, што је контрадикција.

Разматраћемо случајеве **I**, **II**, **III** и **IV** према структури линкова граничних темена, и њихове подслучајеве који ће се појавити током анализе.

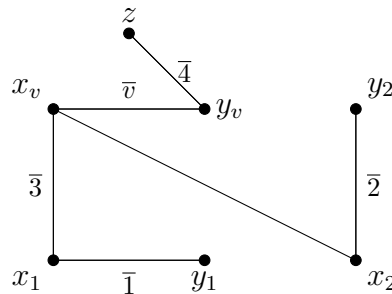
- **Случај I:** Постоји гранично теме v такво да је $Lk_M v = P_2$, дакле $G_{\bar{v}} = 2P_2$. Нека су темена 1 и 2 суседи темена v у M . Тада $G_{\bar{v}}$ има две несуседне ивице $\bar{1}$ и $\bar{2}$, које одговарају граничним теменима, док су све остале ивице у G суседне са \bar{v} . Пошто је G повезан, мора постојати ивица која повезује \bar{v} и $\bar{1}$; без умањења општости нека је то ивица $\bar{3} = \{x_v, x_1\}$. Како $G_{\bar{2}}$ не садржи троугао, G не садржи ивице $\{x_v, y_1\}$ и $\{y_v, x_1\}$. Поделићемо случај **I** на два подслучаја, зависно од тога да ли ивица $\{y_v, y_1\}$ припада графу G или не.

Случај I.1. Нека ивица $\{y_v, y_1\}$ припада G . Тада $G_{\bar{2}}$ садржи 4-циклус, па мора бити Γ (јер $2 \in \partial M$). Све остале ивице графа G , осим ивице $\bar{2}$ и ивица од Γ , морају имати једно заједничко теме са \bar{v} и друго заједничко теме са $\bar{2}$. Због повезаности, мора постојати бар једна таква ивица; без умањења општости нека је то $\{y_2, y_v\}$. Истакнута ивица од Γ може бити или $\{x_v, z\}$ или $\{y_v, z\}$, као на слици 32. Пошто $G_{\bar{1}}$ не садржи троугао, G не садржи ни $\{y_2, x_v\}$ ни $\{x_2, y_v\}$. Граф G може садржати или не садржати ивицу $\{x_2, x_v\}$. У сваком случају, $G_{\bar{3}}$ је или P_4 или P_4 са једном додатном ивицом на једном од унутрашних темена пута, а знамо да ове ситуације нису могуће (слика 32).



Слика 32. Случај I.1. [11]

Случај I.2. Нека ивица $\{y_v, y_1\}$ не припада графу G . Осим већ поменутих, све остале ивице графа G морају бити суседне са \bar{v} , а несуседне са $\bar{1}$. Подграф $G_{\bar{2}}$ садржи пут $P_4 : y_1, x_1, x_v, y_v$. Пошто важи $2 \in \partial M$, $Lk_M 2$ је 1-диск, па је $G_{\bar{2}}$ или P_5 или Γ . Како нема других ивица суседних ивици $\bar{1}$, $G_{\bar{2}}$ мора бити P_5 . То значи да постоји још тачно једна ивица у G која није суседна са $\bar{2}$; означимо је са $\bar{4}$ ($\bar{4}$ садржи теме y_v). Посматрајмо подграф $G_{\bar{1}}$. Он садржи ивице \bar{v} , $\bar{4}$ и $\bar{2}$, а све остале његове ивице (бар једна мора постојати) су суседне и са \bar{v} и са $\bar{2}$. Пошто $1 \in \partial M$, и $G_{\bar{1}}$ мора бити или P_5 или Γ . Уколико би био Γ , онда би G садржао тачно једну ивицу која садржи једно теме ивице $\bar{2}$ и теме y_v . Међутим, тада би $G_{\bar{3}}$ био пут P_4 , што није могуће. Дакле, једина могућност је $G_{\bar{1}} = P_5$, што значи да је G паук Sp_3 (слика 33). Ово је управо део 1 наше теореме.



Слика 33. Граф у случају I.2. [11]

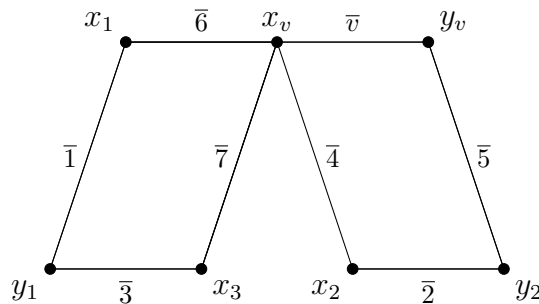
• **Случај II:** Не постоји гранично теме v такво да је $\text{Lk}_M v = P_2$, али за неко гранично теме v важи $\text{Lk}_M v = P_3$, тј. $G_{\bar{v}} = P_3 \sqcup P_2$. Означимо темена линка v са 1, 2 и 3 (редом формирају P_3 и $1, 3 \in \partial M$). Подграф $G_{\bar{v}}$ се састоји од пута са две ивице $\bar{1}$ и $\bar{3}$, и дисјунктне ивице $\bar{2}$. Означимо заједничко теме ивица $\bar{1}$ и $\bar{3}$ са y_1 , а одговарајућа друга два темена са x_1 и x_3 . Осим $\bar{1}$, $\bar{2}$ и $\bar{3}$, свака друга ивица G мора садржати теме од \bar{v} . G је повезан, па постоји ивица која повезује \bar{v} и $\bar{2}$; без умањења општости нека је то ивица $\bar{4} = \{x_v, x_2\}$. Пошто G не садржи троуглове, једина додатна могућа ивица између темена \bar{v} и темена $\bar{2}$ јесте $\{y_v, y_2\}$. Посматраћемо два подслучаја, зависно од тога да ли ова ивица припада графу G или не.

Случај II.1. Претпоставимо да ивица $\{y_v, y_2\}$ не припада G . Посматрајмо подграф $G_{\bar{3}}$. Он садржи пут $P_4 : y_v, x_v, x_2, y_2$, па је или P_5 или Γ . Без ивице $\{y_v, y_2\}$, $G_{\bar{3}}$ не може бити Γ , па је $G_{\bar{3}} = P_5 : z, y_v, x_v, x_2, y_2$, за неко теме z . Све остале ивице графа G морају повезивати ивицу \bar{v} са ивицом $\bar{3}$. Претпоставимо да је $z = x_1$. Тада $G_{\bar{1}}$ садржи пут $P_4 : y_v, x_v, x_2, y_2$ и највише још једну ивицу која повезује \bar{v} и x_3 , па $G_{\bar{1}}$ мора бити $P_5 : x_3, y_v, x_v, x_2, y_2$. Међутим, $G_{\bar{4}}$ садржи циклус C_4 , а не може се допунити ниједном ивицом до Γ . Дакле, теме z не припада ивици $\bar{1}$. Тада $G_{\bar{2}}$ садржи $2P_3$ (ивице $\bar{1}$, $\bar{3}$, \bar{v} и $\{z, y_v\}$), па важи $G_{\bar{2}} = 2P_3$. Тиме добијамо контрадикцију јер G не може бити повезан, пошто нема других ивица између темена \bar{v} и темена $\bar{1}$ и $\bar{3}$.

Случај II.2. Претпоставимо да ивица $\bar{5} = \{y_v, y_2\}$ припада G . Знамо да све преостале ивице графа G садрже неко теме од \bar{v} и не садрже ниједно теме ивице $\bar{2}$. Подграфови $G_{\bar{1}}$ и $G_{\bar{3}}$ садрже циклус $C_4 : x_v, y_v, y_2, x_2, x_v$, па оба морају бити Γ . Зависно од тога како их допуњујемо до Γ , имамо три случаја.

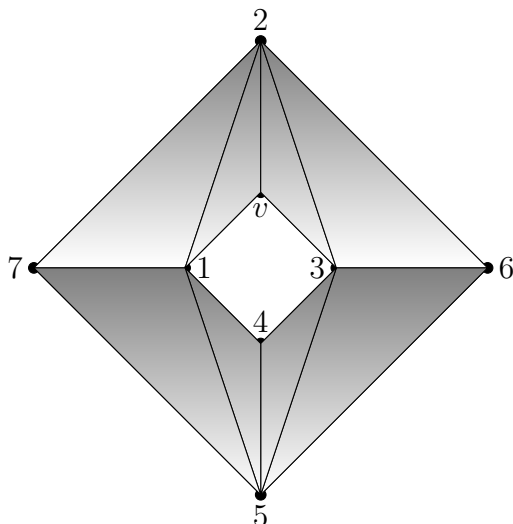
Случај II.2.а. Уколико имамо једну додатну ивицу која допуњује оба ова графа, то је ивица која садржи теме z које није ни у $\bar{1}$, ни у $\bar{3}$, и (без умањења општости) теме x_v . Мора постојати још једна ивица која ће учинити G повезаним, а не сме нарушити $G_{\bar{1}}$ и $G_{\bar{3}}$, па та ивица садржи теме y_1 које је заједничко ивицама $\bar{1}$ и $\bar{3}$. Међутим, тада подграф $G_{\bar{2}}$ није могућ, јер има теме степена 3, а не може бити $K_{3,2}$.

Случај II.2.б. Претпоставимо да се $G_{\bar{1}}$ и $G_{\bar{3}}$ допуњују различитим ивицама из истог темена x_v од v : $\bar{6} = \{x_v, x_1\}$ и $\bar{7} = \{x_v, x_3\}$. Добијамо граф који је унија два 4-циклуса са заједничким теменом (слика 34), а комплекс упаривања овог графа је цилиндар приказан на слици 35. Остаје да размотримо да ли овај граф може имати додатних ивица.



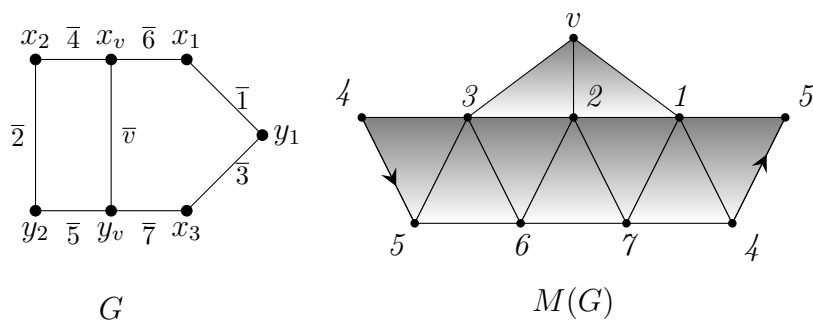
Слика 34. Граф за случај II.2.б. [11]

Све додатне ивице би морале бити суседне са сваком од ивица \bar{v} , $\bar{1}$ и $\bar{3}$. Међутим, ивица y_1x_v не постоји јер G не садржи троугао, а ивица y_1y_v не постоји због подграфа $G_{\bar{4}}$. Дакле, једина могућност је управо граф на слици 34, што је део 2 наше теореме.



Слика 35. Комплекс упаривања за случај II.2.6. [11]

Случај II.2.в. Преостали случај је да су $G_{\bar{1}}$ и $G_{\bar{3}}$ копије Γ са истакнутим ивицама које садрже различита темена од v ; без умањења општости нека су то ивице $\bar{b} = \{x_v, x_1\}$ и $\bar{7} = \{y_v, x_3\}$. Свака додатна ивица би направила троугао у G , што није дозвољено. Комплекс $M(G)$ је изоморфан Мебијусовој траци, чиме добијамо случај 3(б) теореме. Граф и комплекс су приказани на слици 36 (идентификација ивица је означена стрелицама, што ћемо надаље подразумевати).



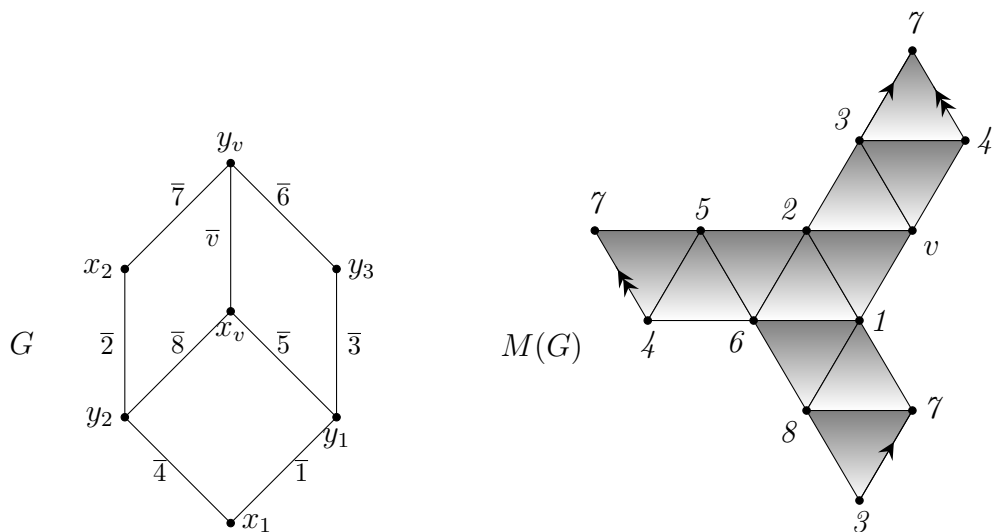
Слика 36. Граф и комплекс упаривања за случај II.2.в. [11]

- **Случај III:** Ниједно гранично теме нема линк P_2 нити P_3 , али постоји теме $v \in \partial M$ такво да важи $\text{Lk}_M v = P_4$, тј. $G_{\bar{v}} = P_5$. Ако су темена линка $\text{Lk}_M v$ означена редом са 1, 2, 3 и 4, подграф $G_{\bar{v}}$ је пут од ивица $\bar{2}$, $\bar{4}$, $\bar{1}$ и $\bar{3}$, редом, и темена x_2, y_2, x_1, y_1, y_3 . Пошто су и 1 и 4 гранична темена, знамо да су и $G_{\bar{1}}$ и $G_{\bar{4}}$ у скупу $\{P_5, \Gamma\}$. Осим ивица $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ и $\bar{4}$, свака друга ивица мора бити суседна са \bar{v} . Разматраћемо случајеве зависно од тога да ли је теме 2 (аналогно се добија за теме 3) на граници или у унутрашњости од M .

Случај III.1. Нека $2 \in \partial M$. Тада важи $G_{\bar{2}} \in \{P_5, \Gamma\}$, па имамо два случаја.

Случај III.1.а. Претпоставимо да важи $G_{\bar{2}} = P_5$. Пошто подграф $G_{\bar{2}}$ већ садржи ивице \bar{v} , $\bar{1}$ и $\bar{3}$, он садржи или $\{x_v, x_1\}$ или $\{x_v, y_3\}$, а све остале ивице у G морају бити суседне и са \bar{v} и са $\bar{2}$. Ако би $G_{\bar{2}}$ садржао $\{x_v, x_1\}$, онда би $G_{\bar{4}}$ садржао ивицу $\bar{3}$ дисјунктну од осталих ивица у $G_{\bar{4}}$, што није могуће, јер $G_{\bar{4}} \in \{P_5, \Gamma\}$. Дакле, $G_{\bar{2}}$ садржи ивицу $\bar{5} = \{x_v, y_3\}$. Подграф $G_{\bar{4}}$ садржи пут $P_4 : \bar{v}, \bar{5}, \bar{3}$, а како су све преостале ивице суседне и са \bar{v} и са $\bar{2}$, $G_{\bar{4}}$ мора садржати ивицу $\bar{6} = \{y_v, x_2\}$. Тако G садржи циклус $C_7 : y_v, x_v, y_3, y_1, x_1, y_2, x_2, y_v$. Пошто G не садржи троуглове, једина могућа преостала ивица је $\bar{7} = \{x_v, y_2\}$. Међутим, када би ивица $\bar{7}$ припадала G , подграф $G_{\bar{7}}$ би био облика $P_2 \sqcup P_3$, што није дозвољено у случају III. Дакле, $G = C_7$, а $M = M(G)$ је Мебијусова трака са троугловима 215, 156, 564, 643, 43v, 3v2, v21 (део 3(а) теореме).

Случај III.1.б. Претпоставимо да важи $G_{\bar{2}} = \Gamma$. Пошто су све додатне ивице у G суседне са \bar{v} , $G_{\bar{2}}$ је или циклус $C_4 : x_1, x_v, y_v, y_1, x_1$ са истакнутом ивицом $\{y_1, y_3\}$, или циклус $C_4 : y_1, x_v, y_v, y_3, y_1$ са истакнутом ивицом $\{x_1, y_1\}$. Прва опција није могућа јер би тада $G_{\bar{1}}$ имао само четири темена (x_2, y_2, x_v и y_v). Дакле, G садржи ивице $\bar{5} = \{y_1, x_v\}$ и $\bar{6} = \{y_3, y_v\}$, а све нове ивице су суседне и са \bar{v} и са $\bar{2}$. Подграф $G_{\bar{4}}$ садржи 4-циклус $\bar{3}, \bar{5}, \bar{v}, \bar{6}$, па $G_{\bar{4}}$ мора бити Γ , што значи да G садржи ивицу $\bar{7}$ која повезује теме x_2 са ивицом \bar{v} . Да бисмо одредили које теме ивице v је у питању, приметимо да $G_{\bar{5}}$ садржи ивице $\bar{2}, \bar{4}$ и $\bar{6}$. Пошто смо у случају III, $G_{\bar{5}}$ не може бити $P_3 \sqcup P_2$, већ $G_{\bar{5}} = P_5$, па ивица која допуњава овај подграф до P_5 јесте $\bar{7} = \{x_2, y_v\}$. Такође, $G_{\bar{1}}$ садржи ивице $\bar{2}, \bar{6}, \bar{7}$ и \bar{v} , па мора бити Γ са ивицом $\bar{8} = \{y_2, x_v\}$. Свака додатна ивица (суседна са \bar{v} и $\bar{2}$ по услову) би направила троугао, па је G граф са 9 описаних ивица, приказан на слици 37. Комплекс $M(G)$ је састављен од троуглова 745, 456, 562, 612, 12v, 2v3, v34, 34v, 618, 187 и 873. Након идентификовања ивица, примећујемо да је $M(G)$ торус без једног 2-диска, ограниченог циклусом 1, 7, 5, 2, 3, 8, 6, 4, v, 1 (ово је део 4(а) теореме).

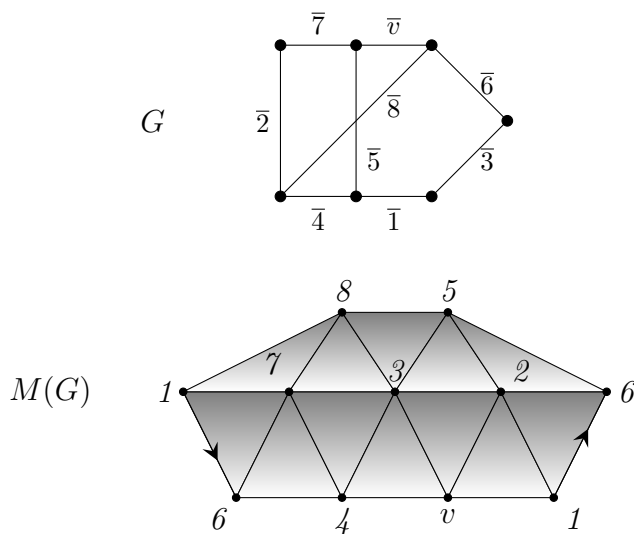


Слика 37. Граф и комплекс упаривања за случај III.1.б. [11]

Случај III.2. Сада можемо претпоставити да су оба темена 2 и 3 у унутрашњости од M (јер смо у делу III.1. користили само услов $2 \in \partial M$, без претпоставке о темену 3). Тада $G_2 \in \{2P_3, C_5, K_{3,2}\}$. Посматраћемо сваки од ова три подслучаја одвојено.

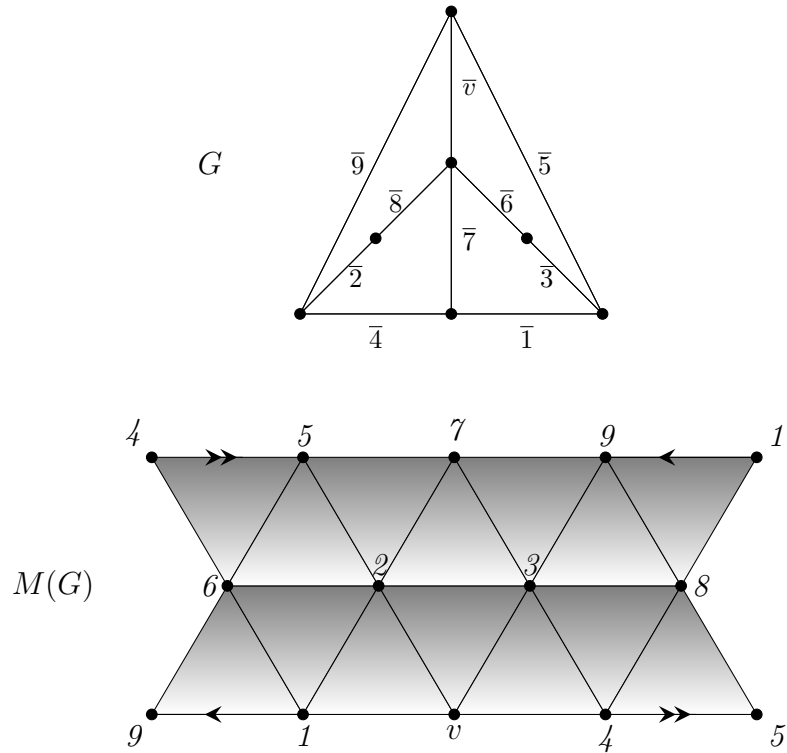
Случај III.2.а. Нека је $G_2 = 2P_3$. Један од та два пута P_3 се састоји од $\bar{1}$ и $\bar{3}$, а други од \bar{v} и $\bar{5}$, за неку ивицу $\bar{5} = \{x_v, z\}$ (z не припада ниједној од ивица $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ и $\bar{4}$). Све друге ивице морају бити суседне ивицама $\bar{2}$ и \bar{v} . Међутим, тада је G_4 неповезан подграф са једном компонентом $P_2 = \bar{3}$ што није могуће у случају III.

Случај III.2.б. Нека је $G_2 = C_5$. Без умањења општости можемо претпоставити да G садржи ивице $\bar{5} = \{x_1, x_v\}$ и $\bar{6} = \{y_3, y_v\}$ (G_2 је $C_5 : x_1, y_1, y_3, y_v, x_v, x_1$). Све остале ивице у G су суседне и са \bar{v} и са $\bar{2}$. Пошто $4 \in \partial M$ и G_4 већ садржи $P_4 : y_1, y_3, y_v, x_v$, мора важити $G_4 = P_5$, са додатном ивицом $\bar{7} = \{x_v, x_2\}$ (слика 38). Сада G_5 садржи $P_3 \sqcup P_2$, са теменима $y_1, y_3, y_v; x_2, y_2$. Случај када је $G_5 = P_3 \sqcup P_2$ је покривен у делу II. Једина друга могућност је да постоји ивица $\bar{8} = \{y_v, y_2\}$, чиме је $G_5 = P_5$. Било која нова ивица би направила троугао у G , тако да смо описали све ивице графа G . Комплекс упаривања овог графа је Мебијусова трака, као на слици 38 (део 3(в) теореме).



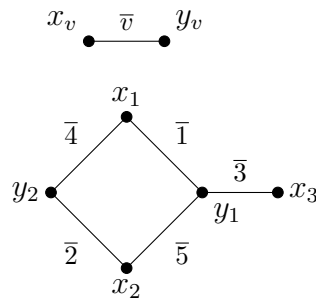
Слика 38. Граф и комплекс упаривања за случај III.2.б. [11]

Случај III.2.в. Нека је $G_2 = K_{3,2}$. Без губљења општости, G садржи ивице $\bar{5} = \{x_v, y_1\}$, $\bar{6} = \{y_v, y_3\}$ и $\bar{7} = \{y_v, x_1\}$. Пошто подграф G_4 садржи $C_4 (y_1, x_v, y_v, y_3, y_1)$, он мора бити Γ . Истакнута ивица тог подграфа Γ мора спајати теме x_2 и једно од темена x_v, y_v . Ако је то ивица $\{x_2, x_v\}$, онда $G_3 = C_5$, што је случај покривен са III.2.б. Нека је зато истакнута ивица $\bar{8} = \{x_2, y_v\}$. Даље, подграф G_1 садржи теме y_v степена 3, а како $1 \in \partial M$, мора бити $G_1 = \Gamma$. Зато G садржи ивицу $\bar{9} = \{y_2, x_v\}$, чиме је комплетан скуп ивица приказан на слици 39. Свака нова могућа ивица би направила троугао у G , што значи да смо описали све ивице графа G . Комплекс упаривања $M(G)$ је хомеоморфан торусу без диска на површини (слика 39). Ово је део 4(б) теореме.



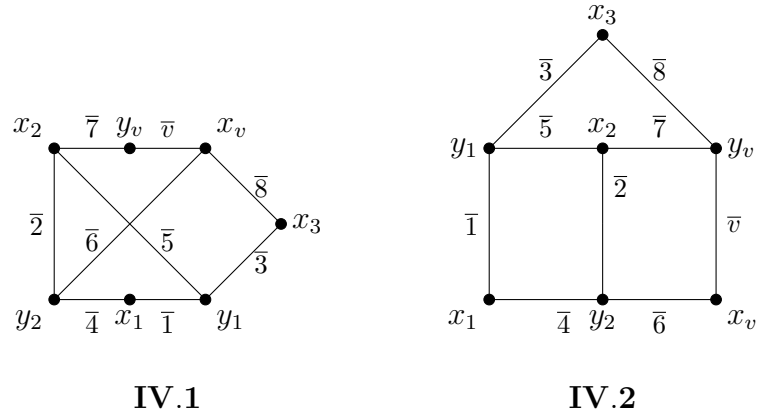
Слика 39. Граф и комплекс упаривања у случају III.2.в. [11]

• **Случај IV** : За свако гранично теме v важи $Lk_M v = P_5$, тј. $G_{\bar{v}} = \Gamma$. Уочимо једно гранично теме v и нека темена 1, 2, 3, 4 и 5 његовог линка формирају пут наведеним редоследом. Тада су 1 и 5 гранична темена, па су подграфови $G_{\bar{1}}$ и $G_{\bar{5}}$ копије Γ . Слика 40 приказује подграф од G који садржи \bar{v} и $G_{\bar{v}}$. Свака друга ивица графа G је суседна са \bar{v} .



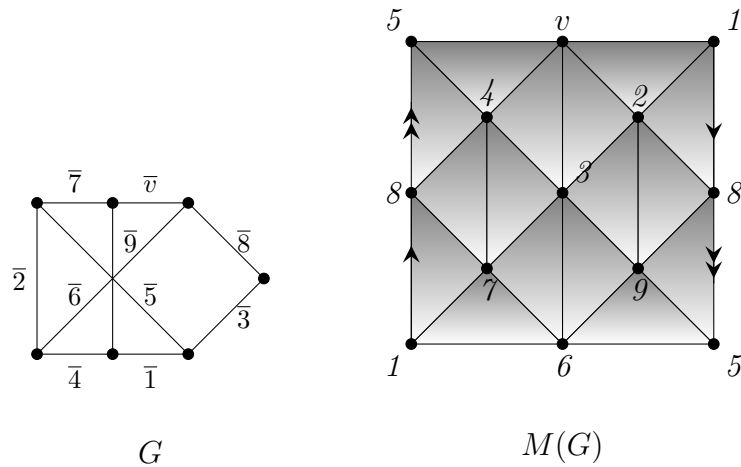
Слика 40. Подграф $G_{\bar{v}}$ за случај IV. [11]

Размотримо подграф $G_{\bar{1}} = \Gamma$. Он садржи ивице $\bar{2}$, \bar{v} и још три ивице суседне са \bar{v} . Без умањења општости, две од тих ивица су $\bar{6} = \{x_v, y_2\}$ и $\bar{7} = \{y_v, x_2\}$. Трећа ивица, означимо је са $\bar{8}$, може или бити ивици $\bar{3}$ у темену x_3 , или не бити суседна са $\bar{3}$. Ако није суседна са $\bar{3}$, онда $G_{\bar{3}}$ садржи $G_{\bar{1}} : \bar{8}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{2}, \bar{v}$ и ивицу $\bar{4}$. Са 6 ивица, $G_{\bar{3}}$ мора бити $K_{3,2}$, али то није могуће јер видимо да је теме x_1 степена 1 у том подграфу. Дакле, ивица $\bar{8}$ мора садржати теме x_3 . Имамо две могућности, зависно од тога које теме ивице \bar{v} припада ивици $\bar{8}$ (x_v или y_v). Могућности су приказане на слици 41, при чему су темена различито распоређена због конструкција у наставку.



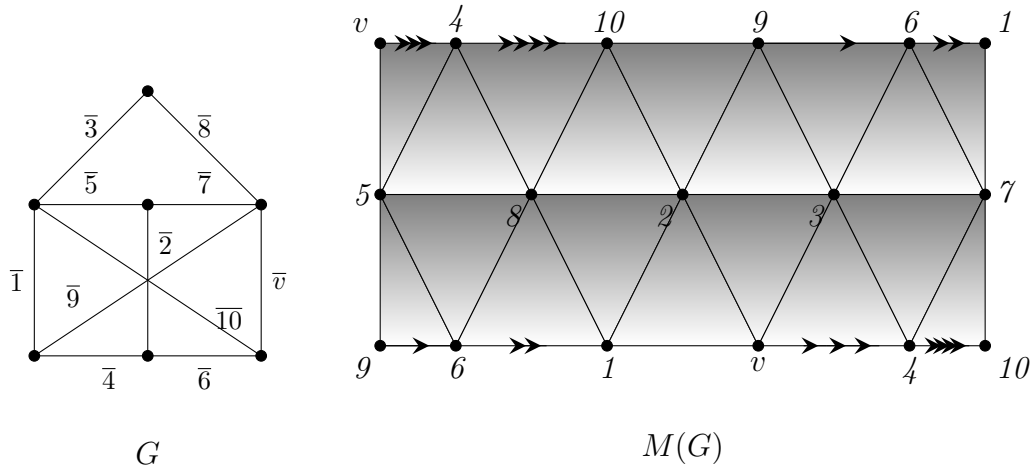
Слика 41. Два могућа подграфа G који садрже $G_{\bar{v}}$ и $G_{\bar{1}}$ у случају IV. [11]

Случај IV.1. Нека важи $\bar{8} = \{x_3, x_v\}$. Све друге ивице у G морају бити суседне обема ивицама \bar{v} и $\bar{1}$. Пошто важи $5 \in \partial M$, онда $G_{\bar{5}}$ мора бити Γ . Подграф $G_{\bar{5}}$ садржи ивице $\bar{4}$, $\bar{6}$, \bar{v} и $\bar{8}$, па мора садржати и ивицу $\bar{9} = \{x_1, y_v\}$. Пошто би додавање било које могуће ивице направило троугао, описали смо све ивице графа G . На слици 42 приказани су граф G и комплекс $M(G)$, који је хомеоморфан Мебијусовој траци (део 3(г) теореме).



Слика 42. Граф и комплекс за случај IV.1. [11]

Случај IV.2. Нека важи $\bar{8} = \{x_3, y_v\}$. Као и у претходном делу, све остале ивице морају бити суседне и са \bar{v} и са $\bar{1}$. Такође, $G_{\bar{5}}$ је Γ , па мора постојати ивица $\bar{9} = \{x_1, y_v\}$. Како све преостале ивице морају бити суседне свакој од ивица \bar{v} , $\bar{1}$ и $\bar{5}$, а не постоји троугао, једина могућа преостала ивица је $\{x_v, y_1\}$. Уколико она не би постојала, подграф $G_{\bar{7}}$ би био P_5 ($\bar{3}$, $\bar{1}$, $\bar{4}$ и $\bar{6}$), па би овај случај био размотрен у делу III. Дакле, постоји ивица $\bar{10} = \{x_v, y_1\}$, и тиме је описан цео граф G . Његов комплекс упаривања је хомеоморфан торусу без диска, а приказан је на слици 43 (део 4(в) теореме).



Слика 43. Граф и комплекс за случај IV.2. [11]

Тиме је доказ теореме 2.24 завршен. □

Многострукости са границом димензије веће од 2

Као и у случају многострукости без границе, испоставља се да у димензијама већим од 2 једина хомолошка многострукост која је комплекс упаривања јесте комбинаторни диск. Следећа теорема даје потпуну класификацију.

Теорема 2.25. *Нека је G прост граф такав да је $M(G)$ нека d -димензионална хомолошка многострукост са границом и $d \geq 3$. Тада је $M(G)$ комбинаторни диск, а граф G је дисјунктна унија графова из $\mathcal{SG} \cup \mathcal{BG}$, са бар једном компонентом из скупа \mathcal{BG} , као што је описано у Тврђењу 2.22.*

Доказ. Нека је $M = M(G)$ и $\dim M = d \geq 3$. Доказ ћемо извести индукцијом, са претпоставком сличном као у доказу теореме 2.19. Наиме, претпоставимо да за све димензије мање од d важи да једини графови чији су комплекси упаривања хомолошки дискови, јесу управо графови описани у Тврђењу 2.22. Из теорема 2.23 и 2.24 знамо да је то тачно за дискове димензије 2. Коришћењем теореме 2.19 и тврђења 2.16 о хомолошким сферама које су комплекси упаривања, и индуктивне хипотезе за хомолошке дискове димензије мање од d , показаћемо да је G један од графова из Тврђења 2.22, што доказује да је M комбинаторни d -диск.

Ако је v теме у унутрашњости M , онда је $\text{Lk}_M v$ хомолошка $(d-1)$ -сфера. На основу теорема 2.18 и 2.19 знамо да за унутрашње теме v важи да је $G_{\bar{v}}$ неповезан подграф, који је дисјунктна унија графова из \mathcal{SG} . Са друге стране, ако је v гранично теме, онда је $\text{Lk}_M v$ хомолошки $(d-1)$ -диск, па на основу индуктивне претпоставке знамо да је $G_{\bar{v}}$ дисјунктна унија графова P_2 , Γ , Sp_k ($k \geq 2$), P_3 , C_5 , $K_{3,2}$, са бар једним од прва три графа. Разматраћемо два случаја која се тичу граничних темена и њихових линкова.

Случај I: За сва гранична темена v важи да је подграф $G_{\bar{v}}$ неповезан.

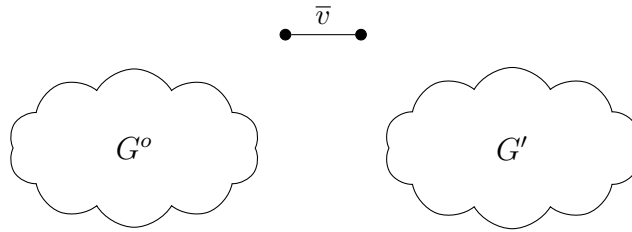
Случај II: Постоји гранично теме v такво да је $G_{\bar{v}}$ повезан подграф.

Показаћемо да у случају I граф G није повезан, па ћемо на основу Тврђења 2.12 закључити да M мора бити диск. У случају II, показаћемо да је G или неповезан, или паук Sp_{d+1} .

• **Случај I:** За сва темена $v \in \partial M$, $G_{\bar{v}}$ је неповезан. $G_{\bar{v}}$ садржи бар један од диск графова P_2, Γ и Sp_k , па имамо наредна два подслучаја на основу тог подграфа.

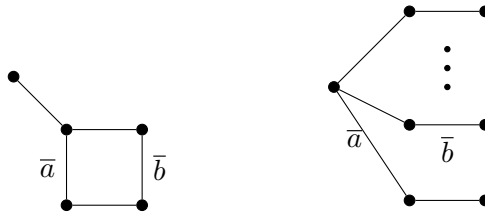
Случај I.1. Постоји гранично теме v такво да $G_{\bar{v}}$ садржи P_2 као компоненту повезаности. Нека је $G_{\bar{v}} = P_2 \sqcup G'$. Означимо са \bar{a} ивицу подграфа P_2 . Поштоматрајмо подграф $G_{\bar{a}}$, који је такође неповезан. Пошто су све остале ивице у G суседне са \bar{v} , $G_{\bar{a}}$ садржи G' , \bar{v} и можда неке ивице које су суседне са \bar{v} . Због неповезаности подграфа $G_{\bar{a}}$, закључујемо да део подграфа G' (или цео тај подграф), није у истој компоненти повезаности графа G као ивица \bar{v} . Дакле, граф G није повезан.

Случај I.2. Претпоставимо сада да не постоји гранично теме v такво да $G_{\bar{v}}$ садржи компоненту повезаности P_2 . Нека је v произвољно гранично теме. Означимо са G^o компоненту повезаности подграфа $G_{\bar{v}}$ која је или Γ или Sp_k ($k \geq 2$) и нека је $G' = G_{\bar{v}} \setminus G^o$ (слика 44).



Слика 44. Подграф $G_{\bar{v}}$ за случај I.2. [11]

Уочимо несуседне ивице \bar{a} и \bar{b} у G^o за сваку од могућности, као на слици 45. Пошто $G_{\bar{a}}$ не сме садржати P_2 као компоненту повезаности, ивица \bar{b} мора бити повезана са ивицом \bar{v} , па су G^o и \bar{v} у истој компоненти повезаности графа G .

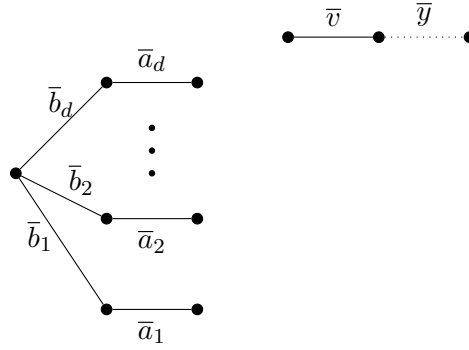


Слика 45. Уочене ивице \bar{a} и \bar{b} за $G^o = \Gamma$ и $G^o = \text{Sp}_k$ у случају I.2. [11]

Све остале ивице графа G (које нису у G^o и G') су суседне ивици \bar{v} . Пошто подграф $G_{\bar{a}}$ не садржи компоненту P_2 , закључујемо да су све његове ивице или у истој компоненти повезаности са \bar{v} , или садржане у G' . Пошто је $G_{\bar{a}}$ неповезан, део G' (или цео подграф) није повезан са остатком графа G . Тако и у овом случају добијамо да G није повезан граф.

• **Случај II:** Нека постоји теме $v \in \partial M$ такво да је подграф $G_{\bar{v}}$ повезан. Пошто је $\text{Lk}_M v$ хомолошки $(d-1)$ -диск, према индуктивној претпоставци знамо да је $G_{\bar{v}}$ граф паук Sp_d . Означимо ивице овог подграфа као на слици 46 (испрекидана ивица \bar{y} није релевантна за овај део), па размотримо \bar{a}_1 и $G_{\bar{a}_1}$. Имамо две могућности за подграф $G_{\bar{a}_1}$, зависно од положаја темена a_1 у M .

Случај II.1. Претпоставимо да је a_1 теме у унутрашњости M . То значи да је $G_{\bar{a}_1}$ дисјунктна унија копија елемената $\mathcal{SG} = \{P_3, C_5, K_{3,2}\}$. Пошто пут $\bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{b}_d, \bar{a}_d$ припада $G_{\bar{a}_1}$ (јер $d \geq 3$), овај пут је или део циклуса C_5 , или део $K_{3,2}$. Међутим, све ивице графа G које нису на слици 46 морају бити суседне ивици \bar{v} , па закључујемо да овај случај није могућ.

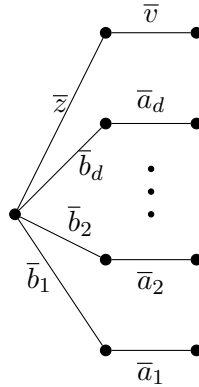


Слика 46. Подграф Sp_d за случај II. [11]

Случај II.2. Нека је a_1 теме на граници M . Подграф $G_{\bar{a}_1}$ сигурно садржи Sp_{d-1} ($\bar{a}_2, \bar{b}_2, \dots, \bar{a}_d, \bar{b}_d$) и ивицу \bar{v} , као на слици 46 (занемаримо ивицу \bar{y} о којој ћемо накнадно говорити). Пошто знамо да је $\text{Lk}_M a_1$ хомолошки диск димензије $(d - 1)$, према индуктивној хипотези знамо да постоје три опције за $G_{\bar{a}_1}$: $G_{\bar{a}_1} = \text{Sp}_{d-1} \sqcup P_2$, $G_{\bar{a}_1} = \text{Sp}_{d-1} \sqcup P_3$ или $G_{\bar{a}_1} = \text{Sp}_d$.

Случај II.2.а. Нека је $G_{\bar{a}_1} = \text{Sp}_{d-1} \sqcup P_2$ или $G_{\bar{a}_1} = \text{Sp}_{d-1} \sqcup P_3$. Тада је подграф $G_{\bar{a}_1}$ већ приказан на слици 46, са укљученом испрекиданом ивицом \bar{y} у случају када је $G_{\bar{a}_1} = \text{Sp}_{d-1} \sqcup P_3$. Све остале ивице графа G , ако постоје, морају бити суседне обема ивицама \bar{a}_1 и \bar{v} . Претпоставимо да постоји нека таква ивица и означимо је са \bar{x} . Посматрајмо сада теме a_2 . Уколико би a_2 било у унутрашњости M , могли бисмо поступити као у случају II.1, па можемо претпоставити да је a_2 на граници. Према индуктивној хипотези, подграф $G_{\bar{a}_2}$ је дисјунктна унија графова из \mathcal{BG} и \mathcal{SG} . Приметимо да $G_{\bar{a}_2}$ садржи индуковану путању од 5 ивица (или $\bar{a}_d, \bar{b}_d, \bar{b}_1, \bar{x}, \bar{v}$ или $\bar{a}_d, \bar{b}_d, \bar{b}_1, \bar{a}_1, \bar{x}$, зависно од тога да ли је \bar{x} суседна са \bar{b}_1 или не). Међутим, ниједан од графова из $\mathcal{BG} \cup \mathcal{SG}$ не садржи индуковану путању P_6 . Дакле, ивица \bar{x} не постоји, па је G управо неповезан граф приказан на слици 46.

Случај II.2.б. Нека је $G_{\bar{a}_1} = \text{Sp}_d$. У овом случају, G мора да садржи подграф као на слици 47. Такође, ивице графа G које нису приказане на слици 47 (ако постоје) морају бити суседне обема ивицама \bar{a}_1 и \bar{v} . Посматрајмо поново $\text{Lk}_M a_2$. Ако би било која од могуће четири додатне ивице постојала, $G_{\bar{a}_2}$ би био Sp_d са додатном ивицом која повезује два не-централна темена овог паука, што је у контрадикцији са могућностима за $G_{\bar{a}_2}$ (према индуктивној хипотези). Тако закључујемо да је граф G тачно граф Sp_{d+1} , приказан на слици 47.



Слика 47. Подграф за случај II.2.б. [11]

Тиме смо показали да је граф G или неповезан, или важи $G = \text{Sp}_{d+1}$. У случају када је $G = G_1 \sqcup G_2$, M је нетривијалан спој комплекса $M(G_1)$ и $M(G_2)$. Тада према тврђењу 2.12 знамо да је M хомолошки d -диск, а комплекси $M(G_1)$ и $M(G_2)$ су хомолошки дискови или хомолошке сфере мање димензије, при чему је бар један од њих диск. Према индуктивној хипотези, графови G_1 и G_2 су дисјунктне уније графова из $\mathcal{SG} \cup \mathcal{BG}$, као што је описано у Тврђењу 2.22, па је такав и цео граф G . Следствено, M је комбинаторни d -диск. Такође, знамо да је и $M(\text{Sp}_{d+1})$ комбинаторни диск D^d . Тиме је доказ теореме завршен. \square

Дакле, коначан закључак је да се као комплекси упаривања појављују следеће хомолошке многострукости са границом:

- Мебијусова трака,
- торус T^2 без диска на површини,
- цилиндар димензије 2,
- комбинаторни диск D^d , за све $d \in \mathbb{N}$.

Глава 3

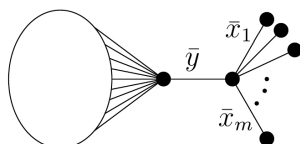
Хомотопски типови комплекса упаривања неких класа дрвета

У овој глави ћемо се бавити одређивањем тачних хомотопских типова комплекса упаривања неких класа дрвета. Познато је да ако је G дрво или шума, онда је комплекс $M(G)$ или контрактибилан, или хомотопски еквивалентан букету сфера [73]. За фамилију дрвета познату као *графови гусенице* (*caterpillar graphs*) овде ћемо показати како индуктивно можемо одредити тачне димензије тих сфера, за које се испоставља да имају веома лепу комбинаторну интерпретацију. Глава је организована на следећи начин. У поглављу 3.1 ћемо показати две леме које ће служити као алат за индуктивно одређивање хомотопског типа. Такође, ради комплетности, навешћемо доказ теореме о комплексу упаривања шуме. Поглавље 3.2 је посвећено одређивању хомотопског типа комплекса упаривања графова гусеница. Подељено је у неколико целина, према типу гусеница. Последње поглавље 3.3 даје други доказ главне теореме 3.17, применом теорема о фибрама пресликавања посета. Материјал ове главе је базиран на оригиналном раду [50].

3.1 Комплекси упаривања дрвета

Индуктивну процедуру одређивања хомотопског типа комплекса упаривања ћемо примењивати у случајевима када посматрани граф садржи *независну грану* (као што је случај код дрвета), па ћемо најпре формално дефинисати овај подграф.

Дефиниција 3.1. Кажемо да граф G има *независну t -грану*, $t \geq 1$, ако постоје ивице $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ и \bar{y} такве да су све ивице $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ суседне ивици \bar{y} у истом темену, а ниједна од ивица $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ нема других суседа (слика 48).



Слика 48. Независна t -грana графа [50].

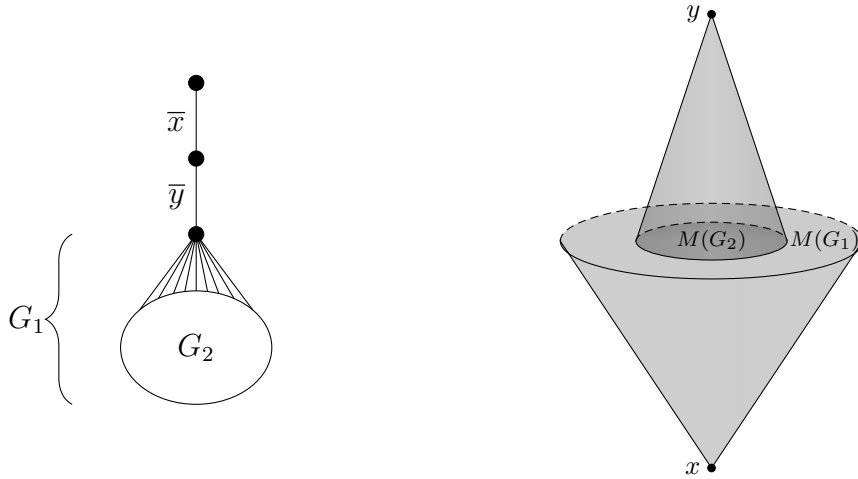
Покажимо сада како се постојање независне гране одражава на одређивање хомотопског типа комплекса упаривања. Такође, подсетимо се појма линка ивице \bar{x} (дефиниција 2.1): $G_{\bar{x}} = \{\bar{e} \in E(G) \mid \bar{e} \cap \bar{x} = \emptyset\}$.

Лема 3.2. Нека је G граф такав да ивице \bar{x} и \bar{y} формирају независну 1-грану, као на слици 49. Означимо подграфове $G_1 = G_{\bar{x}}$ и $G_2 = G_{\bar{y}}$. Тада важи $M(G) \simeq S(M(G_2))$.

Доказ. Нека је скуп ивица подграфа G_2 означен са $E(G_2) := \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$, а $E(G_1) := E(G_2) \cup \{\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_\ell\}$ је скуп ивица подграфа G_1 . Пошто $E(G_2) \subseteq E(G_1) \subseteq E(G)$, онда важи $M(G_2) \subseteq M(G_1) \subseteq M(G)$. Теме $x \in M(G)$ одговара ивици $\bar{x} \in E(G)$ која нема других суседа осим \bar{y} . Зато теме x формира j -димензионални симплекс са сваким $(j - 1)$ -димензионалним симплексом у $M(G_1)$, тј. x формира конус над $M(G_1)$. Дакле, важи $M(G_1 \cup \bar{x}) = C^x(M(G_1))$. Слично, важи $M(G_2 \cup \bar{y}) = C^y(M(G_2))$, па комплекс $M(G)$ задовољава:

$$M(G) = C^x(M(G_1)) \bigcup_{M(G_2)} C^y(M(G_2)),$$

као што је приказано на слици 49.



Слика 49. Независна 1-грана у графу G и комплекс упаривања $M(G)$ [50].

Хомотопски тип овог комплекса одређујемо користећи чињеницу да је сваки конус контрактибилан:

$$\begin{aligned} M(G) &\simeq M(G)/C^x(M(G_1)) = \left(C^x(M(G_1)) \bigcup_{M(G_2)} C^y(M(G_2)) \right) / C^x(M(G_1)) \\ &\cong C^y(M(G_2))/M(G_2) \cong S(M(G_2)). \end{aligned}$$

Овде смо користили тополошко тврђење да под одређеним условима важи да је количнички простор $(A \cup B)/A$ хомеоморфан простору $B/(A \cap B)$ (услови су довољно општи; на пример, довољно је да су A и B затворени поткомплекси од $A \cup B$, и да важи $A \cap B \neq \emptyset$; видети [92, 22.3]). \square

Напомена 3.3. Помоћу леме 3.2 се може индуктивно одредити хомотопски тип комплекса упаривања за стазе P_n , $n \in \mathbb{N}$ (пример 1.17, Козлов [63]).

Аналогно претходној леми имамо општији резултат за граф са независном m -граном (лема 3.2 је специјални случај следеће за $m = 1$, али их наводимо одвојено због даљих примена).

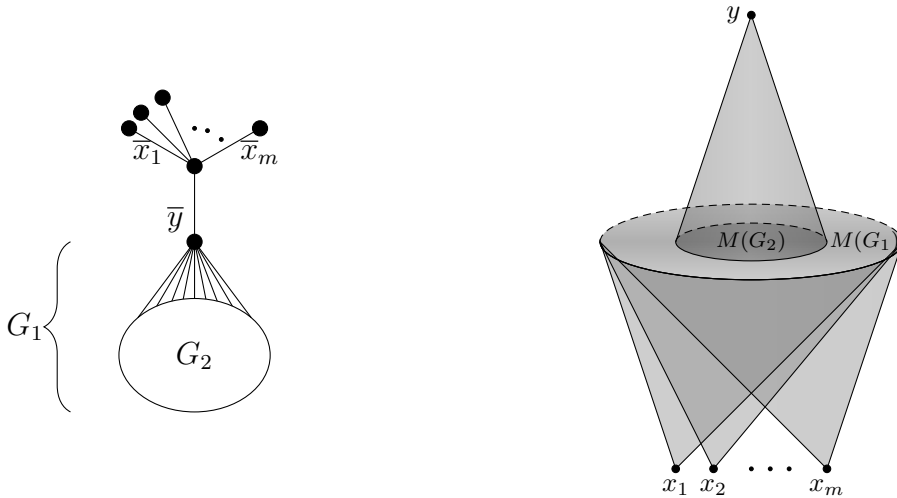
Лема 3.4. Нека је G граф са независном m -граном $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$ ($m \in \mathbb{N}$), као на слици 50. Ако је $G_1 = G_{\bar{x}_1}$, а $G_2 = G_{\bar{y}}$, онда важи

$$M(G) \simeq \left(\bigvee_{m-1} S(M(G_1)) \right) \vee S(M(G_2)).$$

Доказ. Доказ је аналоган доказу леме 3.2. За све $i \in [m]$ важи $M(G_1 \cup \bar{x}_i) = C^{x_i}(M(G_1))$, док $M(G_2 \cup \bar{y}) = C^y(M(G_2))$. Дакле,

$$M(G) = \bigcup_{M(G_1)} \left(\bigcup_{x_i} (C^{x_i}(M(G_1))) \right) \bigcup_{M(G_2)} C^y(M(G_2))$$

(слика 50). Колапсирањем контрактибилног потпростора $C^{x_m}(M(G_1))$ добијамо хомотопски еквивалентан простор, при чему то колапсирање преосталих $m - 1$ конуса претвара у суспензије. \square



Слика 50. Граф G са независном m -граном и комплекс $M(G)$ [50].

Напомена 3.5. Леме 3.2 и 3.4 се на други начин могу доказати применом леме 2.5 из рада Енгстрома [33]. У питању је лема о хомотопском типу комплекса независности графова који садрже одређен подграф, коју бисмо применили на линијске графове посматраних графова са m -граном.

Помоћу лема 3.2 и 3.4 можемо доказати да је комплекс упаривања шуме или контрактибилан или хомотопски еквивалентан букету сфера. Ово је резултат који су показали Мариети и Теста [73, теорема 4.13]. Ради комплетности, наводимо доказ који је идејно сличан њиховом, али користи претходне леме.

Теорема 3.6. [73] Нека је граф G шума. Тада је комплекс $M(G)$ или контрактибилан, или хомотопски еквивалентан букету сфера.

Доказ. Докажимо тврђење индукцијом по $n = |E(G)|$. Ако је $n = 1$, $M(G)$ је тачка. Када је $n = 2$, $G \in \{P_3, P_2 \sqcup P_2\}$. Пошто је $M(P_3) = S^0$, а $M(P_2 \sqcup P_2) = P_2 \simeq *$, тврђење важи за $n = 2$. Претпоставимо да тврђење важи за све шуме са k ивица за $k < n$, где је $n \geq 3$. Нека је G произвољна шума са n ивица. Разматрајмо случајеве зависно од тога да ли је G повезан граф, тј. дрво, или није.

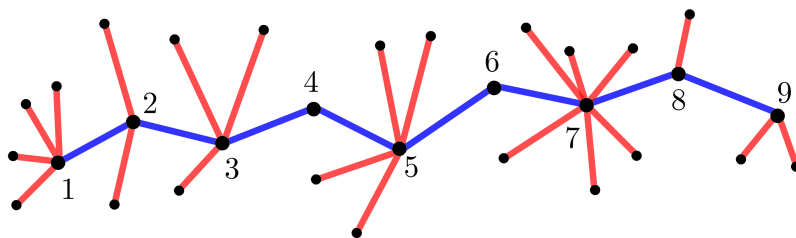
Ако G није повезан граф, онда је он облика $G = G_1 \sqcup \dots \sqcup G_t$, где је G_i дрво за свако $i \in [t]$. Тада према тврђењу 2.5 важи $M(G) = M(G_1) * \dots * M(G_t)$. Пошто $|E(G_i)| < n$ за све i , према индуктивној хипотези сваки $M(G_i)$ је контрактибилан или хомотопски еквивалентан букету сфера. Ако је бар један од њих контрактибилан, $M(G)$ је такође контрактибилан. У супротном за свако i важи $M(G_i) \simeq \bigvee_{\alpha \in A_i} S^\alpha$ за неку коначну фамилију индекса A_i . Тада $M(G) \simeq \left(\bigvee_{\alpha \in A_1} S^\alpha \right) * \dots * \left(\bigvee_{\alpha \in A_t} S^\alpha \right)$, па је $M(G)$ простор хомотопски еквивалентан букету сфера (тврђења 1.21 и 1.22).

Ако је G дрво, уочимо (неки) најдужи пут v_1, v_2, \dots, v_s у G . Пошто је $n \geq 3$, онда важи и $s \geq 3$. Уколико је $s = 3$, онда G мора бити комплетни бипартитни граф $K_{1,n}$. Тада је $M(G)$ дискретан скуп од n тачака, прецизније $M(G) = \bigvee_{n-1} S^0$. Ако је $s \geq 4$, покажимо да G садржи независну m -грану за неко m . Приметимо прво да сви суседи темена v_{s-1} , осим темена v_{s-2} , морају бити листови. Заиста, нека је x произвољан сусед темена v_{s-1} различит од v_{s-2} . Претпоставимо супротно, да x није лист, тј. да постоји његов сусед $y \neq v_{s-1}$. Пошто G не садржи циклусе, y није у скупу $\{v_1, \dots, v_s\}$. Тада је $v_1, v_2, \dots, v_{s-1}, x, y$ дужи пут од v_1, v_2, \dots, v_s , што је контрадикција. Дакле, темена v_{s-2}, v_{s-1} и сви суседи v_{s-1} формирају независну m -грану, $m \geq 1$. Означимо ивице $\bar{a} = \{v_{s-2}, v_{s-1}\}$ и $\bar{b} = \{v_{s-1}, v_s\}$. Нека је $G_1 = G_{\bar{b}}$, а $G_2 = G_{\bar{a}}$. Тада на основу леме 3.4 важи $M(G) \simeq \left(\bigvee_{m-1} S(M(G_1)) \right) \vee S(M(G_2))$. Према индуктивној хипотези, сваки од комплекса $M(G_1)$ и $M(G_2)$ је или контрактибилан или хомотопски еквивалентан букету сфера. Пошто је суспензија букета сфера хомотопски еквивалентна букету сфера за 1 веће димензије (тврђење 1.22), закључујемо да комплекс $M(G)$ има жељени хомотопски тип. \square

3.2 Комплекси упаривања графова гусеница

У овом поглављу изучавамо комплексе упаривања графова *гусеница*.

Дефиниција 3.7. Дрво у коме се може уочити пут са својством да је свако теме ван тог пута повезано ивицом са неким од темена пута, назива се *гусеница* (слика 51).



Слика 51. Граф гусеница са централним путем P_9 .

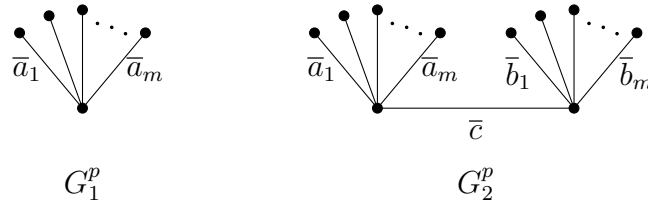
Уочени пут се назива *централни пут*. Приметимо да уколико захтевамо да темена на крајевима тог пута имају степен већи од 1, тај пут је јединствено одређен. Нека је централни пут P_n ; означимо његова темена са $1, 2, \dots, n$. Уколико из сваког темена i осим ивица пута P_n полази још m_i додатних ивица ($m_i \geq 0$), ову

гусеницу означавамо са $G_n(m_1, \dots, m_n)$, и кажемо да је она *дужине* n . На пример, на слици 51 важи $m_1 = 4$, $m_6 = 0$, $m_7 = 6$. Уколико не постоји i такво да је $m_i = 0$, кажемо да је гусеница G *без тривијалних темена*.

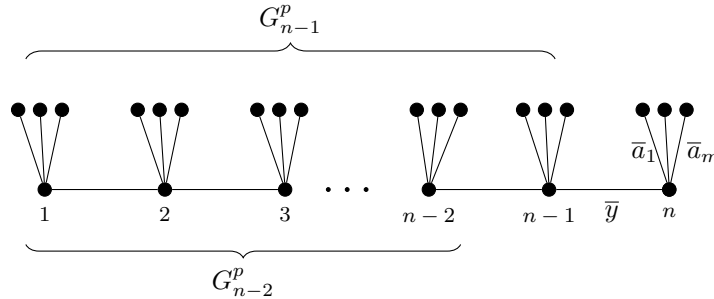
Према теорему 3.6 знамо да комплекс упаривања гусеница, као и свих дрвета, или има хомотопски тип букета сфера, или је контрактибилан простор. За све гусенице G без тривијалних темена ћемо одредити тачан хомотопски тип комплекса $M(G)$, а за све остале ћемо дати рекурентну формулу која одређује број сфера одређене димензије у хомотопском типу $M(G)$. Најпре ћемо издвојити најједноставнији случај *савршених* гусеница.

Дефиниција 3.8. *Савршена m -гусеница дужине n* је гусеница чији је централни пут P_n , а свако од n темена тог пута има додатних m грана ван тог пута (видети слике 52 и 53).

Савршену m -гусеницу дужине n означавамо са $G_n^p(m)$, при чему изостављамо параметар m уколико се подразумева.



Слика 52. $G_1^p(m)$ и $G_2^p(m)$ [50].



Слика 53. Савршена гусеница $G_n^p(m)$ [50].

Теорема 3.9. *Нека је $m \geq 2$ и G_n^p савршена m -гусеница дужине n ($n \geq 1$). Тада је хомотопски тип комплекса упаривања $M(G_n^p)$ следећег облика:*

$$M(G_n^p) \simeq \begin{cases} \bigvee_{t=0}^k \bigvee_{\alpha_t} S^{k-1+t}, & \text{ако } n = 2k \\ \bigvee_{t=0}^k \bigvee_{\beta_t} S^{k+t}, & \text{ако } n = 2k + 1 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

где је $\alpha_t = \binom{k+t}{k-t} (m-1)^{2t}$ и $\beta_t = \binom{k+1+t}{k-t} (m-1)^{2t+1}$, за све $t = 0, 1, \dots, k$.

Доказ. Докажимо тврђење индукцијом по n . Базне гусенице G_1^p и G_2^p су приказане на слици 52. Комплекс $M(G_1^p)$ је дискретан скуп од m тачака, тј. $M(G_1^p) \simeq \bigvee_{m-1} S^0$,

што је управо (3.2.1) за $n = 1$. Такође, $M(G_2^p) = K_{m,m} \sqcup \{c\}$ (теме c одговара ивици \bar{c} на слици 52). Пошто је $K_{m,m} \simeq \bigvee_{(m-1)^2} S^1$, онда имамо $M(G_2^p) \simeq S^0 \vee \left(\bigvee_{(m-1)^2} S^1 \right)$, чиме је задовољено (3.2.1) за $n = 2$. Претпоставимо сада да теорема важи за $G_1^p, G_2^p, \dots, G_{2(k-1)+1}^p, G_{2k}^p$ ($k \geq 1$) и докажимо (3.2.1) за G_{2k+1}^p и G_{2k+2}^p .

Уочимо ивице $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m$ и \bar{y} гусенице G_n^p приказане на слици 53. Применимо лему 3.4 на посматрани граф G_n^p . Приметимо да важи $G_{\bar{a}_1} = G_{n-1}^p$ и $G_{\bar{y}} = G_{n-2}^p$, одакле за $n \geq 3$ имамо

$$M(G_n^p) \simeq \left(\bigvee_{m-1} S(M(G_{n-1}^p)) \right) \vee S(M(G_{n-2}^p)).$$

Користећи индуктивну хипотезу и тврђење 1.22, за $n = 2k + 1$ добијамо:

$$\begin{aligned} M(G_{2k+1}^p) &\simeq \left(\bigvee_{m-1} S(M(G_{2k}^p)) \right) \vee S(M(G_{2(k-1)+1}^p)) \\ &\simeq \left(\bigvee_{m-1} S \left(\bigvee_{t=0}^k \bigvee_{\binom{k+t}{k-t}(m-1)^{2t}} S^{k-1+t} \right) \right) \vee S \left(\bigvee_{t=0}^{k-1} \bigvee_{\binom{k+t}{k-1-t}(m-1)^{2t+1}} S^{k-1+t} \right) \\ &\simeq \left(\bigvee_{t=0}^k \bigvee_{\binom{k+t}{k-t}(m-1)^{2t+1}} S(S^{k-1+t}) \right) \vee \left(\bigvee_{t=0}^{k-1} \bigvee_{\binom{k+t}{k-1-t}(m-1)^{2t+1}} S(S^{k-1+t}) \right) \\ &\simeq \left(\bigvee_{t=0}^k \bigvee_{\binom{k+t}{k-t}(m-1)^{2t+1}} S^{k+t} \right) \vee \left(\bigvee_{t=0}^{k-1} \bigvee_{\binom{k+t}{k-1-t}(m-1)^{2t+1}} S^{k+t} \right) \\ &\approx \left(\bigvee_{t=0}^{k-1} \bigvee_{\binom{k+t}{k-t} + \binom{k+t}{k-1-t}(m-1)^{2t+1}} S^{k+t} \right) \vee \left(\bigvee_{\binom{k+k}{k-k}(m-1)^{2k+1}} S^{2k} \right) \\ &\approx \left(\bigvee_{t=0}^{k-1} \bigvee_{\binom{k+1+t}{k-t}(m-1)^{2t+1}} S^{k+t} \right) \vee \left(\bigvee_{\binom{2k}{0}(m-1)^{2k+1}} S^{2k} \right) \\ &= \bigvee_{t=0}^k \bigvee_{\binom{k+1+t}{k-t}(m-1)^{2t+1}} S^{k+t}. \end{aligned}$$

Доказ за G_{2k+2}^p је сасвим аналоган, а како ће општа теорема 3.17 бити доказана детаљно за све n , доказ за G_{2k+2}^p овде изостављамо. \square

На сличан начин, применом леме 3.2 уместо леме 3.4, добијамо хомотопски тип комплекса упаривања савршене 1-гусенице. Доказ је доста једноставнији јер на основу леме 3.2 важи $M(G_n^p) \simeq S(M(G_{n-2}^p))$, одакле индукцијом директно добијамо следеће тврђење.

Тврђење 3.10. Нека је G_n^p савршена 1-гусеница дужине $n \geq 1$. Тада важи:

$$M(G_n^p) \simeq \begin{cases} S^{k-1}, & \text{ако } n = 2k \\ *, & \text{ако } n = 2k + 1. \end{cases} \quad \square$$

Табела 3 приказује хомотопски тип комплекса упаривања савршене m -гусенице G_n^p за $1 \leq n \leq 8$. Свака врста одговара букету сфера који је хомотопски еквивалентан комплексу $M(G_n^p)$, а поља врсте означавају број сфера одговарајуће димензије у том букету, при чему је уведена ознака $t = m - 1$ ради прегледности. Празна поља означавају димензије у којима нема сфера у поменутом букету. Приметимо да биномни коефицијенти који се појављују у табели формирају Паскалов троугао у коме је сваки ред померен за два поља у односу на претходни.

Табела 3. Хомотопски тип комплекса $M(G_n^p)$, $1 \leq n \leq 8$.

$M(G_n^p) \backslash \dim$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$M(G_1^p)$	$\binom{1}{0}t$								
$M(G_2^p)$	$\binom{1}{1}t^0$	$\binom{2}{0}t^2$							
$M(G_3^p)$		$\binom{2}{1}t$	$\binom{3}{0}t^3$						
$M(G_4^p)$		$\binom{2}{2}t^0$	$\binom{3}{1}t^2$	$\binom{4}{0}t^4$					
$M(G_5^p)$			$\binom{3}{2}t$	$\binom{4}{1}t^3$	$\binom{5}{0}t^5$				
$M(G_6^p)$			$\binom{3}{3}t^0$	$\binom{4}{2}t^2$	$\binom{5}{1}t^4$	$\binom{6}{0}t^6$			
$M(G_7^p)$				$\binom{4}{3}t$	$\binom{5}{2}t^3$	$\binom{6}{1}t^5$	$\binom{7}{0}t^7$		
$M(G_8^p)$				$\binom{4}{4}t^0$	$\binom{5}{3}t^2$	$\binom{6}{2}t^4$	$\binom{7}{1}t^6$	$\binom{8}{0}t^8$	

Прелазимо сада на одређивање комплекса упаривања произвољних гусеница $G_n = G_n(m_1, \dots, m_n)$ без тривијалних темена, тј. гусеница код којих свако теме централног пута има бар једну додатну ивицу ($\forall i \ m_i \geq 1$). У табели 4 (на следећој страни) је приказан број сфера у букету који је хомотопски еквивалентан комплексу $M(G_n)$ за $1 \leq n \leq 7$, при чему је уведена ознака $t_i = m_i - 1$ јер су тада изрази доста прегледнији. Иако на први поглед бројеви сфера по димензијама делују доста компликованије него код савршених гусеница, испоставља се да имају лепу комбинаторну интерпретацију. Теорема 3.17 даје тачан хомотопски тип комплекса $M(G_n)$. Приказаћемо два доказа ове теореме. У овом поглављу је теорема доказана коришћењем леме 3.4, а у поглављу 3.3 доказ је изведен на основу теорема о фибрама пресликавања посета.

Да бисмо формулисали главну теорему, потребно је да дефинишемо једну класу низова и једну класу сума. Напоменимо да у овом поглављу (ради лакшег записа) ознаку $[n]$ користимо и за низ $[n] = (1, 2, \dots, n)$, док $(i_1, i_2, \dots, i_x) \subset [n]$ означава подниз низа $(1, 2, \dots, n)$ од x елемената ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_x \leq n$). Такође, избор два узастопна члана низа $1, 2, \dots, n$ називамо 2-блок.

Табела 4. Хомотопски тип комплекса $M(G_n(m_1, \dots, m_n))$, $1 \leq n \leq 7$, као букет сфера.

$G \setminus \dim$	0	1	2	3	4	5	6
G_1	t_1						
G_2	1	$t_1 t_2$					
G_3		$t_1 + t_3$	$t_1 t_2 t_3$				
G_4		1	$t_1 t_2 + t_1 t_4 + t_3 t_4$	$t_1 t_2 t_3 t_4$			
G_5			$t_1 + t_3 + t_5$	$t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_5 + t_1 t_4 t_5 + t_3 t_4 t_5$	$t_1 t_2 t_3 t_4 t_5$		
G_6			1	$t_1 t_2 + t_1 t_4 + t_3 t_4 + t_1 t_6 + t_3 t_6 + t_5 t_6$	$t_1 t_2 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3 t_6 + t_1 t_2 t_5 t_6 + t_1 t_4 t_5 t_6 + t_3 t_4 t_5 t_6$	$t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6$	
G_7				$t_1 + t_3 + t_5 + t_7$	$t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_5 + t_1 t_4 t_5 + t_3 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_7 + t_1 t_4 t_7 + t_3 t_4 t_7 + t_1 t_6 t_7 + t_3 t_6 t_7 + t_5 t_6 t_7$	$t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 + t_1 t_2 t_3 t_4 t_7 + t_1 t_2 t_3 t_6 t_7 + t_1 t_2 t_5 t_6 t_7 + t_1 t_4 t_5 t_6 t_7 + t_3 t_4 t_5 t_6 t_7$	$t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7$

Дефиниција 3.11. Нека су дати бројеви $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{N}_0$ такви да важи $x \leq n$.

- За подниз (i_1, i_2, \dots, i_x) низа $(1, 2, \dots, n)$ кажемо да је *дозвољен* ако се након означавања изабраних x позиција, осталих $n - x$ позиција може покрити дисјунктним 2-блоковима (помоћу тачно $\frac{n-x}{2}$ блокова од по 2 узастопна члана).
- Дефинишемо скуп A_x^n свих дозвољених поднизова дужине x :

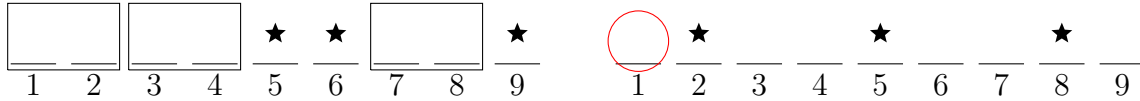
$$A_x^n = \{(i_1, i_2, \dots, i_x) \subseteq [n] \mid (i_1, i_2, \dots, i_x) \text{ је дозвољен подниз}\}.$$

Дакле, ако је разлика $n - x$ непаран број, онда не постоји ниједан дозвољен подниз, па важи $A_x^n = \emptyset$.

Неформално говорећи, посматрамо све изборе x позиција у низу $1, 2, \dots, n$, са својством да је преосталих $n - x$ позиција подељено у блокове парне дужине, помоћу изабраних позиција.

Пример 3.12. (Примери скупа A_x^n)

- (1) Ако је $x = 0$, а $n = 2k$, празан подниз јесте дозвољен избор подниза, па имамо $A_0^{2k} = \{\emptyset\}$, тј. $|A_0^{2k}| = 1$.
- (2) Ако је $x = n$, $A_n^n = \{(1, 2, \dots, n)\}$.
- (3) На слици 54 су приказана два трочлана подниза низа $(1, 2, \dots, 9)$:
 - $(5, 6, 9) \in A_3^9$, јер после означавања 5, 6 и 9, преосталих 6 позиција се могу покрити са 3 дисјунктна 2-блока;
 - $(2, 5, 8) \notin A_3^9$, јер се након означавања 2, 5 и 8, позиције 1 и 9 не могу покрити блоковима дужине 2.



Слика 54. $(5, 6, 9) \in A_3^9$, док $(2, 5, 8) \notin A_3^9$ [50].

Кардиналност посматраног скупа низова дата је следећим тврђењем.

Тврђење 3.13. Нека је $a_x^n = |A_x^n|$. Ако су n и x исте парности, онда важи:

$$a_x^n = \binom{\frac{n+x}{2}}{\frac{n-x}{2}}.$$

Доказ. Нека су n и x непарни бројеви: $n = 2k + 1$ и $x = 2\ell + 1$, $0 \leq \ell \leq k$. Тада имамо $2\ell + 1$ означених позиција и $\frac{(2k+1) - (2\ell+1)}{2} = k - \ell$ блокова дужине 2. Број начина да распоредимо ових $(2\ell + 1) + (k - \ell)$ објеката јесте $\frac{(2\ell+1+k-\ell)!}{(2\ell+1)!(k-\ell)!} = \binom{k+\ell+1}{k-\ell}$. Дакле,

$$a_x^n = \binom{k + \ell + 1}{k - \ell} = \binom{\frac{n+x}{2}}{\frac{n-x}{2}}.$$

Доказ у случају $n = 2k$ и $x = 2\ell$ је потпуно аналоган. □

Следећи корак је дефинисање суме која је индексирана поднизовима из A_x^n .

Дефиниција 3.14. За произвољних n ненегативних бројева $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{N}_0$ и $x \in \mathbb{N}$ такво да је $n - x$ паран број, дефинишимо суму:

$$M_x^n = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_x) \in A_x^n} t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_x}.$$

Параметре t_1, t_2, \dots, t_n подразумевамо и изостављамо ради једноставнијег записа.

С обзиром на то да је $A_0^{2k} = \{\emptyset\}$, додатно дефинишемо $M_0^{2k} = 1$.

Пример 3.15. (Примери сума M_x^n)

(1) Ако је $x = n$, $A_n^n = \{(1, 2, 3, \dots, n)\}$, па важи $M_n^n = t_1 t_2 \cdots t_n$.

(2) Ако је n непаран број и $x = 1$, $A_1^{2k+1} = \{(1), (3), (5), \dots, (2k+1)\}$, па важи

$$M_1^{2k+1} = t_1 + t_3 + t_5 + \cdots + t_{2k+1}.$$

(3) Пример за мале вредности: $n = 4$ и $x = 2$. Тада је $A_2^4 = \{(1, 2), (1, 4), (3, 4)\}$ и $M_2^4 = t_1 t_2 + t_1 t_4 + t_3 t_4$.

У доказу главне теореме биће нам потребне две рекурентне везе сума облика M_x^n , па их издвајамо у следеће помоћно тврђење.

Тврђење 3.16. За све $1 \leq \ell \leq k$, суме $M_x^n(t_1, \dots, t_n)$ задовољавају:

(а) $M_{2\ell+1}^{2k+1} = M_{2\ell}^{2k} t_{2k+1} + M_{2\ell+1}^{2k-1};$

(б) $M_{2\ell}^{2k+2} = M_{2\ell-1}^{2k+1} t_{2k+2} + M_{2\ell}^{2k}.$

Доказ. Докажимо само тврђење (а) пошто је доказ за (б) потпуно аналоган. По дефиницији важи $M_{2\ell+1}^{2k+1} = \sum_{(i_1, \dots, i_{2\ell+1}) \in A_{2\ell+1}^{2k+1}} t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_{2\ell+1}}$. Сви поднизови из скупа $A_{2\ell+1}^{2k+1}$

се деле на две врсте, зависно од тога да ли је изабрана последња позиција $i_{2\ell+1} = 2k+1$, или важи $i_{2\ell+1} < 2k+1$.

(1) Нека је подниз $(i_1, \dots, i_{2\ell+1}) \in A_{2\ell+1}^{2k+1}$ такав да је означена последња позиција, тј. важи $i_{2\ell+1} = 2k+1$. Тада од претходних $2k$ позиција треба маркирати 2ℓ , тако да се неозначене позиције могу покрити са $\frac{2k-2\ell}{2}$ дисјунктних блокова дужине 2. Дакле, чланови суме $M_{2\ell+1}^{2k+1}$ који одговарају поднизовима ове врсте се тачно добијају множењем суме $M_{2\ell}^{2k}$ са t_{2k+1} .

(2) Ако важи $i_{2\ell+1} < 2k+1$, последња позиција није означена, па позиције $2k$ и $2k+1$ морају бити покривене једним 2-блоком. То значи да свих $2\ell+1$ елеманата подниза бирамо међу првих $2k-1$ места, поштујући исто правило. Дакле, одговарајући чланови посматране суме тачно формирају суму $M_{2\ell+1}^{2k-1}$.

На основу (1) и (2) следи жељена релација (а). □

Сада можемо доказати главну теорему.

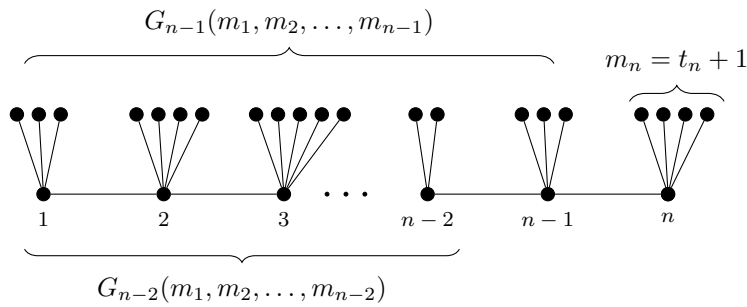
Теорема 3.17. Нека је $G_n = G_n(m_1, \dots, m_n)$ гусеница дужине $n \geq 1$, таква да за свако теме i централног пута важи $m_i \geq 1$. Тада је хомотопски тип њеног комплекса упаривања следећи букет сфера:

$$M(G_n) \simeq \begin{cases} \bigvee_{\ell=0}^k \bigvee_{M_{2\ell}^{2k}} S^{k-1+\ell} & \text{ако } n = 2k \\ \bigvee_{\ell=0}^k \bigvee_{M_{2\ell+1}^{2k+1}} S^{k+\ell} & \text{ако } n = 2k+1 \end{cases}$$

где M_x^n означава суму $M_x^n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ за параметре $t_i := m_i - 1$, $i = 1, \dots, n$.

Доказ. Тврђење ћемо показати индукцијом по n , са базним случајевима G_1 и G_2 . За $n = 1$ ($k = 0$) важи $M_1^1 = t_1$. Знамо да је $M(G_1) = [m_1] \simeq \bigvee_{m_1-1} S^0 = \bigvee_{t_1} S^0$, па тврђење важи. За $n = 2$ ($k = 1$), у очекиваном букету по формулацији теореме појављују се $M_0^2 = 1$ и $M_2^2(t_1, t_2) = t_1 t_2$. Комплекс упаривања графа $G_2(m_1, m_2)$ се састоји од бипартитног графа K_{m_1, m_2} и једне дисјунктне тачке. С обзиром на то да је K_{m_1, m_2} хомотопски еквивалентан букету $(m_1 - 1)(m_2 - 1)$ кружница, важи: $M(G_2) \simeq S^0 \vee \left(\bigvee_{t_1 t_2} S^1 \right)$, па тврђење важи и за $n = 2$.

Претпоставимо сада да теорема важи за графове $G_1, G_2, \dots, G_{2(k-1)+1}, G_{2k}$, па докажимо да важи и за G_{2k+1} и G_{2k+2} , $k \geq 1$. На исти начин као у теорему 3.9, уочавамо независну m_n -грану на крају графа $G_n(m_1, \dots, m_n)$, као на слици 55.



Слика 55. Граф $G_n(m_1, m_2, \dots, m_n)$ [50].

Применом леме 3.4 на уочену независну грану закључујемо да за све $n \geq 3$ важи:

$$M(G_n) \simeq \left(\bigvee_{t_n} S(M(G_{n-1})) \right) \vee S(M(G_{n-2}))$$

(слика 55). Користећи индуктивну хипотезу и особине букета и суспензије из тврђења 1.22, након сређивања добијамо хомотопске типове комплекса $M(G_{2k+1})$ и $M(G_{2k+2})$. Наиме, за $G_{2k+1}(m_1, \dots, m_{2k+1})$ имамо:

$$\begin{aligned} M(G_{2k+1}) &\simeq \left(\bigvee_{t_{2k+1}} S(M(G_{2k})) \right) \vee S(M(G_{2(k-1)+1})) \\ &\simeq \left(\bigvee_{t_{2k+1}} S \left(\bigvee_{\ell=0}^k \bigvee_{M_{2\ell}^{2k}} S^{k-1+\ell} \right) \right) \vee S \left(\bigvee_{\ell=0}^{k-1} \bigvee_{M_{2\ell+1}^{2(k-1)+1}} S^{k-1+\ell} \right) \\ &\simeq \left(\bigvee_{t_{2k+1}} \bigvee_{\ell=0}^k \bigvee_{M_{2\ell}^{2k}} S(S^{k-1+\ell}) \right) \vee \left(\bigvee_{\ell=0}^{k-1} \bigvee_{M_{2\ell+1}^{2(k-1)+1}} S(S^{k-1+\ell}) \right) \\ &= \left(\bigvee_{\ell=0}^{k-1} \bigvee_{M_{2\ell}^{2k} t_{2k+1} + M_{2\ell+1}^{2(k-1)+1}} S^{k+\ell} \right) \vee \left(\bigvee_{M_{2k}^{2k} t_{2k+1}} S^{2k} \right). \end{aligned}$$

Знамо да је $M_{2\ell}^{2k} t_{2k+1} + M_{2\ell+1}^{2k-1} = M_{2\ell+1}^{2k+1}$ (тврђење 3.16), док је $M_{2k}^{2k} t_{2k+1} = t_1 \cdots t_{2k} t_{2k+1}$,

што је управо M_{2k+1}^{2k+1} , па важи $M(G_{2k+1}) \simeq \bigvee_{\ell=0}^k \bigvee_{M_{2\ell+1}^{2k+1}} S^{k+\ell}$. Тиме је завршен део индуктивног корака за $n = 2k + 1$.

У случају $n = 2k + 2$ поступамо аналогно:

$$\begin{aligned}
 M(G_{2k+2}) &\simeq \left(\bigvee_{t_{2k+2}} S(M(G_{2k+1})) \right) \vee S(M(G_{2k})) \\
 &\simeq \left(\bigvee_{t_{2k+2}} S \left(\bigvee_{\ell=0}^k \bigvee_{M_{2\ell+1}^{2k+1}} S^{k+\ell} \right) \right) \vee S \left(\bigvee_{\ell=0}^k \bigvee_{M_{2\ell}^{2k}} S^{k-1+\ell} \right) \\
 &= \left(\bigvee_{\ell=0}^k \bigvee_{M_{2\ell+1}^{2k+1} t_{2k+2}} S^{k+\ell+1} \right) \vee \left(\bigvee_{\ell=0}^k \bigvee_{M_{2\ell}^{2k}} S^{k+\ell} \right) \\
 &= \bigvee_{M_0^{2k}} S^k \vee \bigvee_{M_{2k+1}^{2k+1} t_{2k+2}} S^{2k+1} \vee \left(\bigvee_{\ell=0}^{k-1} \bigvee_{M_{2\ell+1}^{2k+1} t_{2k+2}} S^{k+\ell+1} \vee \bigvee_{\ell=1}^k \bigvee_{M_{2\ell}^{2k}} S^{k+\ell} \right) \\
 &= S^k \vee \bigvee_{M_{2k+1}^{2k+1} t_{2k+2}} S^{2k+1} \vee \left(\bigvee_{\ell=1}^k \bigvee_{M_{2\ell-1}^{2k+1} t_{2k+2} + M_{2\ell}^{2k}} S^{k+\ell} \right) \\
 \text{(тврђење 3.16)} &= S^k \vee \left(\bigvee_{\ell=1}^k \bigvee_{M_{2\ell}^{2k+2}} S^{k+\ell} \right) \vee \bigvee_{t_1 \cdots t_{2k+1} t_{2k+2}} S^{2k+1} \\
 &= \bigvee_{\ell=0}^{k+1} \bigvee_{M_{2\ell}^{2(k+1)}} S^{k+\ell}.
 \end{aligned}$$

Тиме је доказ теореме завршен. □

До сада је одређен хомотопски тип комплекса упаривања гусеница без тривијалних темена. Преостаје случај гусеница код којих постоји бар једно теме централног пута без додатних ивица ван тог пута ($m_i = 0$), али у овој тези није одређена конкретна формула за посматрани хомотопски тип. Ипак, следећа теорема даје алгоритам који индуктивно рачуна број сфера у свакој димензији хомотопског типа $M(G_n(m_1, \dots, m_n))$, за произвољне $m_i \geq 0$, тј. за све могуће гусенице. Ову теорему ћемо применити на гусенице код којих је тачно свако друго теме тривијално, а за које се испоставља да је хомотопски тип комплекса упаривања поново задат једним интересантним низом.

Пре формулације теореме, приметимо да за сваку гусеницу $G_n(m_1, \dots, m_n)$ можемо претпоставити да важи $m_1 \geq 1$, јер у случају $m_1 = 0$, гусеницу G_n можемо посматрати као гусеницу дужине $n - 1$ код које прво теме централног пута има степен $m_2 + 1$.

Теорема 3.18. *Дата је гусеница $G_n = G_n(m_1, \dots, m_n)$ са централним путем дужине $n \geq 3$, $m_1 \geq 1$ и за све i важи $m_i \in \mathbb{N}_0$. Нека је $t_i = m_i - 1$, $i = 1, \dots, n$. Означимо са $A_{n,d}$ број сфера димензије d у букету који је хомотопски еквивалентан комплексу $M(G_n)$. Тада важи рекурентна веза:*

$$A_{n+1,d} = \begin{cases} t_{n+1}A_{n,d-1} + A_{n-1,d-1}, & \text{ако } m_{n+1} \geq 1 \\ A_{n,d} + A_{n-1,d-1}, & \text{ако } m_{n+1} = 0 \text{ и } m_n \geq 1 \\ A_{n-2,d-1}, & \text{ако } m_{n+1} = m_n = 0. \end{cases}$$

Доказ. Посматрамо три могућа случаја која су уочена у поставци теореме.

- (1) Нека важи $m_{n+1} \geq 1$. На основу леме 3.4 (као у теорему 3.17), за $n \geq 2$ имамо:

$$M(G_{n+1}) \simeq \left(\bigvee_{t_{n+1}} S(M(G_n(m_1, \dots, m_n))) \right) \vee S(M(G_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-1}))). \quad (3.2.2)$$

Пошто су $M(G_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-1}))$ и $M(G_n(m_1, \dots, m_n))$ букети сфера, из (3.2.2) и тврђења 1.22 директно добијамо $A_{n+1,d} = t_{n+1}A_{n,d-1} + A_{n-1,d-1}$.

- (2) Нека је $m_{n+1} = 0$ и $m_n \geq 1$. Покажимо да тада за све $n \geq 2$ важи:

$$M(G_{n+1}) \simeq M(G_n(m_1, \dots, m_n)) \vee S(M(G_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-1}))), \quad (3.2.3)$$

из чега следи тражена једнакост $A_{n+1,d} = A_{n,d} + A_{n-1,d-1}$. Приметимо прво да важи $G_{n+1}(m_1, \dots, m_n, 0) = G_n(m_1, \dots, m_{n-1}, m_n + 1)$. Користећи лему 3.4 и чињеницу $m_n - 1 \geq 0$, имамо следеће хомотопске еквиваленције:

$$\begin{aligned} M(G_{n+1}) &= M(G_n(m_1, \dots, m_{n-1}, m_n + 1)) \\ &\simeq \left(\bigvee_{m_n} S(M(G_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-1}))) \right) \vee S(M(G_{n-2}(m_1, \dots, m_{n-2}))) \\ &\simeq \left(\bigvee_{m_{n-1}} S(M(G_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-1}))) \vee S(M(G_{n-2}(m_1, \dots, m_{n-2}))) \right) \vee \\ &\quad \vee S(M(G_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-1}))). \end{aligned}$$

Претходни букет смо написали на наведени начин јер за велики букет у загради, на основу леме 3.4, важи:

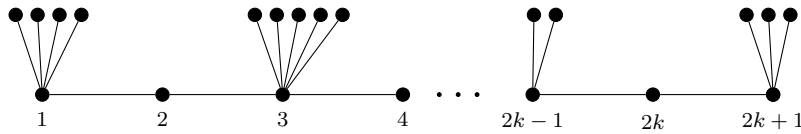
$$\bigvee_{m_{n-1}} S(M(G_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-1}))) \vee S(M(G_{n-2}(m_1, \dots, m_{n-2}))) \simeq M(G_n(m_1, \dots, m_n)),$$

одакле следи хомотопска еквиваленција (3.2.3), која даје тражену везу.

- (3) Нека важи $m_{n+1} = 0, m_n = 0, n \geq 3$. Граф $G_{n+1}(m_1, \dots, m_{n-2}, m_{n-1}, 0, 0)$ има независну 1-грану, па важи $M(G_{n+1}) \simeq S(M(G_{n-2}(m_1, \dots, m_{n-2})))$ (лема 3.2), одакле директно следи $A_{n+1,d} = A_{n-2,d-1}$. \square

Као што смо већ рекли, помоћу теореме 3.18 можемо индуктивно одредити хомотопски тип комплекса упаривања сваке гусенице, почев од базних случајева. Ти базни случајеви су комплекси упаривања који се непосредно одређују: $M(G_1(m_1)) \simeq \vee_{t_1} S^0$, $M(G_2(m_1, 0)) = M(G_1(m_1 + 1)) \simeq \vee_{t_1+1} S^0$, $M(G_2(m_1, m_2)) \simeq S^0 \vee (\vee_{t_1 t_2} S^1)$, као и $M(G_3(m_1, 0, m_3)) \simeq \vee_{t_1+t_3+t_1 t_3} S^1$, при условима $m_1, m_2, m_3 \geq 1$.

Међу гусеницама које садрже тривијална темена, веома интересантан пример представљају гусенице непарне дужине код којих је свако друго теме централног пута тривијално, тј. важи $m_{2i} = 0$ (слика 56). Показује се да је комплекс упаривања оваквих гусеница хомотопски еквивалентан букету сфера исте димензије. Пре него што формулишемо одговарајућу теорему, потребно је да дефинишемо једну суму и одредимо нека њена својства.



Слика 56. Гусеница код које је свако друго теме тривијално [50].

Дефиниција 3.19. За $k \geq 1$ и $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ дефинишимо суму $L_k(a_1, \dots, a_k)$:

$$L_k(a_1, \dots, a_k) = \sum_{\ell=1}^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq k} (i_2 - i_1)(i_3 - i_2) \cdots (i_\ell - i_{\ell-1}) a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_\ell}.$$

Пример 3.20. (Примери суме $L_k(a_1, \dots, a_k)$)

- (1) Ако је $k = 1$, $L_1(a_1) = a_1$.
- (2) Ако је $k = 2$, сума L_2 има три члана. За $\ell = 1$, члан a_1 одговара избору $i_1 = 1$, док члан a_2 одговара избору $i_1 = 2$. За $\ell = 2$ имамо члан $a_1 a_2$ који одговара $(i_1, i_2) = (1, 2)$. Дакле, важи $L_2(a_1, a_2) = a_1 + a_2 + (2 - 1)a_1 a_2 = a_1 + a_2 + a_1 a_2$.
- (3) За $k = 3$, $L_3(a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2 + a_3 + a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3$.
- (4) За $k = 4$, $L_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + 3a_1 a_4 + a_2 a_3 + 2a_2 a_4 + a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3 + 2a_1 a_2 a_4 + 2a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3 a_4$.

Лема 3.21. За све $k \geq 2$, суме $L_k(a_1, \dots, a_k)$ задовољавају следећу везу:

$$L_k(a_1, \dots, a_k) = a_k L_{k-1}(a_1, \dots, a_{k-2}, (a_{k-1} + 1)) + L_{k-1}(a_1, \dots, a_{k-1}). \quad (3.2.4)$$

Доказ. Дате суме можемо посматрати као полиноме. По дефиницији, сваки моном који се појављује у релацији (3.2.4) је облика $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_\ell}$, при чему $1 \leq \ell \leq k$ и $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq k$. Треба показати да су коефицијенти уз $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_\ell}$ на левој и десној страни (3.2.4) једнаки. Ако важи $i_\ell \leq k - 1$, коефицијент уз $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_\ell}$ из $L_{k-1}(a_1, \dots, a_{k-1})$ на десној страни, једнак је коефицијенту тог монома из $L_k(a_1, \dots, a_k)$ на левој страни, па је тврђење доказано.

Остаје да размотримо случај $i_\ell = k$, тј. мономе $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{\ell-1}} a_k$. Посматраћемо два подслучаја: $i_{\ell-1} = k-1$ и $i_{\ell-1} < k-1$. Ако је $i_{\ell-1} = k-1$ моном $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{\ell-2}} a_{k-1} a_k$ се појављује на свакој од страна једнакости (3.2.4) по тачно једанпут. На десној страни се појављује када помножимо члан

$$(i_2 - i_1) \cdots (i_{\ell-2} - i_{\ell-3})(k - 1 - i_{\ell-2}) a_{i_1} \cdots a_{i_{\ell-2}} a_{k-1}$$

из суме $L_{k-1}(a_1, \dots, a_{k-2}, (a_{k-1} + 1))$ са a_k . На левој страни се појављује као члан

$$(i_2 - i_1) \cdots (i_{\ell-2} - i_{\ell-3})(k - 1 - i_{\ell-2})(k - (k - 1)) a_{i_1} \cdots a_{i_{\ell-2}} a_{k-1} a_k,$$

па су одговарајући коефицијенти заиста једнаки.

Ако је $i_{\ell-1} < k-1$, моном $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{\ell-1}} a_k$ се појављује на два начина на десној страни једнакости (3.2.4). То се дешава јер се моном $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{\ell-1}}$ појављује на два начина у изразу $L_{k-1}(a_1, \dots, a_{k-2}, (a_{k-1} + 1))$: прво као члан

$$(i_2 - i_1) \cdots (i_{\ell-1} - i_{\ell-2}) a_{i_1} \cdots a_{i_{\ell-1}},$$

а други пут када у следећем производу из последње заграде узмемо 1:

$$(i_2 - i_1) \cdots (i_{\ell-1} - i_{\ell-2})(k - 1 - i_{\ell-1}) a_{i_1} \cdots a_{i_{\ell-1}} (a_{k-1} + 1).$$

Дакле, коефицијент уз $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_{\ell-1}} a_k$ на десној страни (3.2.4) једнак је:

$$(i_2 - i_1) \cdots (i_{\ell-1} - i_{\ell-2}) + (i_2 - i_1) \cdots (i_{\ell-1} - i_{\ell-2})(k - 1 - i_{\ell-1}) = (i_2 - i_1) \cdots (i_{\ell-1} - i_{\ell-2})(k - i_{\ell-1}),$$

што је тачно коефицијент на левој страни (3.2.4). \square

Гусенице код којих је свако друго теме централног пута тривијално означавамо са $G_k^0 = G_{2k-1}(m_1, 0, m_2, 0, \dots, m_{k-1}, 0, m_k)$. Приметимо да ако имамо гусеницу дужине $2k$ облика $G_{2k}(m_1, 0, m_2, 0, \dots, m_{k-1}, 0, m_k, 0)$, можемо је посматрати као да је дужине $2k-1$ и облика $G_{2k-1}(m_1, 0, m_2, 0, \dots, m_{k-1}, 0, m_k + 1)$, па је заиста довољно разматрати само случај када је централни пут непарне дужине. Напоменимо да овде m_i означава број ивица ван централног пута у темену $(2i-1)$, уместо у i -том темену као што је то био случај у претходном делу поглавља.

Теорема 3.22. *Нека је $k \in \mathbb{N}$ и $G_k^0 = G_{2k-1}(m_1, 0, m_2, 0, \dots, m_{k-1}, 0, m_k)$ дата гусеница, при чему важи $m_i \geq 1$ за све $i = 1, \dots, k$. Тада је хомотопски тип комплекса $M(G_k^0)$ следећи букет сфера:*

$$M(G_k^0) \simeq \bigvee_{L_k(a_1, a_2, \dots, a_k)} S^{k-1}$$

где је $a_i = m_i - 1$ за све $i = 1, \dots, k$.

Доказ. Докажимо теорему индукцијом по k . За $k = 1$, $M(G_1(m_1))$ је дискретан скуп од $m_1 = a_1 + 1$ тачака, тј. $M(G_1) = \bigvee_{a_1} S^0$. Пошто је $L_1(a_1) = a_1$, тврђење важи. Претпоставимо да теорема важи за $1, \dots, k-1$ ($k \geq 2$) и посматрајмо $G_{2k-1}(m_1, 0, m_2, 0, \dots, m_k)$. Пошто је $m_k \geq 1$, према теорему 3.18 имамо једнакост

$$A_{2k-1, d} = a_k A_{2k-2, d-1} + A_{2k-3, d-1}, \quad (3.2.5)$$

где је $A_{2k-1,d}$ број d -сфера хомотопског типа $M(G_{2k-1}(m_1, 0, m_2, 0, \dots, m_k))$, $A_{2k-2,d-1}$ је број $(d-1)$ -сфера за $M(G_{2k-2}(m_1, 0, m_2, 0, \dots, m_{k-1}, 0))$ и $A_{2k-3,d-1}$ је број $(d-1)$ -сфера за $M(G_{2k-3}(m_1, 0, m_2, 0, \dots, m_{k-1}))$. Када применимо индуктивну хипотезу на $M(G_{2k-3}(m_1, 0, m_2, 0, \dots, 0, m_{k-1}))$ знамо да је хомотопски тип овог комплекса одговарајући букет сфера димензије $k-2$, тј. важи:

$$A_{2k-3,d-1} = \begin{cases} L_{k-1}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}), & \text{ако } d = k-1 \\ 0, & \text{ако } d \neq k-1. \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Такође, и на $G_{2k-2}(m_1, 0, m_2, 0, \dots, m_{k-1}, 0)$ можемо применити индуктивну хипотезу јер важи $G_{2k-2}(m_1, 0, m_2, 0, \dots, m_{k-1}, 0) = G_{2k-3}(m_1, 0, m_2, 0, \dots, 0, m_{k-1} + 1)$, па имамо:

$$A_{2k-2,d-1} = \begin{cases} L_{k-1}(a_1, a_2, \dots, (a_{k-1} + 1)), & \text{ако } d = k-1 \\ 0, & \text{ако } d \neq k-1. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Из (3.2.5), (3.2.6) и (3.2.7) следи да за све $d \neq k-1$ важи $A_{2k-1,d} = 0$, док за $d = k-1$ на основу леме 3.21 закључујемо да важи $A_{2k-1,d} = L_k(a_1, a_2, \dots, a_k)$. Дакле, комплекс $M(G_k^0)$ заиста има хомотопски тип букета $L_k(a_1, a_2, \dots, a_k)$ сфера димензије $k-1$. \square

3.3 Теореме о пресликавањима посета и други доказ теореме 3.17

У овом поглављу ћемо дати други доказ теореме 3.17, коришћењем теорема о фибрама пресликавања посета (енг. *Poset Fiber Theorems*). Најпре ћемо укратко навести резултате које користимо (према раду [14]).

Нека је (P, \leq) коначан посет. За произвољан елемент $x \in P$ дефинишимо скупове:

$$P_{<x} = \{y \in P \mid y < x\} \text{ и } P_{\leq x} = \{y \in P \mid y \leq x\},$$

а аналогно и скупове $P_{>x}$ и $P_{\geq x}$. За два посета (P, \leq_P) и (Q, \leq_Q) произвољна функција $f : P \rightarrow Q$ се назива *пресликавање посета* ако чува поредак, тј. ако за свака два елемента $x, y \in P$ важи импликација: $x \leq_P y \Rightarrow f(x) \leq_Q f(y)$. За свако $q \in Q$, скуп $f^{-1}(Q_{\leq q})$ називамо *фибром* пресликавања f .

У веома значајном раду [81], Квилен је представио неколико теорема о фибрама пресликавања посета. Идејно говорећи, теореме имају следећу форму: ако имамо пресликавање посета $f : P \rightarrow Q$ код кога су фибре $f^{-1}(Q_{\leq q})$ „довољно доброг облика”, онда на основу својстава уређајног комплекса $\Delta(Q)$ посета Q , можемо закључивати о одговарајућим својствима комплекса $\Delta(P)$. На пример, уколико су све фибре контрактибилне, познато је да комплекси $\Delta(P)$ и $\Delta(Q)$ имају исти хомотопски тип (позната *Quillen fiber lemma*). Тврђења овог типа су постала веома користан алат у тополошкој комбинаторици. У раду [14] показано је више уопштења Квиленових резултата (за различита својства која желимо дедуковати за један посет на основу другог). Једно од њих је следећа теорема која повезује хомотопски тип $\Delta(P)$ и $\Delta(Q)$, уколико фибре $f^{-1}(Q_{\leq q})$ имају довољно повезане уређајне комплексе. Подсетимо се да $\ell(P)$ означава дужину посета P (видети

последњи део поглавља 1.1).

Теорема 3.23. ([14], Теорема 1.1) Нека је $f : P \rightarrow Q$ пресликавање посета такво да за свако $q \in Q$ важи да је $\Delta(f^{-1}(Q_{\leq q}))$ бар $\ell(f^{-1}(Q_{\leq q}))$ -повезан простор. Тада важи:

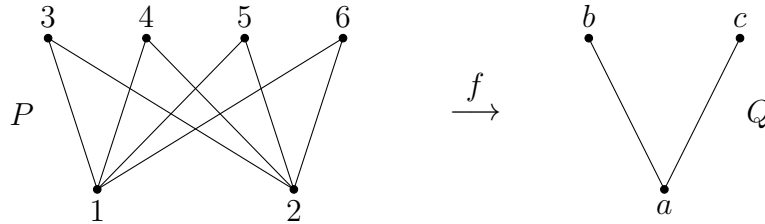
$$\Delta(P) \simeq \Delta(Q) \vee \{ \Delta(f^{-1}(Q_{\leq q})) * \Delta(Q_{> q}) \mid q \in Q \},$$

где се наведени букет формира идентификовањем темена q из $\Delta(Q)$ са произвољним елементом из $f^{-1}(Q_{\leq q})$, за све елементе $q \in Q$. Посебно, ако је комплекс $\Delta(Q)$ повезан, онда важи

$$\Delta(P) \simeq \Delta(Q) \vee \bigvee_{q \in Q} (\Delta(f^{-1}(Q_{\leq q})) * \Delta(Q_{> q})).$$

Напоменимо да се овде може појавити спој комплекса са празним скупом, за који знамо да важи $X * \emptyset \approx \emptyset * X \approx X$. Ради илустрације, наведимо једну једноставну примену претходне теореме.

Пример 3.24. ([14], пример 1.2) Нека су P и Q посети приказани на слици 57, са релацијама поретка датим одговарајућим дужима (на пример, $a \leq_Q b$). Нека је пресликавање $f : P \rightarrow Q$ задато са: $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = f(4) = b$ и $f(5) = f(6) = c$. Ово је добро дефинисано пресликавање посета.



Слика 57. Пресликавање посета, пример 3.24.

Примећујемо да важи $\Delta(f^{-1}(Q_{\leq a})) \approx S^0$ и $\Delta(Q_{> a}) \approx S^0$. Такође, $\Delta(f^{-1}(Q_{\leq b})) \approx S^1 \approx \Delta(f^{-1}(Q_{\leq c}))$, док су $Q_{> b}$ и $Q_{> c}$ празни скупови. Дакле, за сва три елемента q из Q важи $\Delta(f^{-1}(Q_{\leq q})) * \Delta(Q_{> q}) \approx S^1$, па на основу теореме 3.23 закључујемо да је $\Delta(P)$ хомотопски еквивалентан букету три кружнице S^1 , што је тачно (овде је $\Delta(P)$ управо бипартитни граф $K_{2,4}$ приказан на слици 57).

Овде ћемо користити примену теореме 3.23 на такозвана *увешћања* комплекса (оригинални назив је *inflated complex*). Наиме, нека је K симплицијални комплекс на скупу темена $[n]$, а $m = (m_1, \dots, m_n)$ низ природних бројева. Посматрајмо нови симплицијални комплекс K_m дефинисан на следећи начин. Скуп темена K_m се добија тако што се свако теме $i \in [n]$ узме са вишеструкошћу m_i , тј. то је скуп

$$V(K_m) = \{(i, c) \mid i \in [n], c \in [m_i]\},$$

док симплексе комплекса K_m формирамо тако што сваки симплекс из K поновимо са вишеструкошћу која је једнака производу вишеструкости његових темена. Прецизније:

$$K_m = \{ \{(i_1, c_1), \dots, (i_k, c_k)\} \mid k \in \mathbb{N}, \{i_1, \dots, i_k\} \in K, (\forall j \in [k]) c_j \in [m_{i_j}] \} \cup \{\emptyset\}.$$

Комплекс K_m се назива m -увећање комплекса K . Применом теореме 3.23 на ову конструкцију добијамо следећу теорему.

Теорема 3.25. ([14], Теорема 6.2) *Ако је K повезан симплицијални комплекс, онда је хомотопски тип m -увећања комплекса K дат следећим изразом:*

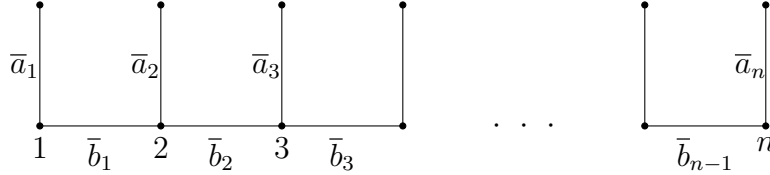
$$K_m \simeq \bigvee_{F \in K} (S^{|F|}(\text{Lk}_K F))^{\vee \nu(F,m)} \simeq \bigvee_{F \in K} \left(\bigvee_{\nu(F,m)} (S^{\dim F} * \text{Lk}_K F) \right),$$

где је $\nu(F, m) = \prod_{i \in F} (m_i - 1)$ и $\nu(\emptyset, m) = 1$, док $S^{|F|}$ означава $|F|$ -тоструку суспензију.

Напоменимо да је за $F = \emptyset$ одговарајући члан букета једнак $\text{Lk}_K \emptyset = K$.

Сада можемо дати други доказ теореме 3.17 помоћу конструкције m -увећања. Овај доказ је скициран у напомени 5.12 из рада [50] (на коме се базира цела ова глава), а овде ће бити представљен комплетно. Подсетимо се, циљ је одредити хомотопски тип комплекса упаривања гусенице $G_n = G_n(m_1, \dots, m_n)$ без тривијалних темена централног пута.

Доказ. Нека је Γ савршена 1-гусеница дужине n , а $K = M(\Gamma)$ њен комплекс упаривања. Ако означимо ивице графа Γ са $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{n-1}$, као на слици 58, темена комплекса K чине скуп $V(K) = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}\}$.



Слика 58. Савршена 1-гусеница Γ дужине n .

Посматрајмо m -увећање K_m комплекса K са вектором вишеструкости

$$m = (m_1, \dots, m_n, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}),$$

где се свако теме a_i узима са вишеструкошћу m_i , а свако b_j са вишеструкошћу 1. Приметимо да је комплекс упаривања гусенице $G_n = G_n(m_1, \dots, m_n)$ управо ово m -увећање комплекса $K = M(\Gamma)$, тј. $M(G_n) = K_m$. Из тврђења 3.10 знамо да је K повезан комплекс, па на основу теореме 3.25 важи

$$K_m \simeq \bigvee_{F \in K} C_F, \text{ где је } C_F = \bigvee_{\nu(F,m)} (S^{\dim F} * \text{Lk}_K F), \text{ за све } F \in K. \quad (3.3.1)$$

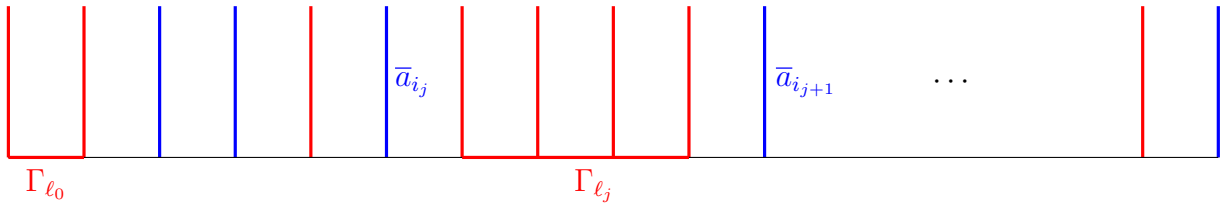
Одредимо хомотопски тип члана C_F у зависности од F . Приметимо најпре да ако постоји $j \in [n - 1]$ такво да важи $b_j \in F$, онда је члан C_F контрактибилан. Наиме, $\nu(F, m)$ је производ вишеструкости темена из F умањених за 1, па како је вишеструкост од b_j једнака 1, у овом случају важи $\nu(F, m) = 0$, одакле следи $C_F \simeq *$. Зато од сада посматрамо само симплексе $F \in K$ који задовољавају

$F \subset \{a_1, \dots, a_n\}$, тј. само изборе темена која одговарају вертикалним ивицама на слици 58. Нека је $\overline{F} \subset \{\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n\}$ одговарајући избор вертикалних ивица.

Одредимо хомотопски тип поткомплекса $\text{Lk}_K F$ за посматране $F \subset \{a_1, \dots, a_n\}$. Према лемми 2.4 знамо да је $\text{Lk}_K F$ комплекс упаривања графа $\Gamma_{\overline{F}}$ који се састоји од свих ивица графа Γ које нису суседне ниједној ивици из \overline{F} . Означимо ивице из \overline{F} са $\overline{a}_{i_1}, \dots, \overline{a}_{i_k}$, где важи $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $k \geq 1$. Да бисмо једноставније описали $\Gamma_{\overline{F}}$, означимо још $i_0 = 0$ и $i_{k+1} = n + 1$. Приметимо да је $\Gamma_{\overline{F}}$ дисјунктна унија савршених 1-гусеница $\Gamma_{\ell_0}, \dots, \Gamma_{\ell_k}$, дужина ℓ_0, \dots, ℓ_k редом (слика 59), где је

$$\ell_j = i_{j+1} - i_j - 1, \text{ за све } j = 0, 1, \dots, k,$$

при чему за $i_{j+1} = i_j + 1$ важи $\Gamma_{\ell_j} = \emptyset$.



Слика 59. Подграф \overline{F} се састоји од плавих, а подграф $\Gamma_{\overline{F}}$ од црвених ивица.

Дакле, имамо:

$$\text{Lk}_K F = M(\Gamma_{\overline{F}}) = M(\Gamma_{\ell_0} \sqcup \dots \sqcup \Gamma_{\ell_k}) \approx M(\Gamma_{\ell_0}) * \dots * M(\Gamma_{\ell_k})$$

(уколико важи $\Gamma_{\ell_j} = \emptyset$, онда и $M(\Gamma_{\ell_j}) = \emptyset$, па тај члан не утиче на спој). Из тврђења 3.10 знамо да је комплекс упаривања савршене 1-гусенице контрактибилан када је гусеница непарне дужине. Закључујемо да ако постоји индекс $j \in \{0, 1, \dots, k\}$ такав да је број ℓ_j непаран, онда је $\text{Lk}_K F$ контрактибилан, па је и члан C_F контрактибилан и не утиче на хомотопски тип комплекса K_m . Зато је довољно посматрати само оне \overline{F} за које важи да након означавања позиција i_1, \dots, i_k у низу од n елемената, преостали блокови су парне дужине, тј. тачно важи $(i_1, \dots, i_k) \in A_k^n$. За такве \overline{F} (односно F), користећи тврђење 3.10 и тврђење 1.22, закључујемо да важи:

$$\text{Lk}_K F \approx M(\Gamma_{\ell_0}) * \dots * M(\Gamma_{\ell_k}) \simeq \bigstar_{j=0}^k \left(S^{\frac{i_{j+1}-i_j-1}{2}-1} \right) \simeq S^{\frac{n-k}{2}-1}$$

(димензија последње сфера се добија сређивањем претходног споја). Уведимо ознаку $t_i = m_i - 1$, за све $i = 1, \dots, n$. Тада је број $\nu(F, m)$ за посматране F једнак производу $t_{i_1} \cdots t_{i_k}$. Користећи још да важи $\dim F = k - 1$, на основу (3.3.1) добијамо да члан C_F има следећи хомотопски тип:

$$C_F \simeq \bigvee_{t_{i_1} \cdots t_{i_k}} \left(S^{k-1} * S^{\frac{n-k}{2}-1} \right) \simeq \bigvee_{t_{i_1} \cdots t_{i_k}} S^{\frac{n+k}{2}-1}.$$

Дакле, за фиксиран број $k = |F|$, сваки члан C_F је букет сфера димензије $(\frac{n+k}{2} - 1)$, а укупан број сфера у свим букетима C_F за које важи $|F| = k$ једнак је суми $\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_k) \in A_k^n} t_{i_1} t_{i_2} \cdots t_{i_k}$, што је управо сума $M_k^n(t_1, \dots, t_n)$. Такође, за $F = \emptyset$ важи

$C_F = K = M(\Gamma)$, што је контрактибилан простор за непарно n , а за парно n он је хомотопски еквивалентан сфери димензије $(\frac{n}{2} - 1)$. Коначно, пролазећи све симплексе $F \in K$ (за све k), на основу формуле (3.3.1) добијамо тачан хомотопски тип комплекса $K_m = M(G_n)$:

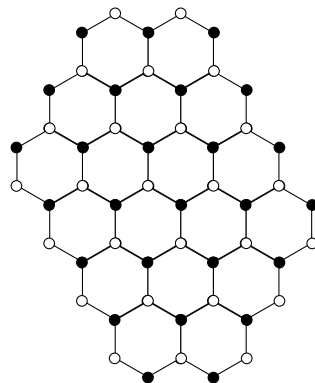
$$M(G_n) \simeq \bigvee_{\substack{k=0,1,\dots,n \\ 2|k+n}} \bigvee_{M_k^n} S^{\frac{n+k}{2}-1},$$

што је управо тврђење теореме 3.17 (другачије записано). □

Глава 4

Повезаност комплекса упаривања и МТА алгоритам

Ова глава је посвећена комплексима упаривања две врсте графова - то су коначна поплучавања равни правилним полигонима и бинарна дрвета. За разлику од претходне главе у којој смо одређивали тачан хомотопски тип комплекса упаривања, овде су графови компликованији, па нам је циљ да проценимо повезаност њихових комплекса упаривања, а тачан хомотопски тип ћемо одредити у специјалним случајевима. Такође, за разлику од стандардних тополошких алата које смо користили у претходној глави, овде примењујемо комбинаторно сложенију технику, под називом *МТА алгоритам*. Овај алгоритам је верзија *дискретне Морсове теорије*, прилагођена комплексима независности. С обзиром на то да је дискретна Морсова теорија једна од најпознатијих техника комбинаторне топологије, не излажемо је детаљно, већ наводимо само основне појмове (поглавље 4.1). Затим, у поглављу 4.2 детаљно описујемо МТА алгоритам. Након тога прелазимо на примене овог алгоритма на полигонална поплучавања. Поглавље 4.3 је посвећено линијским поплучавањима (полигони формирају „ред“), док поплучавања равни шестоугловима, односно *саћа* (енг. *honeycomb graphs*), разматрамо у поглављу 4.4. Као што смо поменули у Уводу, интересују нас саћа облика $r \times s \times t$, тј. она саћа која имају r шестоуглова дуж доње леве стране, s шестоуглова дуж горње леве стране и t шестоуглова на врху (слика 60). У последњем поглављу 4.5 посматрамо комплексе упаривања савршених бинарних дрвета и одређујемо њихову тачну повезаност. Ова глава је базирана на оригиналном раду [50].



Слика 60. Саће облика $4 \times 3 \times 2$. [50]

4.1 Дискретна Морсова теорија

Дискретна Морсова теорија (енг. *Discrete Morse Theory*) је поступак који је развио Робин Форман [36, 37], за одређивање повезаности и хомотопског типа симплицијалних комплекса. Основна идеја ове теорије је да се на датом симплицијалном комплексу формирају парови страна, на основу којих се изводи низ колапсирања која поједностављују посматрани комплекс не мењајући његов хомотопски тип. Након завршеног процеса колапсирања, добијени ћелијски комплекс је једноставнији, а хомотопски је еквивалентан полазном. Дискретна Морсова теорија је комбинаторни аналог оригиналне Морсове теорије за тополошке просторе.

Овде наводимо само главну теорему дискретне Морсове теорије, а за детаљније упознавање са овом теоријом читалац се упућује на поменуте радове Формана [36, 37] и књигу Козлова [63, глава 11].

Нека је K произвољан симплицијални комплекс. Посматрајмо његов посет страна $P(K)$. Подсећања ради, уређење овог посета је задато инклузијом: $a \prec b$ ако и само ако је симплекс a страна симплекса b . Дефинишемо појам *упаривања на посету* као упаривање на одговарајућем графу.

Дефиниција 4.1. *Делимично упаривање* (или само *упаривање*) на посету (P, \prec) је упаривање на графу Хасеовог дијаграма посета P . Дакле, то је скуп $M \subseteq P \times P$ који задовољава два услова:

- за све $a, b \in P$ важи: ако $(a, b) \in M$, онда $a \prec b$;
- сваки елемент $a \in P$ припада највише једном пару из M .

Ако важи $(a, b) \in M$, пишемо $a = d(b)$ и $b = u(a)$. Ако сваки елемент посета припада неком пару из M , кажемо да је ово *савршено упаривање*.

Упаривања задају начин на који се врше горе поменута колапсирања. Међутим, да би се та колапсирања заиста могла реализовати, неформално говорећи, потребно је да не постоје циклуси који онемогућавају да се колапсирање почне и настави. Тако долазимо до следећег појма.

Дефиниција 4.2. Упаривање посета P је *ациклично* (или *Морсово упаривање*), ако не постоји циклус облика:

$$a_1 \prec u(a_1) \succ a_2 \prec u(a_2) \succ \cdots \prec u(a_m) \succ a_1,$$

где је $m \geq 2$ и сви a_i , $i = 1, \dots, m$ су различити. За ациклично упаривање посета неупарене елементе називамо *критичним ћелијама*.

Сада можемо формулисати главну теорему дискретне Морсове теорије. Из саме формулације теореме увиђамо значај конструкције ацикличних упаривања са малим бројем критичних ћелија.

Теорема 4.3. [63] *Нека је K симплицијални комплекс и M ациклично упаривање на његовом посету страна. Означимо са c_i број критичних i -димензионалних страна при овом упаривању. Тада је K хомотопски еквивалентан ћелијском комплексу K_c са c_i ћелија димензије i , за све i , уз једну додатну 0-ћелију у случају да је и празан скуп упарен у M .*

О изузетном значају дискретне Морсове теорије сведочи разноврсност резултата добијених њеним коришћењем. Стога су за неке посебне фамилије комплекса развијене специјалне верзије ове теорије, које у себи имају „уграђена” својства посматране фамилије. Једна од тих верзија је МТА алгоритам који се примењује на комплексе независности.

4.2 МТА алгоритам

У овом поглављу ћемо изложити *МТА алгоритам* (енг. *Matching tree algorithm*), којим се поступно конструише ациклично упаривање на комплексу независности графа. Овај алгоритам је првобитно конструисан у раду [20], а начин на који га овде презентујемо користи приступ из рада [21]. Ради лакшег разумевања конструкције која има нешто компликованију комбинаторну структуру, алгоритам ћемо илустровати на једном једноставном примеру, а затим ћемо доказати две корисне леме. Циљ нам је да МТА алгоритам применимо за одређивање повезаности комплекса упаривања у поглављима 4.3 и 4.4.

Посматрајмо произвољан прост граф $G = (V, E)$. Нека је $\Sigma = \Sigma(\text{Ind}(G))$ посет страна комплекса независности графа G . Желимо да конструишемо ациклично упаривање на посету Σ . За произвољно теме $v \in V$ означимо његову *отворену* и *затворену околину*:

- отворена околина означава скуп суседа темена v : $N(v) = \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$;
- затворена околина садржи и само теме v : $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

Аналогно, за скуп темена S , уведемо ознаке $N(S) := \bigcup_{v \in S} N(v)$ и $N[S] := \bigcup_{v \in S} N[v]$. Идеја алгоритма је следећа: изаберимо једно теме v које се назива *пивот*, а онда за сваку страну $I \in \Sigma$ за коју важи $v \notin I$ и $I \cap N(v) = \emptyset$, посматрајмо упаривање $(I, I \cup \{v\})$. Остаће неупарене оне стране I које нису дисјунктне са $N(v) \cup \{v\}$. Тада можемо изабрати нови pivot и поновити поступак. У неким ситуацијама је погодније поделити скуп неупарених страна на два дела и за сваки од њих изабрати други pivot. Понављањем овог процеса, смањује се скуп неупарених страна, што доводи до ацикличног упаривања са мање критичних ћелија. Наравно, добијено упаривање зависи од избора пивота.

Користећи претходну идеју, МТА алгоритам конструише бинарно дрво које почиње од *корена*, а сваки чвор који додамо или има једног или два *наследника*, или је тај чвор лист дрвета, тј. нема наследнике и завршава одговарајућу грану. (Темена овог дрвета називамо чворовима да бисмо их лакше разликовали од темена самог графа.) У сваком чвору се заправо чува информација о странама које још нису упарене до тог тренутка. Сви чворови који нису празан скуп \emptyset ће бити следећег облика:

$$\Sigma(A, B) = \{I \in \text{Ind}(G) \mid A \subseteq I \text{ и } B \cap I = \emptyset\},$$

где $A, B \subset V$ задовољавају услове: $A \cap B = \emptyset$ и $N(A) := \bigcup_{a \in A} N(a) \subset B$. (4.2.1)

Пре него што формулишемо алгоритам, размотримо природу чворова $\Sigma(A, B)$. Корен дрвета ће бити почетни скуп неупарених страна, тј. цео посет $\Sigma = \Sigma(\emptyset, \emptyset)$.

Када алгоритам дође до чвора $\Sigma(A, B)$, циљ је упарити што више елемената овог скупа. Ако је $\Sigma(A, B)$ једночлан скуп, тј. $\Sigma(A, B) = \{A\}$, у овој грани дрвета је завршен процес упаривања и остаје нам неупарена страна A . Ово се дешава када $A \cup B = V$ (касније ћемо видети да у супротном можемо вршити упаривање на $\Sigma(A, B)$). Посматрајмо зато случајеве када $|\Sigma(A, B)| \geq 2$ и $A \cup B \neq V$. Тада имамо следеће три ситуације.

- Најједноставнији случај је ако постоји теме $v \in V \setminus (A \cup B)$ такво да важи $N(v) \subset A \cup B$. Из услова (4.2.1) закључујемо да важи $N(v) \subset B$. Тада формирањем парова $(I, I \cup \{v\})$, за све $I \in \Sigma(A, B)$ такве да $v \notin I$, добијамо савршено упаривање на $\Sigma(A, B)$. Другим речима, у овом случају нема неупарених страна у посматраној грани дрвета. Теме v се назива *слободно теме*.
- Претпоставимо да постоји теме $v \in V \setminus (A \cup B)$ које има **тачно једног суседа** w у скупу $V \setminus (A \cup B)$ (због услова (4.2.1) тада $N(v) \setminus \{w\} \subset B$). Након формирања свих могућих парова $(I, I \cup \{v\})$ у $\Sigma(A, B)$, примећује се да неупарени остају тачно елементи скупа $\Sigma(A \cup \{w\}, B \cup N(w))$. Приметимо да и овај скуп задовољава услов (4.2.1), па можемо прећи на чвор придружен њему. У овој ситуацији, теме v се назива *пивот*, а теме w је *добро теме* за пивот v .
- Теме $v \in V \setminus (A \cup B)$ које **има бар два суседа** у скупу $V \setminus (A \cup B)$ не може редуковати скуп $\Sigma(A, B)$ на један скуп истог облика. Међутим, независно од броја суседа темена v , помоћу v можемо скуп $\Sigma(A, B)$ представити као унију два мања скупа овог типа:

$$\Sigma(A, B) = \Sigma(A, B \cup \{v\}) \cup \Sigma(A \cup \{v\}, B \cup N(v)).$$

Приметимо да оба скупа задовољавају услов (4.2.1). Овај процес се назива *подела*, а теме v *деоно теме*.

Такође, видимо да ако $A \cup B \neq V$, увек можемо смањити скуп $\Sigma(A, B)$ на неки од претходна три начина, чиме је оправдана раније наведена тврдња да када $\Sigma(A, B)$ постане једночлан, сигурно важи $A \cup B = V$.

Конечно, сада можемо прецизно дефинисати МТА алгоритам.

Дефиниција 4.4. (МТА алгоритам) Почевши од чвора $\Sigma = \Sigma(\emptyset, \emptyset)$ у корену дрвета, у сваком чвору $\Sigma(A, B)$ за који важи $|\Sigma(A, B)| \geq 2$ примењујемо следећи поступак.

- (1) Ако постоји слободно теме $v \in V \setminus (A \cup B)$, тј. важи $N(v) \setminus (A \cup B) = \emptyset$, придружујемо чвору $\Sigma(A, B)$ једног наследника који је празан скуп \emptyset .
- (2) Иначе, ако постоји теме $v \in V \setminus (A \cup B)$ за које важи да је $N(v) \setminus (A \cup B)$ једночлан скуп $\{w\}$, теме v бирамо за пивот, w је добро теме, а чвору $\Sigma(A, B)$ придружујемо једног наследника $\Sigma(A \cup \{w\}, B \cup N(w))$.
- (3) Уколико не можемо применити ни (1) ни (2), а постоји теме $v \in V \setminus (A \cup B)$ (дакле, v има бар два суседа у $V \setminus (A \cup B)$), кажемо да је чвор $\Sigma(A, B)$ *спреман за поделу*. Тада правимо поделу са деоним теменом v , тј. чвору $\Sigma(A, B)$ придружујемо два наследника: десног наследника $\Sigma(A \cup \{v\}, B \cup N(v))$ и левог наследника $\Sigma(A, B \cup \{v\})$.

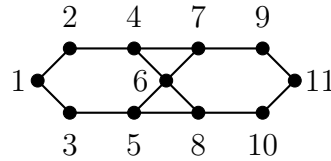
Напомена 4.5. Начин на који је МТА алгоритам описан у раду [21] дозвољава да кораке (1), (2) и (3) изводимо произвољним избором, али ћемо ми увек поштовати наведени редослед јер он даје жељене оригиналне резултате у нашем случају. Приметимо да уколико можемо применити било који корак, и ако је w добро теме у односу на пивот v , можемо применити (2) или (3). Ако применимо (3) бирајући w за деоно теме, леви наследник $\Sigma(A, B \cup \{w\})$ има слободно теме v , па тиме овај чвор има једног наследника који је \emptyset . Дакле, једина грана која се даље истражује је почев од чвора $\Sigma(A \cup \{w\}, B \cup N(w))$, тачно као у кораку (2).

Када се МТА алгоритам заврши, имамо дрво чији су листови или једночлани скупови $\Sigma(A, B)$, или празни скупови. Сваки чвор дрвета дефинише делимично упаривање на посету Σ (ти делови су дисјунктни), па можемо посматрати упаривање које се добија као унија свих тих делимичних. Једини неупарени елементи се тада налазе у листовима дрвета. Следећа теорема је главни резултат који користимо.

Теорема 4.6. [21, теорема 2.4] *Дрво добијено применом МТА алгоритма конструира ациклично упаривање на посету страна комплекса $Ind(G)$. Критичне ћелије су дате једночланим листовима овог дрвета, облика $\Sigma(A, B) = \{A\}$.*

На основу дискретне Морсове теорије, закључујемо да ће комплекс $Ind(G)$ бити хомотопски еквивалентан простору са ћелијама које одговарају критичним ћелијама овог упаривања, са још једном додатном ћелијом димензије 0, јер је празан скуп упарен МТА алгоритмом (теорема 4.3). Примену МТА алгоритма ћемо детаљно илустровати следећим примером.

Пример 4.7. Нека је G граф саће облика $1 \times 1 \times 2$ (два шестоугла која имају једну заједничку ивицу). Његов линијски граф $L(G)$ је приказан на слици 61, са теменима означеним бројевима од 1 до 11. Желимо да одредимо хомотопски тип комплекса $M(G) = Ind(L(G))$, па ћемо применити МТА алгоритам на $L(G)$.



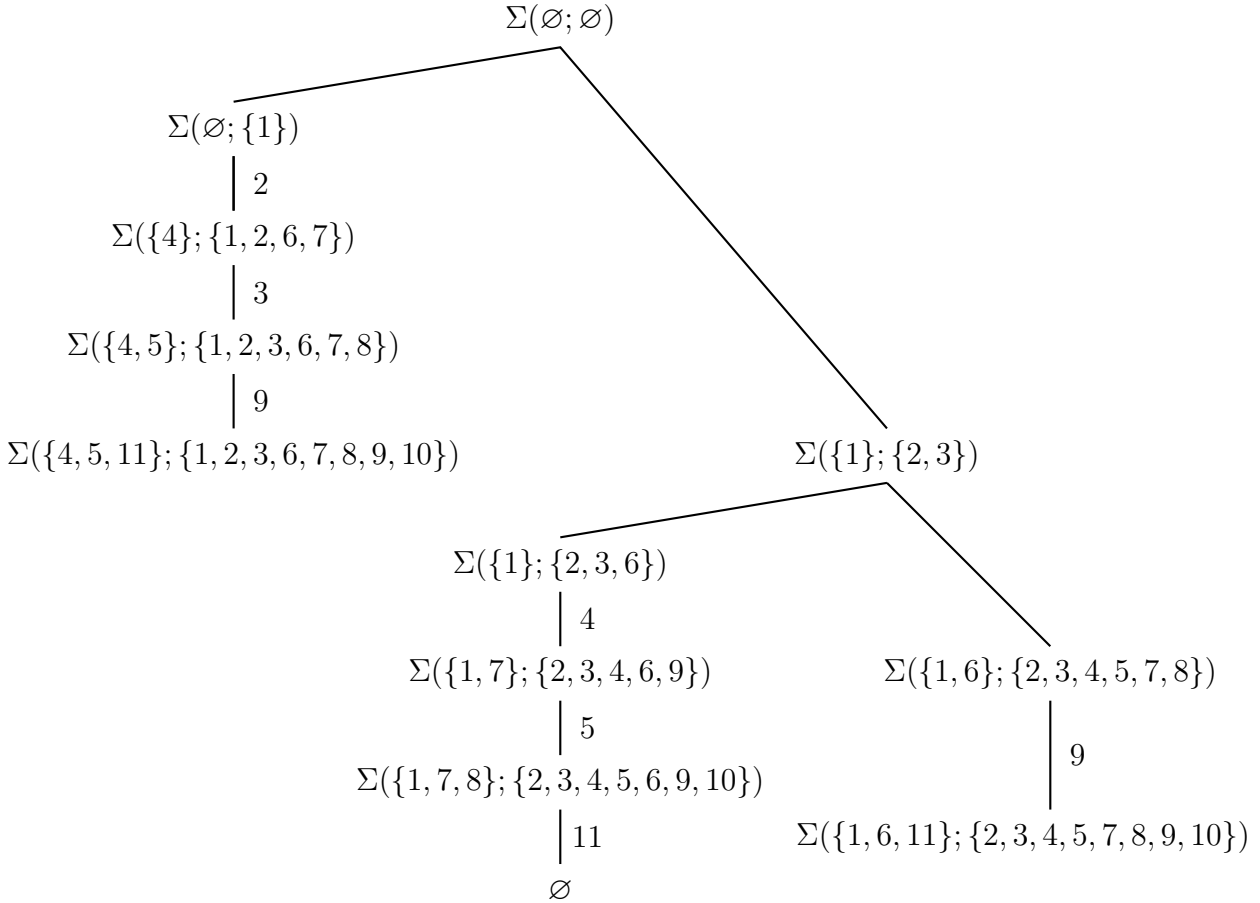
Слика 61. Линијски граф $L(G)$ на који примењујемо МТА алгоритам. [50]

Почетни чвор, тј. корен $\Sigma(\emptyset, \emptyset)$ је спреман за поделу, па треба изабрати деоно теме. Бирајући теме 1, добијамо два наследника: $\Sigma(\emptyset, \{1\})$ и $\Sigma(\{1\}, \{2, 3\})$, као што је приказано на слици 62. Посматрајмо прво левог наследника. Пошто је теме 4 једини сусед темена 2 ван $\{1\}$, користимо 4 као добро теме у односу на пивот 2. То даје чвору $\Sigma(\emptyset, \{1\})$ једног наследника $\Sigma(\{4\}, \{1, 2, 6, 7\})$. Затим уочавамо да је теме 5 добро теме за пивот 3, па добијамо следећег наследника $\Sigma(\{4, 5\}, \{1, 2, 3, 6, 7, 8\})$. На крају, користећи 11 као добро теме у односу на пивот 9, добијамо чвор који завршава ову грану (јер је једночлан скуп који садржи само $\{4, 5, 11\}$):

$$\Sigma(\{4, 5, 11\}, \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10\}).$$

Прелазимо на анализу десног наследника корена, тј. чвор $\Sigma(\{1\}, \{2, 3\})$. Он је спреман за поделу, па користећи 6 као деоно теме и понављајући исти поступак,

добиамо дрво приказано на слици 62 (у сваком кораку на слици су означени или пивот или слободно теме, зависно од природе корака).



Слика 62. Дрво добијено МТА алгоритмом. [50]

Листови овог дрвета су чворови:

$$\emptyset, \Sigma(\{1, 6, 11\}, \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}) \text{ и } \Sigma(\{4, 5, 11\}, \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10\}).$$

Два непразна листа одговарају скуповима $\{4, 5, 11\}$ и $\{1, 6, 11\}$, па имамо две критичне ћелије димензије 2. Такође, у конструисаном упаривању, празан скуп је упарен са скупом $\{2\}$ (при избору пивота 2 за $\Sigma(\emptyset; \{1\})$). Дакле, према теорему 4.3, комплекс $Ind(L(G)) = M(G)$ је хомотопски еквивалентан простору са две ћелије димензије 2 и једном ћелијом димензије 0, па знамо да важи:

$$M(G) \simeq S^2 \vee S^2.$$

Нагласимо да смо у овом примеру могли да одредимо тачан хомотопски тип јер су све критичне ћелије биле истих димензија, осим једне ћелије димензије 0. Генерално, ово неће бити случај, али ћемо моћи да добијемо информације о повезаности и хомологији комплекса упаривања.

Процес примене корака (1) и (2) на чвор $\Sigma(A, B)$, док не стигнемо до чвора који је или спреман за поделу, или је крај гране (критична ћелија или празан скуп), називамо *припрема за поделу*. Наравно, у случају када је у питању крај гране, неће доћи до поделе како би назив сугерисао, али се процес примене корака (1) и (2) прекида, као када дођемо до чвора који је спреман за поделу. Показује се да важи интересантно тврђење - независно од припреме за поделу, процес се или увек завршава празним скупом или су критичне ћелије, у свакој могућој реализацији алгоритма, увек истих димензија, односно процес припреме за поделу нема утицаја на величину критичних ћелија. У примеру 4.7, када смо припремали за поделу $\Sigma(\{1\}, \{2, 3, 6\})$, за добра темена смо користили редом 7 (пивот 4), па 8 (пивот 5), а на крају 11 као слободно теме и дошли до празног скупа као краја гране. Лако се провера да смо могли узети прво добро теме 8 (пивот 5), па добро теме 11 (пивот 9), и на крају слободно теме 4. Грана би се свакако завршила на исти начин. Следећа лема показује опште тврђење.

Лема 4.8. *Нека је $G = (V, E)$ граф и $\Sigma(A, B)$ чвор у дрвету МТА алгоритма за $\Sigma(\text{Ind}(G))$. Претпоставимо да постоје два начина да извршимо припрему за поделу овог чвора, и означимо те делове алгоритма са A' и \tilde{A} . Нека је $\Sigma(A', B')$ чвор који или садржи слободно теме, или је критична ћелија, или је спреман за поделу након примене A' , а $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B})$ чвор неког од та три типа добијен применом \tilde{A} . Тада важи тачно једна од следеће две могућности:*

- (а) *Сваки од чворова $\Sigma(A', B')$ и $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B})$ има по слободно теме, тј. грана која почиње са $\Sigma(A, B)$ се увек завршава са \emptyset и не даје критичне ћелије.*
- (б) *Важи $|A'| = |\tilde{A}|$ и $A' \cup B' = \tilde{A} \cup \tilde{B}$.*

(Приметимо да у случају (б) или увек завршавамо грану критичном ћелијом исте димензије, или имамо чворове спремне за поделу који настављају процес на истом скупу чворова $V_1 = V \setminus (A' \cup B') = V \setminus (\tilde{A} \cup \tilde{B})$, и са истом кардиналношћу у првом скупу, што ће узастопном применом овог тврђења дати критичне ћелије истих димензија на крају.)

Доказ. Без умањења општости, можемо претпоставити да на почетку важи $A = B = \emptyset$, тј. да полазимо од чвора $\Sigma(\emptyset, \emptyset)$. Приметимо најпре да тврђење важи у неколико једноставних случајева. Када граф G има слободно теме, алгоритам се једнозначно примењује у једном кораку. Када се граф G састоји од једне ивице $\{v, w\}$, алгоритам се може применити на два начина, зависно да ли бирамо v или w за пивот, редом. У првом случају алгоритам се завршава критичном ћелијом $\Sigma(A', B') = \Sigma(\{w\}, \{v\})$, а у другом критичном ћелијом $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B}) = \Sigma(\{w\}, \{v\})$. Дакле, тврђење леме тада важи. Размотримо још један једноставан случај, када је $G = N[w]$, за неко теме w . Можемо претпоставити да важи $\deg w \geq 2$. Уколико w нема суседа који је степена 1, чвор $\Sigma(\emptyset, \emptyset)$ је спреман за поделу и тврђење важи. Уколико w има суседа v степена 1, морамо применити корак (2) алгоритма са пивотом v и добрим теменом w , чиме добијамо чвор $\Sigma(\{w\}, N(w))$ који је критична ћелија. Било који пивот да изаберемо добијамо ту исту критичну ћелију, тако да закључујемо да тврђење леме важи и у овом случају.

Претпоставимо сада да лема није тачна и уочимо граф G са најмањим могућим бројем темена за који лема не важи, тј. не важи ни један од услова (а) и (б).

Пошто G нема слободно теме, знамо да ћемо примењивати корак (2) док не стигнемо до темена спремног за поделу или краја гране. То значи да за \mathcal{A}' постоји низ добрих темена w_1, \dots, w_k и низ одговарајућих пивота v_1, \dots, v_k , а за $\tilde{\mathcal{A}}$ низ добрих темена $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_h$ и низ одговарајућих пивота $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_h$ ($k, h \geq 1$), који задовољавају следећа четири својства.

1. За свако $i \leq k$, w_i је добро теме са пивотом v_i за скуп $V \setminus N[w_1, \dots, w_{i-1}]$, а за свако $i \leq h$, \tilde{w}_i је добро теме са пивотом \tilde{v}_i за скуп $V \setminus N[\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{i-1}]$. Такође, важи $A' = \{w_1, \dots, w_k\}$, $B' = N(w_1, \dots, w_k)$, $\tilde{A} = \{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_h\}$, $\tilde{B} = N(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_h)$.
2. $V \setminus N[w_1, \dots, w_k]$ и $V \setminus N[\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_h]$ не садрже добра темена.
3. $V \setminus N[\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_h]$ не садржи слободно теме.
4. Ако ни $V \setminus N[w_1, \dots, w_k]$ не садржи слободно теме, онда мора да важи бар један од услова: $k \neq h$ или $V \setminus N[w_1, \dots, w_k] \neq V \setminus N[\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_h]$.

Образложимо зашто су ова четири својства задовољена. Наиме, низови w_1, \dots, w_k и $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_h$ су оба максимални низови темена који могу бити додати у A за време припреме за поделу. У сваком чвору прво проверавамо да ли имамо слободно теме, али то се не дешава док прво не извршимо наведене изборе добрих темена. Након тога, не могу и $V \setminus N[\{w_1, \dots, w_k\}]$ и $V \setminus N[\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_h]$ садржати слободно теме јер би тада граф G задовољавао услов (а) леме, што не важи, па зато претпостављамо да важи својство 3. Ако ниједан од ових скупова нема слободно теме, G не задовољава услов (б) леме, па због тога можемо претпоставити да важи четврто својство.

Контрадикцију ћемо добити тако што ћемо показати да ако G задовољава ова четири својства, онда постоји мањи граф који их такође задовољава, па G није минималан.

Посматрајмо први пивот v_1 са добрим теменом w_1 у алгоритму \mathcal{A}' . Теме v_1 је степена 1 у графу G . Одговарајући корак у дрвету је: $\Sigma(\emptyset, \emptyset) \rightarrow \Sigma(w_1, N(w_1))$. Уколико постоји $i \in [h]$ тако да је $w_1 = \tilde{w}_i$, можемо променити редослед $(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_h)$ постављањем \tilde{w}_i на прво место, при чему се не мења скуп темена $V \setminus N[\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_h]$. Приметимо да низови добрих темена w_2, \dots, w_k и $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{i-1}, \tilde{w}_{i+1}, \dots, \tilde{w}_h$ задовољавају сва четири горња својства на графу $G \setminus N[w_1]$. Овај граф није празан, јер смо показали да граф $G = N[w_1]$ задовољава тврђење леме, па смо добили непразан мањи граф који задовољава сва својства, што је контрадикција са минималношћу графа G .

Остаје да размотримо случај када $w_1 \notin \{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_h\}$. Поставља се питање где може бити пивот v_1 након примене $\tilde{\mathcal{A}}$, тј. да ли се налази у \tilde{A} , \tilde{B} , или $V \setminus (\tilde{A} \cup \tilde{B})$. Сигурно знамо да $v_1 \notin V \setminus (\tilde{A} \cup \tilde{B})$, јер је $\deg v_1 = 1$ у графу G , па би у подграфу са теменима $V \setminus (\tilde{A} \cup \tilde{B})$ теме v_1 било степена 0 или 1, што није могуће јер је чвор $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B})$ или крај гране или спреман за поделу. Такође, $v_1 \notin \tilde{B} = N(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_h)$, јер би се ту могло појавити само избором доброг темена w_1 у $\tilde{\mathcal{A}}$, а знамо да $w_1 \notin \{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_h\}$. Дакле, мора да важи $v_1 \in \tilde{A}$, тј. једина могућност јесте да је v_1 добро теме за пивот w_1 (у $\tilde{\mathcal{A}}$). То значи да за неко $i \in [h]$ важи $v_1 = \tilde{w}_i$, $w_1 = \tilde{v}_i$. Такође, да би w_1 било добро теме у посматраном кораку, мора да

важи $N(w_1) = \{v_1\}$ на скупу $V \setminus N[\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{i-1}]$. С обзиром на то да на V важи $N(v_1) = \{w_1\}$, па важи и на $V \setminus N[\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{i-1}]$, закључујемо:

$$N[\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{i-1}, v_1, \tilde{w}_{i+1}, \dots, \tilde{w}_h] = N[\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{i-1}, w_1, \tilde{w}_{i+1}, \dots, \tilde{w}_h].$$

Дакле, у i -том кораку \tilde{A} , уместо доброг темена v_1 , можемо узети добро теме w_1 и пивот v_1 без промене иједног својства, па поново можемо променити редослед $\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{i-1}, w_1, \tilde{w}_{i+1}, \dots, \tilde{w}_h$ постављањем w_1 на почетак. Као и у претходном случају, ово даје граф $G \setminus N[w_1]$ са свим траженим својствима, што је контрадикција са претпоставком да је G минималан. Тиме је доказ леме завршен. \square

Напомена 4.9. Иако процес припреме за поделу нема утицаја на величину критичних ћелија, избор деоних темена има утицај и на ефикасност алгоритма, и на величину критичних ћелија. МТА алгоритам ће увек генерисати ациклично упаривање и простор који је хомотопски еквивалентан комплексу независности графа, али ће од пажљивог избора деоних темена зависити колико је тај добијени хомотопски тип једноставан односно препознатљив.

На крају овог поглавља доказујемо лему која даје корисно доње ограничење величине критичних ћелија које се добијају применом МТА алгоритма.

Лема 4.10. Нека је $G = (V, E)$ произвољан граф и нека за темена $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ важи да су њихове затворене околине $N[v_1], N[v_2], \dots, N[v_k]$ дисјунктне по паровима. Тада можемо применити МТА алгоритам на посет $\Sigma(\text{Ind}(G))$ тако да ниједно теме v_i , $i \in [k]$, није изабрано за деоно теме, и у том случају ће све резултујуће критичне ћелије $\Sigma(A, B) = \{A\}$ имати бар k елемената (уз додатну θ -ћелију коју имамо због упаривања празног скупа).

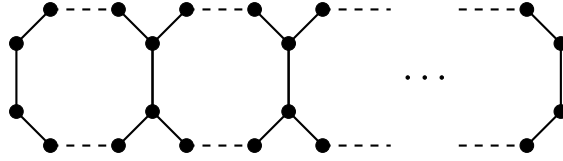
Доказ. Покажимо најпре да можемо завршити МТА алгоритам без бирања иједног темена v_i за деоно теме. Претпоставимо супротно, да смо стигли до чвора $\Sigma(A, B)$ који није лист и да једина могућност да наставимо јесте да изаберемо неко v_i за деоно теме. То значи да важи $V \setminus (A \cup B) = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell}\} \subset \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ и да свако од темена $v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell}$ има бар два суседа у скупу $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell}\}$, што је у контрадикцији са условом о дисјунктности околина. Дакле, МТА алгоритам се може реализовати на жељени начин. Остаје да покажемо да ће након његове примене све критичне ћелије имати бар по k елемената.

Нека је $\Sigma(A, B) = \{A\}$ критична ћелија. С обзиром на дисјунктност околина, довољно је показати да за свако $i \in [k]$ важи $A \cap N[v_i] \neq \emptyset$. Ако $v_i \in A$, завршили смо. Претпоставимо зато да важи $v_i \in B$. Посматрајмо вертикалну путању у дрвету која повезује корен $\Sigma(\emptyset, \emptyset)$ и лист $\Sigma(A, B)$, и корак у коме је теме v_i додато у скуп B . То се могло десити на два начина. Први је да је v_i пивот, а неки његов сусед w_i добро теме, па је посматрани корак

$$\Sigma(A', B') \rightarrow \Sigma(A' \cup \{w_i\}, B' \cup N(w_i)), \text{ за неке подскупове } A' \subset A \text{ и } B' \subset B.$$

Други начин јесте да постоји деоно теме w_i које је сусед темена v_i , па десна грана поделе са теменом w_i изгледа баш као у претходном реду. У сваком случају важи да $w_i \in A \cap N[v_i]$, чиме је доказ завршен. \square

4.3 Линијска полигонална поплочавања



Слика 63. Граф P_{2n}^t . [50]

Нека је P_{2n}^t граф састављен од t правилних $2n$ -тоуглова поређаних у ред као на слици 63, за $n \geq 2$ и $t \geq 1$. У овом поглављу дајемо једну процену повезаности комплекса упаривања $M(P_{2n}^t)$. Посебно, у случају када важи $n \equiv 1 \pmod{3}$ одређујемо тачан хомотопски тип овог комплекса.

Јонсон [55] је посматрао комплекс упаривања овог графа за $n = 2$, тј. када је у питању низ квадрата. Показао је да је комплекс $M(P_4^t)$ бар d_t^{\min} -повезан, где је

$$d_t^{\min} = \begin{cases} 2 \left\lfloor \frac{t-2}{3} \right\rfloor + 2, & \text{ако } t \equiv 0 \pmod{3}; \\ \left\lfloor \frac{2t}{3} \right\rfloor, & \text{иначе.} \end{cases}$$

У раду [21], Браун и Хаг су дали доказ истог резултата коришћењем МТА алгоритма. Такође, показали су да је $M(P_4^t)$ хомотопски еквивалентан комплексу који нема ћелије димензије $d > d_t^{\max}$, где је $d_t^{\max} = \left\lfloor \frac{3t-1}{4} \right\rfloor$.

Следећи претходне резултате, ми посматрамо комплексе $M(P_{2n}^t)$ за $n \geq 3$. Наравно, можемо претпоставити да важи $t > 1$, пошто је хомотопски тип комплекса упаривања циклора познат.

Теорема 4.11. *Нека је $t \geq 2$ и $n \geq 3$. Дефинишимо следеће бројеве:*

$$d^{\min} = \begin{cases} \frac{2nt}{3} - t & \text{ако } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{2nt-2t}{3} & \text{ако } n \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{2nt-t}{3} - \left\lfloor \frac{t+1}{2} \right\rfloor & \text{ако } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

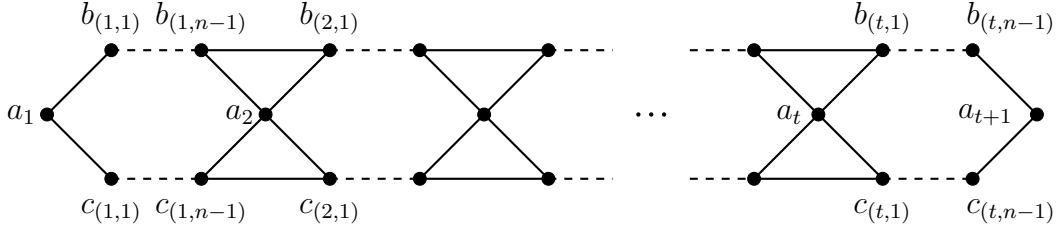
и

$$d^{\max} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2nt}{3} - \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor \right\rfloor - 1 & \text{ако } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{2nt-2t}{3} & \text{ако } n \equiv 1 \pmod{3} \\ \left\lfloor \frac{2nt-t}{3} \right\rfloor - 1 & \text{ако } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}.$$

Комплекс упаривања $M(P_{2n}^t)$ је хомотопски еквивалентан простору који нема ћелије димензије d , за $0 < d < d^{\min}$ и $d > d^{\max}$. Специјално, $M(P_{2n}^t)$ је бар $(d^{\min} - 1)$ -повезан простор.

Доказ. Тврђење ћемо доказати коришћењем МТА алгоритма. С обзиром на то да овај алгоритам конструише упаривање на посету страна комплекса независности графа, посматрамо линијски граф $G = L(P_{2n}^t)$ приказан на слици 64 и на њега

примењујемо алгоритам. Означимо темена графа G на следећи начин. Тачке a_1, \dots, a_{t+1} су средишња темена шестоуглова (слика 64). Такође, j -ти $2n$ -тоугао поред темена a_j и a_{j+1} има „горња” темена $b_{(j,1)}, \dots, b_{(j,n-1)}$, као и „доња” темена $c_{(j,1)}, \dots, c_{(j,n-1)}$, за све $j \in \{1, \dots, t\}$.



Слика 64. Линејски граф $G = L(P_{2n}^t)$ са означеним теменима. [50]

Према лемми 4.8 и напомени 4.9, знамо да величина критичних ћелија не зависи од припреме за поделу већ од избора деоних темена. На почетку, корен $\Sigma(\emptyset, \emptyset)$ је спреман за поделу и за деоно теме бирамо a_1 . Генерално, идеја је да за деоно теме бирамо прво теме a_j са леве стране, а након те поделе, припремамо се за нову поделу кроз темена $b_{(j,1)}, \dots, b_{(j,n-1)}$ и $c_{(j,1)}, \dots, c_{(j,n-1)}$. Прецизније, ако је чвор $\Sigma(A, B)$ спреман за поделу, примењујемо

први корак: за деоно теме бирамо најмање a_j које не припада $A \cup B$, чиме добијамо два наследника, $\Sigma(A, B \cup \{a_j\})$ и $\Sigma(A \cup \{a_j\}, B \cup N(a_j))$;

други корак: сваки од ова два наследника припремамо за поделу.

За први корак постоје два могућа типа скупа темена $V(G) \setminus (A \cup B)$, која су приказана на слици 65 (одговара **случају 1**) и слици 66 (**случај 2**). За сваку од ове две могућности описујемо поделу коју вршимо у првом кораку и процес припреме за нову поделу у другом кораку. Испоставља се да је за то потребно направити детаљнију поделу на случајеве, на следећи начин:

- разликујемо два наведена случаја за $V(G) \setminus (A \cup B)$,
- за сваки од њих разликујемо процес припреме за поделу левог и десног наследника чвора $\Sigma(A, B)$,
- за сваку од претходних грана разликујемо вредности остатка $n \pmod{3}$ (јер се испоставља да начин на који се процес наставља зависи од овог модула).

Следећи подскупови скупа $V(G)$ олакшавају опис темена која додајемо у A током припреме за поделу:

$$F_j = \{b_{(j,k)} \mid k \equiv 1 \pmod{3}\} \cup \{c_{(j,k)} \mid k \equiv 1 \pmod{3}\};$$

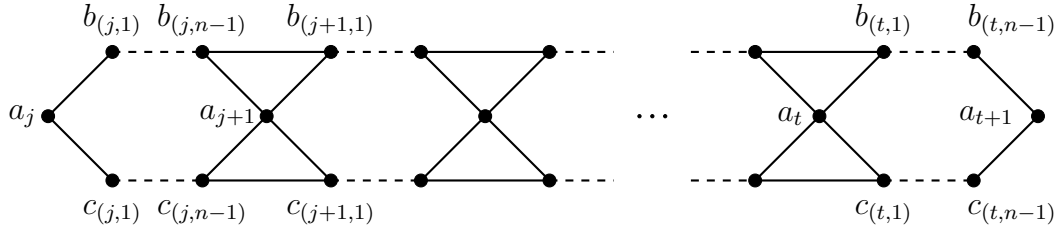
$$G_j = \{b_{(j,k)} \mid k \equiv 2 \pmod{3}\} \cup \{c_{(j,k)} \mid k \equiv 2 \pmod{3}\};$$

$$H_j = \{b_{(j,k)} \mid k \equiv 0 \pmod{3}\} \cup \{c_{(j,k)} \mid k \equiv 0 \pmod{3}\};$$

$$E_j = \{a_j\} \cup \{b_{(j,k)} \mid k \equiv 0 \pmod{3}\} \cup \{c_{(j,k)} \mid k \equiv 0 \pmod{3}\} = H_j \cup \{a_j\}.$$

Почињемо са описом поступка у случају 1 (слика 65). Овај случај се појављује на самом почетку, за чвор $\Sigma(\emptyset, \emptyset)$. Претпостављамо да смо стигли до чвора $\Sigma(A, B)$ који је спреман за поделу и да је j најмањи број такав да важи $a_j \notin A \cup B$.

Случај 1 ($\deg(a_j) = 2$)



Слика 65. $G \setminus (A \cup B)$ у случају 1. [50]

Леви наследник: Леви наследник чвора $\Sigma(A, B)$ је чвор $\Sigma(A, B \cup \{a_j\})$. Скуп темена $V(G) \setminus (A \cup B \cup \{a_j\})$ (на коме вршимо припрему за нову поделу) садржи два ланца темена $b_{(j,1)}, \dots, b_{(j,n-1)}$ и $c_{(j,1)}, \dots, c_{(j,n-1)}$ који ће се смањивати избором пивота и доброг темена док год је то могуће. На почетку имамо пивоте $b_{(j,1)}$ и $c_{(j,1)}$ за добра темена $b_{(j,2)}$ и $c_{(j,2)}$, редом. Дакле, додајемо темена $b_{(j,2)}$ и $c_{(j,2)}$ у A , а њихове суседе у B . Настављујући да се припремамо за поделу на тај начин, додаћемо сва темена G_j у A , а $N(G_j)$ у B . Зависно од $n \pmod 3$ имамо различите начине на које се процес даље наставља.

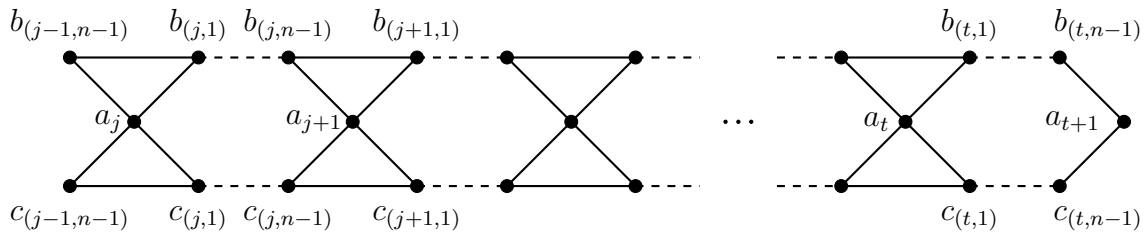
- Ако је $n \equiv 2 \pmod 3$, највеће k за које важи $\{b_{(j,k)}, c_{(j,k)}\} \subseteq G_j$ јесте $n-3$, а последња темена која се додају у B су $b_{(j,n-2)}$ и $c_{(j,n-2)}$. Уколико је $j = t$, стигли смо до краја графа, јер су $b_{(t,n-1)}$ и $c_{(t,n-1)}$ пивоти са добрим теменом a_{t+1} . Дакле, у овом случају додајемо G_t и a_{t+1} у A , и добијамо критичну ћелију. Уколико је $j \neq t$, у A додајемо тачно G_j и прелазимо на **случај 2** за $j+1$.
- Ако је $n \equiv 1 \pmod 3$, највеће k за које важи $\{b_{(j,k)}, c_{(j,k)}\} \subseteq G_j$ јесте $n-2$, а последња темена која се додају у B су $b_{(j,n-1)}$ и $c_{(j,n-1)}$. Уколико је $j = t$, a_{t+1} нема суседа у скупу $V(G) \setminus (A \cup B)$ (кад посматрамо A и B добијене након додавања одговарајућих темена), па је a_{t+1} слободно теме и ова грана алгоритма се завршава празним скупом. Ако важи $j \neq t$, прелазимо на **случај 1** за $j+1$.
- Ако важи $n \equiv 0 \pmod 3$, највеће k за које имамо $\{b_{(j,k)}, c_{(j,k)}\} \subseteq G_j$ јесте $n-1$. Овде разликујемо три подслучаја. Уколико је $j = t$, само G_t је додато у A , а последње теме a_{t+1} је додато у B и добијамо критичну ћелију. Ако $j \neq t$, након додавања $\{b_{(j,n-1)}, c_{(j,n-1)}\}$ у A , и додавања a_{j+1} у B , имамо два нова пивота $b_{(j+1,2)}$ и $c_{(j+1,2)}$ за добра темена $b_{(j+1,3)}$ и $c_{(j+1,3)}$, редом. За разлику од претходно анализираних случајева, сада још једном понављамо поступак смањивања графа избором пивота и добрих темена, док не дођемо до темена спремног за поделу. У овом (другом делу) поступка, добра темена имају други индекс дељив са 3, па примећујемо да ћемо у A додати H_{j+1} , а у B додајемо околину од H_{j+1} . Последња темена која се тада додају у A су $b_{(j+1,n-3)}$ и $c_{(j+1,n-3)}$. Уколико

је $j = t - 1$, након додавања прво G_{t-1} , па онда H_t на овај начин, преостали скуп темена је $\{b_{(t,n-1)}, c_{(t,n-1)}, a_{t+1}\}$. Избором a_{t+1} за добро теме уз било које од преостала два темена у улози пивота, додајемо a_{t+1} у A и добијемо критичну ћелију. Коначно, у случају да $j \notin \{t, t - 1\}$, након додавања G_j и H_{j+1} у A прелазимо на **случај 2** за $j + 2$.

Десни наследник: Десни наследник чвора $\Sigma(A, B)$ је чвор $\Sigma(A \cup \{a_j\}, B \cup N(a_j))$. Поступак је сличан као код левог наследника, осим што су чворови који се додају у A померени за 1. Након додавања a_j у A , а његових суседа $b_{(j,1)}$ и $c_{(j,1)}$ у B , имамо пивоте $b_{(j,2)}$ и $c_{(j,2)}$ за добра темена $b_{(j,3)}$ и $c_{(j,3)}$, и знамо да та добра темена додајемо у A . Настављајући на исти начин, додајемо цео скуп $E_j = \{a_j\} \cup H_j$ у A , а $N(E_j)$ у B . Поново, зависно од остатка броја n по модулу 3, имамо различите начине на које се алгоритам завршава или наставља.

- Ако је $n \equiv 2 \pmod{3}$, највеће k за које $\{b_{(j,k)}, c_{(j,k)}\} \subseteq E_j$ јесте $n - 2$. Када важи $j = t$, као у случају $n \equiv 1 \pmod{3}$ за левог наследника, добија се слободни чвор a_{t+1} , па се ова грана дрвета завршава празним скупом. Ако $j \neq t$, прелази се на **случај 1** за $j + 1$.
- Ако важи $n \equiv 1 \pmod{3}$, највеће k за које имамо $\{b_{(j,k)}, c_{(j,k)}\} \subseteq E_j$ је $n - 1$. У случају $j = t$, $a_{t+1} \in N(E_t)$, па је додато у B , чиме добијемо критичну ћелију. Уколико $j \neq t$, онда су темена $a_{(j+1,1)}, b_{(j+1,1)}$ и $c_{(j+1,1)}$ додата у B као елементи $N(E_j)$, па опет имамо циклус избора пивота и добрих темена. Приметимо да су први пивоти темена $b_{(j+1,2)}$ и $c_{(j+1,2)}$, за добра темена $b_{(j+1,3)}$ и $c_{(j+1,3)}$, па ће поново у A бити додавани елементи $b_{(j+1,k)}$ и $c_{(j+1,k)}$ чији је други индекс k дељив са 3. Дакле, у A ће бити додат цео скуп H_{j+1} , а у B скуп $N(H_{j+1})$. Уколико $j+1 \neq t$, понављамо потпуно исти поступак, тј. додајемо H_{j+2} у A , а $N(H_{j+2})$ у B , итд. Процес се завршава када додамо H_t у A , а $N(H_t)$ у B . Закључак је да за $n \equiv 1 \pmod{3}$ у A додајемо $E_j, H_{j+1}, H_{j+2}, \dots, H_t$ и завршавамо критичном ћелијом.
- Ако важи $n \equiv 0 \pmod{3}$, највеће k за које $\{b_{(j,k)}, c_{(j,k)}\} \subseteq E_j$ јесте $n - 3$ (осим у случају $n = 3$, када важи $E_j = \{a_j\}$). За $j = t$, $b_{(j,n-1)}$ и $c_{(j,n-1)}$ су пивоти за добро теме a_{t+1} , па додајемо и a_{t+1} у A и добијемо критичну ћелију. Уколико $j \neq t$, прелазимо на **случај 2** за $j + 1$.

Случај 2 ($\deg(a_j) = 4$)



Слика 66. $G \setminus (A \cup B)$ у случају 2. [50]

Леви наследник: Леви наследник чвора $\Sigma(A, B)$ је чвор $\Sigma(A, B \cup \{a_j\})$. Први пивоти су $b_{(j-1,n-1)}$ и $c_{(j-1,n-1)}$, па добра темена $b_{(j,1)}$ и $c_{(j,1)}$ додајемо у A , а

суседе од $b_{(j,1)}$ и $c_{(j,1)}$ додајемо у B . Настављајући редом да бирамо пивоте и добра темена у припреми за поделу, додаћемо цео скуп F_j у A , а $N(F_j)$ у B . Као у претходним случајевима, разматрамо остатак броја n по модулу 3.

- Ако важи $n \equiv 2 \pmod{3}$, највеће k за које важи $\{b_{(j,k)}, c_{(j,k)}\} \subseteq F_j$ је $n - 1$. Имамо различите ситуације за $j = t$, $j = t - 1$ и $j \notin \{t, t - 1\}$. У случају $j = t$, теме a_{t+1} припада $N(F_t)$, па је додата у B и добијамо критичну ћелију. Ако $j \neq t$, темена $a_{(j+1,1)}$, $b_{(j+1,1)}$ и $c_{(j+1,1)}$ су додата у B на исти начин, па се појављују нови низови пивота и добрих темена пре него што дођемо до деоног темена. Током ове припреме за поделу, скуп H_{j+1} додајемо у A , а $N(H_{j+1})$ у B . Уколико $j = t - 1$, након додавања F_{t-1} и H_t , имамо слободно теме a_{t+1} и ова грана алгоритма се завршава празним скупом. Уколико важи $j \notin \{t, t - 1\}$, након додавања F_j и H_{j+1} прелазимо на **случај 1** за $j + 2$.
- Ако важи $n \equiv 1 \pmod{3}$, највеће k за које је испуњено $\{b_{(j,k)}, c_{(j,k)}\} \subseteq F_j$ јесте $k = n - 3$. Када $j = t$, $b_{(j,n-1)}$ и $c_{(j,n-1)}$ су пивоти, а a_{t+1} одговарајуће добро теме, па додајемо a_{t+1} у A и добијамо критичну ћелију. У случају $j \neq t$, прелазимо на **случај 2** за $j + 1$.
- Ако је $n \equiv 0 \pmod{3}$, највеће k за које важи $\{b_{(j,k)}, c_{(j,k)}\} \subseteq F_j$ је $n - 2$. За $j = t$, a_{t+1} нема суседа у $V(G) \setminus (A \cup B)$, па не добијамо критичну ћелију већ \emptyset . Ако $j \neq t$, прелазимо на **случај 1** за $j + 1$.

Десни наследник: Једноставно се запажа да је поступак код десног наследника у овом случају потпуно исти као поступак код десног наследника у **случају 1**.

Приметимо да за $n \geq 4$ важи да су скупови G_j, H_j и F_j увек непразни, док за $n = 3$ важи $H_j = \emptyset$, али то не утиче на претходни поступак који представља коректан алгоритам у свим случајевима $n \geq 3$.

Анализа: Када се описани МТА алгоритам заврши, листови дрвета су празни скупови и критичне ћелије. Сада ћемо одредити минималан и максималан број темена добијених критичних ћелија. Нека је $\Sigma(A, B) = \{A\}$ један лист који одговара критичној ћелији. На основу наведеног поступка, примећујемо да важи

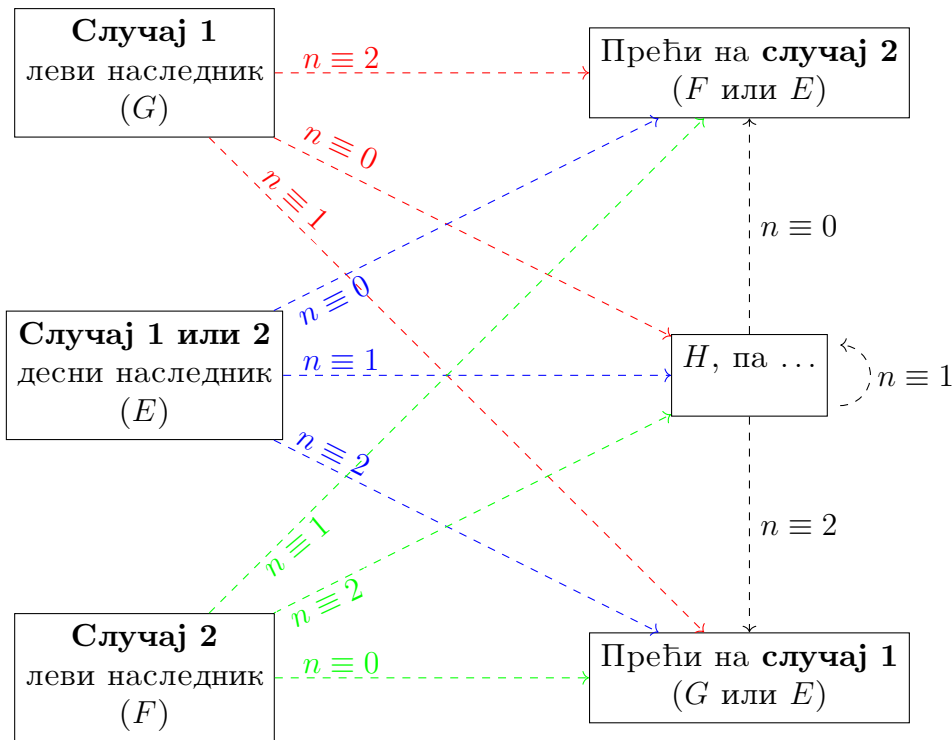
$$A = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t \text{ или } A = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_t \cup \{a_{t+1}\},$$

где је свако X_i један од скупова E_i, F_i, G_i и H_i . Ради једноставнијег записа, изостављаћемо индексе, а понекад и елемент $a = a_{t+1}$, па ћемо приказивати A као *реч* од t слова E, F, G и H . На пример, ако је $A = E_1 \cup F_2 \cup E_3 \cup \{a_{t+1}\}$, пишемо $EF Ea$, а кажемо да „ A почиње са E “, „након E следи F “ и слично. Такође, кажемо да реч „садржи“ одређен број елемената, ако унија одговарајућих скупова има ту кардиналност. Елемент a_{t+1} можемо изостављати јер се примећује да чињеница да ли a_{t+1} припада A или не, једнозначно зависи од последњег слова у речи. На основу дискусије по случајевима утврђујемо тачно које речи се појављују као критичне ћелије A . Анализа која следи је илустрована на слици 67.

• $n \equiv 1 \pmod{3}$

- A почиње са E или G .
- E додаје $\frac{2n+1}{3}$ темена и након њега се налази H .
- F додаје $\frac{2n-2}{3}$ темена и након њега стоји E или F .
- G додаје $\frac{2n-2}{3}$ темена и након њега се налази E или G .
- H додаје $\frac{2n-2}{3}$ темена и након њега следи H .
- A се може завршити са E , H или Fa (за a_{t+1}).

Приметимо да се у овом случају слово F никада не појављује, јер алгоритам никада не прелази у **случај 2**. Свака критична ћелија садржи тачно једно слово E . Прецизније, критичне ћелије су облика $\underbrace{GG \cdots G}_k E \underbrace{HH \cdots H}_{t-1-k}$, где $k = 0, 1, \dots, t-1$. Дакле, свака критична ћелија садржи тачно $\frac{2nt-2t}{3} + 1$ елемената, па важи $d^{\min} = d^{\max} = \frac{2nt-2t}{3}$.



Слика 67. Анализа речи које се појављују у доказу теореме 4.11.

• $n \equiv 0 \pmod{3}$

- A почиње са E или G , пошто се на почетку налазимо у **случају 1**.
- E додаје $\frac{2n}{3} - 1$ темена и након њега се налази E или F .
- F додаје $\frac{2n}{3}$ темена и након њега се налази E или G .
- G додаје $\frac{2n}{3}$ темена и након њега је H .
- H додаје $\frac{2n}{3} - 2$ темена и након њега се налази E или F .

- A се завршава са E , G или H (F није на крају због левог наследника у случају **2**, који или индукује слободно теме, или се поступак наставља).
- Ако се A завршава са E или H , имамо и теме a_{t+1} , тј. крај речи може бити Ea , Ha или само G .

Покажимо да је најмањи број елемената критичне ћелије A једнак $\frac{2nt}{3} - t + 1$, што је тачно број темена у речи $EE \cdots EEa$, која је једна од речи добијених алгоритмом. Слово H има најмањи број елемената, али је пре њега увек слово G , са највише елемената међу словима. Посматрајмо све добијене речи. Идеја је да покажемо следеће: за сваку добијену реч која садржи слово H , постоји дозвољена реч која не садржи слово H и која има мање или једнако елемената. Уколико имамо слово H које није на крају речи, појављује се једна од следеће четири подречи: на почетку речи стоји GHE или GHF , или постоји једна од подречи $FGHE$ и $FGHF$. Без нарушавања дозвољених суседстава међу словима, сваку од ових подречи можемо заменити речју са истим бројем елемената на следећи начин:

- уколико се налази на почетку речи, GHE замењујемо са EEE , а GHF са EEF ;
- подреч $FGHE$ мењамо са $FEEE$, а подреч $FGHF$ са $FEEE$.

Такође, ако се H појави на крају речи, тј. крај речи је Ha , претходно мора бити слово G . Уколико је GHa цела реч, EEa је дозвољена реч са истим бројем елемената, а ако није, појављује се подреч $FGHa$ која се може заменити са $FEEa$. Дакле, минимум елемената се достиже на некој ћелији која не садржи слово H . Такође, без слова H , крај речи може бити Ea или G , при чему обе могућности додају исти број елемената. С обзиром на то да E има мање елемената од F и G , закључујемо да се минимум достиже за реч $EE \cdots EEa$, што је управо $\frac{2nt}{3} - t + 1$. Дакле, $d^{\min} = \frac{2nt}{3} - t$.

Одредимо сада највећи могући број темена које може имати критична ћелија A . Сада су најповољнија слова F и G , али како након G следи H (осим на крају), које није повољно за достизање максимума, идеја је да покажемо да се максимум постиже на ћелији која не садржи слово G . Уочимо произвољну реч која садржи слово G . Уколико је G на крају, може се заменити са Ea (исти број елемената), јер пре G може бити само F које може стајати и пре слова E . Уколико G није на крају, појављује се подреч GH . Поново се једноставно утврђује да се GH увек може заменити са EE (сва суседства ће бити дозвољена), а број елемената при тој замени остаје исти. Дакле, максимум можемо постићи помоћу слова E , H и F , па се он достиже када имамо највећи могући број F -ова. Приметимо да и пре и после слова F мора стајати слово E . Због тога, када је t непарно, највећа критична ћелија се добија за реч $EF EF \cdots FEa$, а када је t парно, највећа ћелија се добија додавањем једног слова E негде у претходној речи. У сваком случају, тада A садржи $\frac{2nt}{3} - \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ темена, па важи $d^{\max} = \frac{2nt}{3} - \lfloor \frac{t}{2} \rfloor - 1$.

• $n \equiv 2 \pmod{3}$

- A почиње са E или G .
- E додаје $\frac{2n-1}{3}$ темена и након њега стоји E или G .
- F додаје $\frac{2n-1}{3} + 1$ темена и након њега се налази H .
- G додаје $\frac{2n-1}{3} - 1$ темена и након њега стоји E или F .
- H додаје $\frac{2n-1}{3} - 1$ темена и након њега следи E или G .
- A се завршава са F или Ga .

Анализа је потпуно аналогна као у претходним случајевима. При одређивању минималне критичне ћелије, примећујемо да G и H имају најмањи број темена, али пре слова H увек стоји слово F које није повољно за минимум. Зато је идеја да покажемо да се минимум достиже на речи која не садржи слово H . Уколико се слово H појавило, појављује се једна од подречи $GFHE$ и $GFHG$. Прва се може заменити са $GEGE$, а друга са $GEEG$, без повећања броја елемената. Дакле, минимум се може достићи само помоћу слова G , E и F , па треба користити што је више могуће слова G . Због дозвољених суседстава, примећујемо да се за непарно t минимум достиже за реч $GEGEG \cdots EG$, а за парно t минимална је реч $EGEG \cdots EG$. Рачуном утврђујемо да је минималан број темена једнак $\frac{2nt-t}{3} - \lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor + 1$, одакле важи $d^{\min} = \frac{2nt-t}{3} - \lfloor \frac{t+1}{2} \rfloor$.

При одређивању максимума, примећује се да иако слово F додаје највећи број елемената, пре њега је G и после њега H , а оба ова слова су неповољна за максимум. На исти начин као у претходним случајевима, показује се да се максимум може достићи на речи која не садржи слово F , и да је једна од речи на којима се достиже максимум облика $EE \cdots EGa$. Тада A садржи $\frac{2nt-t}{3}$ темена, па следи $d^{\max} = \frac{2nt-t}{3} - 1$.

Тиме је доказ теореме 4.11 коначно завршен. □

Као последица теореме 4.11, учоавамо да смо у случају $n \equiv 1 \pmod{3}$ одредили тачан хомотопски тип комплекса $M(P_{2n}^t)$.

Последица 4.12. *Ако је $n \equiv 1 \pmod{3}$, тј. $n = 3m + 1$, за неко $m \geq 1$, комплекс упаривања графа P_{2n}^t је хомотопски еквивалентан букету t сфера димензије $2tm$:*

$$M(P_{2n}^t) \simeq \bigvee_t S^{2tm}.$$

Доказ. За $t \geq 2$, доказ директно следи из доказа теореме 4.11. Наиме, знамо да су у овом случају критичне ћелије облика

$$\underbrace{GG \cdots G}_k E \underbrace{HH \cdots H}_{t-1-k} \quad \text{за } k = 0, 1, \dots, t-1.$$

Дакле, имамо тачно t критичних ћелија димензије $d^{\min} = d^{\max} = \frac{2nt-2t}{3} = 2tm$. Уз још једну додатну ћелију димензије 0, на основу теореме 4.3 закључујемо да

$M(P_{2n}^t)$ има хомотопски тип букета t сфера дате димензије. Додатно, за $t = 1$, резултат следи из тврђења 1.18, јер је $M(P_{2n}^1) = M(C_{2n}) \simeq S^{\lfloor \frac{2n-2}{3} \rfloor} = S^{2m}$. Тако добијамо да је формула униформна за све $t \geq 1$. \square

Пример 4.13. Пример 4.7 је управо примена теореме 4.11 у случају $n = 3$ и $t = 2$. Тада смо закључили да МТА алгоритам даје две критичне ћелије:

$$\Sigma(\{1, 6, 11\}, \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}) \quad \text{и} \quad \Sigma(\{4, 5, 11\}, \{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10\}).$$

Прва ћелија $A = \{1, 6, 11\}$ одговара речи EEa , док се ћелија $A = \{4, 5, 11\}$ добија из речи GHa (свако H_i је празан скуп за $n = 3$). Обе критичне ћелије су димензије 2, што се слаже са добијеним проценама из теореме: $d^{\max} = 2$, $d^{\min} = 2$.

За $n = 3$, граф P_6^t је заправо саће облика $1 \times 1 \times t$. Тако да теорема 4.11 даје делимичан одговор на питање о хомотопском типу комплекса упаривања саћа.

Последица 4.14. *Комплекс упаривања саћа облика $1 \times 1 \times t$ је $(t-1)$ -повезан простор.*

Доказ. За $t \geq 2$, тврђење следи директно из случаја $n = 3$ теореме 4.11, јер се добија $d^{\min} = t$. За $t = 1$, саће $1 \times 1 \times 1$ је циклус C_6 , за који на основу тврђења 1.18 знамо да важи $M(C_6) \simeq S^1 \vee S^1$. \square

Показује се да теорема 4.11 даје боље оцене повезаности од оцена које би се добиле применом резултата Бармака [10] и Енгстрома [33] на графове P_{2n}^t . У овим радовима аутори су процењивали повезаност комплекса независности $K_{1,3}$ -слободних графова, тј. оних графова који као индуковани подграф не садрже бипартитни граф $K_{1,3}$ (енг. *claw-free graphs*). Једноставно се примећује да је сваки линијски граф $K_{1,3}$ -слободан, па се резултати из ових радова могу применити на комплексе упаривања. Упоредимо укратко добијене оцене. Наравно, циљ је само да покажемо да добијени резултати нису последица доста општијих оцена, а наглашавамо да су теореме Бармака и Енгстрома много генералније и значајније.

Енгстром показује да ако је G , $K_{1,3}$ -слободан граф на n темена, са максималним степеном темена d , онда је комплекс $Ind(G)$ $\lfloor \frac{2n-1}{3d+2} - 1 \rfloor$ -повезан [33, Теорема 3.2]. Линијски граф $L(P_{2n}^t)$ има $(2n-1)t+1$ темена, а максимални степен је 4, па Енгстромов резултат тврди да је $M(P_{2n}^t) = Ind(L(P_{2n}^t))$ бар $(\lfloor \frac{4tn-2t+1}{14} \rfloor - 1)$ -повезан, што је мање или једнако d^{\min} из теореме 4.11, за све $n \geq 3$.

У раду [10], Бармак даје оцену повезаности на основу димензије комплекса: ако је G произвољан $K_{1,3}$ -слободан граф, онда је $Ind(G)$ бар $(\frac{\dim(Ind(G))-2}{2})$ -повезан простор [10, Теорема 5.5]. Димензија комплекса $M(P_{2n}^t)$ је $(n-1)t+1$, па Бармаков резултат каже да је повезаност овог комплекса бар $\frac{tn-t-1}{2}$. Иако је овај резултат бољи од Енгстромовог за велико n , теорема 4.11 даје бољу оцену повезаности комплекса $M(P_{2n}^t)$.

4.4 Комплекси упаривања саћа

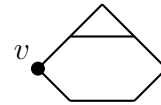
У овом поглављу посматрамо комплексе упаривања саћа која садрже више редова шестоуглова. Као што смо показали да комплекс упаривања саћа $1 \times 1 \times t$ има повезаност бар $(t - 1)$, што је број шестоуглова у овом саћу умањен за 1, у наставку показујемо да саће облика $2 \times 1 \times t$ има бар $(2t - 1)$ -повезан комплекс упаривања. Затим ћемо дати нешто слабију оцену повезаности за саћа општег облика $r \times s \times t$.

Наредна лема описује конфигурацију која се често појављује у доказу главне теореме 4.16, па је посебно доказујемо ради прегледности.

Лема 4.15. *Нека је $\Sigma(A, B)$ чвор спреман за поделу на графу који се састоји од троугла и шестоугла са заједничком ивицом, као на слици 68. Тада применом МТА алгоритма (на ову грану дрвета) добијамо 2 критичне ћелије $\Sigma(\hat{A}, \hat{B}) = \{\hat{A}\}$ и $\Sigma(\hat{A}, \hat{B}) = \{\hat{A}\}$, за које важи $|\hat{A}| = |\hat{A}| = |A| + 2$.*

Доказ. У општем случају, знамо да избор деоних темена утиче на број и величину критичних ћелија, али се у случају овог малог графа испоставља да не утиче. То се утврђује једноставном провером свих могућности, коју изостављамо. Размотримо само једну могућност, када за деоно теме изаберемо v означено на слици. Чвор $\Sigma(A, B)$ тада има два наследника, $\Sigma(A, B \cup \{v\})$ и $\Sigma(A \cup \{v\}, B \cup N(v))$.

Избором произвољног пивота за $\Sigma(A \cup \{v\}, B \cup N(v))$, добијамо слободно теме, па у тој грани нема критичних ћелија, док од левог наследника $\Sigma(A, B \cup \{v\})$ добијамо две критичне ћелије које задовољавају тврђење леме.



Слика 68. $V \setminus (A \cup B)$. [50]

□

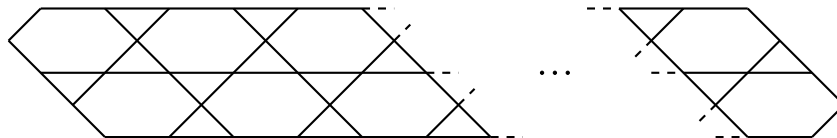
Сад можемо доказати главну теорему за саћа облика $2 \times 1 \times t$.

Теорема 4.16. *Нека је $t \geq 1$ природан број. Дефинишимо бројеве*

$$d^{\min} = 2t \text{ и } d^{\max} = \frac{7t}{3} + 1.$$

Комплекс упаривања саћа облика $2 \times 1 \times t$ је хомотопски еквивалентан ћелијском комплексу који не садржи d -димензионалне ћелије за све $0 < d < d^{\min}$ и све $d > d^{\max}$. Посебно, овај комплекс упаривања је бар $(2t - 1)$ -повезан простор.

Доказ. Саће облика $2 \times 1 \times t$ се састоји од два низа од по t шестоуглова, а његов линијски граф G је приказан на слици 69.



Слика 69. G је линијски граф саћа облика $2 \times 1 \times t$. [50]

Доказ ове теореме је веома сличан доказу теореме 4.11, па ћемо изоставити детаље анализе. Дакле, примењујемо МТА алгоритам на граф G са одређеним избором деоних темена. За сваки чвор $\Sigma(A, B)$ који је спреман за поделу имамо два корака.

Корак 1: Бирамо деоно теме v зависно од тренутне конфигурације, и добијамо два наследника: $\Sigma(A, B \cup \{v\})$ и $\Sigma(A \cup \{v\}, B \cup N(v))$.

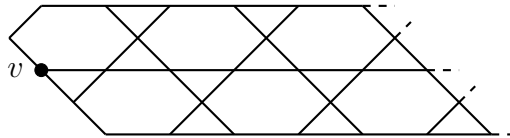
Корак 2: Сваки од ова два наследника припремамо за нову поделу.

У кораку 1 имамо шест могућих конфигурација зависно од левог краја графа, до на вертикалну рефлексiju, као што је приказано на слици 70 и сликама 73 – 77. Под вертикалном рефлексijом подразумевамо рефлексiju у односу на средишњу хоризонталну линију између два хоризонтална низа шестоуглова. Применом ове рефлексije поново добијамо два хоризонтална низа шестоуглова. Напоменимо овде да се током примене алгоритма, у свим случајевима, примећује да број шестоуглова у ова два хоризонтална низа не мора бити исти, али се разликује за највише један шестоугао, и то неће утицати на алгоритам. За сваку од шест конфигурација, изабрано деоно теме је подебљано на одговарајућој слици и означено са v .

Означимо са $T_{hex} := T_{hex}(\Sigma(A, B))$ број целих малих шестоуглова у графу до ког смо стигли, тј. графу на теменима $V(G) \setminus (A \cup B)$. На почетку алгоритма важи $T_{hex}(\Sigma(\emptyset, \emptyset)) = 2t$, док за чвор $\Sigma(A, B)$ који означава критичну ћелију важи $T_{hex}(\Sigma(A, B)) = 0$.

Знамо да спуштајући се низ дрво МТА алгоритма, ми додајемо темена у скуп A . Уколико чвор $\Sigma(A', B')$ има претка $\Sigma(A, B)$, можемо рећи да се „ $|A|$ увећа за $|A'| - |A|$ док идемо од чвора $\Sigma(A, B)$ до чвора $\Sigma(A', B')$ ”. Идеја доказа је да пратимо промене $|A|$ и T_{hex} у сваком кораку алгоритма. Број $|A|$ ће се увећавати, док ће T_{hex} опадати, па ћемо d^{\min} и d^{\max} одредити учачањем веза између промена $|A|$ и T_{hex} . Размотримо сада сваку од 6 могућих конфигурација и одговарајући избор деоног темена.

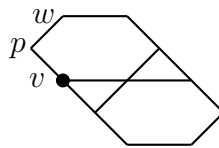
Случај 1.



Слика 70. $G \setminus (A \cup B)$ у случају 1. [50]

- Леви наследник $\Sigma(A, B \cup \{v\})$.

– Ако важи $T_{hex} = 2$, имамо конфигурацију приказану на слици 71. Након додавања темена v у B , имамо пивот p и добро теме w . Додајемо теме w у A (повећавамо $|A|$ за 1), а његову околину у B и тиме добијамо конфигурацију састављену од троугла и шестоугла као у леми 4.15. Према леми, даље добијамо две критичне ћелије и закључујемо да се у односу на чвор $\Sigma(A, B)$, број $|A|$ повећао укупно за 3, док се број T_{hex} смањио за 2.

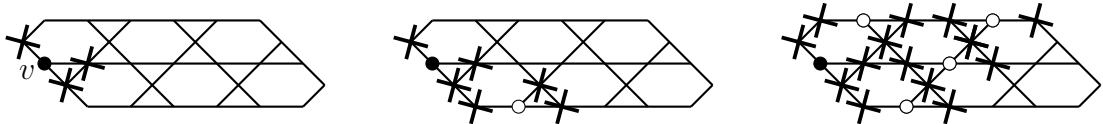


Слика 71. $G \setminus (A \cup B)$ када $T_{hex} = 2$. [50]

– Ако важи $T_{hex} \geq 3$, на исти начин додајемо једно добро теме у A , и смањујемо T_{hex} за један. Након примене вертикалне рефлексije добијена конфигурација поново прелази у конфигурацију из **случаја 1**. На пример, можемо посматрати шта се дешава када овај корак применимо на самом почетку алгоритма за чвор $\Sigma(\emptyset, \emptyset)$. Након умањења T_{hex} за 1, горњи хоризонтални низ има $(t - 1)$ шестоуглова, док доњи има t шестоуглова, па применом рефлексije добијамо да нови горњи низ има t шестоуглова, док доњи има $(t - 1)$. Затим примењујемо поново поступак из **случаја 1**.

- Десни наследник $\Sigma(A \cup \{v\}, B \cup N(v))$.

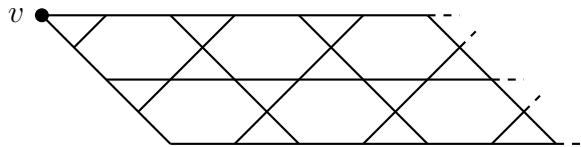
- Ако важи $T_{hex} \leq 5$, директном анализом се долази до слободног темена на крају, тако да не добијамо критичне ћелије.
- Ако важи $T_{hex} = 6$, током припреме за поделу у A додајемо четири добра темена и пето теме v . На слици 72 добра темена су означена белим кружићима, а темена која током поступка додајемо у B су означена са „X”. Слика 72 приказује део припреме за поделу. Лева слика приказује деоно теме v и његову околину, а централна слика приказује ситуацију након избора првог пивота и доброг темена. Десна слика илуструје конфигурацију која је спремна за нову поделу, састављену од шестоугла са два троугла. Изаберимо тада за ново деоно теме неко од темена које припада и шестоуглу и једном троуглу. Након неколико корака добијамо тачно једну критичну ћелију и додајемо још 2 темена у A . Дакле, имамо једну критичну ћелију при чему се број $|A|$ повећао за 7, док се T_{hex} смањио за 6.



Слика 72. Случај 1 када $T_{hex} = 6$, десни наследник. [50]

- Ако важи $T_{hex} > 6$, као у претходном делу додајемо 5 темена у A (v и четири добра темена), док се број T_{hex} смањује за 5. Затим прелазимо на **случај 2** (након вертикалне рефлексije).

Случај 2.



Слика 73. Случај 2. [50]

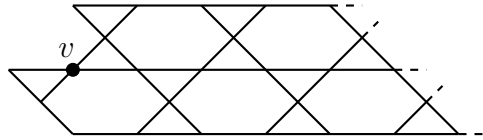
- Леви наследник $\Sigma(A, B \cup \{v\})$.

- Не мењамо ни A ни T_{hex} , већ одмах прелазимо на **случај 1**.

- Десни наследник $\Sigma(A \cup \{v\}, B \cup N(v))$.

- Ако важи $T_{hex} = 2$, добијамо две критичне ћелије. За сваку од њих, број $|A|$ се повећао за 4, док се T_{hex} смањило за 2.
- Ако важи $T_{hex} \geq 3$, $|A|$ се повећава за 1 додавањем темена v , T_{hex} се смањује за 1 и прелазимо на **случај 3**.

Случај 3.

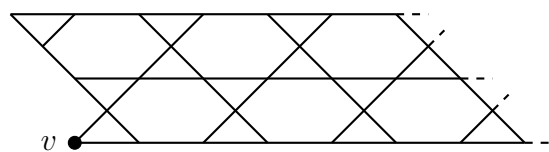


Слика 74. Случај 3. [50]

Најпре се може приметити да у овом случају није могуће добити $T_{hex} = 1$. То закључујемо посматрањем сваког од случајева који може довести до случаја 3, а то су случајеви 2, 3 и 6. Ако смо из случаја 2 прешли на случај 3, имали смо бар 3 шестоугла и изгубили 1, па $T_{hex} \geq 2$. У наставку ћемо видети да из случаја 3 можемо доћи до њега самог само ако имамо бар 5 шестоуглова, и изгубимо 3, па исто тврђење важи. Такође, показаћемо да из случаја 6 прелазимо на случај 3 не мењајући ни $|A|$ ни T_{hex} , а до случаја 6 смо могли доћи само из десног наследника случаја 5 смањивањем броја шестоуглова за 1. Случај 5 се може добити или из њега самог од бар 6 шестоуглова од којих губимо 3, или из случаја 4 за 4 шестоугла од којих губимо 1. Дакле, ако смо се нашли у случају 2, сигурно важи $T_{hex} \geq 2$.

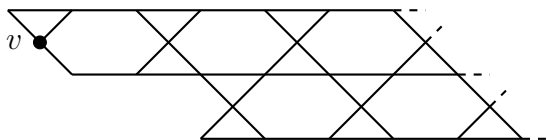
- Леви наследник $\Sigma(A, B \cup \{v\})$.
 - Ако важи $T_{hex} = 2$, добијамо критичну ћелију додајући 4 добра темена у A , при чему се T_{hex} смањује за 2.
 - Ако важи $T_{hex} \geq 3$, додајемо једно добро теме у A , умањујемо T_{hex} за 1, па прелазимо на **случај 4**.
- Десни наследник $\Sigma(A \cup \{v\}, B \cup N(v))$.
 - Ако важи $T_{hex} = 2$, добијамо критичну ћелију додајући 4 темена у A (теме v и 3 добра темена), док се T_{hex} смањује за 2.
 - Ако важи $T_{hex} = 3$, добијамо критичну ћелију додавањем 5 темена у A , а T_{hex} се смањује за 3.
 - Ако важи $T_{hex} = 4$, добијамо критичну ћелију додавањем 6 темена у A , док се T_{hex} смањује за 4.
 - Ако је $T_{hex} \geq 5$, додајемо три темена у A , смањујемо T_{hex} за 3, па понављамо **случај 3** (након вертикалне рефлексije).

Случај 4.



Слика 75. Случај 4. [50]

- Леви наследник $\Sigma(A, B \cup \{v\})$.
 - Не мењају се ни A ни T_{hex} . Прелазимо на **случај 2**.
- Десни наследник $\Sigma(A \cup \{v\}, B \cup N(v))$.
 - Ако $T_{hex} = 2$, додајемо у A теме v и једно добро теме, па добијамо конфигурацију из леме 4.15 (троугао и шестоугао са заједничком ивицом). Према овој леми, даље добијамо две критичне ћелије, и за сваку од њих додајемо још по два темена у A . Дакле, број $|A|$ се повећао за 4, док се T_{hex} смањило за 2.
 - Ако важи $T_{hex} = 3$, слично као у претходном поступку, додајемо v и два добра темена у A , чиме добијамо конфигурацију из леме 4.15. Дакле, поново имамо две критичне ћелије. Укупно се број $|A|$ повећао за 5, док се T_{hex} смањило за 3.
 - Ако важи $T_{hex} \geq 4$, додајемо само v у A , смањујемо T_{hex} за 1, па прелазимо на **случај 5**.

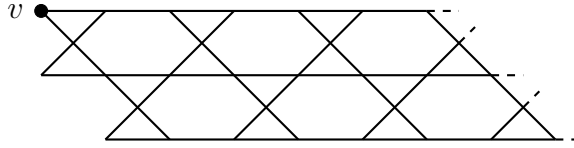
Случај 5.

Слика 76. Случај 5. [50]

Као у анализи на почетку случаја 3, овде се закључује да увек важи $T_{hex} \geq 3$.

- Леви наследник $\Sigma(A, B \cup \{v\})$.
 - Ако важи $T_{hex} = 3$, додајемо 3 добра темена у A и долазимо до конфигурације састављене од троугла и шестоугла са заједничком ивицом. Према леми 4.15, добијамо две критичне ћелије, при чему за сваку од њих додајемо још по два темена у A . Дакле, за сваку од ових ћелија, број $|A|$ се повећао за 5, док се T_{hex} смањило за 3.
 - Ако $T_{hex} = 4$, слично као у претходном случају на основу леме 4.15 закључујемо да имамо две критичне ћелије. За сваку од њих, број $|A|$ се повећао за 6, док се T_{hex} смањило за 4.
 - Ако $T_{hex} = 5$, поново имамо две критичне ћелије на основу леме 4.15. Број $|A|$ је увећан за 7, а T_{hex} умањен за 5 за сваку од њих.
 - Ако важи $T_{hex} \geq 6$, додавањем три добра темена у A , а смањивањем T_{hex} за 3, вертикалном рефлексijом долазимо поново до **случаја 5**.
- Десни наследник $\Sigma(A \cup \{v\}, B \cup N(v))$.
 - Додајемо само теме v у A , смањујемо T_{hex} за 1, па затим прелазимо на **случај 6**.

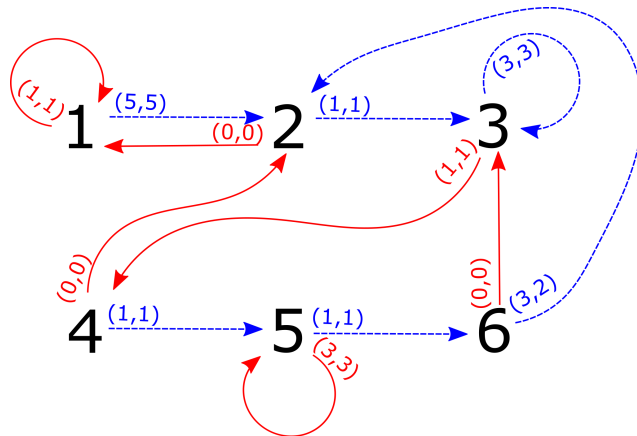
Случај 6.



Слика 77. Случај 6. [50]

- Леви наследник $\Sigma(A, B \cup \{v\})$.
 - Нема промене ни A ни T_{hex} . Прелазимо на **случај 3**.
- Десни наследник $\Sigma(A \cup \{v\}, B \cup N(v))$.
 - Ако важи $T_{hex} = 2$, након додавања v и три слободна темена у A , имамо слободно теме, па нема критичних ћелија.
 - Ако важи $T_{hex} = 3$, након додавања v и два добра темена у A , добијемо конфигурацију спремну за поделу састављену од шестоугла и два троугла, као код десног наследника у случају 1 за $T_{hex} = 6$. Поступамо исто као у том случају и добијемо једну критичну ћелију. Укупно се додаје 5 темена у A , док се T_{hex} смањује за 3.
 - Ако важи $T_{hex} \geq 4$, додајемо 3 темена у A (v и два добра темена), док се T_{hex} смањује за 2. Затим прелазимо на **случај 2**.

Анализа: Претходну дискусију илуструје слика 78. Имамо тачно 6 случајева за конфигурацију спремну за поделу. Избором одговарајућег деоног темена добијемо десног и левог наследника. Након припреме за поделу сваког од њих, долазимо до нових конфигурација. Црвене линије означавају конфигурацију коју добијемо за левог наследника, а плаве за десног.



Слика 78. Приказ случајева 1 – 6.

На основу разматрања свих случајева видимо да се током сваке припреме за поделу или доласка до критичне ћелије, број $|A|$ повећа бар за онолико за колико се T_{hex} смањи. Посебно, када се добија критична ћелија, $|A|$ се повећа бар за 1 више него што се T_{hex} смањи. Пошто је $T_{hex} = 2t$ на почетку, закључујемо да за сваку критичну ћелију $\Sigma(A, B) = \{A\}$ важи $|A| \geq 2t + 1$, одакле следи

$$d^{\min} = 2t.$$

Остаје још да одредимо d^{\max} . Нека је са $\Sigma(A, B) = \{A\}$ дата једна критична ћелија за коју скуп A има максималан број елемената. На слици 78 пар (x, y) поред сваке линије означава да се током одговарајућег поступка број $|A|$ увећао за x , а T_{hex} се смањило за y . Бројеви x и y су једнаки у свим случајевима осим када прелазимо са случаја 6 на случај 2 (тада додајемо 3 темена у A , а смањујемо T_{hex} само за 2). Можемо претпоставити да је критична ћелија A добијена након $(k + 1)$ случајева i_1, \dots, i_{k+1} са слике 78 ($i_1, \dots, i_{k+1} \in [6]$):

$$i_1 \xrightarrow{(x_1, y_1)} i_2 \xrightarrow{(x_2, y_2)} \dots i_k \xrightarrow{(x_k, y_k)} i_{k+1} \xrightarrow{(a, b)} \text{критична ћелија.} \quad (4.4.1)$$

Означимо са (x_j, y_j) одговарајућу промену бројева $|A|$ и T_{hex} при преласку са случаја i_j на случај i_{j+1} , док је (a, b) промена ових бројева на самом крају поступка. Из дискусије по случајевима знамо да важи

$$(a, b) \in \{(3, 2), (7, 6), (4, 2), (5, 3), (6, 4), (7, 5)\}.$$

На основу промена $|A|$ и T_{hex} од почетка до краја поступка, имамо релације:

$$|A| = x_1 + x_2 + \dots + x_k + a,$$

$$2t = y_1 + y_2 + \dots + y_k + b.$$

Пошто важи $x_j = y_j$ осим у случају $(x_j, y_j) = (3, 2)$, закључујемо да ће број $|A|$ бити максималан када имамо максималан број појављивања преласка $6 \xrightarrow{(3, 2)} 2$ у низу (4.4.1). Да би се појавили случајеви 6 и 2, тј. $6 \xrightarrow{(3, 2)} 2$, претходно морамо имати цео циклус (слика 78):

$$2 \xrightarrow{(1, 1)} 3 \xrightarrow{(1, 1)} 4 \xrightarrow{(1, 1)} 5 \xrightarrow{(1, 1)} 6 \xrightarrow{(3, 2)} 2.$$

Проласком кроз овај циклус повећавамо $|A|$ за 7, а смањујемо T_{hex} за 6. Уз то, пошто почињемо у случају 1, да бисмо дошли до овог циклуса морамо имати прелазак $1 \xrightarrow{(5, 5)} 2$, па у максималном случају имамо $x_1 = y_1 = 5$. Сада закључујемо:

$$x_2 + \dots + x_k \leq \frac{7}{6}(y_2 + \dots + y_k) = \frac{7}{6}(2t - 5 - b),$$

одакле следи $|A| = 5 + x_2 + \dots + x_k + a \leq 5 + \frac{7}{6}(2t - 5) - \frac{7}{6}b + a = \frac{7t}{3} - \frac{5}{6} - \frac{1}{6}b + (a - b)$. На основу $a - b \leq 2$ и $b \geq 2$, важи $|A| \leq \frac{7t}{3} + \frac{5}{6}$, одакле имамо:

$$|A|_{\max} = \lfloor \frac{7t}{3} + \frac{5}{6} \rfloor, \text{ па важи } d^{\max} = \lfloor \frac{7t}{3} - \frac{1}{6} \rfloor.$$

Тиме је доказ теореме 4.16 завршен. □

Напомена 4.17. Као што смо приметили код теореме 4.11, слично се може приметити да су резултати теореме 4.16 јачи од резултата који се могу добити применом одговарајућих тврђења Бармака [10] и Енгстрома [33] на саћа $2 \times 1 \times t$.

Прелазимо сада на оцену повезаности за комплекс упаривања произвољног саћа облика $r \times s \times t$. Приметимо најпре неколико једноставних својстава саћа. Саће облика $r \times s \times t$ има $r + s - 1$ врсти које садрже шестоуглове, а исто важи

и за одговарајући линијски граф. Такође, при испитивању комплекса упаривања саћа, можемо претпоставити да важи $r \geq s$, пошто вертикална рефлексива претвара саће облика $r \times s \times t$ у саће облика $s \times r \times t$. Следећа лема рачуна број шестоуглова у свакој врсти овог саћа (као и њему придруженог линијског графа), а помоћу ње доказујемо главну теорему.

Лема 4.18. *Дато је саће облика $r \times s \times t$, при чему важи $r \geq s$. Тада је број шестоуглова у i -тој врсти почев од врха овог саћа, једнак броју шестоуглова у i -тој врсти његовог линијског графа, и означен је са $\rho(i)$, где је:*

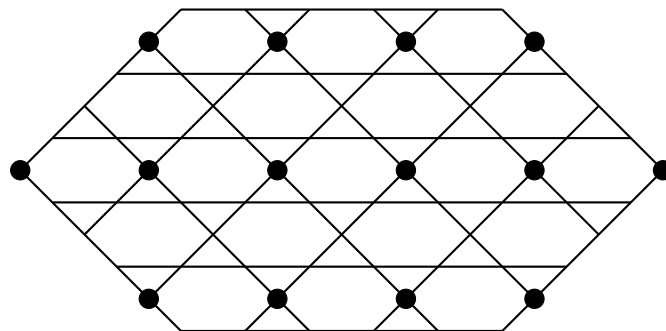
$$\rho(i) = \begin{cases} t + i - 1, & \text{за } 1 \leq i \leq s \\ t + s - 1, & \text{за } s < i \leq r \\ t + s + r - i - 1, & \text{за } r < i \leq r + s - 1. \end{cases}$$

Доказ. Први део тврђења, да је број шестоуглова у i -тој врсти саћа једнак броју шестоуглова у i -тој врсти његовог линијског графа, следи директно из дефиниција. Даље, знамо да прва врста саћа садржи t шестоуглова (слика 60 на почетку главе). За првих s врста важи да свака следећа врста садржи један шестоугао више од претходне (без услова $r \geq s$, знали бисмо да то важи за првих $\min(r, s)$ врсти). Број шестоуглова је константан у врстама почев од врсте са редним бројем s , до врсте са редним бројем r . Након r -те врсте, свака следећа врста има један шестоугао мање од претходне, док не дођемо до последње врсте (нумерисане са $r + s - 1$), која садржи t шестоуглова. \square

Теорема 4.19. *Комплекс упаривања саћа $r \times s \times t$ је k -повезан простор, где је*

$$k = t \left\lceil \frac{r + s - 1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{rs}{2} \right\rceil - 2.$$

Доказ. Нека је G линијски граф саћа облика $r \times s \times t$. Због симетрије можемо претпоставити да важи $r \geq s$. Треба одредити повезаност комплекса независности графа G . Уочимо скуп $X \subset V(G)$ који се састоји од централних тема шестоуглова у врстама са непарним редним бројем, почев од врха (тј. у свакој i -тој врсти, за $i \in \{1, 3, 5, \dots, 2\lceil \frac{r+s-1}{2} \rceil - 1\}$), као на слици 79.



Слика 79. Линијски граф саћа облика $3 \times 3 \times 3$. [50]

Свака врста доприноси у X једно теме више него што је број шестоуглова у тој

врсти, па важи:

$$|X| = \sum_{i=1}^{\lceil \frac{r+s-1}{2} \rceil} (\rho(2i-1) + 1),$$

где је $\rho(i)$ дефинисано у лема 4.18. Затворене околине свака два темена из X су дисјунктне, па на основу леме 4.10 закључујемо да свака критична ћелија добијена применом МТА алгоритма на комплекс $Ind(G)$, има бар $|X|$ елемената. Тврдимо да важи:

$$\sum_{i=1}^{\lceil \frac{r+s-1}{2} \rceil} (\rho(2i-1) + 1) = t \left\lceil \frac{r+s-1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{rs}{2} \right\rceil.$$

Докажимо ову једнакост када су r и s непарни бројеви. Према дефиницији броја ρ , а користећи $r \geq s$, имамо

$$\begin{aligned} |X| &= \sum_{i=1}^{\lceil \frac{r+s-1}{2} \rceil} (\rho(2i-1) + 1) \\ &= \sum_{i=1}^{\frac{s+1}{2}} (t + 2i - 1) + \sum_{i=\frac{s+1}{2}+1}^{\frac{r+1}{2}} (t + s) + \sum_{i=\frac{r+1}{2}+1}^{\lceil \frac{r+s-1}{2} \rceil} (t + r + s - (2i - 1)) \\ &= \sum_{i=1}^{\lceil \frac{r+s-1}{2} \rceil} t + \sum_{i=1}^{\frac{s+1}{2}} (2i - 1) + \sum_{i=\frac{s+1}{2}+1}^{\frac{r+1}{2}} s + \sum_{i=\frac{r+1}{2}+1}^{\lceil \frac{r+s-1}{2} \rceil} (r + s - 2i + 1). \end{aligned}$$

Последњи сабирак можемо средити на следећи начин:

$$\sum_{i=\frac{r+1}{2}+1}^{\lceil \frac{r+s-1}{2} \rceil} (r + s - 2i + 1) = \sum_{i=\frac{r+1}{2}+1}^{\lceil \frac{r+s-1}{2} \rceil} (r + s + 1 - 2(\frac{r+1}{2} + (i - \frac{r+1}{2}))) = \sum_{i=1}^{\frac{s-1}{2}} (s - 2i).$$

Комбинујући претходне једнакости, добијамо:

$$\begin{aligned} |X| &= t \left\lceil \frac{r+s-1}{2} \right\rceil + \left(\sum_{i=1}^{\frac{s-1}{2}} 2i + 2 \cdot \frac{s+1}{2} \right) - \frac{s+1}{2} + \frac{r-s}{2} \cdot s + \left(s \cdot \frac{s-1}{2} - \sum_{i=1}^{\frac{s-1}{2}} 2i \right) \\ &= t \left\lceil \frac{r+s-1}{2} \right\rceil + \frac{rs+1}{2} \stackrel{2 \nmid r, s}{=} t \left\lceil \frac{r+s-1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{rs}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

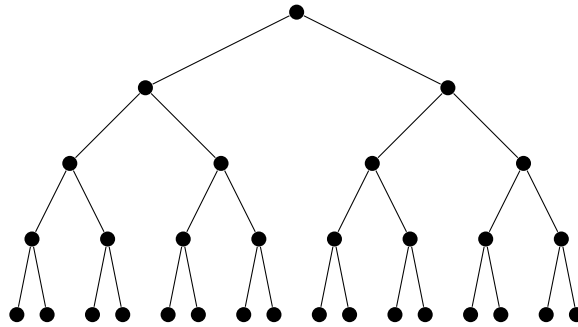
За остале три могућности парности бројева r и s доказ је потпуно аналоган, па га изостављамо. Дакле, свака критична ћелија (осим једне подразумеване ћелије димензије нула) је димензије веће или једнаке броју $|X| - 1$, па је повезаност посматраног комплекса упаривања бар $|X| - 2$, као што теорема тврди. \square

Напомена 4.20. Теорема 4.19 даје други доказ последице 4.14 за саћа $1 \times 1 \times t$ (за $r = s = 1$ добијамо последицу 4.14). Међутим, за саћа $2 \times 1 \times t$, теорема 4.16 ипак даје много бољу оцену повезаности комплекса упаривања од теореме 4.19.

4.5 Повезаност комплекса упаривања савршеног бинарног дрвета

У овом поглављу утврђујемо тачну повезаност комплекса упаривања савршеног бинарног дрвета. Интересантно је да при томе најпре користимо лему 4.10 добијену МТА алгоритмом, а затим тополошку лему 3.4 о m -грани, која је била кључна при одређивању комплекса упаривања графова гусеница у глави 3.

Под *савршеним бинарним дрветом* подразумевамо бинарно дрво код кога сваки чвор који није лист има тачно два наследника. *Дубина* чвора у дрвету је број ивица у путањи која спаја тај чвор са кореном дрвета, а *висина дрвета* је дубина произвољног листа. Савршено бинарно дрво висине $h \geq 1$ означавамо са T_h . Приметимо да дрво T_h садржи 2^h листова.



Слика 80. Савршено бинарно дрво T_4 .

Пример 4.21. Мала бинарна дрвета и њихови комплекси упаривања:

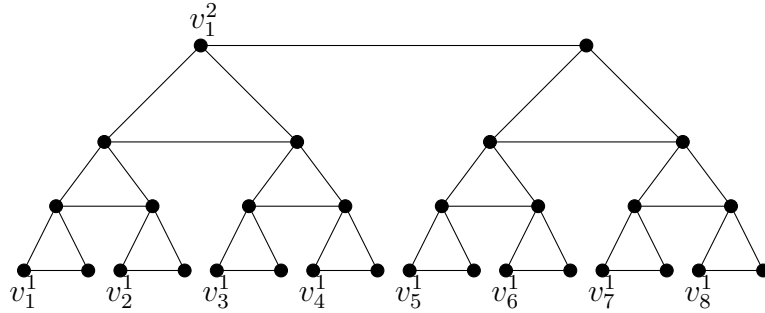
- $h = 1$: T_1 је P_3 , па важи $M(T_1) = S^0$;
- $h = 2$: директном провером добијамо $M(T_2) \simeq S^1 \vee S^1 \vee S^1$;
- $h = 3$: коришћењем леме 3.4 добијамо $M(T_3) \simeq S^4 \vee \left[\bigvee_4 S^3 \right]$;
- $h = 4$: током израде рада [50] у програму Sage је добијен следећи резултат:
 $M(T_4) \simeq \bigvee_{56} S^8 \vee \bigvee_{11} S^9$ (код нећемо наводити).

Дефинишимо сада број d_h који ће се појавити при одређивању повезаности у следећој теорему:

$$d_h = \sum_{i=0}^{\lceil \frac{h}{3} \rceil - 1} 2^{h-3i-1} - 2, \quad h \geq 1.$$

Теорема 4.22. За све $h \geq 1$ комплекс упаривања $M(T_h)$ је d_h -повезан простор.

Доказ. Пошто је $d_1 = -1$ и $d_2 = 0$, тврђење је очигледно тачно за $h = 1$ и $h = 2$. Нека је сада T_h савршено бинарно дрво висине $h \geq 3$. Линијски граф $L(T_h)$ је састављен од $h - 1$ врсти троуглова, тако што је у k -тој врсти укупно 2^{h-k} троуглова, где су врсте означене од 1 до $h - 1$ почев од дна дрвета ка врху (слика 81). За све $k \equiv 1 \pmod 3$, означимо доње лево теме сваког троугла у k -тој врсти са v_i^j , где је $j = \frac{k+2}{3}$, а i узима вредности од 1 до 2^{h-k} идући слева на десно.



Слика 81. Линијски граф $L(T_4)$. [50]

Додатно, ако је $h \equiv 1 \pmod{3}$, означимо и лево теме на самом врху графа $L(T_h)$ са v_1^j , где је $j = \frac{h+2}{3}$. Тиме смо означили укупно $\sum_{i=0}^{\lceil \frac{h}{3} \rceil - 1} 2^{h-3i-1} = d_h + 2$ темена линијског графа $L(T_h)$.

Приметимо да овако изабрана темена имају дисјунктне затворене околине (по паровима), па су испуњени услови леме 4.10. На основу ове леме знамо да постоји Морсово упаривање код кога све критичне ћелије (осим једне 0-ћелије) имају кардиналност бар $d_h + 2$, тј. димензије су бар $d_h + 1$. Следствено, $M(T_h)$ мора бити бар d_h -повезан простор. \square

Начин на који смо дефинисали број d_h је потицао од збира који се појавио у претходној теореми. Међутим, директним рачуном добијамо следећи доста једноставнији облик:

$$d_h = \frac{2^{h+2} - r_h}{7}, \quad \text{где је } r_h = \begin{cases} 18, & h \equiv 0 \pmod{3} \\ 15, & h \equiv 1 \pmod{3} \\ 16, & h \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}.$$

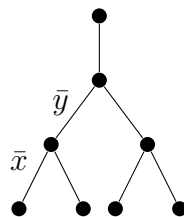
Покажимо сада да је оцена повезаности дата у теореми 4.22 тачна.

Теорема 4.23. *За све $h \geq 1$ комплекс упаривања $M(T_h)$ је хомотопски еквивалентан букету сфера који садржи као компоненту сферу S^{d_h+1} . Следствено, оцена повезаности у теореми 4.22 је тачна, тј. комплекс $M(T_h)$ није $(d_h + 1)$ -повезан.*

Доказ. Теорему ћемо показати користећи индукцију са кораком 3. На основу примера 4.21 видимо да тврђење важи за $h = 1, 2, 3$.

Претпоставимо да је теорема тачна за дрво T_{h-3} за неко $h \geq 4$, па докажимо да важи и за дрво T_h .

Означимо са T'_2 савршено бинарно дрво висине 2 са једном додатном ивицом у корену, као што је приказано на слици 82. Дрво T_h садржи тачно 2^{h-2} копија подграфа T'_2 на свом „дну”, тј. подграфова T'_2 који садрже по тачно 4 листа T_h .



Слика 82. Подграф T'_2 . [50]

Уочимо ивице \bar{x} и \bar{y} подграфа T'_2 као што је приказано на слици 82. На основу леме 3.4 знамо да важи:

$$M(T_h) \simeq S(M((T_h)_{\bar{x}})) \vee S(M((T_h)_{\bar{y}})) \quad (4.5.1)$$

(дефиниција 2.1). Подграф $(T_h)_{\bar{y}}$ је дисјунктна унија подграфа $T_h \setminus T'_2$ (тј. подграфа који се добија избацивањем ивица T'_2 из дрвета T_h) и једног пута P_3 . Према леми 2.5 о споју закључујемо:

$$M((T_h)_{\bar{y}}) \approx M(T_h \setminus T'_2) * M(P_3) \approx M(T_h \setminus T'_2) * S^0 \approx S(M(T_h \setminus T'_2)). \quad (4.5.2)$$

Знамо да је комплекс $M(T_h)$ хомотопски еквивалентан неком букету сфера (теорема 3.6). На основу (6.1.1) и (4.5.2) закључујемо да $M(T_h)$ као компоненту букета има простор хомотопски еквивалентан двострукој суспензији $S^2(M(T_h \setminus T'_2))$. Поновимо овај процес за сваку од 2^{h-2} дисјунктних копија подграфа T'_2 у дрвету T_h , и пратимо исту компоненту букета. Након уклањања свих подграфа T'_2 из T_h добијамо дрво T_{h-3} . Користећи хомотопску инваријантност замене редоследа суспензије и букета, закључујемо да комплекс $M(T_h)$ садржи 2^{h-1} -тоструку суспензију комплекса $M(T_{h-3})$ као компоненту букета.

Према индуктивној хипотези, комплекс $M(T_{h-3})$ садржи компоненту букета хомотопски еквивалентну сфери $S^{d_{h-3}+1}$, одакле на основу претходног резоновања следи да $M(T_h)$ има компоненту букета хомотопски еквивалентну сфери димензије:

$$2^{h-1} + d_{h-3} + 1 = 2^{h-1} + \frac{2^{h-1} - r_{h-3}}{7} + 1 = \frac{2^{h+2} - r_{h-3}}{7} + 1 = d_h + 1,$$

(користили смо очигледну једнакост $r_h = r_{h-3}$). Пошто $M(T_h)$ има као компоненту букета сфера и сферу димензије $d_h + 1$, јасно је да није $(d_h + 1)$ -повезан. Тиме је доказ завршен. \square

Глава 5

Комбинаторика неизбежних симплицијалних комплекса

Ова глава је посвећена изучавању *неизбежних* симплицијалних комплекса. Садржај главе је организован на следећи начин. Прво ћемо дефинисати основне појмове, а затим указати на најзначајније примене у поглављу 5.1. Поглавље 5.2 посвећено је конструкцији неизбежних комплекса помоћу споја. У поглављу 5.3 посматрамо комплексе задате мером на скупу темена и међу њима уочавамо важну класу неизбежних комплекса чија неизбежност потиче од мере. Након тога, наш циљ је конструкција неизбежних комплекса који нису задати мером, тј. чија неизбежност произилази из неких апстрактнијих разлога. Поглавље 5.4 даје основни „градивни материјал” за ту конструкцију - минималне триангулације пројективних равни и Ремзијев комплекс. У поглављу 5.5 уводимо *меру неллинеарности* комплекса, која на неки начин описује одступање стварне неизбежности комплекса од неизбежности коју можемо добити на том комплексу помоћу мере. Поглавље 5.6 садржи главну теорему која реализује жељену конструкцију - користећи комплексе из поглавља 5.4, и теореме из поглавља 5.2 и 5.3, конструишаћемо комплексе велике неллинеарности са релативно малим бројем темена. Глава је базирана на оригиналним радовима [51] и [52].

Класа комплекса коју изучавамо дата је следећом дефиницијом.

Дефиниција 5.1. Симплицијални комплекс $K \subset 2^{[n]}$ је *r-неизбежан* ако за сваку партицију скупа $[n]$ на r делова: $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_r = [n]$, важи да бар један од скупова A_i припада комплексу K .

Партицију на r делова краће називамо *r-партиција*.

Неизбежни комплекси уопштавају појам ауто-дуалних комплекса. Наиме, приметимо да сваки ауто-дуалан комплекс (дефиниција 1.7) задовољава услов 2-неизбежности. Обрнуто, очигледно, не важи.

Такође, из саме дефиниције симплицијалног комплекса директно следи особина да ако је K *r-неизбежан* комплекс, а $s > r$ произвољан број, онда је K такође и *s-неизбежан*. Заиста, ако је $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_s = [n]$ произвољна *s-партиција* скупа $[n]$, онда је $A_1 \sqcup \dots \sqcup A_{r-1} \sqcup (A_r \cup \dots \cup A_s) = [n]$ једна *r-партиција*. Из *r-неизбежности* комплекса K закључујемо да неки од скупова A_1, \dots, A_{r-1} припада K или да важи $(A_r \cup \dots \cup A_s) \in K$. Уколико важи последња инклузија, на основу дефиниције комплекса (дефиниција 1.1), сваки од скупова A_r, \dots, A_s мора припадати K , па

у сваком случају закључујемо да K заиста јесте s -неизбежан. Ово запажање указује на то да је од посебног значаја „најмања неизбежност” датог комплекса K , па је формално дефинишемо.

Дефиниција 5.2. *Партициона инваријанта $\pi(K)$ комплекса $K \subset 2^{[n]}$ дефинише се као:*

$$\pi(K) := \min\{r \in \mathbb{N} \mid K \text{ је } r\text{-неизбежан комплекс}\}.$$

Дефиниција је коректна јер је сваки (непразан) комплекс $K \subset 2^{[n]}$ сигурно n -неизбежан, па важи $\pi(K) \leq n$. Минимална неизбежност је 1-неизбежност, која се догађа само у случају $K = 2^{[n]}$, па ова ситуација није интересантна. Заправо, назив „минимална неизбежност” се користи за други појам, дат дефиницијом 5.3. Наиме, уколико имамо r -неизбежан комплекс K , сви комплекси који садрже K (на скупу $[n]$) су такође r -неизбежни, док поткомплекси могу, али не морају бити r -неизбежни. Због тога су интересантни комплекси који немају поткомплексе исте неизбежности.

Дефиниција 5.3. *Симплицијални комплекс $K \subset 2^{[n]}$ је минимално r -неизбежан ако је r -неизбежан и ниједан његов прави поткомплекс $L \subsetneq K$ није r -неизбежан.*

Као што је природно очекивати, показаћемо да сви минимално r -неизбежни комплекси имају партициону инваријанту једнаку r (последица 5.13).

5.1 Значај неизбежних комплекса и примене

5.1.1 Неизбежни комплекси и метод ограничења

Као што смо поменули у уводу, неизбежни комплекси су се први пут појавили под називом *Тверберг неизбежни комплекси* у раду Благојевића, Фрика и Циглера [16] (уз напомену да је њихова дефиниција 4.1 зависила од извесне функције, али су аутори нагласили да су од главног интересовања комплекси који су неизбежни независно од избора функције). Испоставља се да ови комплекси имају изразито важну улогу у такозваном *методу ограничења* (Громов - Благојевић - Фрик - Циглер редукција), који се примењује у разним теоремама Тверберг - Ван Кампен - Флоресовог типа. Због тога најпре укратко наводимо основни тип теорема на које се овај метод примењује, а затим основни начин примене метода.

По свом утицају, Твербергова теорема се може поредити са класичним теоремама Хелија и Каратеодорија. Од њене појаве 1966. године, настала су веома различита уопштења и правци, уз коришћење разноврсних метода конвексне анализе, топологије, комбинаторике и линеарне алгебре, а и даље се појављују нови интересантни отворени проблеми инспирисани њоме. Оригинална теорема гласи:

Теорема 5.4. [89] *Нека су $d \geq 1$ и $r \geq 2$ природни бројеви. Сваки скуп који садржи $(r - 1)(d + 1) + 1$ тачака у простору \mathbb{R}^d се може поделити на r дисјунктних делова X_1, \dots, X_r чији се конвексни омотачи секу, тј.*

$$\bigcap_{i=1}^r \text{conv} X_i \neq \emptyset.$$

Евивалентна формулација Твербергове теореме каже да ако је $N = (r - 1)(d + 1)$, онда за свако афино преликавање $f : \Delta^N \rightarrow \mathbb{R}^d$, постоји r по паровима дисјунктних страна $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ симплекса Δ^N , таквих да важи $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$.

Природно је поставити питање: да ли ће тврђење Твербергове теореме важити ако се за функцију f претпостави само непрекидност, уместо афиности? Помало изненађујуће, испоставља се да одговор зависи од природе броја r . Познато је да је одговор позитиван када је r степен простог броја [9, 80], а одговарајуће тврђење се назива *тополошка Твербергова теорема*, док су за неке друге вредности r у протеклих неколико година пронађени контрапримери. Веома леп приказ историјата и резултата везаних за ову теорему дат је у раду [8].

Претпоставимо сада да желимо да покажемо неки резултат Тверберговог типа и илуструјмо основну идеју методе ограничења. Нека је дат симплицијални комплекс $K \subseteq \Delta^N$ који је r -неизбежан (K је комплекс на $N + 1$ темена, па је r -неизбежан на скупу $[N + 1]$). Желимо да докажемо да за сваку непрекидну функцију $f : K \rightarrow \mathbb{R}^d$ постоје симплекси $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in K$, дисјунктни по паровима, такви да важи $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_r) \neq \emptyset$. Посматрајмо следећи дијаграм простора, где су e и i природне инклузије, а F ћемо накнадно описати.

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^d \\ e \downarrow & & i \downarrow \\ \Delta^N & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^{d+1} \end{array}$$

Претпоставимо да тополошка Твербергова теорема важи за $(\Delta^N, r, \mathbb{R}^{d+1})$, тј. да за свако непрекидно пресликавање $F : \Delta^N \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ постоји r по паровима дисјунктних страна $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ симплекса Δ^N , таквих да важи $F(\Delta_1) \cap \dots \cap F(\Delta_r) \neq \emptyset$. Примера ради, ово је тачно у случају када је $r = p^k$ степен простог броја, а $N = (r - 1)(d + 2)$.

Нека је $\bar{f} : \Delta^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ проширење пресликавања f на Δ^N , тј. важи $\bar{f} \circ e = f$. Дефинишимо функцију $F : \Delta^N \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ са

$$F(x) = (\bar{f}(x), d(x, K)),$$

где $d(x, K)$ означава растојање тачке $x \in \Delta^N$ до K . На основу претпоставке за $(\Delta^N, r, \mathbb{R}^{d+1})$, знамо да постоје по паровима дисјунктне стране $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ симплекса Δ^N , такве да важи $F(\Delta_1) \cap \dots \cap F(\Delta_r) \neq \emptyset$. Прецизније, за све $i \in [r]$ постоје $x_i \in \Delta_i$ такви да $F(x_1) = \dots = F(x_r)$. Пошто је комплекс K r -неизбежан, постоји неко i_0 такво да важи $\Delta_{i_0} \in K$. Тада је $d(x_{i_0}, K) = 0$, па за све $i \in [r]$ важи $d(x_i, K) = 0$. На основу затворености комплекса закључујемо да $x_i \in K$, за све i . Уколико уочимо минимални симплекс $\Delta'_i \in \Delta^N$ који садржи x_i , онда мора важити $\Delta'_i \in K$. Ови минимални симплекси су наравно дисјунктни по паровима (јер $\Delta'_i \subset \Delta_i$, за све i), и за њих важи $f(\Delta'_1) \cap \dots \cap f(\Delta'_r) \neq \emptyset$ (јер $f(x_1) = \dots = f(x_r)$), па је тако доказана тополошка Твербергова теорема и за (K, r, \mathbb{R}^d) .

Примена наведеног облика методе ограничења може се наћи у леми 4.3 из [16] и теореме 4 из [38]. Разни други начини примене, као и општији приступ, налазе се у [16], [68, став 2.5], а такође и у веома важном, и на неки начин револуционарном раду Громова [43, секција 2.9].

5.1.2 Неизбежни комплекси и еквиваријантни нумерички индекс

У овом одељку илуструјемо примену неизбежних комплекса у проблемима еквиваријантне топологије који се редукују на неку неједнакост нумеричких индекса простора. Циљ одељка је да укажемо на значајну улогу неизбежних комплекса са малом партиционом инваријантом. Наиме, неизбежни комплекси и њихови (умањени) спојеви се појављују као конфигурациони простори у методу „конфигурациони простор - тест пресликавање” (глава 1.5), па је стога важно проценити њихов нумерички индекс. У раду [54] дато је неколико таквих процена, а овде наводимо једну од њих која ће бити примењена у примеру који следи.

Нека је $K \subset 2^{[n]}$ произвољан p -неизбежан комплекс, где је $\pi(K) = p$ прост број. Уочимо s -спој K^{*s} , а онда умањени p -спој ових простора, тј. простор $(K^{*s})_{\Delta}^{*p}$ (видети (1.4.2)). Пошто је p прост, на овом умањеном споју природно дејствује група \mathbb{Z}_p која циклично помера p компоненти умањеног споја. Приметили смо да је ово дејство слободно јер је спој умањен тачно за дијагонали која садржи фиксне тачке. Показује се да тада нумерички \mathbb{Z}_p -индекс простора $(K^{*s})_{\Delta}^{*p}$ задовољава следећу неједнакост [54, теорема 4.6, случај $k = 1$]:

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_p}((K^{*s})_{\Delta}^{*p}) \geq s(n - p + 1) - 1. \quad (5.1.1)$$

Прикажимо примену ове неједнакости на један случај обојене Твербергове теореме [95].

Пример 5.5. [51, пример 1.2] Нека је $C \subset \mathbb{R}^3$ колекција од 15 тачака у простору, од којих је пет плавих, пет црвених и пет белих, и нека су дате тачке у општем положају (никоје три нису колинеарне). Тада постоје троуглови T_1, T_2 и T_3 , такви да сваки од њих има по једно теме од сваке боје, и да важи

$$T_1 \cap T_2 \cap T_3 \neq \emptyset.$$

Скица доказа. Ово тврђење је доказано у раду [104, став 4.5], а овде је циљ само да укажемо на примену неизбежних комплекса, па ћемо без доказа навести неке закључке из оригиналног доказа. Методом „конфигурациони простор-тест пресликавање” проблем који посматрамо се своди на питање постојања еквиваријантног пресликавања. Прецизније, довољно је показати да не постоји следеће \mathbb{Z}_3 -еквиваријантно пресликавање:

$$f : ([5]^{*3})_{\Delta}^{*3} \longrightarrow S^7.$$

Током редукције која претходи, закључује се да је одговарајући индекс кодомена $\text{ind}_{\mathbb{Z}_3} S^7 = 7$ (видети такође [74, страна 150]). Имајући у виду монотоност нумеричког индекса (1.6.1), довољно је доказати да је индекс домена бар 8. Применићемо неједнакост (5.1.1) на дискретан комплекс $K = [5]$ који је 3-неизбежан; $\pi(K) = 3$. Такође, овде је $n = 5$, $s = p = \pi(K) = 3$, а група \mathbb{Z}_3 управо дејствује на начин који се захтева у (5.1.1), па добијамо неједнакост:

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_3}([5]^{*3})_{\Delta}^{*3} \geq 3(5 - 3 + 1) - 1 = 8.$$

Тиме је доказано да не постоји посматрано \mathbb{Z}_3 -еквиваријантно пресликавање, па тражени троуглови T_1, T_2 и T_3 постоје. \square

5.2 Неизбежност споја комплекса

У овом поглављу показујемо како конструисањем споја комплекса познате неизбежности добијамо нови комплекс чију неизбежност знамо да проценимо, што ћемо користити за конструкцију нелинеарних комплекса у делу 5.6. Прво докажујемо једну помоћну лему.

Лема 5.6. *Нека је $K \subset 2^V$ r -неизбежан комплекс и нека је $V = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$ произвољна партиција скупа V , за неко $n \geq r$. Тада постоји бар $n - r + 1$ индекса i таквих да важи $A_i \in K$.*

Доказ. Посматрајмо r -партиције скупа V индуковане датом партицијом $V = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$, које добијамо тако што изаберемо неких $r - 1$ скупова A_i , а преосталих $n - r + 1$ скупова A_i саставимо у један скуп. Имамо следећа два случаја.

- (1) Претпоставимо да постоји неких $n - r + 1$ различитих индекса i_1, \dots, i_{n-r+1} таквих да важи $A_{i_1} \sqcup \dots \sqcup A_{i_{n-r+1}} \in K$. По дефиницији симплицијалног комплекса, тада за све $j = 1, \dots, n - r + 1$ важи $A_{i_j} \in K$, чиме је доказ завршен.
- (2) У супротном, не постоји $n - r + 1$ индекса са својством (1). Посматрајмо следећу r -партицију скупа V : $V = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_{r-1} \sqcup (A_r \cup \dots \cup A_n)$. Према претпоставци, последња унија није симплекс у K , па на основу r -неизбежности знамо да бар један од скупова A_1, \dots, A_{r-1} мора припадати K . Аналогно важи за сваку r -партицију коју добијемо када узмемо унију неких $n - r + 1$ делова A_i , па закључујемо да међу сваких $r - 1$ скупова A_i , постоји бар један индекс i_0 такав да $A_{i_0} \in K$. Дакле, постоји највише $r - 2$ скупова A_i који не припадају K , па бар $n - r + 2$ скупова A_i припада K , чиме је доказ завршен (у овом случају процена је за 1 боља). \square

Сада можемо проценити неизбежност споја.

Теорема 5.7. *Нека је K_1, \dots, K_n фамилија симплицијалних комплекса таквих да је комплекс $K_j \subset 2^{V_j}$ r_j -неизбежан, $r_j \geq 1$, за све $j = 1, \dots, n$. Тада је њихов спој $K = K_1 * \dots * K_n$ r -неизбежан комплекс на скупу $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_n$, за*

$$r = r_1 + \dots + r_n - n + 1.$$

Доказ. Посматрајмо произвољну партицију скупа темена $V = A^{(1)} \sqcup \dots \sqcup A^{(r)}$ на r делова, за $r = r_1 + \dots + r_n - n + 1$. Сваки скуп $A^{(i)}$ се на јединствен начин представља као дисјунктна унија делова $A_j^{(i)}$, где је $A_j^{(i)} = A^{(i)} \cap V_j$ (део који одговара K_j):

$$A^{(i)} = A_1^{(i)} \sqcup \dots \sqcup A_n^{(i)}, \quad i \in [r].$$

На тај начин смо за све $j = 1, \dots, n$ добили r -партицију скупа темена V_j :

$$V_j = A_j^{(1)} \sqcup A_j^{(2)} \sqcup \dots \sqcup A_j^{(r)}.$$

Циљ нам је да покажемо да бар један од скупова $A^{(i)}$ припада споју K . Дакле, треба показати да постоји неко $i \in [r]$ такво да за све $j = 1, \dots, n$ важи $A_j^{(i)} \in K_j$.

У том циљу, уочимо скупове: $S_j = \{i \in [r] \mid A_j^{(i)} \in K_j\}$, $j = 1, \dots, n$. Желимо да покажемо да важи

$$\bigcap_{j=1}^n S_j \neq \emptyset, \quad \text{односно} \quad \bigcup_{j=1}^n S_j^c \neq [r]. \quad (5.2.1)$$

Пошто је сваки комплекс K_j r_j -неизбежан (на V_j), на основу леме 5.6 знамо да скуп S_j има кардиналност бар $r - r_j + 1$, одакле следи

$$\left| \bigcup_{j=1}^n S_j^c \right| \leq \sum_{j=1}^n |S_j^c| \leq \sum_{j=1}^n (r_j - 1) = \sum_{j=1}^n r_j - n < r.$$

Тиме је показано да важи релација (5.2.1), чиме је доказ завршен. \square

Ову теорему можемо преформулисати у терминима партиционе инваријанте: *ако је K_1, \dots, K_n фамилија комплекса, онда за њихов спој $K = K_1 * \dots * K_n$ важи:*

$$\pi(K) \leq \pi(K_1) + \dots + \pi(K_n) - n + 1. \quad (5.2.2)$$

За конструкције у наставку тезе ћемо користити спој n копија истог комплекса (због симетрије која је потребна за друге карактеристике), па овде наводимо две корисне последице.

Последица 5.8. *Нека је K произвољан r -неизбежан комплекс. Тада је спој n копија комплекса K , тј. комплекс K^{*n} , један $(n(r-1) + 1)$ -неизбежан комплекс.*

Последица 5.9. *Ако је K 2-неизбежан, или посебно, ауто-дуалан комплекс, онда је спој K^{*n} $(n+1)$ -неизбежан комплекс.*

Дакле, за свако $r \geq 2$ можемо конструисати r -неизбежан комплекс полазећи од ауто-дуалног комплекса K и формирањем споја $K^{*(r-1)}$.

5.2.1 Спој минимално неизбежних комплекса

Након што смо установили неизбежност споја комплекса у теорему 5.7, у овом одељку ћемо се фокусирати на случај споја минимално неизбежних комплекса и показати да се својство минималности преноси и на спој. У наставку ће нам бити потребан појам *максималног симплекса* у комплексу.

Дефиниција 5.10. Нека је $K \subset 2^V$ симплицијални комплекс и $A \in K \setminus \{\emptyset\}$ симплекс у K . Кажемо да је A *максимални симплекс* у K ако не постоји симплекс $B \in K$ такав да важи $A \subsetneq B$.

Пошто је сваки симплекс у комплексу или сам максималан, или садржан у неком максималном симплексу, једноставно се примећује да дефиницију 5.3 минимално r -неизбежног комплекса можемо преформулисати на следећи начин:

r -неизбежан комплекс $K \subset 2^V$ је минимално r -неизбежан ако и само ако за сваки максимални симплекс $A \in K$ важи да комплекс $K \setminus \{A\} \subset 2^V$ није r -неизбежан.

Покажимо најпре неколико корисних тврђења.

Лема 5.11. Нека је $K \subset 2^V$ неки r -неизбежан симплицијални комплекс. Ако је $A \in K$ неки максимални симплекс у K , онда важи следећа еквиваленција:

$$K \setminus \{A\} \text{ је } r\text{-неизбежан} \iff K|_{V \setminus A} \text{ је } (r-1)\text{-неизбежан на скупу } V \setminus A,$$

где $K|_{V \setminus A}$ означава рестрикцију K на скупу $V \setminus A$, тј. $K|_{V \setminus A} = \{C \in K \mid C \subset V \setminus A\}$.

Доказ. (\Rightarrow) Претпоставимо да је $K \setminus \{A\}$ r -неизбежан. Посматрајмо произвољну $(r-1)$ -партицију скупа $V \setminus A$ (тј. партицију темена на којима посматрамо $K|_{V \setminus A}$):

$$V \setminus A = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_{r-1}.$$

Тада је $V = A \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_{r-1}$ једна r -партиција скупа V , па како је $K \setminus \{A\}$ r -неизбежан на V , мора постојати $i_0 \in \{1, \dots, r-1\}$ такво да важи $B_{i_0} \in K \setminus \{A\}$. Сва темена B_{i_0} су у скупу $V \setminus A$, па B_{i_0} припада $K|_{V \setminus A}$. Дакле, $K|_{V \setminus A}$ јесте $(r-1)$ -неизбежан.

(\Leftarrow) Сада претпоставимо да је $K|_{V \setminus A}$ $(r-1)$ -неизбежан на скупу $V \setminus A$ и докажимо да је $K \setminus \{A\}$ r -неизбежан на V . Нека је $V = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_r$ произвољна r -партиција скупа V . Пошто је цео комплекс K r -неизбежан, постоји неко i_0 тако да $B_{i_0} \in K$. Имамо два случаја. Ако $B_{i_0} \neq A$, онда важи и $B_{i_0} \in K \setminus \{A\}$, чиме је доказ завршен. Ако је $B_{i_0} = A$, онда посматрајмо партицију $V \setminus A$ задату преосталим скуповима B_i , $i \neq i_0$:

$$V \setminus A = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_{i_0-1} \sqcup B_{i_0+1} \sqcup \cdots \sqcup B_r.$$

Како је $K|_{V \setminus A}$ $(r-1)$ -неизбежан, постоји неко $j \neq i_0$ тако да $B_j \in K|_{V \setminus A}$, па важи и $B_j \in K \setminus \{A\}$. Дакле, $K \setminus \{A\}$ мора бити r -неизбежан. \square

Последица 5.12. Нека је $K \subset 2^V$ r -неизбежан комплекс. Тада важи еквиваленција: K је минимално r -неизбежан ако и само ако за сваки максимални симплекс $A \in K$ важи да комплекс $K|_{V \setminus A}$ није $(r-1)$ -неизбежан на $V \setminus A$.

Последица 5.12 директно следи из леме 5.11. Следећа последица даје својство минимално неизбежних комплекса које природно очекујемо.

Последица 5.13. Ако је $K \subset 2^V$ минимално r -неизбежан комплекс, онда важи $\pi(K) = r$.

Доказ. Пошто је K r -неизбежан, свакако важи $\pi(K) \leq r$. Уочимо неки максимални симплекс $A \in K$. Због минималне r -неизбежности, на основу последице 5.12 знамо да постоји партиција $V \setminus A = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_{r-1}$ таква да за све $i \in [r-1]$ важи $B_i \notin K$. Тако добијамо партицију V :

$$V = (A \cup B_1) \sqcup B_2 \sqcup \cdots \sqcup B_{r-1},$$

на $(r-1)$ делова од којих ниједан не даје симплекс у K . Дакле, $\pi(K) > r-1$, па мора да важи $\pi(K) = r$. \square

Покажимо главну теорему за спој минимално неизбежних комплекса.

Теорема 5.14. Нека је K_1, \dots, K_n фамилија симплицијалних комплекса таквих да је за све $j \in [n]$, $K_j \subset 2^{V_j}$ минимално r_j -неизбежан комплекс, за неко $r_j \geq 1$. Тада је њихов спој $K = K_1 * \dots * K_n$ минимално r -неизбежан комплекс на скупу $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_n$, где је $r = r_1 + \dots + r_n - n + 1$.

Доказ. На основу теореме 5.7 знамо да је K заиста r -неизбежан, па треба доказати минималност. Даље, из последице 5.12 знамо да је довољно доказати да за сваки максимални симплекс $A \in K$ важи да комплекс $K|_{V \setminus A}$ није $(r - 1)$ -неизбежан на $V \setminus A$. Произвољан максималан симплекс A у споју K се представља као спој максималних симплекса: $A = A_1 * \dots * A_n$, где је A_j максимални симплекс у K_j , за све $j \in [n]$. Пошто је K_j минимално r_j -неизбежан, поново на основу последице 5.12 закључујемо да $K_j|_{V_j \setminus A_j}$ није $(r_j - 1)$ -неизбежан на $V_j \setminus A_j$, па за све $j \in [n]$ постоји партиција:

$$V_j \setminus A_j = B_j^{(1)} \sqcup \dots \sqcup B_j^{(r_j-1)},$$

таква да важи $B_j^{(i)} \notin K_j$, за све $i = 1, \dots, r_j - 1$. Помоћу скупова $B_j^{(i)}$ можемо добити следећу партицију скупа $V \setminus A = \bigcup_{j=1}^n (V_j \setminus A_j)$:

$$V \setminus A = B_1^{(1)} \sqcup \dots \sqcup B_1^{(r_1-1)} \sqcup \dots \sqcup B_n^{(1)} \sqcup \dots \sqcup B_n^{(r_n-1)}.$$

Ово је партиција скупа $V \setminus A$ на $\sum_{j=1}^n (r_j - 1) = r - 1$ делова таквих да ниједан од ових делова није симплекс у $K|_{V \setminus A}$, па овај комплекс није $(r - 1)$ -неизбежан. Тиме је доказ завршен. \square

Слично релацији (5.2.2), теорема 5.14 даје следећу везу: ако су K_1, \dots, K_n минимално неизбежни комплекси, онда за спој $K = K_1 * \dots * K_n$ важи:

$$\pi(K) = \pi(K_1) + \dots + \pi(K_n) - n + 1.$$

5.3 Неизбежни комплекси дефинисани мером

У овом поглављу разматрамо праг комплексе задате мером на скупу темена. Повезујемо неизбежност неког комплекса са највећим праг комплексом који је у њему садржан и у том циљу уводимо важан појам карактеристичног прага. Показаћемо како симетрија комплекса значајно олакшава израчунавање карактеристичног прага, а на крају ћемо проценити карактеристични праг споја.

5.3.1 Праг комплекси и карактеристични праг

Нека је $\mu : 2^{[n]} \rightarrow [0, +\infty)$ монотона функција (тј. за свака два скупа $A, B \in 2^{[n]}$ важи импликација: $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$), за коју важи $\mu(\emptyset) = 0$. За свако $\alpha > 0$ можемо уочити скуп:

$$T_{\mu \leq \alpha} := \{A \in 2^{[n]} \mid \mu(A) \leq \alpha\}. \quad (5.3.1)$$

Овај скуп је симплицијални комплекс који се назива праг комплекс, док се α назива праг комплекса. Ми ћемо се фокусирати на праг комплексе задате вероватносном мером на скупу $[n]$, тј. вектором тежина:

$$\mu = \mu_x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ где је } x_i \geq 0 \text{ за све } i \in [n] \text{ и важи } \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Све вероватносне мере μ_x на скупу $[n]$ можемо посматрати као елементе стандардног $(n-1)$ -димензионалног симплекса Δ^{n-1} :

$$\Delta^{n-1} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \text{ за све } i \in [n], \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\} = \text{conv}\{e_1, \dots, e_n\}.$$

Тада је мера произвољног скупа $A \subset [n]$ задата као збир одговарајућих тежина:

$$\mu(A) = \sum_{i \in A} x_i.$$

У наставку ћемо осим комплекса $T_{\mu \leq \alpha}$ користити још два скупа задата мером μ :

- симплицијални комплекс $T_{\mu < \alpha} := \{A \in 2^{[n]} \mid \mu(A) < \alpha\}$,
- скуп $T_{\mu \geq \alpha} := \{A \in 2^{[n]} \mid \mu(A) \geq \alpha\}$.

Прва веза праг комплекса са неизбежним комплексима описана је следећим тврђењем.

Тврђење 5.15. *Ако је μ вероватносна мера на скупу $[n]$, онда је праг комплекс $T_{\mu \leq 1/r}$ r -неизбежан.*

Доказ. Нека је $[n] = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_r$ произвољна партиција. Уколико ниједан од скупова A_i не припада комплексу $T_{\mu \leq 1/r}$, то значи да за све $i \in [r]$ важи $\mu(A_i) > \frac{1}{r}$, па имамо:

$$1 = \mu([n]) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_r) > r \cdot \frac{1}{r} = 1,$$

што је контрадикција. Дакле, бар један од скупова A_i припада $T_{\mu \leq 1/r}$. \square

На основу особине описане овим тврђењем, посебно дефинишемо неизбежне комплексе који се могу задати помоћу мере.

Дефиниција 5.16. Нека је $K \subset 2^{[n]}$ произвољан r -неизбежан комплекс. Уколико постоји вероватносна мера μ на скупу $[n]$ таква да важи

$$K = T_{\mu \leq 1/r},$$

комплекс K се назива *линеарно реализабилан r -неизбежни комплекс*.

Природно се поставља питање: *који је највећи праг комплекс који је садржан у датом комплексу K ?* Да бисмо одговорили на то питање, уводимо инваријанту $\rho(K)$ која задовољава следећу везу: $\alpha < \rho(K) \iff (\exists \mu \in \Delta^{n-1}) T_{\mu \leq \alpha} \subset K$. Једноставно се примећује да ако важи $T_{\mu \leq \alpha} \subset K$, онда постоји неко $\epsilon > 0$ такво да важи и $T_{\mu \leq \alpha + \epsilon} \subset K$, па закључујемо да је скуп $\{\alpha \in [0, +\infty) \mid T_{\mu \leq \alpha} \subset K\}$ отворени интервал са десне стране.

Дефиниција 5.17. Нека је $K \subseteq 2^{[n]}$ симплицијални комплекс. *Карактеристични праг $\rho(K)$ комплекса K дефинише се као*

$$\rho(K) = \sup\{\alpha \in [0, +\infty] \mid (\exists \mu \in \Delta^{n-1}) T_{\mu \leq \alpha} \subset K\} \quad (5.3.2)$$

$$= \max\{\alpha \in [0, +\infty] \mid (\exists \mu \in \Delta^{n-1}) T_{\mu < \alpha} \subset K\}. \quad (5.3.3)$$

Еквивалентност дефиниција (5.3.2) и (5.3.3) се непосредно проверава, користећи основна својства супремума и максимума. Приметимо да $\rho(K) = +\infty$ важи ако и само ако $K = 2^{[n]}$. Директна последица дефиниције (5.3.3) је следећа формула за рачунање карактеристичног прага $\rho(K)$ произвољног комплекса $K \subset 2^{[n]}$:

$$\rho(K) = \max_{\mu \in \Delta^{n-1}} \min_{C \notin K} \mu(C) \quad (5.3.4)$$

(где $C \notin K$ пролази све не-симплексе $C \in 2^{[n]} \setminus K$). Заиста, услов $T_{\mu < \alpha} \subset K$ је еквивалентан услову $T_{\mu \geq \alpha} \supset K^c = 2^{[n]} \setminus K$, па је $\rho(K)$ највеће α за које постоји μ тако да важи $\min_{C \notin K} \mu(C) \geq \alpha$, одакле следи (5.3.4).

Сада повезујемо наше инваријанте $\pi(K)$ и $\rho(K)$.

Тврђење 5.18. *Ако је $K \subseteq 2^{[n]}$ симплицијални комплекс, онда важи*

$$\pi(K) \leq \left\lfloor \frac{1}{\rho(K)} \right\rfloor + 1. \quad (5.3.5)$$

Доказ. Уколико је $1/r < \rho(K)$, онда постоји мера $\mu \in \Delta^{n-1}$ таква да је $T_{\mu \leq 1/r} \subset K$. На основу тврђења 5.15 закључујемо да је тада K r -неизбежан, па важи импликација: $1/r < \rho(K) \implies \pi(K) \leq r$. Када изаберемо $r = \lfloor 1/\rho(K) \rfloor + 1$, добијамо тачно неједнакост (5.3.5). \square

Додатно, показаћемо да се неједнакост (5.3.5) не може појачати у општем случају (видети пример 5.23).

5.3.2 Геометријска интерпретација и израчунавање карактеристичног прага

Геометријска интерпретација појмова које смо дефинисали користи идеје линеарног програмирања. Нека је амбијент на коме посматрамо комплексе скуп од $[n]$ темена. Посматрајмо карактеристично пресликавање $\chi : 2^{[n]} \rightarrow \{0, 1\}^n$ које сваки скуп $A \in 2^{[n]}$ идентификује са његовом карактеристичном функцијом $\chi_A \in \{0, 1\}^n$. На пример, за $n = 7$ и $A_1 = \{1, 4, 5\} \in 2^{[7]}$, имамо $\chi_{A_1} = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$. На овај начин свако $A \in 2^{[n]}$ видимо као тачку $\chi_A \in \mathbb{R}^n$, а комплекс $K \subset 2^{[n]}$ идентификујемо са скупом тачака у простору:

$$K = \chi(K) = \{\chi_A \in \{0, 1\}^n \mid A \in K\} \subset [0, 1]^n.$$

Нека је $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \Delta^{n-1}$ вероватносна мера на скупу $[n]$, а $\alpha > 0$ праг. Тада праг комплекс $T_{\mu \leq \alpha} \subset 2^{[n]}$ геометријски видимо као:

$$T_{\mu \leq \alpha} = \{A \in 2^{[n]} \mid \langle \mu, \chi_A \rangle \leq \alpha\} = \{0, 1\}^n \cap H^-(\mu, \alpha), \quad (5.3.6)$$

где је $H^-(\mu, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mu, x \rangle \leq \alpha\}$ негативни полупростор придружен пару (μ, α) .

Како утврђујемо да ли за дати симплицијални комплекс $K \subset 2^{[n]}$ постоје мера μ и праг α , такви да је K једнак одговарајућем праг комплексу $T_{\mu \leq \alpha}$? Посматрајмо геометријске интерпретације комплекса K и његовог комплемента $L = 2^{[n]} \setminus K$. На

основу анализе облика праг комплекса (5.3.6), закључујемо да је K праг комплекс за неки пар (μ, α) ако и само постоји нека хиперраван која строго раздваја K и L . Еквивалентно, закључујемо да је K праг комплекс ако и само ако важи:

$$\text{conv}(K) \cap \text{conv}(L) = \emptyset.$$

Прелазимо сада на геометријску интерпретацију инваријанте $\rho(K)$. У том циљу користимо *блокирајући полиедар* комплекса K [84, глава 5.8].

Дефиниција 5.19. Нека је $K \subseteq 2^{[n]}$ симплицијални комплекс. Конвексни скуп

$$B(K) = \bigcap_{C \in 2^{[n]} \setminus K} \{x \in [0, +\infty)^n \mid \langle x, \chi_C \rangle \geq 1\},$$

назива се *блокирајући полиедар* комплекса K .

Тврђење 5.20. Нека $K \subset 2^{[n]}$ симплицијални комплекс. Нека је $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ функционал дефинисан са $\phi(x) = \langle x, \mathbf{1} \rangle = x_1 + \dots + x_n$, а m минимум функционала ϕ на блокирајућем полиедру $B(K)$. Тада важи:

$$\rho(K) = 1/m.$$

Доказ. Знамо да је $\rho(K)$ највеће $\alpha > 0$ са својством да постоји $\mu \in \Delta^{n-1}$ такво да важи $T_{\mu < \alpha} \subset K$, тј. $T_{\mu \geq \alpha} \supset 2^{[n]} \setminus K$. Другим речима, α је максимално такво да постоји μ са својством

$$\begin{aligned} & (\forall C \in 2^{[n]} \setminus K) \quad \langle \mu, \chi_C \rangle \geq \alpha \\ \iff & (\forall C \in 2^{[n]} \setminus K) \quad \langle \frac{1}{\alpha} \cdot \mu, \chi_C \rangle \geq 1 \\ \iff & (\forall C \in 2^{[n]} \setminus K) \quad \langle \nu, \chi_C \rangle \geq 1, \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

где је $\nu = \frac{1}{\alpha} \cdot \mu = (\frac{\mu_1}{\alpha}, \dots, \frac{\mu_n}{\alpha})$. Пошто је $\phi(\mu) = \langle \mu, \mathbf{1} \rangle = \mu_1 + \dots + \mu_n = 1$, онда је $\phi(\nu) = \frac{1}{\alpha}$. На основу релације (5.3.7) закључујемо да је $\rho(K)$ максимално α за које постоји $\nu \in B(K)$ такво да је $\phi(\nu) = \frac{1}{\alpha}$, одакле следи

$$\rho(K) = \frac{1}{\min\{\phi(\nu) \mid \nu \in B(K)\}}. \quad \square$$

Покажимо сада како је одређивање прага $\rho(K)$ комплекса $K \subset 2^{[n]}$ значајно поједностављено ако K има велику групу аутоморфизама. Нека је $G < \Sigma_n$ група аутоморфизама, тј. свих пермутација скупа $[n]$ које дејствују на комплексу K (тј. симплексе пресликавају у симплексе, а не-симплексе у не-симплексе). Такође, посматрајмо G -инваријантне вероватносне мере на K , тј. мере $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \Delta^{n-1}$ које задовољавају

$$\mu_i = \mu_{g(i)}, \text{ за све } g \in G \text{ и све } i \in [n].$$

Означимо скуп свих G -инваријантних вероватносних мера на K са $\Delta_G^{n-1} \subset \Delta^{n-1}$ (једноставно се види да је Δ_G^{n-1} компактан и конвексан скуп). Докажимо да се формула (5.3.4) за $\rho(K)$ може упростити посматрањем само G -инваријантних мера.

Тврђење 5.21. Нека је $G \subset \Sigma_n$ група аутоморфизама комплекса $K \subset 2^{[n]}$. Тада важи:

$$\rho(K) = \max_{\mu \in \Delta_G^{n-1}} \min_{C \notin K} \mu(C). \quad (5.3.8)$$

Доказ. Нека је $\mu \in \Delta^{n-1}$ произвољна мера. Посматрајмо њој придружену G -инваријантну меру $\nu \in \Delta_G^{n-1}$ дефинисану на следећи начин:

$$\nu(C) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mu(g(C)), \text{ за све } C \in 2^{[n]}.$$

Пошто важи формула (5.3.4), да бисмо доказали (5.3.8) довољно је показати:

$$\min_{C \notin K} \mu(C) \leq \min_{C \notin K} \nu(C). \quad (5.3.9)$$

Претпоставимо супротно, да важи $\min_{C \notin K} \nu(C) < a = \min_{C \notin K} \mu(C)$. То значи да постоји скуп $\tilde{C} \notin K$ за који важи $\nu(\tilde{C}) < a$, па на основу дефиниције мере ν постоји неко $\tilde{g} \in G$ такво да је $\mu(\tilde{g}(\tilde{C})) < a$. Међутим, пошто је K G -инваријантан, а $\tilde{C} \notin K$, закључујемо да ни скуп $\tilde{g}(\tilde{C})$ не припада комплексу K . Одатле следи да је $\min_{C \notin K} \mu(C)$ заправо мањи од a , што је контрадикција. \square

Најважнију последицу овог тврђења имамо код оних комплекса чија група аутоморфизама G дејствује *транзитивно*, односно када за свака два елемента $i, j \in [n]$ (тј. свака два темена комплекса) постоји елемент $g \in G$ такав да важи $g(i) = j$.

Последица 5.22. Нека је $K \subset 2^{[n]}$ симплицијални комплекс чија група аутоморфизама G дејствује *транзитивно*. Тада важи:

$$\rho(K) = \min \left\{ \frac{|C|}{n} \mid C \in 2^{[n]} \setminus K \right\}. \quad (5.3.10)$$

Доказ. Покажимо да је у овом случају скуп Δ_G^{n-1} једночлан. Заиста, претпоставимо да $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \Delta_G^{n-1}$. За свака два индекса $i, j \in [n]$ постоји неко $g \in G$ такво да важи $g(i) = j$, одакле следи $\mu_j = \mu_{g(i)} = \mu_i$. Дакле, $\mu_1 = \dots = \mu_n = \frac{1}{n}$, па $\Delta_G^{n-1} = \{(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})\}$. Сада формула (5.3.10) директно следи из тврђења 5.21. \square

Другим речима, код комплекса са транзитивним дејством групе аутоморфизама, карактеристични праг одређујемо директно на основу кардиналности минималног не-симплекса. Илуструјмо на једном примеру примену последице 5.22, уз напомену да ћемо најзначајније примене имати у поглављу 5.6.

Пример 5.23. Посматрајмо симплицијални комплекс свих подскупова скупа $[n]$ са не више од k елемената ($k \geq 1$):

$$K = \left(\begin{matrix} [n] \\ \leq k \end{matrix} \right) \subset 2^{[n]}.$$

Група аутоморфизама комплекса K је цела симетрична група Σ_n , па можемо применити последицу 5.22: кардиналност минималног скупа који не формира

симплекс је $k + 1$, одакле имамо $\rho(K) = \frac{k+1}{n}$. Посматрајмо специјални случај $n = r(k + 1) - 1$, за $r, k \geq 2$. По Дирихлеовом принципу закључујемо да је тада комплекс K r -неизбежан и да тачно важи $\pi(K) = r$. Пошто је $\rho(K) = \frac{k+1}{r(k+1)-1}$, веза (5.3.5) постаје једнакост: $r \leq \lfloor r - \frac{1}{k+1} \rfloor + 1 = r$. Дакле, (5.3.5) се не може појачати у општем случају.

5.3.3 Карактеристични праг споја комплекса

Као што смо утврдили везу неизбежности споја са неизбежностима комплекса који учествују у њему, сада нам је циљ да проценимо карактеристични праг споја у зависности од прагова његових компоненти.

Лема 5.24. *Нека је K_1, \dots, K_n фамилија симплицијалних комплекса, $K_i \subset 2^{V_i}$ за $i \in [n]$. Такође, нека је $K = K_1 * \dots * K_n \subset 2^V$ спој ових комплекса, где је $V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_n$. Претпоставимо да постоје праг $\alpha \in [0, 1]$ и вероватносна мера μ на V , такви да важи $T_{\mu \leq \alpha} \subset K$. Тада постоје $j \in [n]$ и вероватносна мера ν на V_j за које важи*

$$T_{\nu \leq n\alpha} \subset K_j.$$

Доказ. Нека је μ_i рестрикција мере μ на теменима V_i и означимо $t_i := \mu(V_i) = \mu_i(V_i)$, за све $i \in [n]$. Пошто је $\mu(V) = 1 = t_1 + \dots + t_n$, постоји неко $j \in [n]$ такво да важи $t_j \leq 1/n$. Покажаћемо да тачно за ово j комплекс K_j задовољава тражено својство.

Када скалирамо μ_j , добијамо вероватносну меру $\nu = \frac{1}{t_j} \cdot \mu_j$ на скупу V_j . Из услова $T_{\mu \leq \alpha} \subset K$ знамо да за сваки скуп $A \subset V_j$ важи импликација:

$$\mu(A) = \mu_j(A) \leq \alpha \implies A \in K \cap 2^{V_j} = K_j.$$

Пошто је $\mu_j(A) = t_j \cdot \nu(A)$, закључујемо да за свако $A \subset V_j$ важи да ако $\nu(A) \leq \frac{1}{t_j} \cdot \alpha$, онда $A \in K_j$. С обзиром на то да је $n\alpha \leq \frac{1}{t_j} \cdot \alpha$, закључујемо да важи $T_{\nu \leq n\alpha} \subset K_j$. \square

Директном реформулацијом леме 5.24 добијамо прегледнију процену карактеристичног прага споја.

Последица 5.25. *Нека важе све претпоставке леме 5.24. Тада важи:*

$$\rho(K) = \rho(K_1 * \dots * K_n) \leq \frac{1}{n} \cdot \max\{\rho(K_i) \mid i \in [n]\}.$$

Специјално, за $K_1 = \dots = K_n = K$ закључујемо да важи:

$$\rho(K^{*n}) \leq \frac{1}{n} \cdot \rho(K). \quad (5.3.11)$$

Посебно, у овом случају можемо доказати да важи и једнакост.

Теорема 5.26. *Нека је $K \subset 2^V$ симплицијални комплекс, а $K^{*n} = K * \dots * K$ његов спој (на скупу $V \sqcup \dots \sqcup V \cong V \times [n]$, $n \in \mathbb{N}$). Тада важи једнакост:*

$$\rho(K^{*n}) = \frac{1}{n} \cdot \rho(K). \quad (5.3.12)$$

Доказ. Пошто већ знамо да важи неједнакост (5.3.11), докажимо да важи и обрнут смер. Нека је $\alpha = \rho(K)$. По дефиницији 5.3.3 то значи да постоји вероватносна мера μ на скупу V таква да важи $T_{\mu < \alpha} \subset K$. Треба показати да постоји мера ν на скупу $V \times [n]$ таква да $T_{\nu < \frac{1}{n}\alpha} \subset K^{*n}$. Тражену меру ћемо конструисати на следећи начин. На сваком темену $i \in V$ дефинишимо $\nu(i) := \frac{1}{n}\mu(i)$, а онда природно на скупу $V \times [n]$:

$$\nu(i, k) := \frac{1}{n} \cdot \mu(i), \text{ за све } i \in V, k \in [n].$$

Пошто је $\mu(V) = 1$, онда је $\nu(V \times [n]) = n \cdot \nu(V) = 1$, па ν јесте вероватносна мера на скупу темена комплекса K^{*n} . Уочимо произвољан скуп $A = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n \subset V \sqcup \dots \sqcup V$, $A_i \subset V$, $i \in [n]$ и покажимо да важи импликација:

$$\nu(A) < \frac{1}{n} \cdot \alpha \implies A \in K^{*n}. \quad (5.3.13)$$

Имамо: $\frac{1}{n} \cdot \alpha > \nu(A) = \sum_{i=1}^n \nu(A_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \mu(A_i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$, одакле закључујемо да важи $\sum_{i=1}^n \mu(A_i) < \alpha$, па и за сваки скуп A_i важи $\mu(A_i) < \alpha$, $i \in [n]$. Из услова $T_{\mu < \alpha} \subset K$ следи да $A_i \in K$ за све $i \in [n]$, па цео спој A припада споју K^{*n} . Дакле, важи импликација (5.3.13), одакле следи $T_{\nu < \frac{1}{n}\alpha} \subset K^{*n}$, па је $\rho(K^{*n}) \geq \frac{1}{n} \cdot \alpha$. Уз неједнакост (5.3.11), доказ је завршен. \square

5.4 Ауто-дуалне триангулације пројективних равни $\mathbb{R}P^2$, $\mathbb{C}P^2$ и $\mathbb{H}P^2$ и Ремзијев комплекс

У овом поглављу проучавамо неколико важних 2-неизбежних комплекса који нису линеарно реализабилни, односно не могу се представити као праг комплекси $T_{\mu \leq \frac{1}{2}}$. То су минималне триангулације пројективних равни $\mathbb{R}P^2$, $\mathbb{C}P^2$ и $\mathbb{H}P^2$, као и Ремзијев комплекс. Ове комплексе ћемо користити у поглављу 5.6 за конструкције неизбежних комплекса са релативно малим бројем темена.

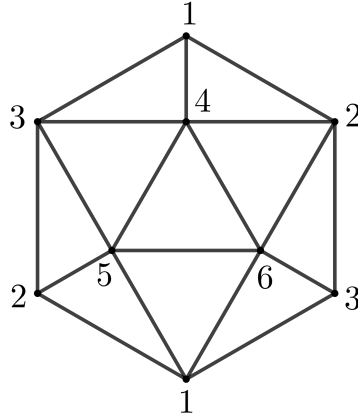
5.4.1 Реална пројективна равна $\mathbb{R}P_6^2$

Минимална триангулација реалне пројективне равни је комплекс $\mathbb{R}P_6^2$ на 6 темена, приказан на слици 83, код кога су одговарајуће ивице на граници идентификоване [74, Пример 5.8.5]. Овај комплекс се назива *полу-икосаедар* (*hemi-icosahedron*), јер се природно добија идентификацијом супротних страна правилног икосаедра.

Једноставно се проверава да за сваки скуп $A \subset [6]$ важи еквиваленција

$$A \in \mathbb{R}P_6^2 \iff A^c \notin \mathbb{R}P_6^2,$$

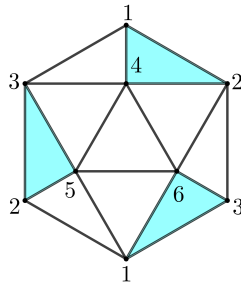
односно $\mathbb{R}P_6^2$ је ауто-дуалан, па је 2-неизбежан и важи $\pi(\mathbb{R}P_6^2) = 2$. Покажимо да овај комплекс није линеарно реализабилан.



Слика 83. Минимална триангулација $\mathbb{R}P^2$.

Тврђење 5.27. Не постоје вероватносна мера μ на скупу $[6]$ и праг α такви да је $\mathbb{R}P_6^2$ једнак праг комплексу $T_{\mu \leq \alpha}$. Специјално, комплекс $\mathbb{R}P_6^2$ није линеарно реализабилан.

Доказ. Претпоставимо да постоји мера $\mu = (x_1, \dots, x_6) \in \Delta^5$, $\mu(i) = x_i$ за сва темена $i \in [6]$, тако да за неко $\alpha \in (0, 1)$ важи $\mathbb{R}P_6^2 = T_{\mu \leq \alpha}$.



Слика 84. Три симплекса комплекса $\mathbb{R}P_6^2$.

Пошто три плава троугла (слика 84) припадају комплексу, важе неједнакости: $x_1 + x_2 + x_4 \leq \alpha$, $x_3 + x_2 + x_5 \leq \alpha$ и $x_1 + x_6 + x_3 \leq \alpha$, одакле следи

$$2(x_1 + x_2 + x_3) + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3\alpha. \quad (5.4.1)$$

Са друге стране, посматраном комплексу не припадају троуглови 126, 234 и 135, па важе неједнакости: $x_1 + x_2 + x_6 > \alpha$, $x_2 + x_3 + x_4 > \alpha$ и $x_1 + x_3 + x_5 > \alpha$, одакле закључујемо да важи $2(x_1 + x_2 + x_3) + x_4 + x_5 + x_6 > 3\alpha$, што је у контрадикцији са релацијом (5.4.1). Дакле, такво α не постоји ни за једну меру μ . Специјално, не постоји мера за $\alpha = \frac{1}{2}$, па комплекс није линеарно реализабилан. \square

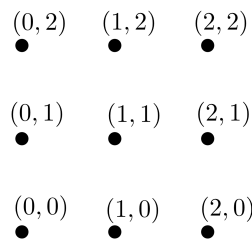
Иако комплекс $\mathbb{R}P_6^2$ није облика $T_{\mu \leq \frac{1}{2}}$, испоставља се да важи $\rho(\mathbb{R}P_6^2) = \frac{1}{2}$. Заиста, група аутоморфизама овог комплекса дејствује транзитивно, па можемо применити последицу 5.22: кардиналност минималног не-симплекса је 3, па важи

$$\rho(\mathbb{R}P_6^2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

5.4.2 Комплексна пројективна равна $\mathbb{C}P_9^2$

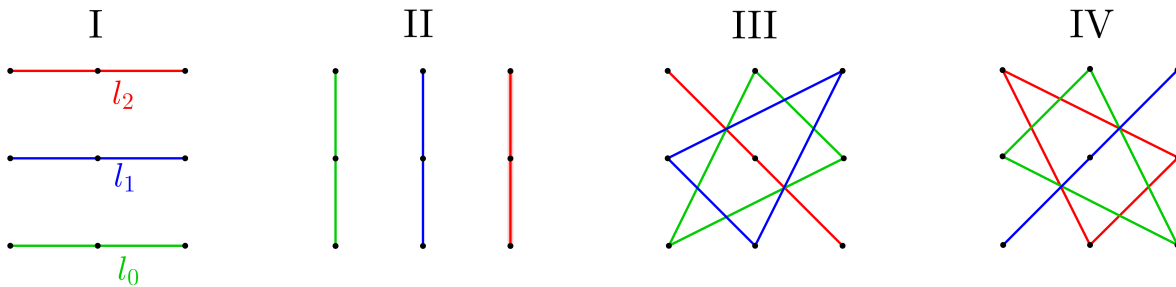
Минимална триангулација комплексне пројективне равни је један ауто-дуалан комплекс на 9 темена. Постојање минималне триангулације са 9 темена је прво утврђено компјутерским методама [66], а касније су Багчи и Дата [7] представили елегантну комбинаторну конструкцију коју ћемо овде изложити. Затим ћемо показати да се ни овај комплекс не може задати мером и одредити његов карактеристични праг.

Конструкција комплекса $\mathbb{C}P_9^2$. Нека је $\mathcal{P} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ афина равна над пољем \mathbb{Z}_3 (слика 85). Девет темена комплекса $\mathbb{C}P_9^2$ одговарају тачкама равни \mathcal{P} , док максималне симплексе конструишемо помоћу правих у овој равни.



Слика 85. Равна $\mathcal{P} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Равна \mathcal{P} садржи укупно 12 правих, подељених у четири класе од по три паралелне праве, а свака права садржи тачно три тачке, као на слици 86. На пример, једначина црвене праве у класи IV је $y = x - 1$ (сабирање и одузимање је по модулу 3 свуда).



Слика 86. Четири класе паралелних правих у равни \mathcal{P} .

Фиксирајмо једну класу паралелних правих, на пример класу I. Означимо циклично праве ове класе са l_0, l_1 и l_2 , као на слици 86. Комплекс $\mathbb{C}P_9^2$ има 36 максималних симплекса димензије 4, дефинисаних на следећи начин.

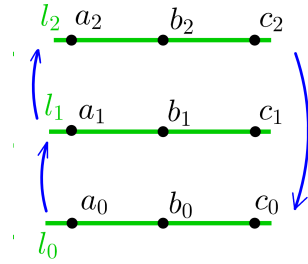
- За свако $i \in \{0, 1, 2\}$ и свако $x \in l_i$, скуп $(l_i \cup l_{i+1}) \setminus \{x\}$ је страна комплекса. Тако добијамо $3 \cdot 3 = 9$ петоелементних подскупова \mathcal{P} , тј. девет симплекса димензије 4.
- Затим, посматрајмо само праве из класа II, III и IV. Сваке две праве m_1 и m_2 из различитих класа се секу у тачно једној тачки, па је $|m_1 \cup m_2| = 5$ и $m_1 \cup m_2$ дефинише симплекс димензије 4. На овај начин добијамо укупно $\frac{9 \cdot 6}{2} = 27$ максималних симплекса.

У раду [7] је показано да комплекс дефинисан овим максималним странама (и свим њиховим подскуповима) заиста јесте триангулација комплексне пројективне равни.

Детаљнијим анализирањем максималних симплекса и њихових комплемената се примећује да је комплекс $\mathbb{C}P_9^2$ ауто-дуалан, па важи $\pi(\mathbb{C}P_9^2) = 2$. Попут комплекса $\mathbb{R}P_6^2$, ни $\mathbb{C}P_9^2$ се не може реализовати помоћу мере.

Тврђење 5.28. *Не постоје вероватносна мера μ на скупу [9] и праг α такви да је $\mathbb{C}P_9^2$ једнак праг комплексу $T_{\mu \leq \alpha}$. Посебно, комплекс $\mathbb{C}P_9^2$ није линеарно реализабилан.*

Доказ. Означимо темена комплекса $\mathbb{C}P_9^2$ (тј. елементе равни \mathcal{P}) као на слици 87.



Слика 87. Темена комплекса $\mathbb{C}P_9^2$ и циклично дејство групе \mathbb{Z}_3 .

Уочимо дејство групе \mathbb{Z}_3 на комплексу $\mathbb{C}P_9^2$ дато дејством генератора који циклично пресликава праву l_i у l_{i+1} , за све $i = 0, 1, 2$ (по модулу 3). Прецизније, генератор пресликава $a_i \mapsto a_{i+1}$, $b_i \mapsto b_{i+1}$ и $c_i \mapsto c_{i+1}$, за $i = 0, 1, 2$. Једноставно се запажа да је ово дејство добро дефинисано, односно да се симплекси пресликавају у симплексе, а не-симплекси у не-симплексе.

Претпоставимо да постоји мера μ на \mathcal{P} таква да важи $\mathbb{C}P_9^2 = T_{\mu \leq \alpha}$, за неки праг α . Поступићемо слично као код израчунавања карактеристичног прага у одељку 5.3.2, тј. користићемо симетрију комплекса, само на елементарнијем нивоу. Уочимо мере μ' и μ'' задате цикличним померањем мере μ :

$$\mu'(x_{i+1}) := \mu(x_i), \text{ за све } x \in \{a, b, c\} \text{ и све } i \in \{0, 1, 2\};$$

$$\text{а затим } \mu''(x_{i+1}) := \mu'(x_i), \text{ за све } x \in \{a, b, c\} \text{ и све } i \in \{0, 1, 2\}.$$

С обзиром на то да је комплекс инваријантан при посматраном дејству групе \mathbb{Z}_3 , закључујемо да мере μ' и μ'' индукују потпуно исти праг комплекс, тј. важи $T_{\mu' \leq \alpha} = T_{\mu'' \leq \alpha} = \mathbb{C}P_9^2$. Уочимо аритметичку средину мера μ, μ' и μ'' :

$$\bar{\mu}(x) := \frac{\mu(x) + \mu'(x) + \mu''(x)}{3}, \quad x \in \mathcal{P}.$$

Поново, на основу инваријантности симплекса/не-симплекса у посматраним праг комплексима, закључујемо да важи $T_{\bar{\mu} \leq \alpha} = \mathbb{C}P_9^2$. Мера $\bar{\mu}$ има исту вредност на елементима исте колоне у \mathcal{P} :

$$\bar{\mu}(a_i) = a, \quad \bar{\mu}(b_i) = b, \quad \bar{\mu}(c_i) = c, \quad \text{за } i = 0, 1, 2,$$

где из $\bar{\mu}(\mathcal{P}) = 1$ следи $a + b + c = \frac{1}{3}$. Пошто су $\{a_0, b_0, a_1, b_1, c_1\}$, $\{b_1, c_1, a_2, b_2, c_2\}$ и

$\{a_2, c_2, a_0, b_0, c_0\}$ симплекси у $\mathbb{C}P_9^2$, важи:

$$2a + 2b + c \leq \alpha, \quad a + 2b + 2c \leq \alpha \quad \text{и} \quad 2a + b + 2c \leq \alpha,$$

одакле следи $5(a + b + c) \leq 3\alpha$, односно $\alpha \geq \frac{5}{9}$. Са друге стране, $\{a_0, a_1, a_2, b_1, b_2\}$, $\{b_0, b_1, b_2, c_1, c_2\}$ и $\{c_0, c_1, c_2, a_1, a_2\}$ нису симплекси, па важи:

$$3a + 2b > \alpha, \quad 3b + 2c > \alpha \quad \text{и} \quad 3c + 2a > \alpha,$$

што повлачи $\alpha > \frac{5}{9}$, чиме добијамо контрадикцију. Дакле, тражено α не постоји, па комплекс $\mathbb{C}P_9^2$ није праг комплекс. \square

Одредимо још карактеристични праг комплекса $\mathbb{C}P_9^2$. Показује се да његова група аутоморфизама дејствује транзитивно (видети [66]), а најмањи не-симплекс има 4 елемента, па из последице 5.22 следи $\rho(\mathbb{C}P_9^2) = \frac{4}{9}$.

5.4.3 Кватернионска пројективна равна $\mathbb{H}P_{15}^2$

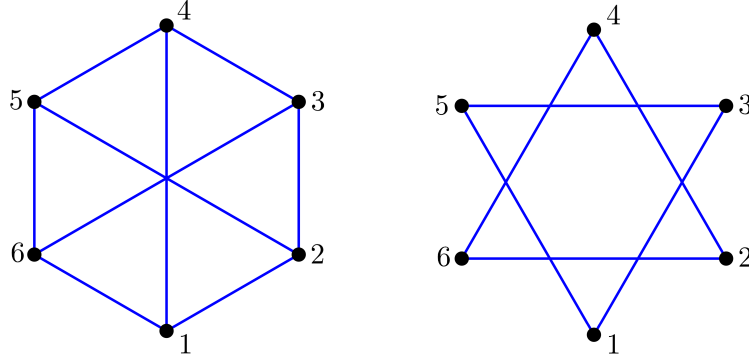
Брем и Кунел су 1992. године у раду [22] конструисали више симплицијалних комплекса димензије 8, а са 15 темена, за које су доказали да се „понашају као пројективна равна” (овај појам је дефинисан и испитиван у раду [30], а односи се на затворене многострукости које допуштају Морсову функцију са тачно 3 критичне тачке). Међутим, нису успели да покажу да се међу њима заиста налази триангулација кватернионске равни $\mathbb{H}P^2$. Доста касније, 2019. године, Городков [42] је потврдио да најсиметричнији међу поменути комплексима, означен са M_{15}^8 , јесте минимална триангулација многострукости $\mathbb{H}P^2$. Означимо ову триангулацију са $\mathbb{H}P_{15}^2$. Показано је да је $\mathbb{H}P_{15}^2$ ауто-дуалан комплекс [22, страна 176], па је $\pi(\mathbb{H}P_{15}^2) = 2$. Такође, познато је да $\mathbb{H}P_{15}^2$ допушта транзитивно дејство алтернирајуће групе A_5 [22, страна 169], док је кардиналност минималног не-симплекса једнака 6, па на основу последице 5.22 закључујемо да важи $\rho(\mathbb{H}P_{15}^2) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

5.4.4 Ремзијев комплекс \mathcal{R}_3

Ремзијева теорија индукује интересантну класу 2-неизбежних комплекса. Елементарна Ремзијева теорема каже да за сваки граф G на 6 темена важи да G садржи троугао или његов комплемент G^c садржи троугао. Означимо са $V = \binom{[6]}{2}$ скуп свих двоелементних подскупова скупа [6] (тада граф G видимо као подскуп од V). Посматрајмо комплекс \mathcal{R}_3 чији је скуп темена V . Симплексе дефинишемо на следећи начин: $G \subset V$ припада комплексу \mathcal{R}_3 ако и само ако граф $G^c = V \setminus G$ садржи троугао. Јасно је да је \mathcal{R}_3 заиста симплицијални комплекс, а на основу Ремзијеве теореме закључујемо да је комплекс \mathcal{R}_3 2-неизбежан, $\pi(\mathcal{R}_3) = 2$.

Одредимо карактеристични праг $\rho(\mathcal{R}_3)$. Једноставно примећујемо да група аутоморфизама комплекса \mathcal{R}_3 дејствује транзитивно на његовом скупу темена V , па према последици 5.22 треба само одредити кардиналност минималног не-симплекса. На слици 88 (лево) приказан је граф на 6 темена, са максималним

бројем ивица (девет), који не садржи троугао. Због тога десни граф одговара минималном не-симплексу у \mathcal{R}_3 . Његова кардиналност је 6, па на основу последице 5.22 важи $\rho(\mathcal{R}_3) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.



Слика 88. Максимални граф на 6 темена који не садржи троуглове и његов комплемент.

На основу општијих верзија Ремзијеве теореме можемо конструисати и веће Ремзијеве комплексе \mathcal{R}_n , за све $n > 3$. Наиме, нека је $t = t(n, n)$ Ремзијев број - то је минимално m такво да сваки подграф комплетног графа K_m мора садржати комплетан подграф на n темена или мора садржати независан скуп од n темена. Такво t постоји на основу Ремзијеве теорије, видети на пример [1, страна 312]. Нека је $V = \binom{[t]}{2}$ скуп ивица комплетног графа K_t на t темена. Као и у случају комплекса \mathcal{R}_3 , комплекс $\mathcal{R}_n \subset 2^V$ дефинишемо као скуп свих $G \subset V$ таквих да комплемент $V \setminus G$ садржи комплетан подграф K_n . Према Ремзијевој теореме, \mathcal{R}_n је 2-неизбежан комплекс, за свако $n \geq 3$.

5.5 Нелинеарни комплекси и мера нелинеарности

Као што смо показали у тврђењу 5.18, партициона инваријанта и карактеристични праг комплекса K су повезани следећом неједнакошћу:

$$\pi(K) \leq \left\lfloor \frac{1}{\rho(K)} \right\rfloor + 1. \tag{5.5.1}$$

Ова неједнакост има једну веома важну особину: она се своди на једнакост тачно када посматрани комплекс K садржи праг комплекс $T_{\mu \leq 1/\pi(K)}$ (који је $\pi(K)$ -неизбежан према тврђењу 5.15), односно када можемо рећи да се неизбежност комплекса K добија преко мере. Прецизније, важи следеће тврђење.

Тврђење 5.29. Нека је $K \subset 2^{[n]}$ симплицијални комплекс такав да важи $\pi(K) = r$, $r \geq 2$. Тада важи еквиваленција:

$$\pi(K) = \left\lfloor \frac{1}{\rho(K)} \right\rfloor + 1 \iff (\exists \mu \in \Delta^{n-1}) T_{\mu \leq 1/r} \subset K.$$

Доказ. Претпоставимо да важи једнакост $\pi(K) = \lfloor \frac{1}{\rho(K)} \rfloor + 1 = r$. Тада је $\lfloor \frac{1}{\rho(K)} \rfloor = r - 1$, па важи $\frac{1}{r} < \rho(K) \leq \frac{1}{r-1}$. По дефиницији карактеристичног прага закључујемо да постоји мера $\mu \in \Delta^{n-1}$ таква да важи $T_{\mu \leq 1/r} \subset K$.

Обрнуто, нека је $T_{\mu \leq 1/r} \subset K$ за неку меру μ . Тада из дефиниције (5.3.3) следи $\frac{1}{r} < \rho(K)$, па важи $\lfloor \frac{1}{\rho(K)} \rfloor \leq r - 1$. Заједно са неједнакошћу (5.5.1), добијамо тражену једнакост. \square

Дакле, строга неједнакост у (5.5.1) указује на то да неизбежност посматраног комплекса није индукована мером, већ да је он избежан из неких апстрактнијих разлога. Због тога уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 5.30. Нека је $K \subseteq 2^{[n]}$ симплицијални комплекс. Кажемо да је K *линеаран* комплекс ако се неједнакост (5.5.1) своди на једнакост, а да је *нелинеаран* ако важи строга неједнакост. Такође, дефинишемо *меру нелинеарности* комплекса, у ознаци $\epsilon(K)$, са:

$$\epsilon(K) := \left\lfloor \frac{1}{\rho(K)} \right\rfloor + 1 - \pi(K). \quad (5.5.2)$$

Дакле, комплекс K је нелинеаран ако и само ако је његова мера нелинеарности $\epsilon(K)$ већа од нуле. Посматраћемо и *релативну меру нелинеарности* $\bar{\epsilon}$ комплекса K као однос мере нелинеарности и броја темена комплекса: $\bar{\epsilon}(K) = \frac{\epsilon(K)}{n}$.

Подсетимо се да су једну од најзначајнијих примена неизбежни комплекси нашли у раду [16] за теореме Тверберг - Ван Кампен - Флоресовог типа. Показује се да сви примери r -неизбежних комплекса из овог рада садрже r -неизбежне праг комплексе, па су сви они линеарни. Генерално, стиче се утисак да је конструкција нелинеарних комплекса доста тежа и да они имају посебна интересантна својства због апстрактне природе своје неизбежности. Ови комплекси фигуришу као кандидати за „комплексе Куратовског у вишим димензијама”, који су разматрани у раду [54].

Колекцију свих нелинеарних комплекса које смо конструисали помоћу метода које смо изучавали, сумирамо у следећем поглављу.

5.6 Главна конструкција неизбежних комплекса велике мере нелинеарности

Циљ овог поглавља је конструкција комплекса велике мере нелинеарности, као и испитивање релативне нелинеарности у односу на број темена комплекса. Идеја је да конструишемо велике спојеве 2-неизбежних комплекса које смо проучавали у поглављу 5.4. Сви комплекси из поглавља 5.4 су нелинеарни, јер на основу њихових партиционих инваријанти и карактеристичних прагова добијамо:

$$\epsilon(\mathbb{R}P_6^2) = 1, \quad \epsilon(\mathbb{C}P_9^2) = 1, \quad \epsilon(\mathbb{H}P_{15}^2) = 1, \quad \epsilon(\mathcal{R}_3) = 1.$$

Уз претходне комплексе, посматраћемо још и дискретан скуп [3], јер се он „понаша као пројективна равна” димензије 0 (у смислу дефиниције из [30] коју смо поменули у поглављу 5.4.3). Комплекс [3] је ауто-дуалан, $\pi([3]) = 2$, а $\rho([3]) = \frac{2}{3}$ (група симетрија је транзитивна, а минималан не-симплекс је кардиналности 2, па можемо применити последицу 5.22).

Наредна теорема приказује фамилију најинтересантнијих примера нелинеарних комплекса који су конструисани методама изложеним у овој тези. Може се рећи да ова теорема сумира најважније резултате до којих смо дошли, користећи их за конструкцију нелинеарних комплекса.

Теорема 5.31. *Нека је K један од комплекса скупа $\{[3], \mathbb{R}P_6^2, \mathbb{C}P_9^2, \mathbb{H}P_{15}^2, \mathcal{R}_3\}$, а K^{*n} спој n копија комплекса K , $n \in \mathbb{N}$. За сваки од комплекса K^{*n} посматрамо партиципону инваријанту $\pi(K^{*n})$, карактеристични праг $\rho(K^{*n})$, меру нелинеарности $\epsilon(K^{*n})$, број темена $v(K^{*n})$ и релативну меру нелинеарности $\bar{\epsilon}(K^{*n}) = \frac{\epsilon(K^{*n})}{v(K^{*n})}$. Тада за наведене комплексе K^{*n} ове инваријанте имају вредности приказане у табели 5.*

Табела 5. Важне инваријанте комплекса K^{*n} .

K	$[3]$	$\mathbb{R}P_6^2$	$\mathbb{C}P_9^2$	$\mathbb{H}P_{15}^2$	\mathcal{R}_3
$\pi(K^{*n})$	$n + 1$	$n + 1$	$n + 1$	$n + 1$	$n + 1$
$\rho(K^{*n})$	$2/3n$	$1/2n$	$4/9n$	$2/5n$	$2/5n$
$\epsilon(K^{*n})$	$\lfloor n/2 \rfloor$	n	$\lfloor 5n/4 \rfloor$	$\lfloor 3n/2 \rfloor$	$\lfloor 3n/2 \rfloor$
$v(K^{*n})$	$3n$	$6n$	$9n$	$15n$	$15n$
$\bar{\epsilon} = \epsilon/v$	$\approx 1/6$	$1/6$	$\approx 5/36$	$\approx 1/10$	$\approx 1/10$

Доказ. Користићемо особине ових комплекса које смо учили у поглављу 5.4. Знамо да прва четири комплекса имају својство ауто-дуалности, а пети је 2-неизбежан, па за све $K \in \{[3], \mathbb{R}P_6^2, \mathbb{C}P_9^2, \mathbb{H}P_{15}^2, \mathcal{R}_3\}$ имамо $\pi(K) = 2$. На основу последице 5.9 закључујемо да за спој K^{*n} важи $\pi(K^{*n}) \leq n + 1$. Такође, једноставно се запажа да ако комплекс K није једнак партитивном скупу темена, онда K^{*n} није n -неизбежан, јер партиција темена по компонентама споја (темена(K^{*n}) = темена(K) $\sqcup \dots \sqcup$ темена(K)) не задовољава услов n -неизбежности. Дакле, за све посматране комплексе K важи $\pi(K^{*n}) = n + 1$, што даје прву врсту табеле.

Карактеристичне прагове комплекса K^{*n} добијамо директно примењујући једнакост $\rho(K^{*n}) = \frac{\rho(K)}{n}$ из теореме 5.26 на познате карактеристичне прагове $\rho(K)$:

$$\rho([3]) = \frac{2}{3}, \quad \rho(\mathbb{R}P_6^2) = \frac{1}{2}, \quad \rho(\mathbb{C}P_9^2) = \frac{4}{9}, \quad \rho(\mathbb{H}P_{15}^2) = \frac{2}{5} \quad \text{и} \quad \rho(\mathcal{R}_3) = \frac{2}{5}.$$

Последње три врсте табеле, које се односе на меру нелинеарности, број темена и релативну меру нелинеарности, добијамо након стандардног рачуна. \square

Природно се поставља питање максималне могуће вредности односа $\epsilon(K)/v(K)$. У раду [51] изучавана је интересантна веза инваријанти π, ρ и ϵ са упаривањима на хиперграфовима, на основу чега је дато неколико оцена. Познато је да ако је K флег комплекс (дефиниција 1.13), онда важи $\epsilon(K)/v(K) \leq 1/6$ [51, теорема 1.8]. Такође, познато је да ова оцена не важи за све комплексе, већ да постоје комплекси са односом $\epsilon(K)/v(K) = 4/21$ [51, глава 6]. У тренутку писања ове дисертације, питање максималне вредности односа $\epsilon(K)/v(K)$ је отворено, па представља један од могућих смерова даљег истраживања.

Глава 6

Примена метода „конфигурациони простор - тест пресликавање” на Кнастеров проблем

У овој глави примењујемо метод „конфигурациони простор - тест пресликавање” (из поглавља 1.5) на Кнастеров проблем. За разлику од примене овог метода у делу 5.1.2, где је коришћен нумерички индекс, у овој глави користимо кохомолошки Фадел-Хусеинијев индекс (описан у поглављу 1.6.1). Прецизније, помоћу овог индекса показујемо једно уопштење теореме Долда (теорема 1.24), које затим примењујемо у резултатима везаним за Кнастеров проблем. Сви докази у овој глави су базирани на оригиналном раду [49].

6.1 Уопштење Долдове теореме

Подсетимо се да Долдова теорема тврди да ако је X неки n -повезан G -простор, а Y слободан G -комплекс димензије највише n , онда не постоји G -еквиваријантно пресликавање из X у Y . Испоставља се да је услов n -повезаности веома јак и да отежава примену ове теореме. Воловиков [93] је показао уопштење које уместо повезаности користи тривијалност одређених кохомолошких група. Наиме, нека је група G облика коначног производа $G = \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$, за прост број p , а нека су X и Y G -простори без фиксних тачака (то су тачке чије су орбите једночлане). Нека за све $i \leq n$ важи $\tilde{H}^i(X; \mathbb{Z}_p) = 0$, и нека је Y коначно димензионалан комплекс који има кохомологију n -димензионалне сфере над \mathbb{Z}_p . Теорема Воловикова показује да тада не постоји G -еквиваријантно пресликавање $f : X \rightarrow Y$. Овде ћемо приказати слично уопштење теореме Долда са нешто једноставнијим доказом, према раду [49].

Теорема 6.1. *Нека је G коначна група и $n \in \mathbb{N}$. Нека је X један G -простор за који постоји комутативан прстен са јединицом \mathbb{K} , такав да за све $0 \leq k \leq n$ важи $\tilde{H}^k(X; \mathbb{K}) = 0$, и још $H^{n+1}(BG; \mathbb{K}) \neq 0$. Нека је Y ћелијски G -комплекс на коме група G слободно дејствује и за који важи $\dim Y \leq n$. Тада не постоји G -еквиваријантно пресликавање $f : X \rightarrow Y$.*

Доказ. Претпоставимо супротно, да постоји неко G -еквиваријантно пресликавање $f : X \rightarrow Y$. Посматрајмо Фадел-Хусеинијеве индексе $\text{Ind}_G(X)$ и $\text{Ind}_G(Y)$ са коефицијентима у прстену \mathbb{K} . Знамо да за њих важи $\text{Ind}_G(X) \supset \text{Ind}_G(Y)$ (својство монотоности, теорема 1.27). Наш циљ је да покажемо да важе следеће две релације:

$$\text{Ind}_G(X) = 0 \quad \text{и} \quad H^{n+1}(BG; \mathbb{K}) \subseteq \text{Ind}_G(Y), \quad (6.1.1)$$

на основу којих добијамо контрадикцију са монотоншћу индекса.

Знамо да је $\text{Ind}_G(X) = \ker p_X^*$, где $p_X : X_G \rightarrow BG$, а $p_X^* : H^*(BG; \mathbb{K}) \rightarrow H^*(X_G; \mathbb{K})$. Одредимо овај индекс у димензији $n + 1$, тј.

$$\text{Ind}_G^{n+1}(X) = \ker(p_X^* : H^{n+1}(BG; \mathbb{K}) \rightarrow H^{n+1}(X_G; \mathbb{K})).$$

Посматрајмо кохомолошки Лере-Серов спектрални низ $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ ([77], теорема 5.2.) Борелове фибрације $X \rightarrow X_G \xrightarrow{p_X} BG$. Знамо да овај спектрални низ конвергира ка $H^*(X_G; \mathbb{K})$ и да за његов други члан важи:

$$E_2^{p,q} \cong H^p(BG; \mathcal{H}^q(X; \mathbb{K})),$$

где $\mathcal{H}^q(X; \mathbb{K})$ означава локалне коефицијенте.

Одредимо прецизније E_2 -члан. На основу услова теореме знамо да је простор X путно повезан, па важи: $H^p(BG; \mathcal{H}^0(X; \mathbb{K})) = H^p(BG; H^0(X; \mathbb{K})) = H^p(BG; \mathbb{K})$, одакле за све p имамо $E_2^{p,0} = H^p(BG; \mathbb{K})$. Приметимо да изнад ове најниже врсте ($q = 0$) имамо n тривијалних врста. Заиста, за $1 \leq q \leq n$ важи $H^q(X; \mathbb{K}) = 0$, па имамо просте и тривијалне коефицијенте, одакле закључујемо да важи:

$$E_2^{p,q} = 0, \quad \text{за све } q \in \{1, \dots, n\} \text{ и све } p.$$

Такође, хомоморфизам p_X^* је једнак следећој композицији ([77], теорема 5.9.):

$$H^{n+1}(BG; \mathbb{K}) = E_2^{n+1,0} \rightarrow E_3^{n+1,0} \rightarrow \dots \rightarrow E_{n+1}^{n+1,0} \rightarrow E_{n+2}^{n+1,0} = E_\infty^{n+1,0} \subset H^{n+1}(X_G; \mathbb{K}).$$

Приметимо да су сви епиморфизми у овом дијаграму истовремено и изоморфизми, јер су сви диференцијали $d_r : E_r^{n+1-r, r-1} \rightarrow E_r^{n+1,0}$ тривијални. Дакле, p_X^* је мономорфизам у димензији $n + 1$, одакле следи $\text{Ind}_G^{n+1}(X) = 0$, чиме је прва релација из (6.1.1) доказана.

Преостаје да испитамо $\text{Ind}_G(Y)$. Пошто група G слободно дејствује на Y , важи $\text{Ind}_G(Y) = \ker p_Y^*$, где $p_Y^* : H^*(BG; \mathbb{K}) \rightarrow H^*(Y/G; \mathbb{K})$ (напомена 1.26). Међутим, како је димензија комплекса Y највише n , за све $k > n$ важи $H^k(Y/G; \mathbb{K}) = 0$. Закључујемо да за све $k \geq n + 1$ важи $H^k(BG; \mathbb{K}) \subseteq \text{Ind}_G(Y)$, чиме је и друга релација из (6.1.1) доказана. Коначно, на основу (6.1.1), нетривијалности групе $H^{n+1}(BG; \mathbb{K})$ и монотоности индекса, добијамо контрадикцију. Тиме је доказ завршен. \square

6.2 Кнастеров проблем

Посматрајмо коначан скуп тачака $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ на сфери S^{n-1} , $n \in \mathbb{N}$, и уочимо неко $m \in \mathbb{N}$. Поставља се следеће питање: да ли за произвољно непрекидно пресликавање $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ постоји ротација $\rho \in SO(n)$, таква да важи

$$f(\rho(A_1)) = f(\rho(A_2)) = \dots = f(\rho(A_k))?$$

Уколико је одговор потврдан за свако пресликавање f , конфигурација \mathcal{A} се назива *решењем Кнастеровог проблема за n и m* . Овим проблемом се првобитно бавио Кнастер у раду [62]. Он је посматрао случај $k = n - m + 1$ и поставио питање да ли је свака конфигурација од $n - m + 1$ тачака на сфери S^{n-1} решење одговарајућег типа. Вредност $k = n - m + 1$ се појављује јер је познато да ако је конфигурација \mathcal{A} решење Кнастеровог проблема, онда \mathcal{A} лежи у некој $(n - m)$ -димензионалној равни, па или су тачке конфигурације \mathcal{A} линеарно зависне, или их има највише $n - m + 1$. Показано је да је генерални одговор на Кнастерово питање негативан (контрапримери се могу наћи у радовима [71], [4] и [27]). Међутим, проблем одређивања свих Кнастерових решења, за дате k , n и m , је веома интересантан и отворен у већини случајева.

Показује се да постоје многе конфигурације са лепом геометријском структуром које су решења Кнастеровог проблема. Најпознатији случај је дат Борсук-Уламовом теоремом: за сваку непрекидну функцију $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, постоји неко $x \in S^{n-1}$ такво да важи $f(x) = f(-x)$. Другим речима, $\mathcal{A} = \{e_1, -e_1\} \subset S^{n-1}$ је решење Кнастеровог проблема за n и $m = n - 1$. Овај случај је уопштио Хопф [47] показавши да исто важи за произвољан двоелементни подскуп сфере S^{n-1} и $m = n - 1$. Највише решења Кнастеровог проблема је одређено за $m = 1$: када је \mathcal{A} произвољан скуп од три елемента на сфери S^2 [35]; $\mathcal{A} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset S^{n-1}$ скуп темена стандардне ортонормиране базе [101]; $\mathcal{A} \subset S^{n-1}$ скуп темена правилног $(n - 1)$ -симплекса [17], итд. За $m \geq 2$ је познато много мање решења. Једно од њих је Јангов резултат који даје позитиван одговор на Кнастерово питање када је $m = n - 2$, а \mathcal{A} је скуп темена једнакостраничног троугла на великом кругу сфере S^{n-1} (велики круг је произвољан круг на сфери коме је центар у координатном почетку). Овај резултат је првобитно показан у раду [102], а други доказ је дат у [96] коришћењем теореме о поређењу спектралних низова. Коришћењем теореме 6.1 добија се следећи краћи доказ Јанговог резултата.

Теорема 6.2. *Нека су $A_1, A_2, A_3 \in S^{n-1}$ темена једнакостраничног троугла на великом кругу сфере, за $n > 2$. Тада за свако непрекидно пресликавање $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ постоји ротација $\rho \in SO(n)$ за коју важи $f(\rho(A_1)) = f(\rho(A_2)) = f(\rho(A_3))$.*

Доказ. Посматрајмо конфигурациони простор који репрезентује све тројке тачака (X_1, X_2, X_3) које су темена неког једнакостраничног троугла на неком великом кругу сфере. За овај простор се може узети Штифелова многострукост $V_2(\mathbb{R}^n)$. Заиста, пар (X_1, X_2) из тројке (X_1, X_2, X_3) је произвољан пар јединичних вектора који образују угао $\frac{2\pi}{3}$, јер је трећа тачка X_3 једнозначно одређена првим двома. Сваком пару (X_1, X_2) једнозначно можемо придружити пар ортонормираних вектора (X_1, X'_2) , где је X'_2 вектор у мањем углу који образују X_1 и X_2 . Дакле, елементи Штифелове многострукости заиста једнозначно одговарају посматраним тројкама тачака.

Претпоставимо супротно, да постоји непрекидно пресликавање $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ за које тражена ротација ρ не постоји. Пошто се било који једнакостранични троугао на великом кругу може добити неком ротацијом скупа $\{A_1, A_2, A_3\}$, то значи да не постоји једнакостранични троугао на великом кругу чија темена имају исту слику при f . Дефинишимо пресликавање

$$F : V_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^{n-2},$$

$$F(X_1, X_2, X_3) := (f(X_1), f(X_2), f(X_3)).$$

Према претпоставци, слика $F(V_2(\mathbb{R}^n))$ има празан пресек са дијагоном Δ у простору $\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^{n-2}$ ($\Delta = \{(x, x, x) \in (\mathbb{R}^{n-2})^3 \mid x \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, $\dim \Delta = n - 2$). Тако да можемо узети мањи кодомен и посматрати F као пресликавање

$$F : V_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-2})^3 \setminus \Delta.$$

Приметимо да и на домену и кодомену постоје природна дејства групе \mathbb{Z}_3 . Група \mathbb{Z}_3 циклично пермутује векторе из $V_2(\mathbb{R}^n)$: при нашој идентификацији конфигурационог простора са $V_2(\mathbb{R}^n)$, генератор групе \mathbb{Z}_3 дејствује са $g_{\mathbb{Z}_3}(X_1, X_2, X_3) := (X_2, X_3, X_1)$. Такође, \mathbb{Z}_3 циклично пермутује векторе димензије $(n - 2)$ из простора $(\mathbb{R}^{n-2})^3 \setminus \Delta$ (видети (1.4.1)). Једноставно се примећује да су оба ова дејства слободна, а F је \mathbb{Z}_3 -еквиваријантно пресликавање.

Да бисмо применили Долдову теорему морамо кодомен редуковати до Ђелијског комплекса на \mathbb{Z}_3 -еквиваријантан начин. Уочимо ортогоналну пројекцију на ортогонални комплемент дијагонале, $p : (\mathbb{R}^{n-2})^3 \setminus \Delta \rightarrow \Delta^\perp \setminus \{0\}$, па радијалну пројекцију r из $\Delta^\perp \setminus \{0\}$ на јединичну сферу у простору Δ^\perp , која је димензије $2n - 5$. Простори $\Delta^\perp \setminus \{0\}$ и S^{2n-5} имају \mathbb{Z}_3 -дејство наслеђено из $(\mathbb{R}^{n-2})^3 \setminus \Delta$, а једноставно се примећује да су p и r ретракције које су \mathbb{Z}_3 -еквиваријантне. Дакле, имамо следећу композицију која је \mathbb{Z}_3 -еквиваријантна, а сва одговарајућа дејства су слободна:

$$\phi = r \circ p \circ F : V_2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathbb{Z}_3} S^{2n-5}.$$

Преостаје да покажемо да овакво еквиваријантно пресликавање не постоји. Домен $V_2(\mathbb{R}^n)$ је $(n - 3)$ -повезан ([45], 4.53), а кодомен је веће димензије, па не можемо применити стандардну Долдову теорему (теорема 1.24). Међутим, можемо применити општију теорему 6.1, за коју су нам потребне кохомолошке групе простора $V_2(\mathbb{R}^n)$ са коефицијентима у неком прстену \mathbb{K} . Ако је n непаран број, $H^k(V_2(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ за $k \in \{0, 2n - 3\}$, $H^{n-1}(V_2(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$, док су остале кохомолошке групе тривијалне, а за n парно важи $H^k(V_2(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z}) \cong H^k(S^{n-1} \times S^{n-2}; \mathbb{Z})$ ([18], Став 10.1). Због тога имамо наредна два случаја.

- (1) Нека је n непаран број. На основу теореме о универзалним коефицијентима одређујемо кохомолошке групе са \mathbb{Z}_3 -коефицијентима: $H^k(V_2(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3$ за $k \in \{0, 2n - 3\}$, док су одговарајуће групе у осталим димензијама тривијалне. Пошто за све $k \in \mathbb{N}$ важи $H^k(B\mathbb{Z}_3; \mathbb{Z}_3) \neq 0$ (теорема 1.28), можемо применити теорему 6.1 на ϕ , за $G = \mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$. Дакле, не постоји еквиваријантно пресликавање $V_2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathbb{Z}_3} S^{2n-5}$, чиме добијамо контрадикцију и теорема је доказана у овом случају.

(2) Нека је n паран број. Пошто су кохомолошке групе Штифелове многострукости компликованије, у овом случају ћемо доказ извести свођењем на претходни случај. Посматрајмо функцију $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, $g := Sf$ - суспензија пресликавања f (слика $f(S^{n-1})$ је компактан потпростор од \mathbb{R}^{n-1} , па је кодомен ове суспензије управо суспензија тог потпростора из \mathbb{R}^{n-1}). Претпоставимо да за пресликавање g постоје три тачке на S^n које су темена једнакостраничног троугла на великом кругу, а које имају исту слику при g . На основу дефиниције суспензије пресликавања, те три тачке морају бити на истом „нивоу” $S^{n-1} \times \{t\}$ у S^n . Штавише, да би биле на великом кругу сфере S^n , морају бити на средишњем нивоу $S^{n-1} \times \{0\}$. Тиме добијамо темена великог једнакостраничног троугла на сфери S^{n-1} која имају исту слику при f , што није могуће по претпоставци. Дакле, описане три тачке не могу постојати, па функција g , на исти начин као f у анализи на почетку доказа, индукује еквиваријантно пресликавање $G : V_2(\mathbb{R}^{n+1}) \xrightarrow{\mathbb{Z}_3} (\mathbb{R}^{n-1})^3 \setminus \Delta$. Пошто је $n+1$ непаран број, добијамо контрадикцију на основу првог случаја. Тиме је доказ завршен. \square

Уместо троуглова, можемо посматрати и друге правилне полигоне на великом кругу, али да бисмо имали одговарајуће слободно дејство, посматрамо само оне полигоне који имају прост број темена. Следећа теорема је показана за $m=1$ у раду Макеева [72]. Овде доказујемо уопштење за $m \in \mathbb{N}$ у случају када је n непарно.

Теорема 6.3. *Нека је p непаран прост број, $n, m \in \mathbb{N}$, n непаран број, и нека важи $(p-1) \cdot m < 2n-2$. Нека су A_1, A_2, \dots, A_p темена правилног полигона на неком великом кругу сфере S^{n-1} . Тада за свако непрекидно пресликавање $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ постоји ротација $\rho \in SO(n)$ таква да важи $f(\rho(A_1)) = f(\rho(A_2)) = \dots = f(\rho(A_p))$.*

Доказ. Доказ је у потпуности аналоган доказу теореме 6.2, па ћемо напоменути само неколико детаља. Конфигурациони простор је поново Штифелова многострукост $V_2(\mathbb{R}^n)$, јер је сваки правилни p -полигон на великом кругу једнозначно одређен са прва два темена. Такође, овде користимо дејство групе \mathbb{Z}_p . Дејство генератора групе на елементу $(X_1, X_2) \in V_2(\mathbb{R}^n)$ (који је идентификован са p -торком вектора (X_1, X_2, \dots, X_p) који чине полигон) је дато са:

$$g_{\mathbb{Z}_p}(X_1, X_2) \equiv g_{\mathbb{Z}_p}(X_1, X_2, \dots, X_p) := (X_2, X_3, \dots, X_1) \equiv (X_2, X_3) \in V_2(\mathbb{R}^n).$$

Претпостављајући супротно и полазећи од пресликавања $F : V_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow (\mathbb{R}^m)^p$ задатог са $F(X_1, \dots, X_p) = (f(X_1), \dots, f(X_p))$, добијамо низ \mathbb{Z}_p -еквиваријантних пресликавања:

$$V_2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\mathbb{Z}_p} (\mathbb{R}^m)^p \setminus \Delta \xrightarrow{\mathbb{Z}_p} \Delta^\perp \setminus \{0\} \xrightarrow{\mathbb{Z}_p} S^{m(p-1)-1}.$$

Пошто је n непарно, за $k \in \{0, 2n-3\}$ важи $H^k(V_2(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$, док су све остале кохомолошке групе тривијалне. Такође, група $H^k(B\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p)$ није тривијална ни за једно k (теорема 1.28). Како важи $2n-4 \geq m(p-1)-1$, на основу теореме 6.1 (за $G = \mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$), добијамо контрадикцију. \square

Посматрајмо сада мало другачију конфигурацију тачака на сфери, која формира скуп темена правилног симплекса. Применом стандардне Долдове теореме, Макеев је показао следећи случај Кнастеровог проблема у раду [71].

Теорема 6.4. [71] *Нека су дати непаран прост број p и природан број n , такви да важи $2p < n + 1$. Нека су $A_1, A_2, \dots, A_p \in S^{n-1}$ врхови ортонормираног скупа вектора (дакле темена правилног $(p-1)$ -симплекса). Тада за свако непрекидно пресликавање $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ постоји ротација $\rho \in SO(n)$ таква да важи $f(\rho(A_1)) = \dots = f(\rho(A_p))$.*

Помоћу теореме 6.1 за парно n можемо да покажемо овај резултат под слабијим условом: $3p \leq 2n + 2$ (за непарно n , добија се иста оцена као код Макеева). Такође, резултат важи и за општију класу правилних $(p-1)$ -симплекса.

Теорема 6.5. *Нека је p непаран прост број, $n \in \mathbb{N}$ паран број, и нека важи $3p \leq 2n + 2$. Нека су $A_1, A_2, \dots, A_p \in S^{n-1}$ темена правилног $(p-1)$ -симплекса, чији центар није у центру сфере. Тада за свако непрекидно пресликавање $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ постоји ротација $\rho \in SO(n)$ таква да важи $f(\rho(A_1)) = f(\rho(A_2)) = \dots = f(\rho(A_p))$.*

Доказ. Доказ је аналоган доказу теореме 6.2, само са другачијим просторима и другим дејством групе. Претпоставимо да за неко пресликавање $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ тражена ротација не постоји. Конфигурациони простор свих p -торки (X_1, \dots, X_p) које формирају $(p-1)$ -симплекс изоморфан симплексу (A_1, \dots, A_p) , јесте Штифелова многострукост $V_p(\mathbb{R}^n)$. Заиста, ако су A_1, \dots, A_p врхови ортонормираног скупа вектора, по дефиницији имамо $V_p(\mathbb{R}^n)$. Иначе, сваком посматраном симплексу са теменима (X_1, \dots, X_p) можемо придружити један симплекс (X'_1, \dots, X'_p) , чија темена чине врхове ортонормираног скупа вектора, а чији је центар колинеаран са координатним почетком и центром симплекса (X_1, \dots, X_p) , тако да то придруживање буде једнозначно. Пошто за сваки симплекс (X_1, \dots, X_p) постоји ротација $\rho \in SO(n)$ таква да се скуп $\{X_1, \dots, X_p\}$ добија као $\rho(\{A_1, \dots, A_p\})$, према претпоставци закључујемо да тачке X_1, \dots, X_p никада немају све исту слику при f . Зато је добро дефинисано пресликавање

$$F : V_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^p \setminus \Delta, \quad F(X_1, \dots, X_p) := (f(X_1), \dots, f(X_p)).$$

Као у теорему 6.2, даље имамо ортогоналну и радијалну пројекцију:

$$V_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^p \setminus \Delta \rightarrow \Delta^\perp \setminus \{0\} \rightarrow S^{p-2}.$$

Група \mathbb{Z}_p дејствује на свим овим просторима цикличним померањем координата, сва дејства су слободна и сва пресликавања \mathbb{Z}_p -еквиваријантна. Остаје да покажемо да не постоји \mathbb{Z}_p -еквиваријантно пресликавање $V_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow S^{p-2}$. Макеев је добио контрадикцију на основу Долдове теореме 1.24 за $2p < n + 1$. За резултат под слабијим условом који смо ми поставили, посматрајмо $H^*(V_p(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z}_p)$. Ова кохомологија је изоморфна кохомолошкој алгебри (са \mathbb{Z}_p -коэффицијентима) производа

$$S^{2\bar{n}-3} \times S^{2\bar{n}-7} \times \dots \times S^{2\bar{q}+1},$$

додатно помноженог са S^{n-1} за $2 \mid n$, и додатно помноженог са S^q за $2 \mid q$,

где је $q = n - p$, \bar{q} је најмањи непарни број који је већи или једнак q , а \bar{n} је највећи непаран број који је мањи или једнак n [18, став 10.2].

Према претпоставци, $2 \mid n$, $2 \nmid p$ и $2 \nmid q = \bar{q}$, па важи $H^*(V_p(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z}_p) \cong H^*(X; \mathbb{Z}_p)$, где је $X = S^{2n-5} \times S^{2n-9} \times \dots \times S^{2(n-p)+1} \times S^{n-1}$. Тада имамо $\tilde{H}^k(X; \mathbb{Z}_p) = 0$, за све $k \leq \min\{2(n-p), n-2\}$. Из услова $3p \leq 2n+2$ закључујемо да важи

$$\min\{2(n-p), n-2\} \geq p-2 = \dim S^{p-2}.$$

Коначно, на основу теореме 6.1 за $G = R = \mathbb{Z}_p$, закључујемо да не постоји \mathbb{Z}_p -еквиваријантно пресликавање $V_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow S^{p-2}$. То је у контрадикцији са последицом почетне претпоставке, чиме је теорема доказана. \square

Наводимо без доказа потпуно аналоган резултат када је кодомен \mathbb{R}^m , $m \geq 2$.

Теорема 6.6. *Нека је p непаран прост број, $n, m \in \mathbb{N}$, n паран број и $m \geq 2$, и нека важи $(p-1)m+1 \leq n$. Претпоставимо да су $A_1, A_2, \dots, A_p \in S^{n-1}$ темена правилног симплекса чији центар није у центру сфере. Тада за свако непрекидно пресликавање $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ постоји ротација $\rho \in SO(n)$ таква да важи $f(\rho(A_1)) = \dots = f(\rho(A_p))$.*

Напоменимо на крају да техника која је примењивана у претходним доказима, уз коришћење поменуте теореме Воловикова, омогућава да добијемо аналогне резултате у случају када конфигурација тачака на сфери чини скуп темена правилног $(p^k - 1)$ -симплекса, за прост број p . Добијене резултате сумира следећа теорема у раду [49].

Теорема 6.7. *Нека је p прост број, $n, k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Нека су $A_1, A_2, \dots, A_{p^k} \in S^{n-1}$ темена правилног $(p^k - 1)$ -симплекса, чији центар није у координатном почетку. Ако p, k и n задовољавају неки од следећих услова:*

- p је непаран, n је паран и важи $2n+2 \geq 3p^k$;
- p је непаран, n је непаран и важи $n+1 \geq 2p^k$;
- $p = 2$, n је паран и важи $n+1 \geq 2^{k+1}$;
- $p = 2$, n је непаран и важи $2n+2 \geq 3 \cdot 2^k$,

онда за свако непрекидно пресликавање $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ постоји ротација $\rho \in SO(n)$ таква да важи $f(\rho(A_1)) = f(\rho(A_2)) = \dots = f(\rho(A_{p^k}))$.

У случају ове теореме природно је да конфигурациони простор буде Штифелова многострукост $V_{p^k}(\mathbb{R}^n)$. На простору $V_{p^k}(\mathbb{R}^n)$ дејствује симетрична група Σ_{p^k} , па можемо посматрати дејство њене подгрупе $(\mathbb{Z}_p)^k$. Проблем се своди на питање постојања $(\mathbb{Z}_p)^k$ -еквиваријантног пресликавања

$$V_{p^k}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^{p^k} \setminus \Delta \rightarrow \Delta^\perp \setminus \{0\} \rightarrow S^{(p^k-2)},$$

Доказ изостављамо уз напомену да овде користимо поменуту теорему Воловикова [93] уместо теореме 6.1. Напоменимо да разлике у условима за p, k и n зависе од парности због природе кохомологије $H^*(V_{p^k}(\mathbb{R}^n); \mathbb{Z}_p)$ (видети [18], 10.2 и 10.3).

Литература

- [1] M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from the Book*, Springer-Verlag, Berlin, 2018.
- [2] N. Alon, *Splitting necklaces*, *Advances in Math.* **63** (1987), 247–253.
- [3] C.A. Athanasiadis, *Decompositions and connectivity of matching and chessboard complexes*, *Discrete Comput. Geom.* **31**(3) (2004), 395–403.
- [4] I.K. Babenko, S.A. Bogatyi, *On mapping a sphere into Euclidean space*, *Mat. Zametki* **46**(3) (1989), 3–8.
- [5] E. Babson, A. Björner, S. Linusson, J. Shareshian, V. Welker, *Complexes of not i -connected graphs*, *Topology* **38** (1999), 271–299.
- [6] E. Babson, D.N. Kozlov, *Proof of the Lovász conjecture*, *Ann. Math.* **165**(3) (2007), 965–1007.
- [7] B. Bagchi, B. Datta, *On 9-vertex complex projective plane*, *Geom. Dedicata* **50** (1994), 1–13.
- [8] I. Bárány, P. Soberón, *Tverberg’s theorem is 50 years old: A survey*, *Bulletin of the American Mathematical Society* **55**(4) (2018), 459–492.
- [9] I. Bárány, S.B. Shlosman, A. Szücs, *On a topological generalization of a theorem of Tverberg*, *J. London Math. Soc.* **23** (1981), 158–164.
- [10] J.A. Barmak, *Star clusters in independence complexes of graphs*, *Advances in Mathematics* **241** (2013), 33–57.
- [11] M. Bayer, B. Goeckner, M. Jelić Milutinović, *Manifold Matching Complexes*, *Matematika* **66** (2020), 973–1002.
- [12] A. Björner, *Topological methods*. In R. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, *Handbook of Combinatorics*, volume II, chapter 34 (1819–1872) North-Holland, Amsterdam, 1995.
- [13] A. Björner, L. Lovász, S. T. Vrećica, R. T. Živaljević, *Chessboard complexes and matching complexes*, *J. London Math. Soc.* (2) **49**(1) (1994), 25–39.
- [14] A. Björner, M. Wachs, A. Welker, *Poset fiber theorems*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2005), 1877–1899.
- [15] P. Blagojević, *Course "Topological Methods in Geometric Combinatorics" - Part II*, <http://homepages.warwick.ac.uk/~maskas/courses/blagojevic2.pdf>

- [16] P. V. M. Blagojević, F. Frick, G. M. Ziegler, *Tverberg plus constraints*, Bull. Lond. Math. Soc. **46** (2014), 953–967.
- [17] S. A. Bogatyĭ, G. N. Khimshiashvili, *A generalization of the Borsuk-Ulam theorem and a problem of Knaster*, Soobshch. Akad. Nauk. Gruzinskoj SSR **123** (1986), 477–480.
- [18] A. Borel, *Sur La Cohomologie des Espaces Fibres Principaux et des Espaces Homogenes de Groupes de Lie Compacts*, The Annals of Mathematics **57** (1953), 115–207.
- [19] S. Bouc, *Homologie de certains ensembles de 2-sous-groupes des groupes symétriques*, Journal of Algebra **150**(1) (1992), 158–186.
- [20] M. Bousquet-Mélou, S. Linusson, E. Nevo, *On the independence complex of square grids*, J. Algebraic Combin. **27**(4) (2008), 423–450.
- [21] B. Braun, W. K. Hough, *Matching and independence complexes related to small grids*, Electron. J. Combin. **24**(4) (2017), Paper 4.18, 20.
- [22] U. Brehm, W. Kühnel, *15-vertex triangulations of an 8-manifold*, Math. Ann. **294**(1) (1992), 167–193.
- [23] K. S. Brown, *Euler characteristics of discrete groups and G-spaces*, Invent. Math. **27** (1974), 229–264.
- [24] K. S. Brown, *Euler characteristics of groups: the p-fractional part*, Invent. Math. **29**(1) (1975), 1–5.
- [25] B. Bukh, *Topological methods in combinatorics: on wedges and joins*, Lecture notes, http://www.borisbukh.org/TopCombLent12/notes_wedgejoin.pdf.
- [26] J. W. Cannon, *Shrinking cell-like decompositions of manifolds. Codimension three*, Ann. of Math. (2), **110**(1) (1979), 83–112.
- [27] W. Chen, *Counterexamples to Knaster’s conjecture*, Topology **37**(2) (1998), 401–405.
- [28] A. Dold, *Simple proofs of some Borsuk–Ulam results*, Contemp. Math. **19** (1983), 65–69.
- [29] J. Edmonds, D. R. Fulkerson, *Bottleneck Extrema*, J. Combin. Theory **8** (1970), 299–306.
- [30] J. Eells, N. H. Kuiper, *Manifolds which are like projective plane*, Publ. Math. I.H.E.S. **14** (1962), 181–222.
- [31] R. Ehrenborg, G. Heteyi, *The topology of the independence complex*, European J. Combin. **27** (2006), 906–923.
- [32] A. Engström, *Complexes of directed trees and independence complexes*, Discrete Math. **309**(10) (2009), 3299–3309.
- [33] A. Engström, *Independence complexes of claw-free graphs*, European J. Combin. **29**(1) (2008), 234–241.
- [34] E. Fadell, S. Husseini, *An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems*, Ergodic Th. and Dynam. Sys. **8*** (1988), 73–85.

- [35] E. E. Floyd, *Real valued mappings on spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 957–959.
- [36] R. Forman, *Morse theory for cell complexes*, Adv. Math. **134**(1) (1998), 90–145.
- [37] R. Forman, *A user’s guide to discrete Morse theory*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, **48** (2002), Art. B48c, 35 pp.
- [38] F. Frick, *Counterexamples to the topological Tverberg conjecture*, Oberwolfach Reports **12** (2015), 318–321.
- [39] P. F. Garst, *Cohen-Macaulay Complexes and group actions*, Thesis (Ph.D.), The University of Wisconsin - Madison, ProQuest LLC, Ann Arbor, 1979.
- [40] J. Friedman, P. Hanlon, *On the Betti numbers of chessboard complexes*, Journal of Algebraic Combinatorics **8**(2) (1998), 193–203.
- [41] P. Galashin, G. Panina, *Manifolds associated to simple games*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications **25**(12) (2016), 1642003.
- [42] D. Gorodkov, *A 15-vertex triangulation of the quaternionic projective plane*, Discrete Comput. Geom. **62** (2019), 348–373.
- [43] M. Gromov, *Singularities, expanders and topology of maps. Part 2: From combinatorics to topology via algebraic isoperimetry*, Geom. Funct. Anal. **20** (2010), 416–526.
- [44] B. Grünbaum, *Convex polytopes*, volume **221** of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, second edition, 2003.
- [45] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [46] G. E. Hite, T. P. Živković, D. J. Klein, *Conjugated circuit theory for graphite*, Theoretica chimica acta **74**(5) (1988), 349–361.
- [47] H. Hopf, *Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze*, Portugal. Math. **4** (1944), 129–139.
- [48] M. Jelić, *Methods of Equivariant Topology in Two Nice Discrete Geometry Problems*, The Graduate Journal of Mathematics **1**(1) (2016), 18–27.
- [49] M. Jelić, *On Knaster’s problem*, Publications de l’Institut Mathématique **99**(113) (2016), 43–49.
- [50] M. Jelić Milutinović, H. Jenne, A. McDonough, J. Vega, *Matching complexes of trees and applications of the matching tree algorithm*, arXiv:1905.10560 [math.CO], 2019. (на рецензији)
- [51] M. Jelić Milutinović, D. Jojić, M. Timotijević, S. T. Vrećica, R. T. Živaljević, *Combinatorics of unavoidable complexes*, European Journal of Combinatorics **83**(2020), 103004.
- [52] M. Jelić, D. Jojić, M. Timotijević, S. T. Vrećica, R. T. Živaljević, *Combinatorics of unavoidable complexes*, arXiv:1612.09487v1 [math.CO], 2017. (прва верзија претходног рада)

- [53] D. Jojić, *On the h -vectors of chessboard complexes*, Bull. Int. Math. Virtual Inst. **8**(3) (2018), 413–421.
- [54] D. Jojić, W. Marzantowicz, S. T. Vrećica, R. T. Živaljević, *Unavoidable complexes, via an elementary equivariant index theory*, J. Fixed Point Theory Appl. **22**(31) (2020).
- [55] J. Jonsson, *Matching Complexes on Grids*, необјављени чланак доступан на <http://www.math.kth.se/~jakobj/doc/thesis/grid.pdf>.
- [56] J. Jonsson, *More torsion in the homology of the matching complex*, Experiment. Math. **19**(3) (2010), 363–383.
- [57] J. Jonsson, *Simplicial Complexes of Graphs*, Doctoral Dissertation, KTH Stockholm, 2005.
- [58] J. Jonsson, *Simplicial complexes of graphs*, volume **1928** of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [59] M. Juhnke-Kubitzke, L. Venturello, *Balanced shellings and moves on balanced manifolds*, Advances in Mathematics **379** (2021), 107571.
- [60] S. Klee, I. Novik, *Face enumeration on simplicial complexes*, Recent trends in combinatorics (IMA Volumes in Mathematics and its Applications) **159** (2016), 653–686.
- [61] D. J. Klein, G. E. Hite, W. A. Seitz, T. G. Schmalz, *Dimer coverings and Kekulé structures on honeycomb lattice strips*, Theoretica chimica acta **69**(5-6) (1986), 409–423.
- [62] B. Knaster, *Problem 4*, Colloq. Math. **30**(1) (1947), 30–31.
- [63] D. Kozlov, *Combinatorial algebraic topology*, volume **21** of *Algorithms and Computation in Mathematics*, Springer, Berlin, 2008.
- [64] D. Kozlov, *Complexes of directed trees*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **88**(1) (1999), 112–122.
- [65] G. Kuperberg, *Symmetries of plane partitions and the permanent-determinant method*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **68**(1) (1994), 115–151.
- [66] W. Kühnel, T. F. Banchoff, *The 9-vertex complex projective plane*, Math. Intell. **5**(3) (1983), 11–22.
- [67] K. W. Kwun, F. Raymond, *Manifolds which are joins*, Trans. Amer. Math. Soc. **111** (1964), 108–120.
- [68] M. de Longueville, *Notes on the topological Tverberg theorem*, Discrete Math. **241** (2001), 207–233. (Erratum: Discrete Math. **247** (2002), 271–297.)
- [69] L. Lovász, *Kneser’s conjecture, chromatic number and homotopy*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **25** (1978), 319–324.
- [70] F. H. Lutz, *Triangulated manifolds with few vertices: Combinatorial manifolds*, arXiv: math/0506372 [math.CO], 2005.

-
- [71] V. V. Makeev, *On some properties of continuous mappings of spheres and problems of combinatorial geometry*, Geometrical questions of the theory of functions and set theory, Kalinin (1986), 75–85.
- [72] V. V. Makeev, *The Knaster problem and almost spherical sections*, Mat. Sbornik **180**(3) (1989), 425–431.
- [73] M. Marietti, D. Testa, *A uniform approach to complexes arising from forests*, Electron. J. Combin. **15**(1) (2008), Research Paper 101, 18.
- [74] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.
- [75] T. Matsushita, *Matching complexes of polygonal line tilings*, arXiv:1910.00186 [math.CO], 2019.
- [76] T. Matsushita, *Matching complexes of small grids*, Electron. J. Combin. **26**(3) (2019), Paper 3.1, 8.
- [77] J. McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, Camb. Univer. Press, Cambridge, 2001.
- [78] S. A. Melikhov, *Combinatorics of Embeddings*, arXiv:1103.5457v2 [math.GT], 2011.
- [79] J. von Neumann, O. Morgenstern., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944.
- [80] M. Özaydin, *Equivariant maps for the symmetric group*, препринт, 17 страна, 1987.
- [81] D. Quillen, *Homotopy properties of the poset of non-trivial p -subgroups of a group*, Advances in Math. **28** (1978), 101–128.
- [82] B. Peleg, P. Sudhölter, *Introduction to the Theory of Cooperative Games*, Springer Science & Business Media, 2007.
- [83] K. G. Ramamurthy, *Coherent Structures and Simple Games*, Springer Netherlands, 1990.
- [84] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*, Springer, Berlin, 2003.
- [85] J. Shareshian, M. L. Wachs, *Torsion in the matching complex and chessboard complex*, Adv. Math. **212**(2) (2007), 525–570.
- [86] A. Singh, *Bounded degree complexes of forests*, Discrete Math. **343**(10) (2020), 112009.
- [87] R. P. Stanley, *Symmetries of plane partitions*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **43**(1) (1986), 103–113.
- [88] T. tom Dieck, *Transformation groups*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1987.
- [89] H. Tverberg, *A generalization of Radon's theorem*, J. London Math. Soc. **41**(1) (1966), 123–128.

- [90] V. A. Vassiliev, *Complexes of connected graphs*, The Gelfand Mathematical Seminars 1990–1992 (1993), 223–235.
- [91] V. A. Vassiliev, *Topology of two-connected graphs and homology of spaces of knots*, Differential and symplectic topology of knots and curves, 253–286, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 190, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [92] O. Ya. Viro, O. A. Ivanov, N. Yu. Netsvetaev, V. M. Kharlamov, *Elementary Topology Problem Textbook*, American Mathematical Society, 2008.
- [93] A. Yu. Volovikov, *On a topological generalization of the Tverberg theorem*, Mat. Zametki **59**(3) (1996), 454–456.
- [94] S. T. Vrećica, R. T. Živaljević, *Cycle-free chessboard complexes and symmetric homology of algebras*, European J. Combin. **30**(2) (2009), 542–554.
- [95] S. T. Vrećica, R. T. Živaljević, *New cases of the colored Tverberg theorem*, Jerusalem combinatorics '93, Contemp. Math. **178** (1994), 325–334.
- [96] S. T. Vrećica, R. T. Živaljević, *The ham sandwich theorem revisited*, Israel J. Math. **78** (1992), 21–32.
- [97] M. L. Wachs, *Topology of matching, chessboard, and general bounded degree graph complexes*, Dedicated to the memory of Gian-Carlo Rota, Algebra Universalis **49**(4) (2003), 345–385.
- [98] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Second Edition, University of Illinois, Urbana-Champaign, 2001.
- [99] G. W. Whitehead, *Homotopy groups of joins and unions*, Trans. Amer. Math. Soc. **83** (1956), 55–69.
- [100] R. Woodroffe, *Vertex decomposable graphs and obstructions to shellability*, Proc. Amer. Math. Soc. **137**(10) (2009), 3235–3246.
- [101] H. Yamabe, Z. Yujobo, *On the continuous function defined on a sphere*, Osaka Math. **2** (1950), 19–22.
- [102] C. T. Yang, *On maps from spheres to euclidean spaces*, Amer. J. Math. **79**(4) (1957), 725–732.
- [103] G. M. Ziegler, *Shellability of chessboard complexes*, Israel J. Math. **87**(1-3) (1994), 97–110.
- [104] R. T. Živaljević, *User's guide to equivariant methods in combinatorics*, Publications de l'Institut Mathématique **59**(73) (1996), 114–130.
- [105] R. T. Živaljević, *User's guide to equivariant methods in combinatorics II*, Publications de l'Institut Mathématique **64**(78) (1998), 107–132.

- [106] R. T. Živaljević, S. T. Vrećica, *The colored Tverberg's problem and complexes of injective functions*, J. Combin. Theory Ser. A **61**(2) (1992), 309–318.
- [107] R. T. Živaljević, *Topological methods*, In J.E. Goodman and J. O'Rourke, CRC Handbook on Discrete and Computational Geometry (2nd edition), chapter 14. CRC Press, Boca Raton FL, 2004.

Биографија аутора

Марија Јелић Милутиновић је рођена 1.7.1989. године у Београду. Математичку гимназију у Београду је завршила као *Бак генерације* 2008. године. Математички факултет у Београду, смер Теоријска математика и примене, завршила је 2012. године са просеком 10,00 и признањима *Студент генерације Математичког факултета* и *Најбољи студент Универзитета у Београду*. Мастер студије на Математичком факултету завршила је 2013. године са просеком 10,00, одбраном мастер рада *Еквиваријантна теорија индекса* (ментор проф. др Сениша Врећница), након чега је уписала докторске студије на Катедри за топологију. Све испите на докторским студијама положила је са оценом 10.

Током школовања учествовала је на многим домаћим и међународним математичким такмичењима. На домаћим такмичењима освојила је бројна признања, од чега 11 првих награда на републичким и савезним такмичењима/турнирима. На међународним такмичењима освојила је 11 награда, од чега су најзначајније три медаље на Међународним Математичким Олимпијадама ИМО (*бронзана ИМО 2006, бронзана ИМО 2007, сребрна ИМО 2008*), као и *златна медаља* на такмичењу 1st Romanian Master of Mathematics. Након студија, на више међународних такмичења била је један од вођа тима Србије или координатор.

Од 2012. године запослена је на Математичком факултету у Београду, најпре као сарадник у настави, а затим као асистент, уз породичко одсуство 2018/19. године. Од 2012. до 2014. године предавала је менторском одељењу у Математичкој гимназији. Током јесењег семестра 2016. године била је научни сарадник на институту ICERM (Institute for Computational and Experimental Research in Mathematics) у Америци. Заинтересована је за области *комбинаторне топологије, дискретне геометрије* и (*примењене*) *алгебарске топологије*. Објавила је 6 радова, а још 2 рада су тренутно на рецензији. Учествовала је на бројним научним скуповима у иностранству.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Марија Јелић Милутиновић

број уписа 2013/2013

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Комбинаторна топологија и графовски комплекси

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 12. 2. 2021. године

Марија Јелић Милутиновић

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора Марија Јелић Милутиновић
Број уписа 2013/2013
Студијски програм Математика
Наслов рада Комбинаторна топологија и графовски комплекси
Ментор проф. др Сениша Врећница

Потписани Марија Јелић Милутиновић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 12. 2. 2021. године

Марија Јелић Милутиновић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Комбинаторна топологија и графовски комплекси

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 12. 2. 2021. године



1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.