

Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Milena Isajlović

Master rad

**Izučavanje elementarnih funkcija pomoću programskog
paketa GeoGebra**

Beograd,

Septembar 2012.

Mentor: **dr Miroslav Marić**
Matematički fakultet
u Beogradu

Članovi komisije: **dr Milan Božić**
Matematički fakultet
u Beogradu

dr Filip Marić
Matematički fakultet
u Beogradu

Sadržaj

Sadržaj	1
Index slika	3
Uvod	4
1. Računari u obrazovanju	6
1.1. Pojam nastave	6
1.2. Obrazovanje pomoću računara	6
1.2.1. Uloga multimedije u obrazovanju	7
1.2.2. Internet sadržaji i materijali za samoučenje	7
1.2.3. Uloga učenja na daljinu u obrazovanju	7
1.2.4. Uloga edukativnog softvera u obrazovanju	7
1.3. Problemi	8
1.4. Računar u nastavi matematike	8
2. Funkcije	10
2.1. Pojam funkcije	10
2.2. Funkcije u školskoj matematici nekad i sad	11
2.3. Načini zadavanja funkcije	11
2.3.1. Tablični način	11
2.3.2. Analitički način	12
2.3.3. Grafički način	12
2.4. Osnovne elementarne funkcije	13
3. GeoGebra	14
3.1. GeoGebra edukativni softver	14
3.2. Osnovne informacije o programu	15

3.3.	Korisnički interfejs	16
3.4.	Izrada interaktivne internet - stranice s apletom	18
4.	GeoGebra konstrukcije	20
4.1.	Alati za konstrukciju	20
4.1.1.	Alati za pomeranje	20
4.1.2.	Alati za tačke.....	21
4.1.3.	Alati za linije.....	21
4.1.4.	Alati za specijalne linije.....	22
4.1.5.	Alati za mnogouglove	23
4.1.6.	Alati za kružnice i lukove	24
4.1.7.	Alati za konusne preseke	25
4.1.8.	Alati za merenje	25
4.1.9.	Alati za transformacije.....	26
4.1.10.	Specijalni alati za objekte.....	27
4.1.11.	Alati za akcione objekte	28
4.1.12.	Opšti alati.....	28
4.2.	Primer: Ispitivanje grafika kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$ u zavisnosti od koeficijenata	29
4.3.	Primer: Konstrukcija grafika inverzne trigonometrijske funkcije-kotangensoide	33
5.	Internet prezentacija “Elementarne funkcije”	37
5.1.	Sadržaj interaktivne internet prezentacije	37
5.2.	Upravljanje nastavnim sadržajima	42
6.	Zaključak	47
Literatura		48

Index slika

Slika 1. GeoGebra korisnički interfejs.....	17
Slika 2. Izvoz apleta kao internet stranice.....	18
Slika 3. GeoGebra alatna traka	20
Slika 4. Aplet kvadratne funkcije.....	30
Slika 5. Aplet kvadratne funkcije – izrada grafika u zavisnosti od klizača	30
Slika 6. Aplet kvadratne funkcije - grafik.....	31
Slika 7. Aplet kvadratne funkcije – tablica vrednosti	32
Slika 8. Aplet kvadratne funkcije – interaktivni tekst.....	32
Slika 9. Aplet kotangensoide	33
Slika 10. Aplet kotangensoide – izrada pomoćnih objekata	34
Slika 11. Aplet kotangensoide – izrada interaktivnog dugmeta.....	35
Slika 12. Internet prezentacija Elementarne funkcije – početna strana.....	37
Slika 13. Internet prezentacija Elementarne funkcije – Galerija apleta	38
Slika 14. Internet prezentacija Elementarne funkcije – apleti polinoma.....	39
Slika 15. Internet prezentacija Elementarne funkcije – aplet trougla	39
Slika 16. Internet prezentacija Elementarne funkcije – GeoGebra	40
Slika 17. Internet prezentacija Elementarne funkcije – Linkovi	41
Slika 18. Internet prezentacija Elementarne funkcije – Kontakt.....	42
Slika 19. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz levog menija elementarnih funkcija.....	42
Slika 20. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz desnog menija trigonometrijskih funkcija.....	43
Slika 21. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz dela strane Polinomi.....	43
Slika 22. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz dela strane Racionalne funkcije	44
Slika 23. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz dela strane Eksponencijalna funkcija.....	44
Slika 24. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz dela strane Stepene funkcije.....	45
Slika 25. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz dela strane Logaritamska funkcija	45
Slika 26. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz dela strane Trigonometrijske funkcije.....	46
Slika 27. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz dela strane Inverzne trigonometrijske funkcije	46

Uvod

Osavremenjivanje nastavnog procesa je svakako jedan od preduslova za bolje obrazovanje. U našoj zemlji se u poslednje vreme sve više ističu nedostaci i potreba da se sprovedu promene na ovom polju. Međutim, sve manje ili veće promene u obrazovanju obično su nailazile na sumnju i strah od ishoda. Jednostavno, potreba za inovacijama je oduvek bila neshvaćena.

Ono što je jasno je da su promene u školi neophodne, jer se od nje očekuje da prati društvene promene. Dakle, unapređivanjem nastave, korišćenjem informaciono-komunikacionih tehnologija, povećava se kvalitet učenikovog znanja, s obzirom da provode veći deo svog detinjstva u školskim klupama. Njihovom primenom, stvaraju se velike mogućnosti za poboljšanje kvaliteta nastave. Sprovedena istraživanja ukazuju na to da je veliki broj škola danas opremljen računarskom opremom, ali i na to da se ona nedovoljno koristi u nastavne svrhe.

Ovaj rad je napisan sa namerom da odgovori na mnoga pitanja koja se tiču upotrebe računara i obrazovnog softvera u školama i da ukaže na njihovu potrebu. Cilj pravljenja ovih edukativnih materijala je vizuelno i interaktivno sticanje znanja o funkcijama: grafičko prikazivanje funkcija, čitanje svojstava funkcija sa njihovih grafika, prepoznavanje osnovnih elementarnih funkcija itd.

U prvom poglavlju rada se razmatra upotreba računara u obrazovanju. Predstavlja se pojam nastave. Ukazuje se na značaj učenja na daljinu, multimedije u nastavi, internet sadržaja, kao i edukativnog softvera. Takođe, izloženi su i problemi koji se javljaju uvođenjem računara u nastavu.

Drugo poglavlje se odnosi na funkcije, njihov značaj u nastavi matematike, i primenu u svakodnevnom životu. Predstavljene su razlike u njihovom uvođenju u nastavu nekada i sada. Zatim, prikazani su načini zadavanja funkcija i predstavljene osnovne elementarne funkcije.

U trećem poglavlju je predstavljen besplatan matematički softver GeoGebra pomoću koga su izrađeni svi edukativni materijali. Ukazano je na njegove velike mogućnosti i značaj u nastavi matematike. Objasnjeno je kako se crteži napravljeni u ovom programu mogu izvoziti na internet.

U četvrtom poglavlju su predstavljeni alati za konstruisanje u programu GeoGebra. Takođe, opisane su i neke konstrukcije koje se nalaze na internet prezentaciji.

U petom poglavlju je predstavljena edukativna interaktivna internet prezentacija “Elementarne funkcije”. Prikazano je šta se sve nalazi na stranama i objašnjeno rukovanje njenim sadržajima.

Na samom kraju, nalazi se kratak osvrt na rad.

1. Računari u obrazovanju

1.1. Pojam nastave

Nastava je vrlo složen proces u kojem učenici svesno, aktivno i po određenom sistemu usvajaju znanje, veštine i navike, razvijaju svoje fizičke i psihičke sposobnosti, izgrađuju naučni pogled na svet, stiču radne navike i razvijaju kulturu rada.

Nastava predstavlja jedan od mnogih vidova vaspitanja i kao takva namerno utiče na razvitak ličnosti.

Nastavom se smatra učenje uz pomoć nastavnika koje se realizuje u školama i drugim njima sličnim institucijama po utvrđenim, ozvaničenim planovima i programima.

1.2. Obrazovanje pomoću računara

Obrazovanje pomoću računara odnosi se na primenu računara i informacionih tehnologija u obrazovanju. Poslednjih nekoliko godina je počela masovna upotreba računara. Informacione tehnologije se razvijaju neverovatnom brzinom i njihova prisutnost u svim ljudskim delatnostima je sve veća. Razvoj novih tehnologija omogućio je i njihovu primenu u obrazovnom procesu. Modernizacija obrazovnog sistema je vrlo složen proces. U zemljama razvijenog dela sveta odavno su se desile krupne promene u procesu obrazovanja. Oni idu ka tome da se što više koriste informacione tehnologije koje postaju deo savremenog obrazovanja, od prezentacije sadržaja pomoću specijalizovanih softvera tokom izvođenja nastave, do učenja tih sadržaja individualno ili u grupi posredstvom odgovarajućih softverskih platformi.

1.2.1. Uloga multimedije u obrazovanju

Multimedija predstavlja upotrebu više medija u načinu predstavljanja informacije. To znači da informacija može biti predstavljena tekstom, ali i slikom, animacijom, video materijalom itd. Multimedija se kao nastavno sredstvo može pronaći uglavnom na nekom stranom jeziku, na pr. engleskom. Učenje putem multimedije je efikasnije od prosečnog predavanja. Takvo učenje podstiče visok nivo koncentracije učenika. Ovo znači da učenici stupaju u interakcijski odnos sa kompjuterom, tj. sa softverom. Podstiču se na akciju ili reakciju ili način primene. Dok se tradicionalno učenje bazira na pamćenju, multimedijalni pristup daje kao rezultat brz porast znanja i primenu tog znanja u raznim situacijama.

1.2.2. Internet sadržaji i materijali za samoučenje

Podrazumeva se da internet tehnologije igraju ogromnu ulogu u izvođenju edukativnih procesa i aktivnosti. Internet nam pomaže da mladima ukažemo na informacije. Učenicima je dostupan ne samo obrazovni materijal koji mogu skinuti besplatno već i onaj koji distribuiraju obrazovne ustanove. U poslednjih nekoliko godina je primećen značajan rast upotrebe interneta. U tom periodu većina škola je snadbevena kompjuterskom opremom i brzim internet vezama kako bi učenici imali što brži pristup novim informacijama. Učenici samostalno rade sa materijalom, uče iz njega, vežbaju i ponavljaju gradivo.

1.2.3. Uloga učenja na daljinu u obrazovanju

Učenje na daljinu je sistem koji uči od svojih korisnika i vrši sistematizaciju znanja. Objedinjuje veliki skup aplikacija i procesa. Koriste se savremene komunikacione tehnologije, e-mail, mrežni razgovori i dr. Učenje na daljinu omogućava učenicima i nastavnicima potpunu nezavisnost kretanja, jer je nastava multimedijalna i realizuje se pomoću interneta. Učenje na daljinu povezuje ljude, znanja i informacije. Najvažnija uloga učenja na daljinu je interakcija. Učenik čita tekstove i uči iz njih.

1.2.4. Uloga edukativnog softvera u obrazovanju

Veoma veliki i važan deo obrazovanja pomoću računara se odnosi na razvoj edukativnog softvera. To je vid aplikativnog softvera specijalno namenjen za obrazovne svrhe. Reprezentuje razne strategije i tehnike podučavanja koje definiše autor i omogućava primenu u cilju što efikasnijeg usvajanja sadržaja koje učenik treba da nauči korišćenjem računara. U kombinaciji sa internetom omogućava pristup znanju svakome ko želi da uči.

Pojava edukativnog softvera najčešće podrazumeva izradu kompjuterskih programa namenjenih da pomognu u nastavnom procesu. Edukativni softver može da bude samo dopuna tradicionalnoj nastavi a može da se koristi i samostalno. U današnjoj nastavi preuzima sve veću primenu. Sa jedne strane ga koriste nastavnici, predavači, kako bi preprimili nastavu a sa druge strane učenici kako bi lakše savladali nastavno gradivo. Učenje je na taj način interesantnije i brže, jer samostalno uče i proveravaju svoje znanje. Učenici se osećaju slobodnije da odgovaraju na pitanja softveru nego nastavniku. Edukativnim softverom se omogućava direktna komunikacija korisnika (učenika) i sistema. Važan deo svakog edukativnog softvera, je inteligentni učitelj koji upravlja tom komunikacijom. Materijal namenjen edukativnom softveru zahteva mnogo više vremena i rada u poređenju sa klasičnim materijalom za predavanja u školi.

Danas, još uvek školske ustanove u Srbiji nisu dovoljno snadbevene računarskom opremom. Samim tim i upotreba edukativnog softvera je za sada zamisao. Neki pokušaji su već realizovani ali se još uvek čeka na neke krupnije promene.

1.3. Problemi

Dobro pripremljeno predavanje uz pomoć računara može omogućiti nove načine školovanja i na taj način olakšati posao nastavnika. Takav način rada daje mogućnost da se ekonomiče vremenom i da se naučeno duže pamti. Kada pričamo o uvođenju računara u svakodnevnu nastavu učenici su obično oduševljeni i prihvataju da uče iz elektronskih materijala. Učenje im je lakše i oni brže savladavaju gradivo. Oni koji pružaju otpor su uglavnom nastavnici. Imaju strah od takvog vida nastave. Mnogi vrlo slabo rukuju računarom, dok pojedinci ne umeju. Kao posledica toga se javlja osećaj nesigurnosti kada su za računarom. Oni se plaše promena i ne žele ih. Jedan od načina kako bismo ohrabрили nastavnike na korišćenje računara je organizovanje specijalizovane obuke gde će oni moći da nauče da koriste računarsku tehnologiju, da istraže njene mogućnosti i da eksperimentišu sa raznim računarskim programima. Na taj način nastavnici stiču potrebno znanje i iskustvo i nisu više plašljivi u radu sa računarom.

1.4. Računar u nastavi matematike

Najpogodnija za učenje pomoću računara je matematika. Primena računara u nastavi matematike podrazumeva edukativno korišćenje računara sa specijalnom matematičkom računarskom podrškom u nastavi. Ova specijalna podrška se odnosi na one programe koji podržavaju jedan ili više matematičkih prikaza (grafičkih, simboličkih, tabličnih). To su razni programi dinamičke geometrije, grafički alati i dr. Postoji i niz programa koji se koriste u nastavi matematike i zovemo ih interaktivnim alatima. To su programi namenjeni edukaciji i sadržaj im može biti namenjen učenju bilo kog predmeta pa tako i matematike. Jedan takav program je GeoGebra koja ima mogućnost prikazivanja matematičkog gradiva na različite načine.

Korišćenje crteža i grafičkih prikaza u nastavi olakšava trodimenzionalno prikazivanje objekata. Kada se neka trodimenzionalna slika predstavlja na papiru ili tabli, mnogim učenicima nije sasvim jasna i razumljiva. Uvođenjem informacionih tehnologija u nastavu ovakvi problemi bi se izbegli. Izrada crteža, grafika i tabela bi postala lakša i brža. Dok je u klasičnoj nastavi moguće u toku jednog časa predstaviti jedva nekoliko grafika funkcija, korišćenjem informacionih tehnologija bi se dobilo na brzini, i taj broj bi se uvećao.

2. Funkcije

2.1. Pojam funkcije

Funkcije su moćne alatke kojima se mogu predstaviti veliki broj realnih problema u realnom svetu. Čitav svet se sastoji iz bezbroj funkcija. U stvari, funkcija je neki proces gde se nešto odvija. Izučavanje funkcija dovodi do stalnog proučavanja promena. Mnoge veličine u prirodi i u životu su zavisne od drugih veličina. Cena nekog proizvoda raste proporcionalno sa povećanjem njegove mase. Zapremina kocke i površina kvadrata zavise od dužine stranice. Obim kruga zavisi od poluprečnika, cena dijamanta od njegove težine, čistoće, manama, brušenju, uspeh na ispitu od uloženog truda, nastavni materijali od sklonosti prema predmetu. Primer kada se dve veličine menjaju a treća je konstantna, je primer vožnje konstantnom brzinom, broj pređenih kilometara zavisi od vremena. Dakle, ne postoji ni jedna teorema u matematici, koja se ne može primeniti u stvarnom životu. Funkcijsko razmišljanje utiče na matematičko obrazovanje i omogućava bolje razumevanje drugih nastavnih sadržaja i dobra je priprema učenika za buduća matematička znanja i primene matematike.

Savremena matematika skoro u svim svojim disciplinama koristi funkcije. Svi matematički modeli su zasnovani na postavljanju veza između elemenata nekih skupova, tj. na funkcijama. Teorija grupa je u osnovi teorija grupa transformacija (bijektivnih funkcija). Linearna algebra je teorija linearnih funkcija. Matematička analiza je teorija neprekidnih funkcija. Diferencijalne jednačine opisuju funkcije u nauci i tehnici. Teorija rekurzija opisuje funkcije na diskretnim strukturama i ima značajne primene u programiranju. Zbog svega toga je izučavanje funkcija na svim obrazovnim nivoima jedan od najvažnijih segmenata u nastavi matematike.

U klasičnoj nastavi matematike, pri izučavanju funkcija se koriste vizuelna sredstva, a grafičko prikazivanje funkcija se koristi kao alat koji uspostavlja vezu između realnog i idealnog sveta. Korišćenjem velikog broja alata koji grafički predstavljaju objekte, od učenika se očekuje da shvate suštinu veza između veličina.

2.2. Funkcije u školskoj matematici nekad i sad

Nekada su učenici u osnovnim školama savladavali pojam funkcije intuitivno, bez strogih matematičkih definicija. Taj način učenja je bio primeren uzrastu i olakšavao im je kasniji susret sa strogom matematičkom definicijom funkcije. Veliki nedostatak je i retko objašnjavana teorija skupova, koja bi im olakšala razumevanje matematičke definicije skupova. Funkcije se uvode u 7. razredu i to pomoću zapisa linearne funkcije koji se odmah povezuje sa pravcem. Retko ko od djaka kada dodju u srednju školu znaju šta je zapravo funkcija.

2.3. Načini zadavanja funkcije

Imamo tri osnovna načina zadavanja funkcije tj. opisivanja funkcijskih zavisnosti: tablično, grafički i formulom (analitičkim izrazom). Svakako, svaki od tih načina ima svojih prednosti i mana.

- Prednost tabličnog zadavanja ili opisivanja funkcije je da je ponekad to jedini način zadavanja, a mana je da ne znamo vrednosti funkcije izvan oblasti podataka tablice i između vrednosti u kojima je poznata funkcija.
- Ako imamo grafički zadatu funkciju, onda su prednosti vernost, kompaktnost, preglednost, dok su mane netačnost očitavanja i nemogućnost korišćenja vrednosti izvan crtanog područja.
- Za funkciju zadatu formulom prednost je da znamo sve o funkciji, dok je mana netrivialnost dolaženja do tih informacija.

Prelaženje iz jednog oblika u drugi je moguće, ali u nekim slučajevima je to vrlo teško.

2.3.1. Tablični način

Ovaj način predstavljanja često koristimo u prirodnim i tehničkim naukama, u eksperimentalnim istraživanjima i sl. Svuda oko nas postoje veličine koje su zavisne jedna od druge, tj. nekim vrednostima argumenata $x_1, x_2, \dots, x_n$ pridružujemo zavisno promenljive $y_1, y_2, \dots, y_n$ i izražavamo ih preko raznih tablica:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$y=f(x)$	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Prilikom savladavanja, svaku novu funkciju treba uvoditi preko tablica.

2.3.2. Analitički način

Analitički način zadavanja funkcije sastoji se u tome da zakon preslikavanja f predstavimo matematičkim izrazom ili formulom. Domen funkcije zadate u analitičkom obliku određujemo iz samog izraza, odnosno pronalazimo skup svih mogućih rešenja za koje izraz ima smisla.

Postoje tri osnovna oblika analitičkog prikaza:

- eksplicitni oblik $y = f(x)$,
- implicitni oblik $F(x, y) = 0$,
- parametarski oblik $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

2.3.3. Grafički način

Funkcije se verno prikazuju grafikom. Problem je u tome što je grafički prikaz funkcije učenicima teško razumljiv. Grafički način predstavljanja funkcije sastoji se iz geometrijske prezentacije jedne funkcije u koordinatnom sistemu, gde svaki uređeni par brojeva $(x, f(x))$, gde je x - argument, a $f(x)$ - zavisno promenljiva funkcija, zamišljamo kao par koordinata tačke u koordinatnom sistemu u ravni. Skup svih takvih tačaka u ravni xOy čije su apcise vrednosti argumenata x , a ordinate odgovarajuće vrednosti funkcije $f(x)$, zovemo grafik funkcije:

$$G_f = \{ (x, f(x)) : x \in X \}$$

Grafik na vidan način prikazuje ponašanje funkcije tj. njenu monotonost, maksimalnu i minimalnu vrednost, vrednosti argumenta, nule funkcije, odnosno sve osobine koje su sastavni deo funkcije.

Učenik bi trebalo da zna da izračuna tačke i sam shvati kako se crta grafik. Grafik je dobro crtati klasičnim metodama - kreda, ploča, izračunavanje tačaka. Međutim, danas je sve to moguće uraditi pomoću programa za crtanje grafika na računaru. Moguće je pomoću njih manipulirati funkcijama, njenim svojstvima, nulama, ekstremima... Jedan od takvih programa je *GeoGebra*.

Grafički prikaz možemo koristiti kao pomoć u rešavanju mnogobrojnih tipova zadataka a ne samo onih u kojima se traži da se nacrtaju grafik funkcije. Rešavanje jednačina i nejednačina, određivanje najveće ili najmanje vrednosti na nekom intervalu, traženje nula, uočavanje slike

funkcije, određivanje geometrijskog mesta tačaka koje zadovoljavaju neko svojstvo i još puno toga. U svim takvim zadacima grafik nam pomaže pri rešavanju zadataka.

2.4. Osnovne elementarne funkcije

Funkcije koje se u primeni najčešće pojavljuju dobile su tokom vremena posebna imena i oznaku. Najčešće i najjednostavnije ih zovemo elementarnim funkcijama. Sa mnogima od njih smo se već susreli tokom dosadašnjeg obrazovanja.

Elementarne funkcije imaju veoma važnu ulogu među funkcijama u matematici. Poznavanje svih svojstava elementarnih funkcija je neophodno u daljem studiranju matematike, jer omogućava lakše savladavanje gradiva matematičke analize i rešavanje mnogih zadataka tehničke prirode. U ovom radu pažnja je posvećena osnovnim elementarnim funkcijama:

- Polinomi
- Racionalne funkcije
- Eksponencijalna funkcija
- Stepene funkcije
- Logaritamska funkcija
- Trigonometrijske funkcije
- Inverzne trigonometrijske funkcije

Elementarne funkcije su funkcije koje se mogu dobiti iz osnovnih elementarnih funkcija pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija (+, -, ·, :) i konačnog broja kompozicija elementarnih funkcija.

“Matematika i njen stil razmišljanja moraju postati sastavni deo opšte kulture savremenog čoveka, čoveka koji se obrazuje u današnjim školama, bez obzira da li će on vršiti posao koji koristi matematiku ili ne.”

Zaključak konferencije UNESCO-a o obrazovanju

3. GeoGebra

3.1. GeoGebra edukativni softver

Uvođenjem računara u nastavu dobijen je novi alat, kojim nastavnik može da upravlja i izrađuje aplete. Računarski vidljivi sadržaji matematike omogućavaju nastavnicima da na lep i efektan način predstave delove neke tematske jedinice. GeoGebra je samo jedan od ogromnog broja računarskih programa koji su poslednjih nekoliko godina kreirani u obrazovne svrhe. Danas se ona smatra najboljim načinom za podsticanje procesa aktivnog učenja. Ono što je čini naročito popularnom među nastavnicima matematike je činjenica da je njome jednostavno upravljati, počev od instalacije do njene upotrebe.

GeoGebra je računarski alat koji ima velike mogućnosti. Posebna pažnja pri razvoju programa je posvećena jednostavnoj upotrebi njenih alatki i opcija. Mogućnost interakcije objektima koju pruža ovaj program, je i najveća prednost nad tradicionalnom nastavom. GeoGebra je stvorena da pomogne učenicima da steknu bolje razumevanje matematike. Može se koristiti za aktivnu i problemski orjentisanu nastavu, matematičke eksperimente i otkrića kako u školi, tako i kod kuće. Softver se može koristiti i za učenje i kao nastavno sredstvo. Program *GeoGebra* omogućuje učeniku istraživanje na jednostavan način. S jedne strane učenici mogu da kreiraju konstrukcije od nule samostalno. Radeći tako, oni imaju mogućnost da reše problem kreiranjem matematičkih modela i istraživanjem odnosa. To stvara motivacijsko okruženje i podstiče na kreativnost. S druge strane, softver omogućava veoma jednostavno kreiranje interaktivnih i dinamičkih internet materijala za demonstracije. Koristeći ove materijale u učionici, nastavnici shvataju da nisu ograničeni na materijale iz udžbenika. Oni za kratko vreme i veoma efikasno upoznaju učenike sa osnovnim matematičkim pojmovima. Znanje koje se na ovaj način stiče se duže zadržava. Nastavnik može da koristi GeoGebra i za pripremu školskih i domaćih zadataka, testova itd.

GeoGebra je posebno pogodna u osnovnoj školi, gde se sadržaj geometrije i algebre prepliću. Međutim ona se prilagođava sposobnostima učenika i veoma je pogodna za nastavu. Učenici u osnovnoj školi ne uče jednačinu kružnice, i zato nju mogu da crtaju u geometrijskom prozoru. Tako da, ukoliko nastavnik radi sa nižim razredima, on može najpre da isključi algebarski prozor, i sve što učenici rade tada vide na geometrijskom prozoru. A zatim da uključi algebarski i tada pogledaju šta su uradili.

GeoGebra je paket koji omogućava učenicima jednostavno i interesantno učenje iz dve veoma važne oblasti školske matematike, iz geometrije i algebre.

3.2. Osnovne informacije o programu

GeoGebra je open source program za interaktivnu primenu računara u geometriji, algebri i matematičkoj analizi. Razvili su ga Markus Hohenwarter i međunarodni tim programera, za nastavu i učenje matematike u školama i na fakultetima. Iako je prvenstveno fokusiran na srednjoškolske nastavne planove i programe, GeoGebra je takođe interesantan alat za kurseve na fakultetu. Kako postaje sve više popularnija, program je preveden na više od četrdeset svetskih jezika. S jedne strane, program GeoGebra je program dinamičke geometrije. Možemo konstruisati tačke, vektore, duži, prave, funkcije a zatim ih možemo dinamički menjati. S druge strane, jednačine i koordinate možemo unositi direktno. Na taj način program GeoGebra koristi promenljive za brojeve, vektore i tačke, traži izvode i integrale funkcija, i računa nule funkcija i ekstremne vrednosti. Ova dva pristupa su obeležja programa GeoGebra: izraz u algebarskom prozoru odgovara objektu u geometrijskom prozoru i obrnuto.

Program GeoGebra je matematički softver koji povezuje geometriju, algebru i analizu. Elementarnu geometriju ravni, ili planimetriju veoma uspešno predstavljaju dinamični geometrijski sistemi (Dynamic Geometry Systems, DGS). Sistemi računarske algebre (Computer Algebra Systems, CAS), pružaju mogućnost za analitičku obradu geometrije. GeoGebra je alat koji sadrži prednosti jednog i drugog sistema, DGS i CAS alata. Interaktivno se mogu konstruisati razni geometrijski oblici i dinamički menjati, a moguće je i direktno zadavati jednačine i koordinate. GeoGebra povezuje ova dva alata što doprinosi jednom širokom razvoju nastave matematike i njenih mogućnosti.

GeoGebra omogućava jednostavno kreiranje Java apleta i internet stranica sa ugrađenim apletima. Svi kreirani interaktivni crteži mogu se vrlo lako postaviti na Internet.

Osim izvoza kao internet stranice, GeoGebra omogućava izvoz u različite formate. Koristeći ove stavke možete snimiti grafički prikaz kao sliku na vaš računar (png, eps,..), kao datoteku sa slikom (PGF/TikZ) koje je podržano u programu LaTeX, ili možete kopirati crtež u bafer vašeg računara. Nakon toga, možete sliku preneti u drugi dokument.

GeoGebra je kompaktna i prenosiva. Pisana je u Javi, pa se može pokrenuti na različitim mašinama bez obzira na operativni sistem (Windows, Mac OS X, Linux). Male je veličine, i može da se čuva na prenosnoj memoriji i da se instalira bilo gde.

Geogebra je besplatan matematički softver za učenje. Može da se instalira na svakom računaru i koristi. Instalacija je krajnje jednostavna. Pored toga, GeoGebra se može direktno pokrenuti preko Internet Browser-a. Ono što je važno je to što učenicima nije potrebna GeoGebra kako bi pregledali napravljene aplete, već samo internet konekcija i Java. Da biste skinuli program GeoGebra, posetite njenu zvaničnu internet stranu <http://www.geogebra.org>. Osim programa možete skinuti i brojne primere i tekstove o GeoGebri. Ova internet prezentacija podstiče nastavnike da se uključe u deljenje materijala, da prijavljuju eventualne greške u programu i učestvuju u budućem razvoju GeoGebre. Na ovim stranama možete pronaći i korisnički forum, koji je namenjen pružanju informacija svim korisnicima ovog programa. Nalazi se na adresi <http://www.geogebra.org/forum>. Ovde možete pronaći odgovore na razna vaša pitanja i nedoumice, pa i same interaktivne materijale, a možete i postavljati pitanja u vezi programa GeoGebre. Forum se sastoji iz nekoliko celina, na različitim jezicima.

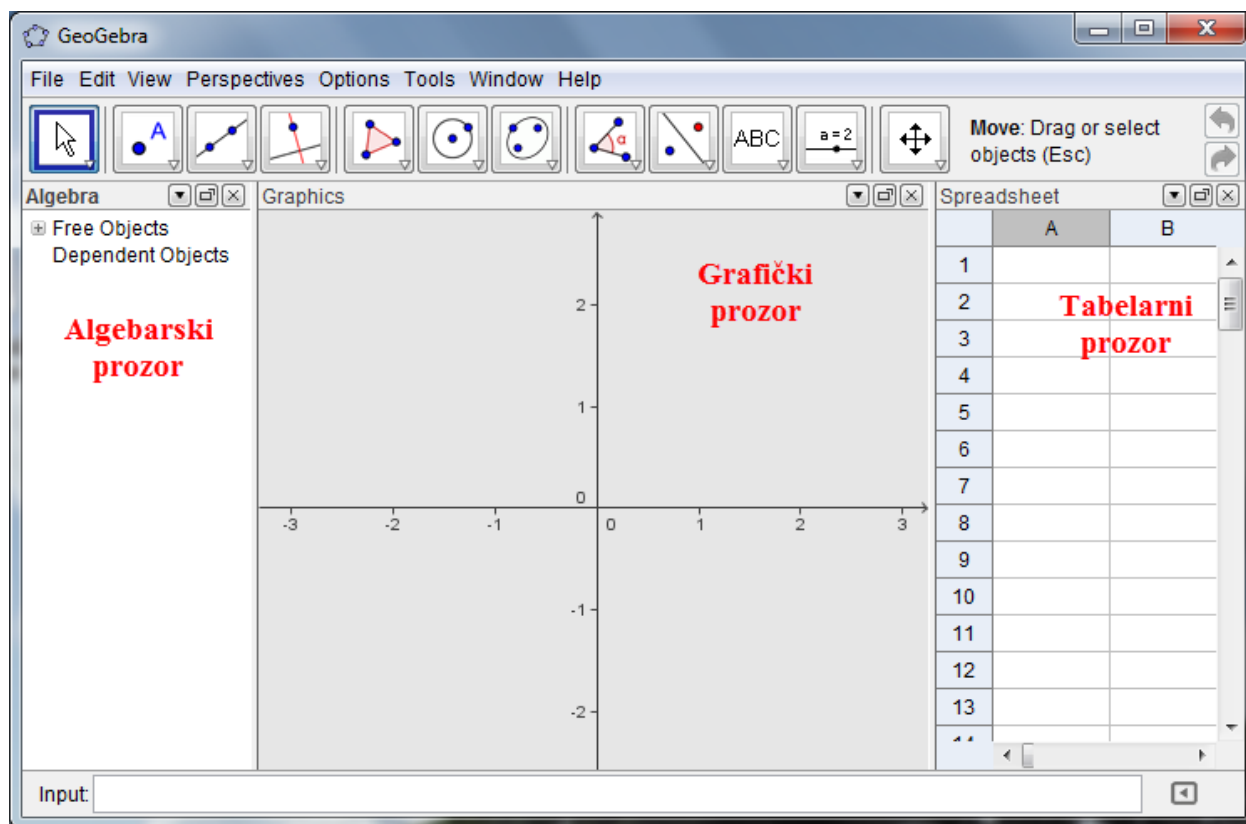
GeoGebra Wiki je virtuelno skladište edukativnih materijala i članaka. Kada pritisnete na <http://wiki.geogebra.org/en> otvoriće vam se stranica koja liči na Wikipediju, internet enciklopediju koju i vi možete uređivati. Za sada nema članaka na srpskom jeziku, ali to ne predstavlja prepreku u razumevanju matematike.

Od nedavno, otvoren je GeoGebrin centar, u okviru Matematičkog fakulteta u Beogradu čija je zvanična prezentacija na adresi <http://geogebra.matf.bg.ac.rs>. Na strani se nalaze savremeni nastavni materijali, primeri interaktivnih GeoGebra apleta, uputstva za izradu dinamičkih internet strana koja se mogu koristiti u nastavi matematike u svim razredima osnovne i srednje škole i saveti i ideje o organizovanju inovativnih i multimedijalnih časova.

GeoGebra je nagrađena sa više nagrada za obrazovni softver: EASA 2002, Learnie Award 2003, digita 2004, Comenius 2004, Learnie Award 2005, Trophées du Libre 2005.

3.3. Korisnički interfejs

GeoGebra korisnički interfejs (Slika 1.) se sastoji od grafičkog, algebarskog i tabelarnog prozora. Svi prozori jednog objekta su dinamički povezani i automatski se menjaju ako promenite bilo koji prozor. GeoGebra je fleksibilna i može se prilagoditi potrebama svojih korisnika. Na primer, određeni delovi korisničkog interfejsa se mogu sakriti. Možete da sakrijete grafički, tabelarni ili algebarski prozor, polje za unos, koordinatne ose, i da radite samo sa geometrijskim alatom. Možete uključiti koordinatni sistem koji koristi mrežu, kako biste olakšali rad sa celobrojnim koordinatama itd.



Slika 1. GeoGebra korisnički interfejs

U grafičkom prozoru su prikazane grafičke reprezentacije matematičkih objekata. Geometrijske konstrukcije se izvode pomoću miša i geometrijskih alata koji se nalaze na traci sa alatima. Svi objekti u grafičkom prozoru imaju i algebarsku reprezentaciju u algebarskom prozoru i njihovim pomeranjem, menja se i njihova algebarska reprezentacija. Alati su organizovani po vrsti objekata koje proizvode. Svaka ikonica u traci sa alatima sadrži još sličnih alata za konstrukciju. Možete ih videti pritiskom miša na malu strelicu u donjem desnom uglu ove ikonice. Grafički prozor nazivamo još i površina za crtanje.

Za direktan unos algebraskih izraza, koristite polje za unos na dnu prozora. U ovom prozoru, objekti su organizovani kao zavisni i nezavisni objekti. Ukoliko pri kreiranju novog objekta koristite neki drugi postojeći objekat, on se svrstava u zavisne, u suprotnom u nezavisne objekte. Nezavisni objekti se mogu menjati, zavisni ne. Ukoliko želite da sakrijete algebarsku reprezentaciju objekta, samo ga označite kao pomoćni objekat desnim pritiskom miša.

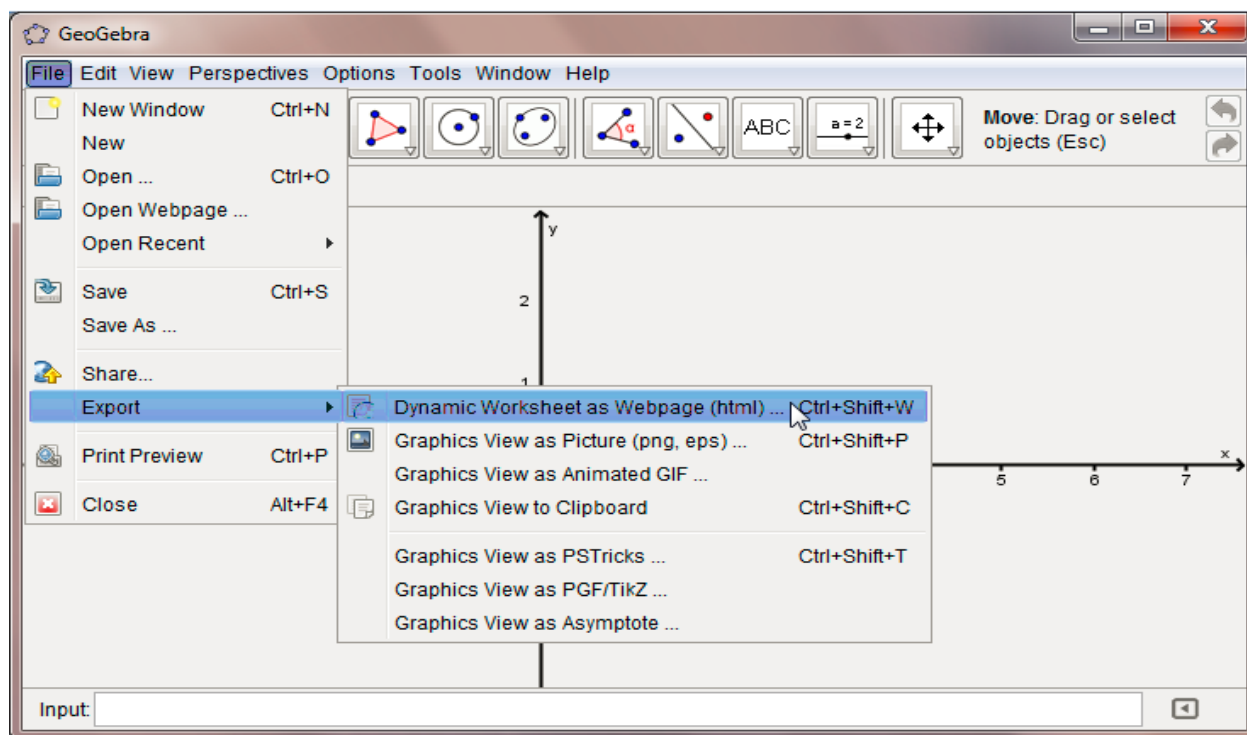
U programu GeoGebra postoji veliki broj naredbi koje se mogu koristiti. Listu naredbi možete videti pritiskom na dugme „Naredba“ u desnom uglu polja.

Tabelarni prozor se sastoji iz ćelija, pri čemu svaka ćelija ima jedinstveno ime pomoću kojeg se adresira. U tabelu se mogu unositi ne samo brojevi, već svi matematički objekti (na pr.

koordinate tačke, funkcije, naredbe). Objekti napravljeni u tabeli se podrazumevano svrstavaju u pomoćne objekte u algebarskom prozoru.

3.4. Izrada interaktivne internet - stranice s apletom

Pomoću GeoGebre možete kreirati interaktivne materijale, tj. internet stranice sa apletima (Slika 2.). Vaši crteži se na taj način izdvajaju iz GeoGebre i umeću kao interaktivna i dinamička slika u internet stranicu. Izvoz crteža je veoma jednostavan i sastoji se od samo nekoliko koraka: unos naslova, imena autora, datuma, teksta iznad i ispod konstrukcije. Pre kreiranja crteža kao internet stranice treba podesiti i šta sve želite da korisnici vide. Na primer, možete sakriti deo algebarskog prozora, ograničiti korisnike na određeni alat, sakriti pomoć u alatnoj traci, omogućiti desni pritisak miša i pomeranje oznaka na apletu, omogućiti vidljivu ikonicu za resetovanje apleta, omogućiti korisniku da dvostrukim pritiskom otvara prozor programa ili pak da promeni veličinu prozora na željenu. Ako je aplet preveliki da bi stao na ekran, treba ga smanjiti. Kreiranjem dinamičkog crteža, kreiraće se tri datoteke: html datoteka, koja predstavlja internet stranicu sa crtežom, i može se otvoriti u bilo kom pretraživaču, ggb datoteka, sa konstrukcijom u GeoGebri i geogebra.jar datoteka koja sadrži interaktivni GeoGebra aplet i omogućava stranicu interaktivnom. Sve tri datoteke moraju biti u istom direktorijumu, kako bi dinamički crtež radio. Nakon izrade internet stranice sa apletom, ona će se automatski otvoriti u vašem internet pretraživaču.



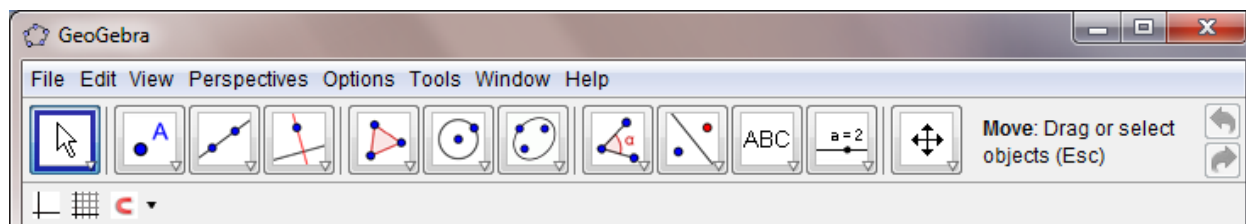
Slika 2. Izvoz apleta kao internet stranice

Jezik komunikacije s apletom je *Javascript*, poseban programski jezik razvijen baš za “skriptovanje” Java apleta. Takoreći, moguće je postavljati dugmad na stranicu, kojima zadajete određene naredbe vezane za aplet. Na taj način, možete kreirati celu konstrukciju u apletu nad postojećim objektima ili sasvim novim i pomerati (animirati) objekte u apletu. Unutar internet stranice možete postaviti jednoredno polje za tekst koje će pozivati funkciju koja će upisane jednačine, koordinate tačaka i dr. izvršavati. Nekad je potrebno da se uz isti tekst na internet stranici prikazuje na istom mestu i iste veličine novi aplet, sa novim sadržajem ili konstrukcijom, što je moguće isto uraditi pritiskom na dugme na stranici. Iz geometrijskog i algebarskog prozora apleta moguće je mnoge podatke očitati, i neki podatak ispisati u tekstualno polje ili obavestiti prozorom upozorenja. Dinamički crtež će raditi ukoliko imate instaliran program Java na vašem računaru, koji možete besplatno skinuti na <http://www.java.com>.

4. GeoGebra konstrukcije

4.1. Alati za konstrukciju

Pritiskom na ikone u alatnoj traci možete odabrati dole opisane alate. Pritiskom na malu strelicu u donjem desnom uglu ikone otvara se padajuća lista sa još sličnih alata (Slika 3.).



Slika 3. GeoGebra alatna traka

4.1.1. Alati za pomeranje

Pomeranje



Povlačenje i ispuštanje nezavisnih objekata pomoću miša. Držite pritisnutu tipku Ctrl da biste odabrali nekoliko objekata.

Rotacija oko tačke



Prvo odaberite tačku koja će biti centar rotacije. Nakon toga možete da rotirate nezavisne objekte oko te tačke povlačeći ih mišem.

Zapiši u tabelu



Ovim alatom možete da pomerate objekat, dok se niz njegovih vrednosti istovremeno

zapisuje u tabelarni prikaz. Ovaj alat radi sa brojevima, tačkama i vektorima.

4.1.2. Alati za tačke

Nova tačka



Nova tačka se pravi pritiskom na površinu za crtanje. Koordinate tačke se zadaju prilikom otpuštanja tastera miša. Pritiskom na duž, pravu, poligon, konusni presek, funkciju ili krivu kreiramo tačku na tom objektu. Pritiskom na presek dva objekta dobijamo presečnu tačku.

Tačka na objektu



Nova tačka se dobija pritiskom na postojeći objekat, unutrašnjost kruga, elipse ili mnogougla.

Priveži/Otkaçi tačku



Kako biste privezali tačku za putanju ili oblast pritisnite nezavisnu tačku a zatim na putanju ili oblast. Od tog trenutka, tačka će moći da se pomera jedino pomoću alata za pomeranje i to samo duž putanje ili unutar područja. Kako biste odvojili tačku koja je definisana kao tačka putanje ili područja, pritisnite tačku dok je označen ovaj alat i tačka će postati nezavisna.

Presek dva objekta



Presečne tačke dva objekta mogu se dobiti na dva načina: Označavanjem oba objekta: tada će se napraviti sve presečne tačke ta dva objekta (ako je to moguće) I pritiskom na jedan presek dva objekta: tada će se napraviti samo jedna odabrana presečna tačka.

Središte ili centar



Pritiskom na dve tačke dobija se središte duži određene tim dvema tačkama. Pritiskom na konusni presek dobijate njegov centar.

Kompleksni broj



Pritiskom na površinu za crtanje kreiramo objekat tipa kompleksni broj.

4.1.3. Alati za linije

Prava kroz dve tačke



Odabirom tačaka A i B dobija se prava određena njima.

Duž između dve tačke

Odabirom dve tačke, A i B , dobija se duž AB , čija je početna tačka A i krajnja tačka B .

Duž zadate dužine iz tačke

Pritisnite tačku A , koja će biti početna tačka duži. Pojaviće se prozor u koji unosite željenu dužinu duži, a .

Poluprava kroz dve tačke

Odabirom dve tačke, A i B , dobija se poluprava sa početnom tačkom A , kroz tačku B . U algebarskom prikazu će se pojaviti jednačina odgovarajuće prave.

Izlomljena linija

Odabirom tačaka koje čine izlomljenu liniju a zatim spajanjem prve i poslednje tačke dobijamo izlomljenu liniju.

Vektor određen dvema tačkama

Odabirom početne i krajnje tačke dobija se vektor.

Vektor iz tačke

Odabirom tačke A i vektora v dobija se tačka $B = A + v$ kao i vektor čija je početna tačka A , a krajnja B .

4.1.4. Alati za specijalne linije

Normala

Odabirom prave a i tačke A dobija se normala na pravu a kroz tačku A . Pravac nove prave odgovara vektoru normale prave a .

Paralela

Odabirom prave a i tačke A dobija se prava paralelna sa a kroz tačku A . Nova prava ima isti pravac kao i prava a .

Simetrala duži

Odabirom duži a ili tačaka A i B dobija se simetrala duži. Pravac simetrale odgovara vektoru normale na duž a ili AB .

Simetrala ugla



Simetrale uglova se mogu dobiti na dva načina: Odabirom tri tačke, A , B , C dobija se simetrala ugla određenog njima. Pri tome je B teme ugla ili odabirom dve prave pri čemu se dobijaju obe simetrale uglova koje one određuju.

Tangente



Tangente konusnog preseka se mogu dobiti na dva načina: Odabirom tačke A i konusnog preseka c se dobijaju sve tangente konusnog preseka c kroz tačku A ili odabirom prave g i konusnog preseka c pri čemu se dobijaju sve tangente konusnog preseka c , koje su paralelne sa g .

Polara ili konjugovani poluprečnik



Ovaj alat daje polaru ili konjugovani poluprečnik konusnog preseka. Možete da odaberete jednu tačku i konusni presek da biste napravili polaru ili da odaberete pravu ili vektor i konusni presek da biste dobili konjugovanu pravu koja sadrži konjugovani prečnik prave, odnosno vektora.

Fitovana prava



Fitovanu pravu za skup tačaka možete napraviti na sledeće načine: Kreiranjem oblasti koja sadrži sve tačke ili odabirom liste tačaka.

Lokus



Označite tačku B (zavisnu od druge tačke, A) čiji lokus treba da se nacрта. Zatim pritisnite tačku A . Tačka B mora da leži na nekom objektu (npr. pravoj, duži, kružnici).

4.1.5. Alati za mnogouglove ---

Mnogougao



Odaberite redom najmanje tri tačke koje će biti temena mnogougla. Zatim pritisnite ponovo prvu tačku da biste zatvorili mnogougao.

Pravilan mnogougao



Označite dve tačke A i B i unesite broj temena, n , u polje za unos. Pojaviće se pravilan mnogougao sa n temena (uključujući i tačke A i B).

Kruti poligon



Odaberite najmanje tri slobodne tačke koje će biti temena poligona. Zatim, pritisnite prvu tačku u cilju zatvaranja poligona. Dobijeni poligon će zadržati svoj oblik, moći ćete samo

da ga pomerate i rotirate pomoću temena.

Vektor poligon



Odabirom najmanje tri tačke koje će biti temena poligona i pritiskom na prvu u cilju zatvaranja, dobijamo poligon. Ovakav poligon zadržava oblik kada pomeramo prvu tačku, dok druge možemo slobodno da pomeramo.

4.1.6. Alati za kružnice i lukove

Kružnica određena centrom i jednom tačkom



Odabirom tačke M i tačke P dobija se kružnica sa centrom u M , kojoj pripada tačka P . Ova kružnica ima poluprečnik jednak dužini duži MP .

Kružnica određena centrom i poluprečnikom



Odaberite centar kružnice M i pojaviće se prozor u koji treba da unesete njen poluprečnik.

Šestar



Izaberite duž ili dve tačke da biste zadali prečnik. Zatim pritisnite tačku koja treba da bude centar nove kružnice.

Kružnica kroz tri tačke



Kružnica kroz tri tačke se dobija odabirom tri tačke A , B , i C . Ako su te tri tačke kolinearne, kružnica se degeneriše u pravu.

Polukružnica



Odabirom tačaka A i B dobija se polukružnica čiji je prečnik duž AB .

Kružni luk određen centrom i dvema tačkama



Prvo odaberite centar M kružnog luka. Zatim odaberite početnu tačku A i tačku B , koja određuje dužinu luka. Tačka A uvek leži na kružnom luku, ali tačka B ne mora da leži na njemu.

Luk određen trima tačkama



Odabirom tri tačke dobija se kružni luk određen njima. Pri tome, tačka A je početna tačka luka, tačka B leži na luku, a tačka C je kranja tačka luka.

Isečak kruga određen centrom i dvema tačkama

Prvo odaberite centar M isečka kruga. Zatim odaberite početnu tačku A i tačku B , koja određuje dužinu luka kružnog isečka. Tačka A uvek leži na kružnom luku, ali tačka B ne mora da leži na njemu.

Isečak kruga određen trima tačkama

Odabirom tri tačke dobija se isečak kruga kroz te tri tačke. Pri tome, tačka A je početna tačka luka isečka kruga, tačka B leži na luku, a tačka C je kranja tačka luka isečka kruga.

4.1.7. Alati za konusne preseke

Elipsa

Odaberite dve tačke koje će biti žiže elipse. Zatim zadajte treću tačku koja leži na elipsi.

Hiperbola

Odaberite dve tačke koje će biti žiže hiperbole. Zatim zadajte treću tačku koja leži na hiperboli.

Parabola

Zadajte tačku i direktrisu parabole.

Konusni presek kroz 5 tačaka

Odabirom pet tačaka se dobija konusni presek, koji prolazi kroz njih. Ako su četiri od tih pet tačaka kolinearne, konusni presek nije definisan.

4.1.8. Alati za merenje

Ugao

Ovaj alat pravi ugao određen trima tačkama, ugao određen dvema dužima, ugao određen dvema pravama, ugao određen sa dva vektora, sve unutrašnje uglove mnogougla.

Ugao zadate veličine

Kada označite dve tačke, A i B , pojaviće se prozor u koji treba da unesete veličinu ugla. Kao rezultat dobijaju se tačka C i ugao α , pri čemu je α ugao ABC .

Rastojanje ili dužina



Ovaj alat daje rastojanje između dve tačke, dve prave ili tačke i prave kao dinamički tekst u geometrijskom prozoru. Takođe, on može da da dužinu duži i obim kruga ili mnogougla.

Površina



Ovaj alat prikazuje površinu mnogougla, kruga ili elipse kao dinamički tekst u geometrijskom prozoru.

Nagib



Ovaj alat prikazuje nagib prave kao dinamički tekst u geometrijskom prozoru.

Kreiranje liste



U grafičkom prozoru označite objekte koje želite da stavite u listu, a zatim pritisnite alat za kreiranje liste. U tabelarnom prozoru, izaberite skup ćelija, a zatim pritisnite alat za kreiranje liste. Otvoriće se prozor za imenovanje, menjanje i kreiranje liste od odabranih ćelija.

4.1.9. Alati za transformacije

Osa simetrija



Odaberite objekat čija se simetrična slika traži. Zatim pritisnite pravu koja će biti osa simetrije.

Centralna simetrija



Odaberite objekat čija se simetrična slika traži. Zatim pritisnite tačku, koja će biti centar simetrije.

Inverzija u odnosu na kružnicu



Ovaj alat omogućava inverziju tačke u odnosu na kružnicu. Odaberite tačku koju želite da invertujete. Zatim odaberite kružnicu.

Rotacija oko tačke za ugao



Odaberite objekat koji se rotira. Zatim izaberite tačku koja će biti centar rotacije. Pojaviće se prozor u kojem možete da unesete veličinu ugla rotacije.

Translacija za vektor



Označite objekat koji se pomera. Zatim izaberite vektor, za koji će objekat biti transliran.

Homotetija sa centrom i koeficijentom



Označite objekat na koji se primenjuje homotetija. Zatim izaberite tačku koja će biti centar homotetije. Pojaviće se prozor u kojem se zadaje koeficijent homotetije.

4.1.10. Specijalni alati za objekte

Ubacivanje teksta



Ovim alatom se na površinu za crtanje postavljaju statički i dinamički tekstovi ili LaTeX formule. Prvo treba da zadate lokaciju teksta, pritiskom na površinu za crtanje ili pritiskom na tačku. Nakon toga se pojavljuje prozor u koji se unosi tekst.

U GeoGebri se mogu pisati i formule. Da biste to uradili, uključite opciju 'LaTeX formula' u prozoru alata Tekst i unesite tekst u LaTeX sintaksi.

Statički tekst ne zavisi od matematičkih objekata i na njega obično ne utiču izmene u konstrukciji. Dinamički tekst sadrži vrednosti objekata koje se automatski menjaju istovremeno sa promenom tih objekata. Mešoviti tekst je kombinacija statičkog i dinamičkog teksta.

Ubacivanje slike



Ovim alatom se u grafički prikaz ubacuju slike. Prvo zadajte lokaciju slike, pritiskom na površinu za crtanje i na taj način se postavlja donji levi ugao slike. Nakon toga se pojavljuje prozor za otvaranje datoteke, u kojem se bira slika koja se ubacuje.

Olovka alat



Ovaj alat omogućava korisniku da piše ili crta slobodnom rukom po grafičkom prozoru tako što odaberete oblast na grafičkom prikazu, nacrtate prvo pravougaonik ili označite sliku na kojoj ćete crtati. GeoGebra čuva kreirane beleške kao sliku. Beleške se brišu tako što držite pritisnut desni taster miša i vučete preko teksta koji želite da obrišete, a zatim pustite taster.

Odnos između objekata



Označite dva objekta i dobićete informaciju o njihovom odnosu u novom prozoru

Kalkulator verovatnoće



Pritiskom na ovaj alat otvara se prozor za izračunavanje i grafički prikaz raspodele verovatnoće.

Testiranje funkcije



Najpre unesite funkciju koju želite da testirate i zatim odaberite ovaj alat. Možete odabrati interval koji želite da ispitajte.

4.1.11. Alati za akcione objekte

Klizač



Klizač u GeoGebri je grafička reprezentacija nezavisnog broja ili ugla. Pritisnite prazno mesto na površini za crtanje da biste napravili klizač za broj ili ugao. Pojaviće se prozor u kojem možete da zadate 'Ime', 'Interval' $[min, max]$ i 'Korak' broja ili ugla, kao i orijentaciju i 'Širinu' klizača (u pikselima).

Položaj klizača u grafičkom prikazu može da bude apsolutni (što znači da se klizač ne pomera kada se grafički prikaz povećava ili smanjuje, već uvek ostaje vidljiv u njemu) ili relativan u odnosu na koordinatni sistem.

Polje za potvrdu za prikazivanje i skrivanje objekata



Pritiskom na površinu za crtanje se dobija polje za potvrdu, koje kontroliše prikazivanje i skrivanje jednog ili više objekata. Nakon toga se pojavljuje prozor za izbor objekata na koje polje za potvrdu utiče.

Polje za unošenje dugmeta



Akcioni objekat koji omogućava određene akcije.

Ubacivanje polja za unos



Kako biste ubacili polje za unos, pritisnite negde u grafičkom prozoru. Otvara se prozor gde možete uneti naslov i objekat koji povezujete.

4.1.12. Opšti alati

Pomeranje površine za crtanje



Pomeranjem grafičkog prikaza pomoću miša menja se vidljivi deo površine za crtanje.

Ovim alatom možete da menjate razmere koordinatnih osa ako ih prevlačite mišem.

Povećanje



Pritiskom na proizvoljno mesto na površini za crtanje prikaz se povećava.

Smanjenje



Pritiskom na proizvoljno mesto na površini za crtanje prikaz se smanjuje.

Prikaži / sakrij objekat



Pritisnite objekat da biste ga sakrili ili ponovo prikazali.

Prikaži / sakrij oznaku



Pritiskom na objekat prikazuje se ili sakriva njegova oznaka.

Prenos izgleda



Ovim alatom možete da prenesete osobine jednog objekta (npr. boju, veličinu, izgled linije) na više drugih objekata. Prvo odaberite objekat čije osobine želite da prenesete. Nakon toga pritisnite sve druge objekte kojima želite da prenesete njegove osobine.

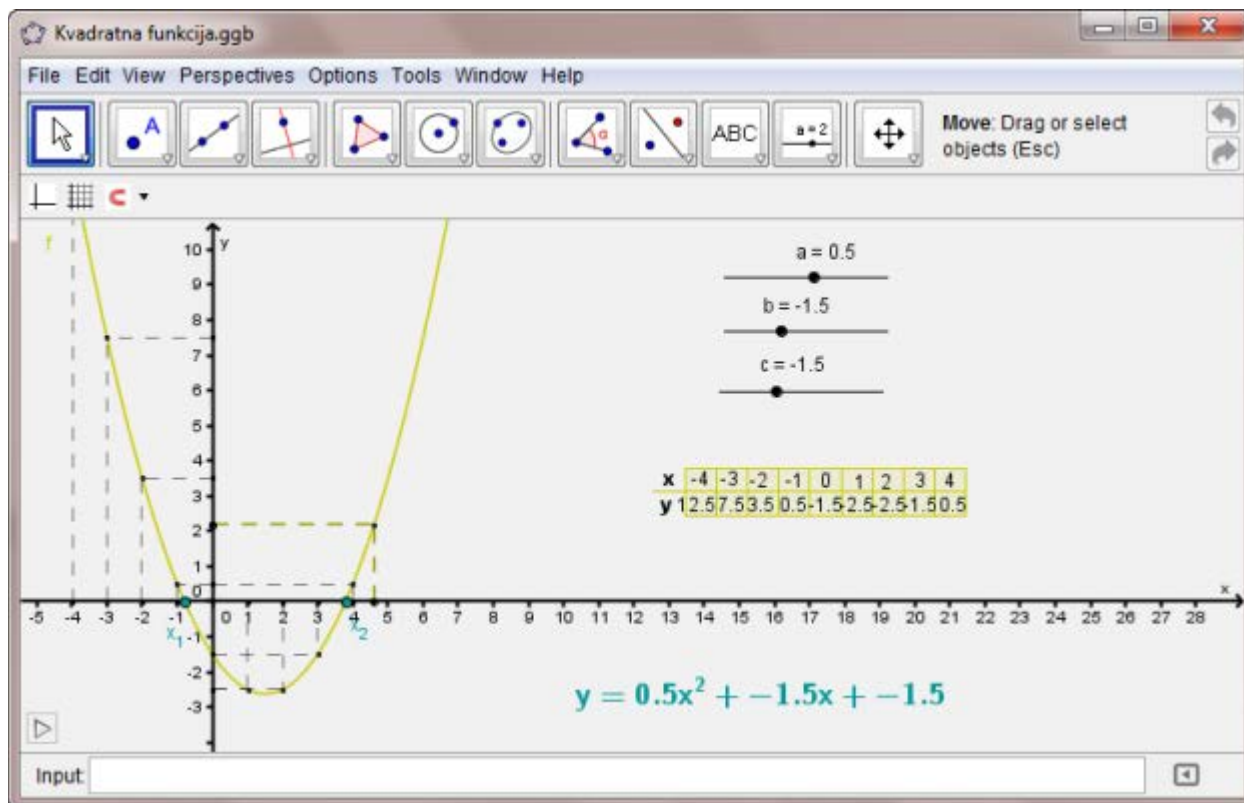
Brisanje objekta



Pritisnite objekat koji želite da obrišete.

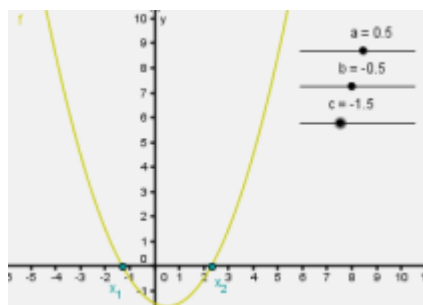
4.2. Primer: Ispitivanje grafika kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$ u zavisnosti od koeficijenata

Sledeći aplet (Slika 4.) prikazuje grafik kvadratne funkcije i njegovo ponašanje u zavisnosti od koeficijenata a , b i c (na slici su to klizači). Pomeranjem klizača levo-desno, pomera se i grafik funkcije. Na apletu se nalazi i tablica u koju se upisuju vrednosti promenljivih uz kretanje koordinate x od -4 do 4 , kao i dinamički tekst koji zavisi takođe od vrednosti koeficijenata, tj. klizača.



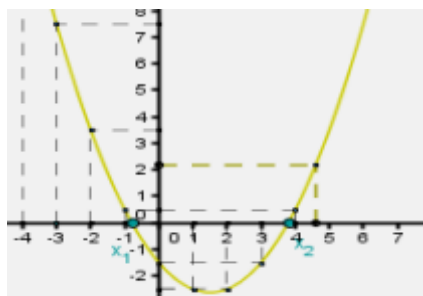
Slika 4. Aplet kvadratne funkcije

Unesimo najpre tri klizača a , b i c , koji će biti koeficijenti kvadratne funkcije tako što izaberemo $\frac{a=2}{\text{Slider}}$, sa linije alata i unesemo na radnu površinu redom. Neka im je minimalna vrednost -5, maksimalna 5, a korak 0,1. Zatim, zadajemo funkciju, tako što upisujemo u polje za unos, $f(x)=ax^2+bx+c$. Krivu ćemo obojiti u žutu boju desnim pritiskom na nju i opcija *Object Properties*, a zatim *Color*. Obeležićemo i nule funkcije, tako što ćemo naći presek krive f sa x -osom, pomoću alata $\text{Intersect Two Objects}$. Ove dve tačke ćemo označiti x_1 i x_2 , desnim pritiskom na njih, opcija *Object Properties*, upisaćemo x_{1} i x_{2} kao *Caption*, i uključiti da se on vidi u *Show Label* i potom ih obojiti u zelenu boju. Na ovaj način dobili smo grafik kvadratne funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$ (Slika 5.), koji se pomera kada pomeramo klizače a , b i c .



Slika 5. Aplet kvadratne funkcije – izrada grafika u zavisnosti od klizača

Sada želimo da postavimo dve linije koje spajaju tačku na grafiku (presečna tačka normale iz tačaka na x i y osi i grafika) sa tačkama na x i y osi. A zatim da ih povežemo sa klizačima (d , e), tako da njihovo pomeranje prouzrokuje pomeranje tih linija, ostavljajući trag za sobom u vidu crnih isprekidanih linija u onim vrednostima za x koje se nalaze u tablici (Slika 6.). Što znači da kada ove linije prođu kroz tačke $(-x, 0)$ i $(0, y)$, njihov trag ostane vidljiv. Klizač d ima minimalnu vrednost -5 a maksimalnu 5 , sa korakom 0.01 , dok klizač e , minimalnu 0 , a maksimalnu 0.001 sa korakom 0.1 . Međutim, ove klizalice ćemo isključiti da se ne vide. Najpre ćemo nacrtati ove linije i to tako što ćemo jednu tačku vezati za ove klizalice, tj. u polje za unos unesemo (d, e) . Dobijamo tačku koja se pomera, pokretanjem klizača. U toj tački povlačimo normalu na x -osu, pomoću alata  *Perpendicular Line*, a zatim nalazimo presečnu tačku ove normale sa krivom f . Sada tražimo normalu iz ove tačke na y -osu, ponavljajući isti postupak. Prave kroz ove tačke nam više ne trebaju pa ćemo ih staviti da budu nevidljive. Sada spajamo ove tačke alatom  *Segment between Two Points*, tako što kliknemo na početnu i krajnju tačku. Ove linije će biti linije koje će se pomerati na grafiku, i biće isprekidane i žute boje (*Object Properties, Style*). Na sličan način napravimo ostale linije (tragove), uzimajući za x i y vrednosti iz tablice. Tačke ćemo na kraju umanjiti u opciji *Style* i odčekirati opciju *Show Label* kako se ne bi prikazivalo njihovo ime ili vrednost. Kako je klizač d sakriven, namestićemo automatsku animaciju (*Slider, Animation On*), koja stalno raste (*Slider, Repeat, Increasing*). Već smo pomenuli da će se tragovi videti tek po prolasku žutih linija kroz određene vrednosti, tako da ih moramo povezati sa klizačem d . Što znači da će se linije kroz tačke, na primer $(-4, 0)$ i $(0, 4)$ pojaviti po prolasku žutih linija kroz te tačke. Obeležimo linije, i u opciji *Advanced* ukucamo $d > -4$. Isti postupak ponovimo za ostale.



Slika 6. Aplet kvadratne funkcije – grafik

U tablici na apletu (Slika 7.), su prikazane vrednosti koordinate x , dok se vrednosti za y prikazuju tek pošto označene žutom bojom linije na grafiku prođu kroz tu tačku. Da bismo napravili tablicu vrednosti za promenljive x i y , moramo najpre da ucrtamo tačke, i potom ih spojimo. Sa strane grafika negde na radnoj površini, označimo tačku i povučemo normalu iz nje na x -osu. A zatim na nekom odstojanju od tačke na ovoj istoj pravoj izaberemo još jednu tačku.

Sada pomoću alata  *Reflect Object About Point* dobijemo treću tačku na ovoj pravoj na jednakom rastojanju kao i prve dve. Potom, povlačimo normale iz njih na y-osu. Ostale tačke ćemo naći na isti način ili kao presek dve prave. Kada smo dobili sve tačke, spojimo ih sa već pomenutim alatom, obojimo u žutu boju, a onda prave isključimo da se više ne vide. Na kraju, uobličimo tablicu pomoću alata  *Polygon*, obeleživši početnu i krajnju tačku, a zatim ga obojimo u žutu boju. Pomoću alata  *Insert Text* unesemo tekst, tj. vrednosti za x , tako što kliknemo na mesto u tablici gde želimo da se pojavi određeni tekst. Vrednosti za koordinatu y dobijamo pomoću istog alata, s tim što nećemo unositi tekst, već formulu $f(-x)$, pa tako na primer, za koordinatu $x=-4$, koordinatu y dobijamo tako što unesemo $f(-4)$. Da bi se vrednosti koordinate y upisivale tek posle prolaska kroz tu tačku, (na primer $f(-4)$) se pojavljuje tek po prolasku kroz tačku $(0, f(-4))$, moramo ih vezati za naš klizač d . U opciji *Object Properties*, *Advanced* upisaćemo, na primer za koordinatu $f(-4)$, $d > -4$, i tako će ona ostati vidljiva u tablici dok god je $d > -4$. Na isti način, podesimo ostale vrednosti i dobija se tablica kao na slici 7.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	12.5	7.5	3.5	0.5	-1.5	-2.5	-2.5	-1.5	0.5

Slika 7. Aplet kvadratne funkcije – tablica vrednosti

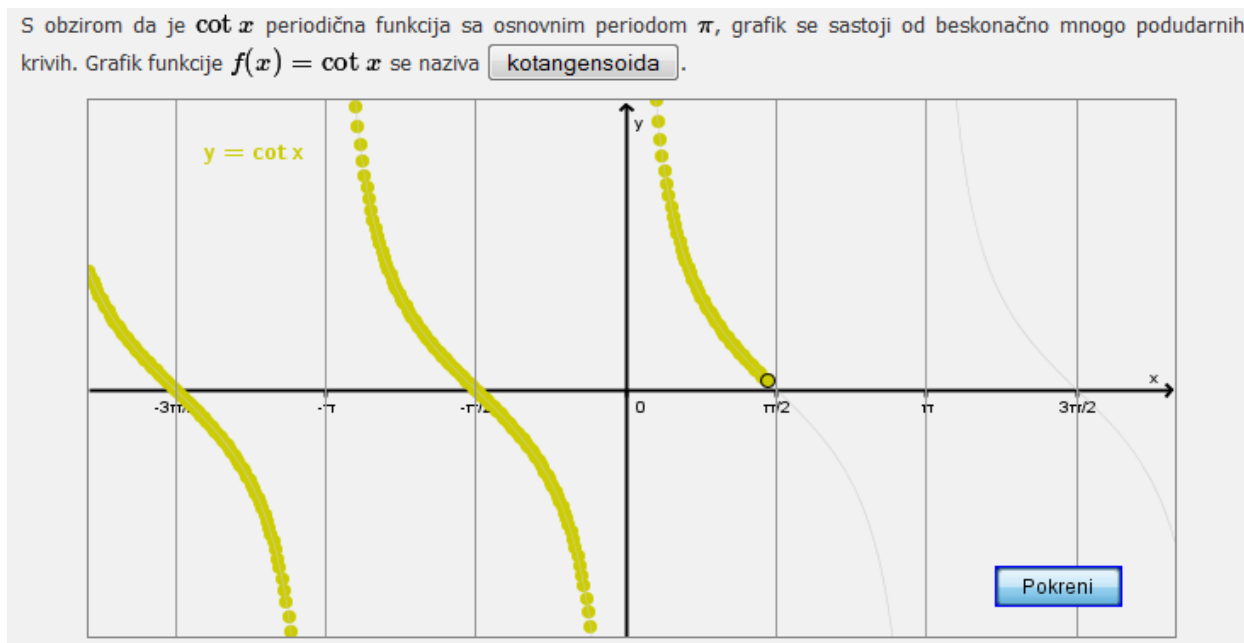
Na kraju ostaje još samo da unesemo tekst (Slika 8.) koji će se menjati u zavisnosti od vrednosti koeficijenata (klizača a , b i c). Odaberemo već pomenuti alat za unos teksta i unesemo na radnu površinu sledeće: "y=" + a + " x^2 +" + b + " x +" + c , a zatim ga obojimo u zelenu boju.

$$y = 0.5x^2 + -1.5x + -1.5$$

Slika 8. Aplet kvadratne funkcije – interaktivni tekst

4.3. Primer: Konstrukcija grafika inverzne trigonometrijske funkcije-kotangensoide

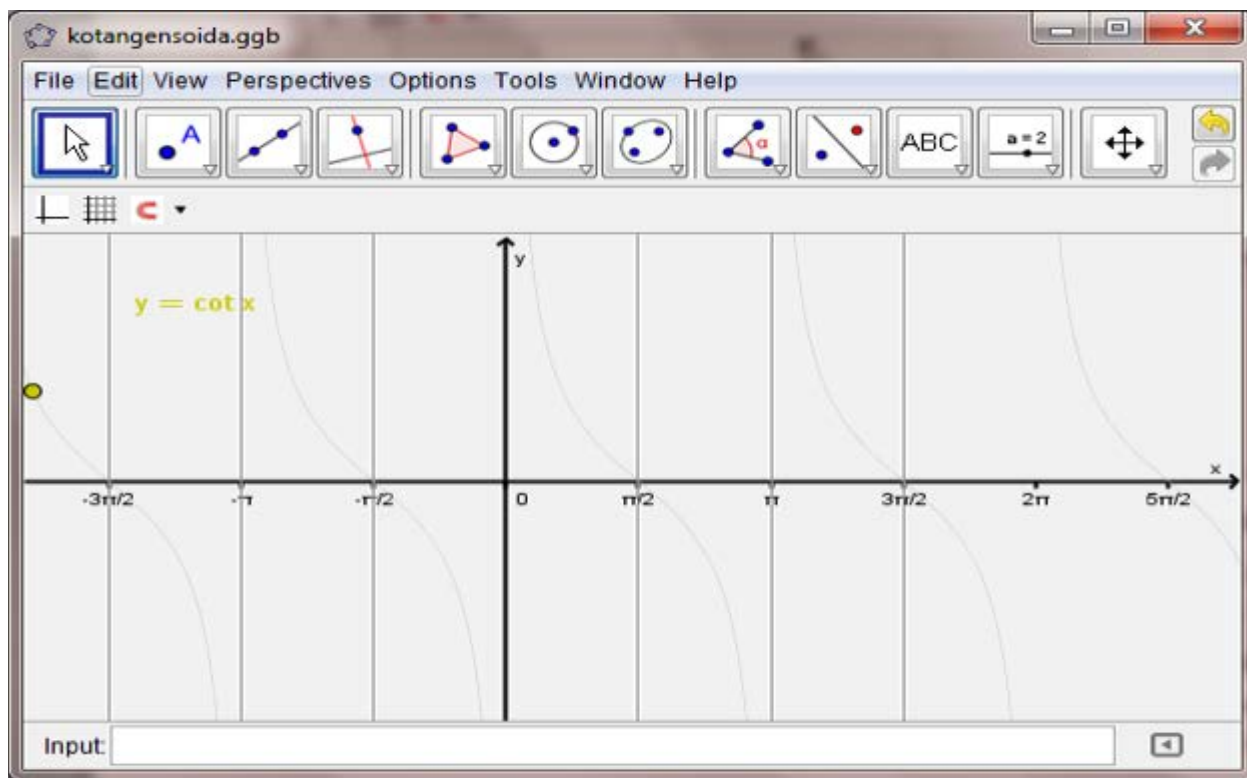
Sledeći aplet (Slika 9.) predstavlja grafik funkcije $\cot x$. Grafik funkcije $f(x)=\cot x$ ćemo dobiti kada kliknemo na dugme **kotangensoida**, tj. dobićemo tačku na crtežu, koja se kreće i iscrtava kotangensoidu kada kliknemo na dugme **Pokreni** na crtežu. Takođe, možemo i da je zaustavimo pritiskom na dugme **Zaustavi**.



Slika 9. Aplet kotangensoide

Najpre ćemo objasniti postupak kreiranja apleta, a zatim i njegovu povezanost sa stranicom. Geometrijski prozor ćemo podesiti tako da su na x -osi vrednosti od $-3\pi/2$ do $3\pi/2$, desnim pritiskom u prazan prostor, opcija *Graphics...* a zatim kao *Distance* za x -osu izaberemo $\pi/2$, dok za y -osu isključimo opciju *Show Numbers*. Sada crtamo prave kroz tačke na x -osi, tako što u polje za unos unosimo redom $x=-3\pi/2$, $x=-\pi$, ..., $x=3\pi/2$. A zatim ih sve obojimo u sivu boju, opcija *Object Properties*, *Color*. Sada crtamo funkciju $f(x)=\cot x$, unoseći u polje za unos, a zatim je obojimo takođe u sivu boju. Sa krajnje leve strane grafika, ucrtamo tačku na grafiku, pomoću alata  *New Point*, a zatim je povećamo *Object Properties*, *Style* i obojimo u žutu boju. Da bi ova tačka iscrtavala grafik funkcije, označićemo opciju *Show Trace*.

Tekst na apletu žute boje $f(x)=\cot x$, unosimo tako što kliknemo na mesto gde želimo da nam se pojavi pomoću alata ABC *Insert Text*. Slika 10 prikazuje objašnjeni postupak.



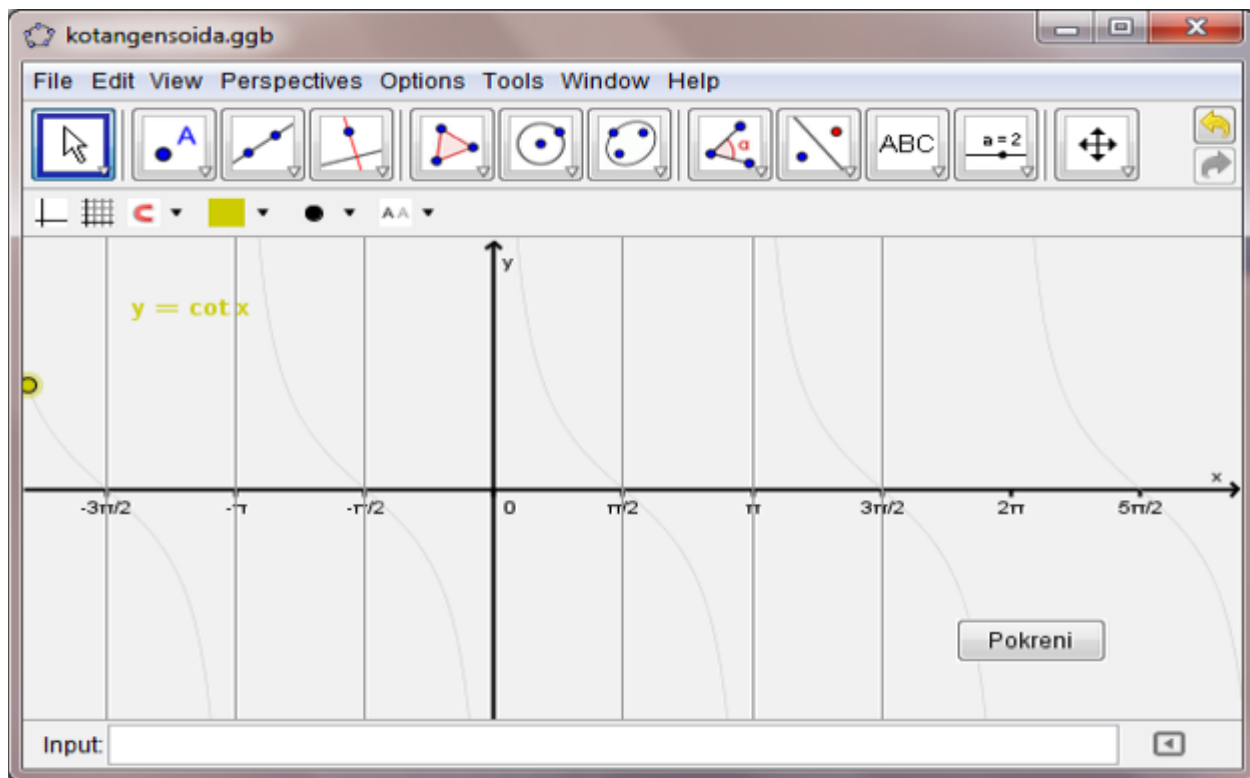
Slika 10. Aplet kotangensoide – izrada pomoćnih objekata

Ostaje još da napravimo dugme (Slika 11.) pomoću kog će se ova tačka pomerati i iscrtavati grafik. Najpre nam treba jedno polje za potvrdu za prikazivanje i sakrivanje objekata. Unesemo ga bilo gde na apletu pomoću alata  *Check Box to Show/Hide Objects*, a zatim sakrijemo da se ne vidi. Sada unosimo dugme na aplet pomoću opcije  *Insert Button* i kao *Caption* unosimo **Pokreni**. Da bi ovo dugme pokretalo tačku, moramo uneti kod u delu *GeoGebra Script* i to:

$h=!h$

StartAnimation[A,h]

SetCaption[button1,If[h,"Zaustavi","Pokreni"]]



Slika 11. Aplet kotangensoide – izrada interaktivnog dugmeta

Pre čuvanja apleta isključićemo sve objekte da se ne vide desnim pritiskom i opcija *Show Object*.

Na samoj stranici koja objašnjava kotangensne funkcije, nalazi se aplet koji je prazan. Pritiskom miša na dugme na stranici **kotangensoida**, pojavljuju se svi objekti na apletu koje smo ranije sakrili. A zatim pritiskom na dugme **Pokreni**, tačka klizi i iscrtava grafik funkcije $f(x) = \cot x$. Da bismo postavili ovo dugme na internet stranu, moramo da unesemo kod `<input type="button">`. Za vrednost unosimo tekst koji će se pojaviti na dugmetu, `value=" "`. Kako bismo komunicirali sa apletom, u opciji `onclick=" "` unosimo JavaScript komande koje počinju sa `document`, zatim tačka, ime apleta, tačka, pa naredba vezana za događaj koji želimo da namestimo i na kraju tačka-zarez. Više komandi se odvajaju tačaka-zarezom. U našem slučaju:

```
<input type="button" value="kotangensoida"  
onclick="document.ggbApplet[1].setVisible('g','true');  
document.ggbApplet[1].setVisible('a','true');  
document.ggbApplet[1].setVisible('b','true');  
document.ggbApplet[1].setVisible('c','true');  
document.ggbApplet[1].setVisible('d','true');  
document.ggbApplet[1].setVisible('e','true');  
document.ggbApplet[1].setVisible('f','true');  
document.ggbApplet[1].setVisible('A','true');  
document.ggbApplet[1].setVisible('text1','true');  
document.ggbApplet[1].setVisible('button1','true');  
document.ggbApplet[1].startAnimation();  
document.ggbApplet[1].setAnimationSpeed('A','0.6')"/>
```

5. Internet prezentacija “Elementarne funkcije”

5.1. Sadržaj interaktivne internet prezentacije

Elementarne funkcije
Interaktivni nastavni materijal

Početna Galerija aplata GeoGebra Linkovi Kontakt

Funkcije u nastavi matematike

Pojam funkcije je veoma važan u nastavi matematike zbog njegovog značaja za matematiku i njenu primenu. Funkcijsko razmišljanje daje posebnu dimenziju matematičkom obrazovanju, omogućava bolje razumevanje i efikasnije postupke u drugim nastavnim sadržajima, bolje priprema učenika za buduća matematička znanja i primene matematike. Pomoću funkcija matematičari objašnjavaju pojave iz prirode i događanja iz svakodnevnog života.

Elementarne funkcije

Elementarne funkcije su funkcije koje se mogu dobiti iz osnovnih elementarnih funkcija pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija (+, -, ·, :,) i konačnog broja kompozicija elementarnih funkcija.

Osnovne elementarne funkcije su:

- > Polinomi
- > Racionalne funkcije
- > Eksponencijalna funkcija
- > Stepene funkcije
- > Logaritamska funkcija
- > Trigonometrijske funkcije
- > Inverzne trigonometrijske funkcije

Funkcije
Pojam funkcije, svojstva, operacije s funkcijama, zadavanje funkcije

Funkcije u obrazovanju
Uvođenje pojma funkcije, Računar kao pomoć u razumevanju funkcija...

Master rad
Izučavanje elementarnih funkcija pomoću programskog paketa "GeoGebra"

$y = 0.5x^2 - 1.5x + 1.5$

$a = 0.5$
 $b = -1.5$
 $c = 1.5$

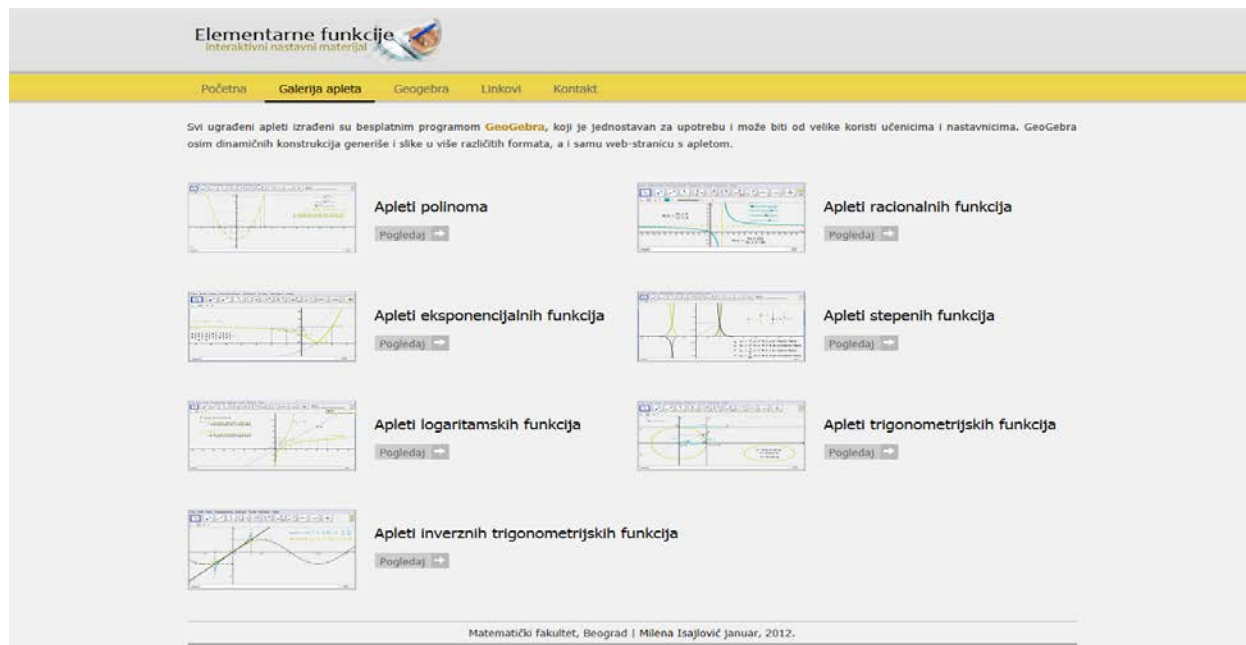
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	12.5	7.5	5	3.5	2.5	2	1.5	2	3.5

Matematički fakultet, Beograd | Milena Isajlović januar, 2012.

Slika 12. Internet prezentacija Elementarne funkcije – početna strana

Interaktivna internet prezentacija “Elementarne funkcije” je fokusirana na nastavu matematike u srednjoškolskom obrazovanju i odnosi se na nastavne sadržaje koji obuhvataju funkcije i njihova svojstva. Posebna pažnja je posvećena elementarnim funkcijama. Prezentacija se nalazi na adresi <http://www.alas.matf.bg.ac.rs/~ml06068>. Na slici 12. je prikazan izgled prezentacije, tj. početne strane. Pri vrhu se nalazi glavni meni koji se sastoji od pet lokacija: *Početna*, *Galerija apleta*, *GeoGebra*, *Linkovi* i *Kontakt*. Na sredini stranice se nalazi spisak elementarnih funkcija. Pritiskom na neku od njih otvara se prozor sa interaktivnim nastavnim materijalom. Sa desne strane se neprestano menjaju slike nekih elementarnih funkcija, koje su link na teoriju vezanu za njih. Na dnu stranice su tri celine: *Funkcije*, *Funkcije u obrazovanju* i *Master rad*. Svaku od njih možete otvoriti pritiskom na dugme **Pročitaj** ➔. Na strani *Funkcije* se nalazi kratko objašnjenje pojma funkcije i njenih svojstava. Strana *Funkcije u obrazovanju* prikazuje tekst o školi, obrazovanju u školama i držanju nastave u školama, pre svega nastave matematičkih funkcija. *Master rad* otvara dokument “Izučavanje Elementarnih funkcija pomoću programskog paketa GeoGebra” u pdf formatu.

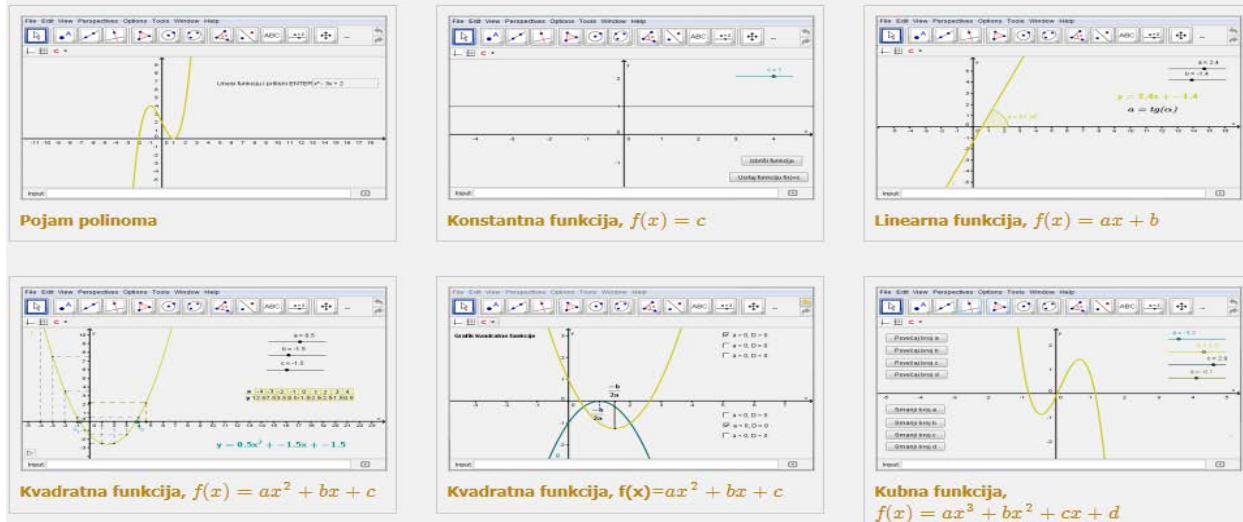
Galerija apleta (Slika 13.) je skup svih apleta korišćenih u tekstovima na strani, grupisanih u oblasti: *Apleti polinoma*, *Apleti racionalnih funkcija*, *Apleti eksponencijalnih funkcija*, *Apleti stepenih funkcija*, *Apleti logaritamskih funkcija*, *Apleti trigonometrijskih funkcija* i *Apleti inverznih trigonometrijskih funkcija*. Svi apleti su izrađeni besplatnim programom GeoGebra. Na strani se nalazi i veza koja vodi na zvaničnu stranu GeoGebrinog centra u Beogradu.



Slika 13. Internet prezentacija Elementarne funkcije – Galerija apleta

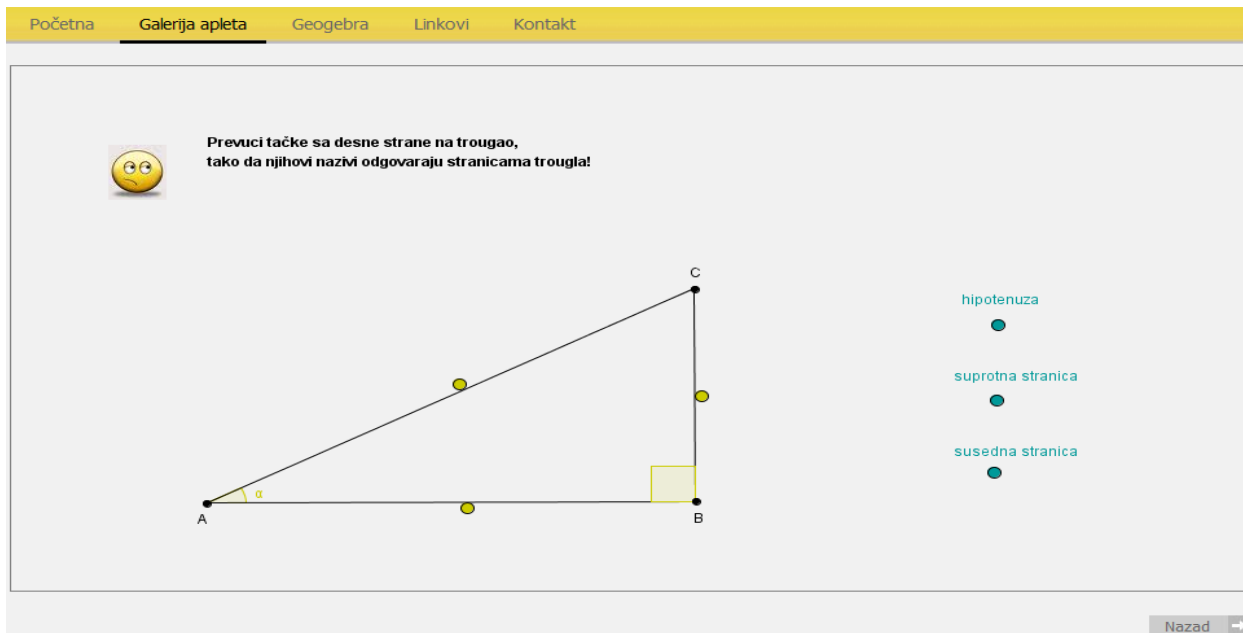
Pogledaj

polinoma, nastalih primenom programa GeoGebra.



Slika 14. Internet prezentacija Elementarne funkcije – apleti polinoma

Pritiskom na sliku, otvara se aplet preko celog ekrana (Slika 15.), dok pritiskom na tekst ispod slike, otvarate stranu na kojoj se nalazi teorija. U svakom trenutku možete se vratiti korak nazad ili na glavni meni.



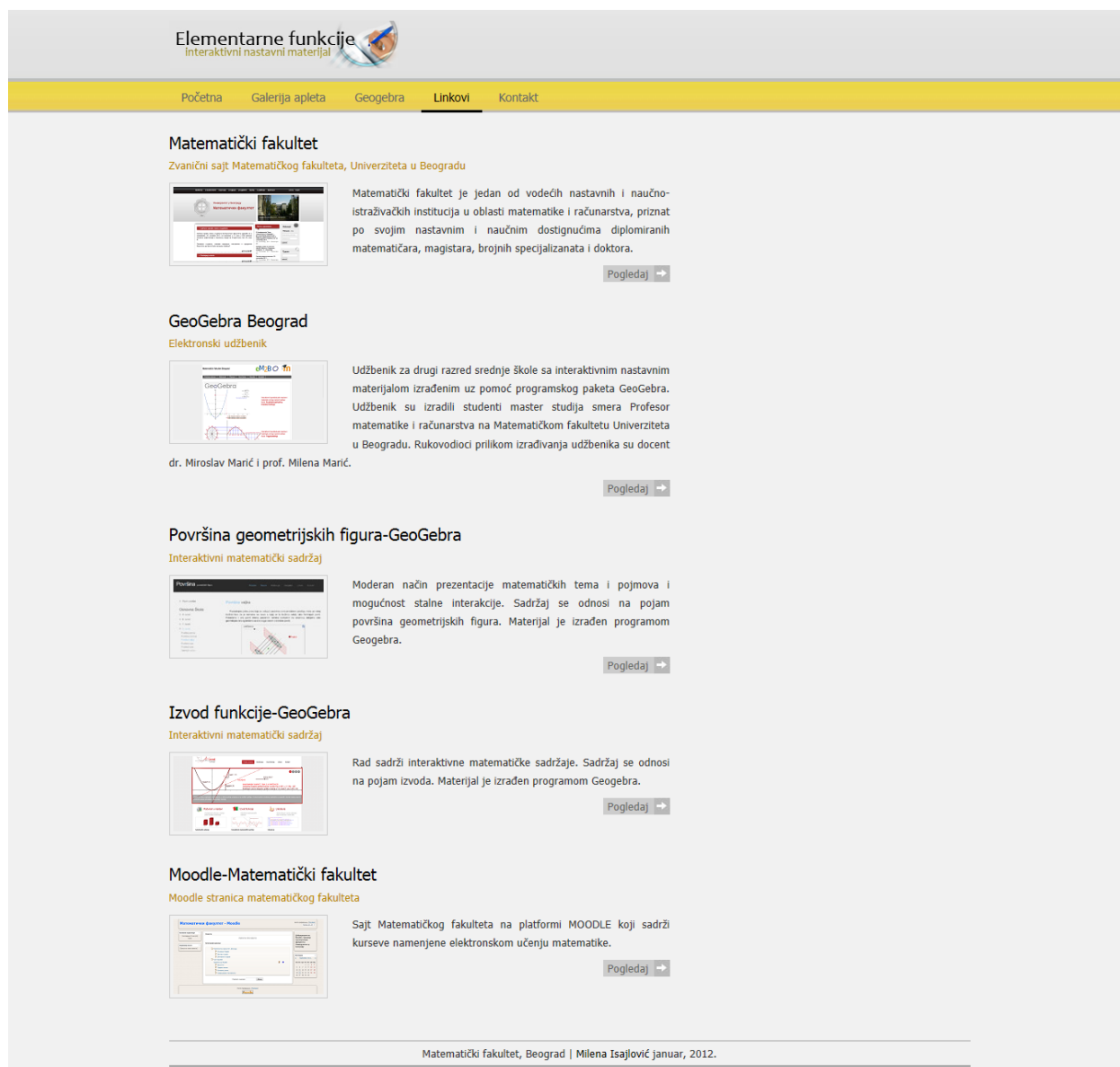
Slika 15. Internet prezentacija Elementarne funkcije – aplet trougla

Na strani *GeoGebra* (Slika 16.) se nalazi par rečenica o samom programu kao i linkovi na stranice sa kojih možete skinuti program na vaš računar, otvoriti korisnički forum GeoGebre, pogledati video materijale, saznati nešto više o programu ili otvoriti zvaničnu stranu GeoGebrinog centra u Beogradu.



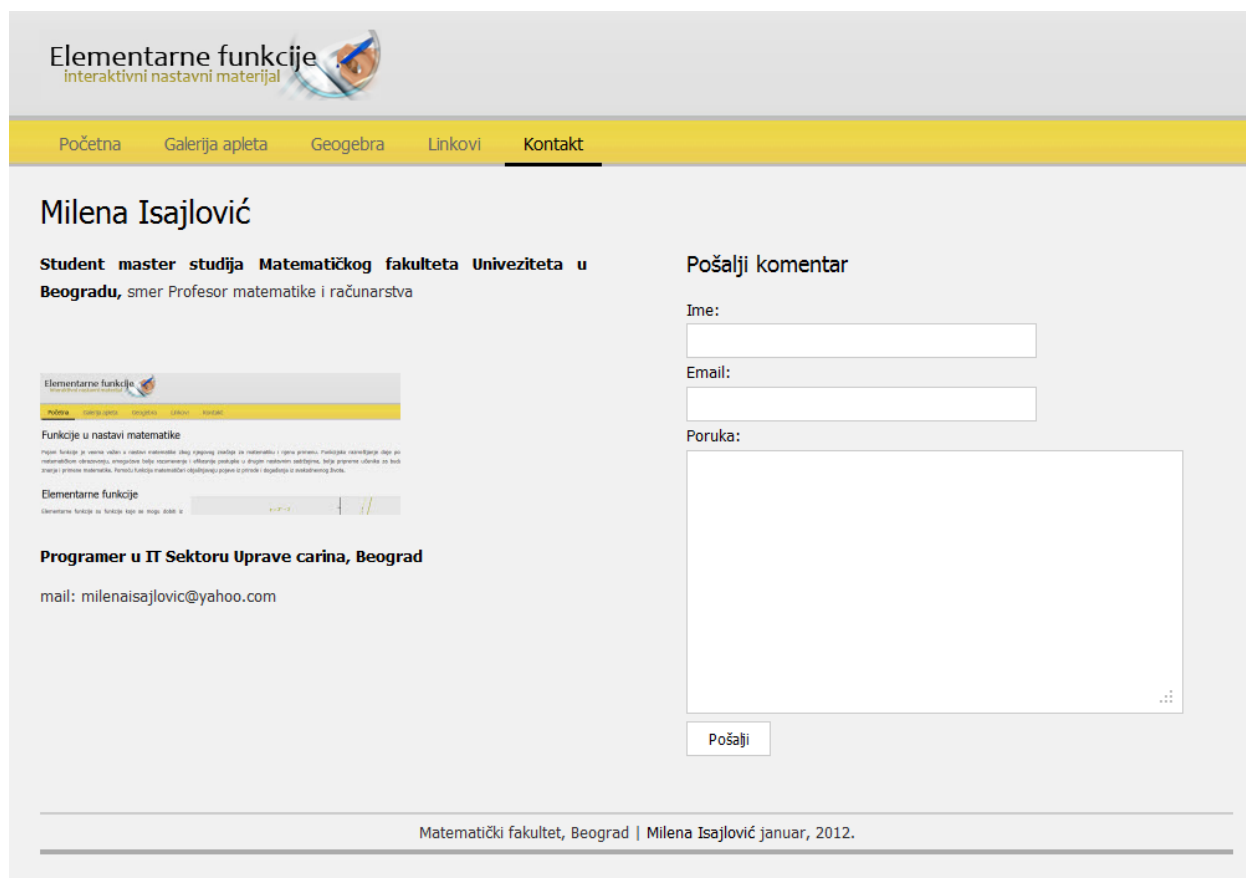
Slika 16. Internet prezentacija Elementarne funkcije – GeoGebra

Skup linkova (Slika 17.) na kojima možete pronaći još korisnih informacija se nalaze na strani *Linkovi*. To su zvanična strana Matematičkog fakulteta, Elektronski udžbenik za drugi razred srednje škole gde su obrađene sve nastavne jedinice koje se uče na toj godini uz interaktivne aplete, zatim interaktivne prezentacije na kojima možete pronaći još obrađenih nastavnih jedinica uz interaktivne aplete i zvanična strana Matematičkog fakulteta na platformi Moodle koji sadrži kurseve namenjene elektronskom učenju matematike.



Slika 17. Internet prezentacija Elementarne funkcije – Linkovi

Kontakt strana (Slika 18.) sadrži informacije o autoru prezentacije. Ovde možete poslati komentare autoru vezane za prezentaciju, ukoliko imate neke predloge, sugestije ili pohvale.



Slika 18. Internet prezentacija Elementarne funkcije – Kontakt

5.2. Upravljanje nastavnim sadržajima

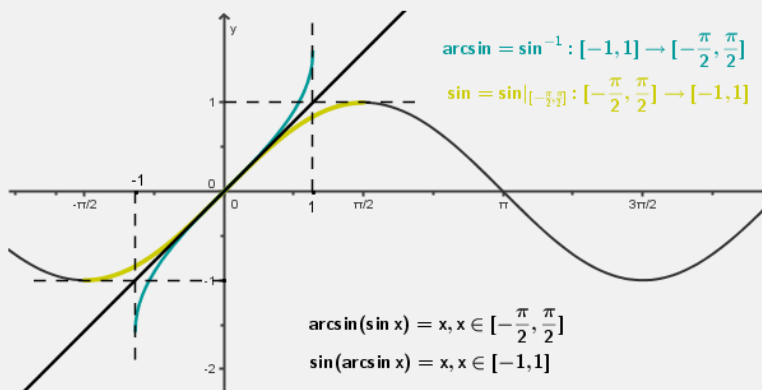
Na sredini početne stranice, nalazi se spisak elementarnih funkcija, obrađenih u okviru ove prezentacije (Slika 19.).

Elementarne funkcije

Elementarne funkcije su funkcije koje se mogu dobiti iz osnovnih elementarnih funkcija pomoću konačnog broja aritmetičkih operacija (+, -, ·, :) i konačnog broja kompozicija elementarnih funkcija.

Osnovne elementarne funkcije su:

- > Polinomi
- > Racionalne funkcije
- > Eksponecijalna funkcija
- > Stepene funkcije
- > Logaritamska funkcija
- > Trigonometrijske funkcije
- > Inverzne trigonometrijske funkcije

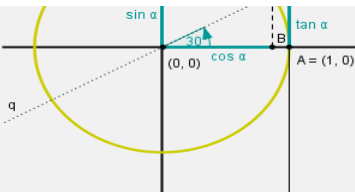


Slika 19. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz levog menija elementarnih funkcija

Svaka od njih je veza na dinamičku stranicu na kojoj je predstavljena odgovarajuća teorija i interaktivni GeoGebra apleti. U okviru svake funkcije postoje *oblasti* na koje je podeljeno gradivo (Slika 20.).

Osnovne elementarne funkcije su:

- > Polinomi
- > Racionalne funkcije
- > Eksponencijalna funkcija
- > Stepene funkcije
- > Logaritamska funkcija
- > Trigonometrijske funkcije
- > Inverzne trigonometrijske funkcije



$C = (\cos \alpha, \sin \alpha)$
 $F = (\cot \alpha, 1)$
 $D = (1, \tan \alpha)$

Trigonometrijske funkcije

Poreklo trigonometrije

Trigonometrija (lat. *trigonon* - trougao, *metron* - mera) je deo matematike koji izučava zavisnost između strana i uglova trougla (trigonometrija u užem smislu), a takođe i osobine trigonometrijskih funkcija i vezu među njima (goniometrija). Sam naziv trigonometrija asocira na operacije s trouglovima. U početku je za cilj imala izračunavanje vrednosti svih elemenata jednog trougla (visine, težinskih duži, simetrala, poluprečnika, površine i uglova) pomoću podataka dovoljnih za određivanje trougla. Njen prvobitni cilj je danas prevaziđen, pa je njena osnovna uloga izračunavanje trigonometrijskih funkcija.

Poreklo

Prvi koreni trigonometrije su nađeni u zapisima iz Egipta i Mesopotamije. Tamo je nađena vavilonska kamena ploča (oko 1900 – 1600. p.n.e.) koja sadrži probleme sa relacijama koje odgovaraju savremenom $\sec^2$. Egipatski papirus Rind (oko 1650. p.n.e.) sadrži probleme sa odnosima stranica trougla primenjenim na piramide. Niti Egipćani, niti Vavilonci nisu imali naše shvatanje mere ugla, a relacije tog tipa su smatrali osobinama trouglova, pre nego samih uglova. Prve primene trigonometrijskih funkcija bile su vezane za tetivu kruga i za poimanje da je njena dužina razapeta nad datim uglom x bila (u današnjoj terminologiji) $2 \cdot \sin \frac{x}{2}$.

- > Poreklo trigonometrije
- > Trigonometrijske funkcije
- > Pravougli trougao
- > Osnovni uglovi
- > Trigonometrijska kružnica
- > Merenje ugla
- > Funkcija $f(x) = \sin x$
- > Funkcija $f(x) = \cos x$
- > Funkcija $f(x) = \tan x$
- > Funkcija $f(x) = \cot x$
- > Osnovne trigonometrijske formule
- > Primeri
- > Zadaci za vežbu

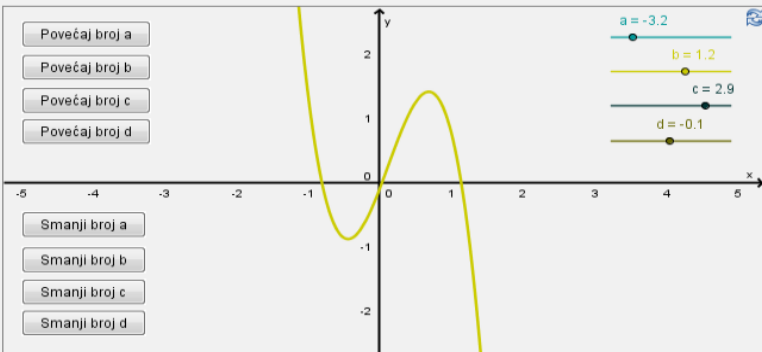
Slika 20. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz desnog menija trigonometrijskih funkcija

Svi sadržaji su prilagođeni srednjoškolskom gradivu. Dostupni su svima i pogodni za korišćenje. Učenici, za razliku od učenja iz standardnih školskih knjiga, gde mogu samo posmatrati slike i pretpostavljati šta bi se moglo desiti ako se neki parametar promeni, ovde to mogu videti i osetiti uživo. Svi apleti su interaktivni. Oni, pomerajući klizače, unoseći nove parametre, pomerajući tačke posmatraju šta se dešava sa crtežom. Učenje je na taj način daleko jednostavnije i brže.

Polinomi

Kubna funkcija, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Polinom trećeg stepena $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + cx + d$ je **kubna funkcija**, tj. funkcija koja preslikava skup realnih brojeva R u skup realnih brojeva R oblika:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$$


Controls for adjusting coefficients:

- Povećaj broj a
- Povećaj broj b
- Povećaj broj c
- Povećaj broj d
- Smanji broj a
- Smanji broj b
- Smanji broj c
- Smanji broj d

Current values:

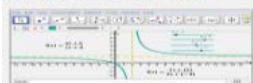
- a = -3.2
- b = 1.2
- c = 2.9
- d = -0.1

- > Pojam polinoma
- > Konstantna funkcija, $f(x) = c$
- > Linearna funkcija, $f(x) = ax + b$
- > Kvadratna funkcija, $f(x) = ax^2 + bx + c$
- > Kubna funkcija, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- > Polinom n-tog stepena $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$
- > Primene polinoma
- > Primeri
- > Zadaci za vežbu

Slika 21. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz dela strane Polinomi

Racionalne funkcije

Pojam racionalne funkcije



Funkcija

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, x \in R \setminus \{x \in R \mid Q_m(x) = 0\},$$

Gde su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi stepena n odnosno m , naziva se **racionalna funkcija**.

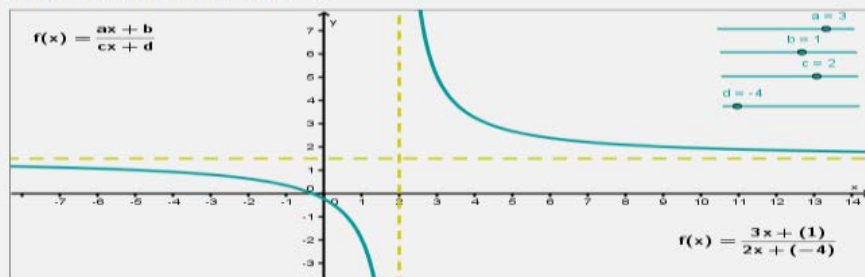
Racionalne funkcije ("polinom kroz polinom") po nastanku su nalik racionalnim brojevima ("celi broj kroz celi broj"). Sledom te sličnosti se definišu **prave i nepravne racionalne funkcije** (kao što je $\frac{3}{4}$ pravi, a $\frac{7}{2}$ nepravi razlomak).

Definicija: Racionalna funkcija $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je **prava** ako je $n < m$, u protivnom je **neprava**.

Primeri pravih racionalnih funkcija: $f(x) = \frac{-4x+2}{x^2-3x^2+2x}$, $f(x) = \frac{-x^2+3x+4}{x^2-4x^2+4x}$...

Dakle, prave racionalne funkcije su one racionalne funkcije za koje je stepen polinoma u brojiocu strogo manji od stepena polinoma u imeniocu.

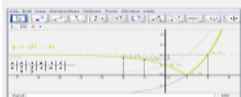
Analogno sa izdvajanjem celog broja iz nepravog razlomka, nepravoj racionalnoj funkciji se deljenjem brojioca imeniocem može izdvojiti celi deo, polinom stepena $(n-m)$.



Slika 22. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz dela strane Racionalne funkcije

Eksponencijalna funkcija

Pojam eksponencijalne funkcije



Eksponencijalne funkcije se prirodno javljaju kao matematički modeli situacija u kojima je promena neke veličine proporcionalna toj veličini. Primeri su rast populacije, prirast biomase, raspadanje radioaktivnih stvari, itd. Slična je priroda razmnožavanja pojedinih bakterija koje bi, da ne uginu približno istim tempom kojim se rađaju, eksponencijalnom eksplozijom brzo preplavile Zemlju.

Definicija

Kako za datu osnovu a , veću od 0 ($a > 0$) i različitu od jedan ($a \neq 1$) svaki realan eksponent b jednoznačno određuje vrednost stepena a^b , to jednakost:

$$f(x) = a^x, a \in R^+$$

definiše funkciju $R \rightarrow R$. To je **eksponencijalna funkcija**, jer je argument (nezavisna promenljiva) x eksponent stepena osnove a . Eksponencijalna funkcija se može zapisivati i kao skup uređenih parova:

$$f = \{(x, a^x) \mid x \in R, a \in R^+\}$$

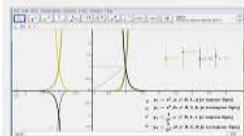
Ovaj skup se zove i **grafik** jer svaki od tih uređenih parova odgovara tački u koordinatnom sistemu xOy .



Slika 23. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz dela strane Eksponencijalna funkcija

Stepene funkcije

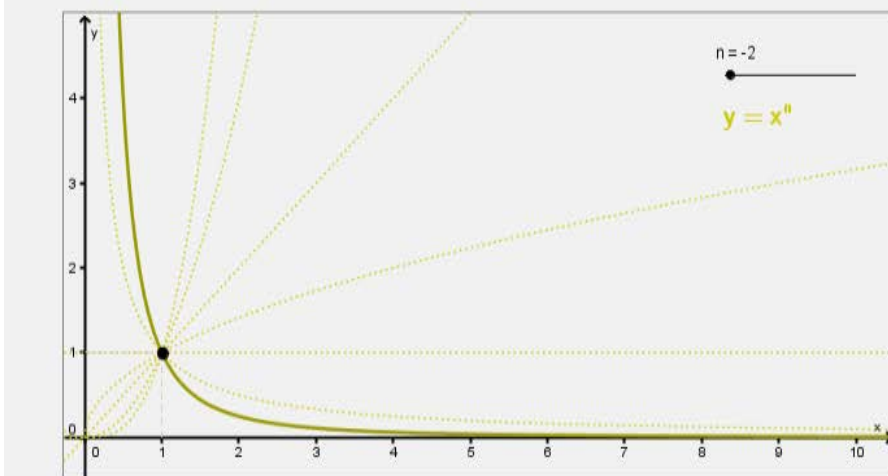
Pojam stepene funkcije



Za svaki $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definišemo funkciju $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ na način $f(x) = x^n$. Razlikujemo sledeće slučajeve:

1. $n \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{Z}$
3. $n \in \mathbb{Q}$

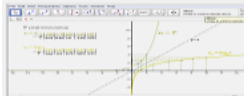
- > [Pojam stepene funkcije](#)
- > [Stepen sa celim izloziocem](#)
- > [Stepen sa prirodnim izloziocem](#)
- > [Pojam \$n\$ -tog korena](#)
- > [Stepen sa racionalnim izloziocem](#)
- > [Primeri](#)
- > [Zadaci za vežbu](#)



Slika 24. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz dela strane Stepene funkcije

Logaritamska funkcija

Pojam logaritamske funkcije



Definicija Funkcijom

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \mathbb{R} \ni x \rightarrow f(x) = a^x = y \in \mathbb{R}^+$$

ostvaruje se bijektivno preslikavanje skupa $\mathbb{R}$ na skup $\mathbb{R}^+$, pa postoji inverzna funkcija

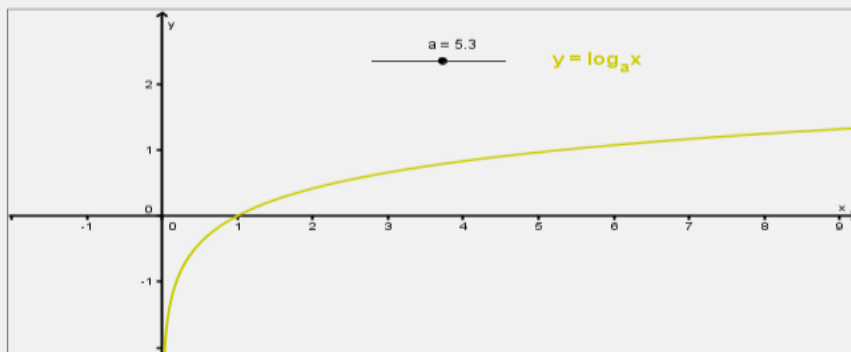
$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{R}^+ \ni y \rightarrow f^{-1}(y) = \log_a y = x \in \mathbb{R}.$$

ove funkcije koja je data sa

Funkcija

$$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0,$$

naziva se **logaritamska funkcija**.

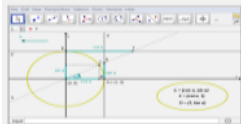


- > [Pojam logaritamske funkcije](#)
- > [Svojstva](#)
- > [Primene logaritamskih funkcija](#)
- > [Primeri](#)
- > [Zadaci za vežbu](#)
- > [Istorija](#)

Slika 25. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz dela strane Logaritamska funkcija

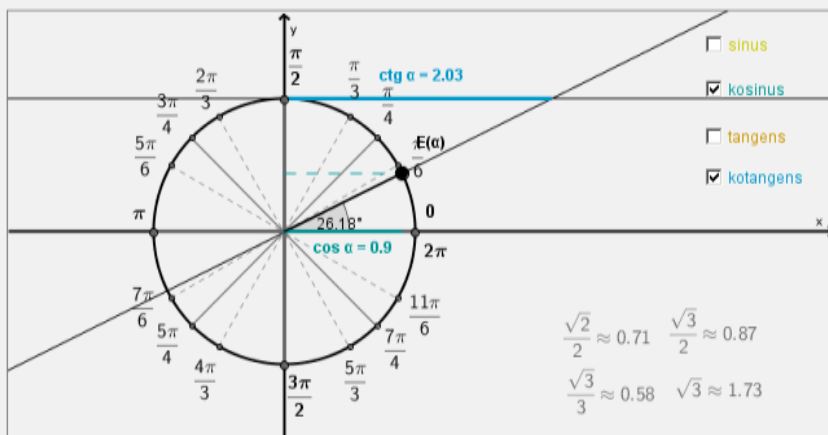
Trigonometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije



Trigonometrijske funkcije su funkcije ugla: *sinus*, *kosinus*, *tangens*, *kotangens*, *sekans*, *kosekans*. Ponekad ih nazivamo trigonometrijskim odnosima. Za tangens ćemo ovde koristiti uobičajenu anglosaksonsku oznaku *tan*, mada se kod nas se češće koristi *tg*; za kotangens, umesto *cot* mi obično pišemo *ctg*; kosekans, koji inače retko koristimo, zajedno sa anglosaksonskim *csc* pišemo i *cosec*. Ostale navedene

trigonometrijske funkcije imaju jednake skraćenice kod nas i u većem delu sveta. Danas se veoma retko sreću još dva naziva trigonometrijskih funkcija: sinus versus i kosinus versus.



- > Poreklo trigonometrije
- > Trigonometrijske funkcije
 - > Pravougli trougao
 - > Osnovni uglovi
 - > Trigonometrijska kružnica
 - > Merenje ugla
 - > Funkcija $f(x) = \sin x$
 - > Funkcija $f(x) = \cos x$
 - > Funkcija $f(x) = \tan x$
 - > Funkcija $f(x) = \cot x$
- > Osnovne trigonometrijske formule
- > Primeri
- > Zadaci za vežbu

Slika 26. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz dela strane Trigonometrijske funkcije

Inverzne trigonometrijske funkcije

Arkus kosinus $f(x) = \arccos x$

Funkcija

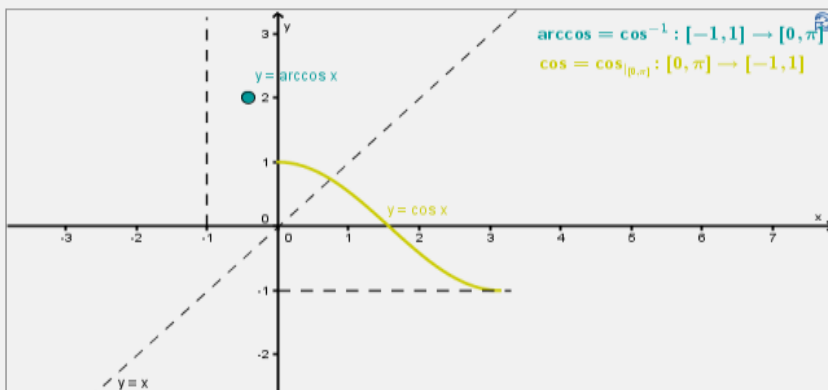
$$g_1 : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], g_1(x) = \cos x, x \in [0, \pi]$$

je neprekidna i opadajuća. Njena inverzna funkcija

$$G : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], G(x) = \arccos x, x \in [-1, 1]$$

je takođe neprekidna i opadajuća.

Grafik funkcije $y = \arccos x$ dobićete kada povlačite tačku $y = \arccos x$ levo-desno na sledećoj slici:



- > Pojam inverznih trigonometrijskih funkcija
- > Izražavanje jednih arkus-funkcija s drugima
- > Arkus sinus $f(x) = \arcsin x$
- > Arkus kosinus $f(x) = \arccos x$
- > Arkus tangens $f(x) = \arctan x$
- > Arkus kotangens $f(x) = \text{arccot} x$
- > Primeri
- > Zadaci za vežbu

Slika 27. Internet prezentacija Elementarne funkcije – prikaz dela strane Inverzne trigonometrijske funkcije

6. Zaključak

Računari i dodatna oprema su postali dragoceni i nezaobilazni alati u svim sferama društvenog života. Sa ovim alatima savremenog doba treba upoznati decu još u naranjnoj fazi procesa obrazovanja. Da bi ovo bilo postignuto neophodno je ulaganje u popularizaciju ovakvog vida obrazovanja, u razvoj tehnike i tehnologija i kupovinu potrebne računarske opreme, kao i ulaganje u obuku nastavnika za rad u takvim uslovima.

Primena računara u obrazovanju predstavlja neminovnost vremena u kome živimo i koje dolazi. Namera je da se tradicionalan pristup nastavi koji podrazumeva direktnu interakciju učenika i nastavnika, sve više zameni savremenim modelom nastave koji u ovu interakciju uvodi posrednika-računar, što doprinosi unapređivanju kvaliteta nastave bilo kao podrška ili zamena za deo još uvek postojeće tradicionalne nastave.

Ovaj rad se upravo bavi značajem uvođenja računarske tehnike u nastavni proces. Predstavljen je interaktivni program GeoGebra. Pokazana je njegova jednostavnost i raznovrsnost, što ga čini idealnim alatom za kreiranje interaktivnih materijala za elektronsko učenje. Veza koja je ostvarena između algebre i geometrije pomaže učenicima da vizuelizuju pojmove iz algebre. Kreirana je prezentacija gde se nalaze edukativni materijali koji se baziraju na osnovama matematike: interaktivni materijali, apleti, dinamički i grafički prikazi, animacije. Svi ovi edukativni materijali se odnose na nastavne celine vezane za funkcije, tj. za osnovne elementarne funkcije. Opisano je kako se uz upotrebu apleta, interaktivnih sadržaja, animacija, može unaprediti nastava matematike. Pokazano je kako se kreiraju apleti, i njihov interaktivan pristup nastavnim sadržajima.

Na osnovu napred izloženog, može se zaključiti da je osnovni cilj uvođenja računarske tehnike u nastavni proces brzo, precizno i pouzdano sticanje znanja.

Literatura

- [BeB] Beban-Brkić J., *Elementarne funkcije*, Geodetski fakultet
<http://www.geof.unizg.hr/~jbeban/M1/07.pdf>
- [Hoh07] Hohenwarter M., Preiner, J., Taeil Yi, *Incorporating GeoGebra into Teaching Mathematics at the College Level*, Proceedings of ICTCM 2007, Boston, MA, 2007.
- [Hoh08] Hohenwarter, M., Preiner, J., *Dynamic Mathematics with GeoGebra*, Journal for Online Mathematics and Its Applications, Volume 7, 2010., Article ID 1448.
- [Hrnj96] Hrnjica B., *Matematika odabrana poglavlja*, Bihać, 1996.
- [Mar11a] Marić M., Andrić V., Marić M., *GeoGebra u nastavi matematike – mogućnosti i primene*. Simpozijum Matematika i primene, Matematički fakultet, Beograd, 28. maj 2011.
- [Mar11b] Marić M., Marić M., *Izrada hipertekstualno, interaktivnog nastavnog materijala napravljenog korišćenjem paketa GeoGebra*, Informatika 2011., strane 31-35
- [Peć11] Pećanac R., Lambić D., Marić M. (2011) *The influence of the use of educational software on the effectiveness of communication models in teaching*. The New Educational Review, Vol. 26, No. 4. pp 60-70 2011.
- [Kra07] Rac Marinić Kragić E., *Funkcije u nastavi matematike*, Zagreb, 2007.
- [Rad12] Radović S., *An innovative approach in teaching mathematics in elementary and high schools by using the software package GeoGebra*, Mathematica Balkanica Vol. 26, 2012, Facs. 1-2.

- [Voj04] Vojvodić G., Petrović V., Despotović R., Šešelja B., *Matematika za 2. razred srednje škole*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2004.
- [GBG] GeoGebra Centar Beograd <http://geogebra.matf.bg.ac.rs/>
- [Geo] Hohenwarter M. i Hohenwarter J., *GeoGebra-zvanično uputstvo*,
<http://www.geogebra.org>