Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Vanja Nikolić

Metoda dve mreže

Master rad

Beograd, 2011.

Sadržaj

Predgovor

U ovom radu prikazana je primena metode dve mreže na rešavanje nekih problema numeričke matematike. Osnovna ideja metode jeste da komplikovan problem (nerazdvojen sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina, granične probleme sa nepovezanim domenima, problem sopstvenih vrednosti, itd.) rešimo na grubljoj mreži sa korakom H, a da jednostavniji problem (Poasonova jednačina, razdvojen sistem parcijalnih jednačina, itd.) kao korekciju rešimo na finijoj mreži sa korakom h $(h \ll H)$. Takođe, korišćenje podataka sa različitih mreža može se iskoristiti za procenu greške nekih numeričkih metoda (Rungeov princip ocene greške), kao i za dobijanje aproksimacije tražene vrednosti povećane tačnosti (Ričardsonova ekstrapolacija).

Rad je podeljen na šest poglavlja.

U prvom poglavlju opisana je Rungeova ocena greške i data je njena primena na ocenu greške numeričke integracije i numeričkog rešavanja Košijevog problema za obične diferencijalne jednačine.

U drugom poglavlju izložena je Ričardsonova metoda ekstrapolacije. Izvedene su Rombergove formule i primerom je demonstrirana njihova efikasnost.

Treće poglavlje sadrži osnovne teorijske rezultate koji se tiču postavljanja varijacione formulacije graničnih problema za parcijalne diferencijalne jednačine eliptičkog tipa.

U četvrtom poglavlju dvomrežna metoda konačnih elemenata je primenjena na granični problem Šredingerovog tipa za razdvajanje sistema parcijalnih jednačina. Numeričkim eksperimentom je ilustrovan izloženi algoritam.

Peto poglavlje sadrži opis dvomrežnog algoritma za granične probleme u nepovezanim oblastima. Kao modelni problem razmatran je sistem od dve jednačine eliptičkog tipa koji za domen ima uniju dva disjunktna pravougaonika.

U šestom poglavlju metoda dve mreže je primenjena na problem sopstvenih vrednosti za parcijalne jednačine eliptičkog tipa. Dat je numerički primer koji ilustruje opisani algoritam.

Zahvaljujem se mentoru, prof. dr Bošku Jovanoviću, na strpljenju i brojnim korisnim sugestijama datim tokom izrade ovog rada.

Matematički fakultet — Vanja Nikolić

Beograd, 2011.

1

Rungeov princip ocene greške

Rungeov princip ocene greške može da bude primenjen na bilo koju numeričku metodu kod koje se greška može predstaviti u obliku $R(h) = Ch^k$, pri čemu je h parametar diskretizacije, k fiksiran broj, a C konstanta.
Neka treba rešiti zadatak čije je tačno rešenje A. Rungeova procena greške zasniva se na izvršavanju proračuna tačne vrednosti na dve različite mreže. Proračun A_h vršimo na finijoj mreži sa korakom h, a proračun A_H na grubljoj mreži sa korakom $H = 2h$. Dalje imamo da je:

$$A = A_{2h} + R(2h) = A_{2h} + C2^k h^k,$$
$$A = A_h + R(h) = A_h + Ch^k.$$

Izjednačavanjem desnih strana ovih jednakosti dobijamo:

$$A_{2h} + C2^k h^k = A_h + Ch^k,$$

tj. $R(h) \approx \dfrac{A_h - A_{2h}}{2^k - 1}$. Odavde dalje dobijamo da je:

$$A = A_h + R(h) \approx A_h + \frac{A_h - A_{2h}}{2^k - 1}.$$

Ilustrovaćemo Rungeovu ocenu greške na primeru numeričke integracije i Košijevih problema za obične diferencijalne jednačine.

1.1 Numerička integracija

Neka treba izračunati približnu vrednost integrala

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podelimo interval integracije $[a, b]$ na n jednakih delova dužine $h = \frac{a-b}{n}$. Ako primenimo neku kvadraturnu formulu

$$I \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

izraz za grešku je oblika $R(h) = Ch^k$.
Poznato je da je za trapeznu kvadraturnu formulu:

$$I \approx \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n],$$

gde je $f_i = f(a + ih),\ i = 0, \ldots, n$, izraz za grešku oblika $R(h) = Ch^2$, tj. $k = 2$, pa imamo da je

$$R(h) \approx \frac{I_h - I_{2h}}{3}.$$

Za Simpsonovu kvadraturnu formulu

$$I \approx \frac{h}{3}[f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{n-2}) + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{n-1})],$$

pri čemu je n parno, je $k = 4$, pa imamo da je

$$R(h) \approx \frac{I_h - I_{2h}}{15}.$$

1.2 Obične diferencijalne jednačine

Posmatrajmo Košijev problem za diferencijalnu jednačinu prvog reda:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0. \tag{1.3}$$

Formulom

$$y(x + h) \approx y(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i k_i(h),$$

gde je za $y \equiv y(x)$ i $x_i = x + \alpha_i h$, $0 = \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n \leq 1$,
$k_1(h) = hf(x, y)$,
$k_2(h) = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1(h))$,
$\vdots$
$k_n(h) = hf(x + \alpha_n h, y + \beta_{n1} k_1(h) + \ldots + \beta_{n,n-1} k_{n-1}(h))$
i različitim izborom parametara $\alpha_2, \ldots, \alpha_n, c_1, \ldots, c_n$ i $\beta_{ij}, 0 < j < i \leq n$, definisane su različite metode tipa Runge-Kuta.
Neka je greška metode na jednom koraku

$$\epsilon(h) = y(x + h) - [y(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i k_i(h)].$$

Pretpostavimo da je

$$\epsilon(0) = \epsilon'(0) = ... = \epsilon^{(p)}(0) = 0$$

za proizvoljnu dovoljno glatku funkciju $f(x, y)$, a da postoji glatka funkcija $f(x, y)$ za koju je

$$\epsilon^{(p+1)}(0) \neq 0.$$

Tada važi

$$\epsilon(h) = \sum_{i=0}^{p} \frac{\epsilon^{(i)}}{i!} h^i + \frac{\epsilon^{p+1}(\theta h)}{(p+1)!} h^{p+1} = \frac{\epsilon^{p+1}(\theta h)}{(p+1)!} h^{p+1},\ 0 < \theta < 1.$$

Broj p je red greške metode.
Glavni član u izrazu za grešku približnog rešenja određenog metodom reda p na jednom koraku je

$$\frac{\epsilon^{p+1}(0)}{(p+1)!}h^{p+1}.$$

Primenićemo Rungeovu ocenu greške.
Označimo sa $y_{2,h}$ približno rešenje u tački $x+2h$ dobijeno tako što je prvo nađeno rešenje u tački $x+h$, a zatim pomoću njega u tački $x+2h$. Možemo smatrati da greška na sledećem koraku ima isti glavni član jer je za malo h tačka $(x+h, y(x)+\sum_{i=1}^{n} c_i k_i(h))$ bliska tački $(x, y(x))$. Zbog toga je

$$y(x+2h) - y_{2,h} \sim 2\frac{\epsilon^{p+1}(0)}{(p+1)!}h^{p+1}.$$

Sada ćemo računati direktno sa korakom $H = 2h$. Dobijeno približno rešenje u tački $x+2h$ označimo sa $y_{1,2h}$. Važi

$$y(x+2h) - y_{1,2h} \sim \frac{\epsilon^{p+1}(0)}{(p+1)!}(2h)^{p+1}$$

Iz prethodne dve jednačine dobijamo da je: $2\frac{\epsilon^{p+1}(0)}{(p+1)!}h^{p+1} \sim \frac{y_{2,h} - y_{1,2h}}{2^p - 1}$. Dakle, popravljena vrednost približnog rešenja je

$$y(x+2h) \approx y_{2,h} + \frac{y_{2,h} - y_{1,2h}}{2^p - 1}.$$

2

Ričardsonova ekstrapolacija

Neka treba rešiti neki zadatak čije je tačno rešenje A_*. Pretpostavimo da zadatak nije moguće tačno rešiti, nego da umesto toga primenjujemo neku numeričku metodu za njegovo rešavanje. Za izabrani korak $h > 0$ dobićemo aproksimaciju generisanu nekom funkcijom $A(h)$ koja zavisi od h. Očekujemo da $A(h) \to A(0) = A_*$, kad $h \to 0$. Osnovna ideja je da izvršimo proračune za više različitih vrednosti h, a da potom ekstrapoliramo vrednost funkcije u $h = 0$.

Pretpostavimo da znamo red k tačnosti metode. Pođimo od koraka $h_1 = h$. Tada je

$$A_* = A(h) + c_k h^k + c_{k+1} h^{k+1} + c_{k+2} h^{k+2} + \ldots, \tag{2.1}$$

za neke konstante $c_k, c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots$
Ovo možemo zapisati u obliku

$$A_* = A(h) + c_k h^k + O(h^{k+1}). \tag{2.2}$$

Pređimo sada na korak $h_2 = q^{-1} h, q > 1$. Dobićemo

$$A_* = A\left(\frac{h}{q}\right) + c_k \left(\frac{h}{q}\right)^k + c_{k+1} \left(\frac{h}{q}\right)^{k+1} + c_{k+2} \left(\frac{h}{q}\right)^{k+2} + \ldots \tag{2.3}$$

Ako pomnožimo jednačinu (2.3) sa q^k i od nje oduzmemo (2.1) dobićemo

$$(q^k - 1)A \quad = q^k A\left(\tfrac{h}{q}\right) - A(h) + O(h^{k+1}). \tag{2.4}$$

Definišimo

$$A_1(h) = A(h), \tag{2.5}$$

$$A_2(h) = \frac{q^k A\left(\frac{h}{q}\right) - A(h)}{q^k - 1}. \tag{2.6}$$

Iz (2.4) sledi da je

$$A_* = A_2(h) + O(h^{k+1}). \tag{2.7}$$

Prema tome, A_2 aproksimira A_* sa tačnošću $O(h^{k+1})$, za razliku od A_1 koja je to radila sa tačnošću $O(h^k)$. Dakle, ovim smo povećali tačnost metode.

Postupak nalaženja tačnije približne vrednosti $A_2(h)$ pomoću približnih vrednosti $A(h)$ i $A(\frac{h}{q})$, pomoću formule (2.6), naziva se Ričardsonova metoda ekstrapolacije.

Pokazuje se da je za $A_1(h) \neq A_1(\frac{h}{q})$ tačnija približna vrednost $A_2(h)$ izvan segmenta čiji su krajevi $A_1(h)$ i $A_1(\frac{h}{q})$.
Ako je $A_1(h) < A_1(\frac{h}{q})$, onda je

$$A_2(h) = A_1\left(\frac{h}{q}\right) + \frac{A_1\left(\frac{h}{q}\right) - A_1(h)}{q^k - 1} > A_1\left(\frac{h}{q}\right),$$

pa $A_2(h, q^{-1}h) \notin [A_1(h), A_1\left(\frac{h}{q}\right)]$, a ako je $A_1(h) > A_1\left(\frac{h}{q}\right)$, onda je

$$A_2(h) = A_1\left(\frac{h}{q}\right) + \frac{A_1(\frac{h}{q}) - A_1(h)}{q^k - 1} < A_1(\frac{h}{q}),$$

pa $A_2(h, q^{-1}h) \notin [A_1\left(\frac{h}{q}\right), A_1(h)]$.

Naravno, ovde ne moramo da se zaustavimo. Vrednosti $A_2(h)$ i $A_2(q^{-1}h)$ možemo iskombinovati da bismo dobili aproksimaciju tačnosti $O(h^{k+2})$. Dakle, da bismo postigli tačnost $O(h^{k+2})$ potrebne su nam vrednosti $A_1(h), A_1(q^{-1}h)$ i $A_1(q^{-2}h)$.
Da bismo izračunali $A_{n+1}(h)$ koje aproksimira A_* sa tačnošću $O(h^{k+n})$ potrebno nam je $n+1$ vrednosti: $A_1(h), A_1(q^{-1}h), \ldots, A_1(q^{-n}h)$.

$$\begin{array}{lllll}
O(h^k) & O(h^{k+1}) & O(h^{k+2}) & O(h^{k+3}) & \ldots \\
\hline
A_1(h) & & & & \\
 & A_2(h) & & & \\
A_1(q^{-1}h) & & A_3(h) & & \\
 & A_2(q^{-1}h) & & A_4(h) & \ldots \\
A_1(q^{-2}h) & & A_3(q^{-1}h) & \vdots & \\
 & A_2(q^{-2}h) & \vdots & & \\
A_1(q^{-3}h) & \vdots & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

2.1 Rombergova integracija

Neka treba izračunati integral:

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

Podelimo segment $[a, b]$ na n jednakih delova dužine $h = \dfrac{b-a}{n}$ i iskoristimo trapeznu kvadraturnu formulu:

$$I = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n] + R(h), \tag{2.10}$$

gde je $R(h) = O(h^2)$. Sada ćemo primeniti Ričardsonovu ekstrapolaciju za $k = 2$, $q = 2$, $A(h) = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n]$. Uvedimo oznake:

$$R_i^{(0)} = A(\frac{h}{2^i}), \quad i \geq 0$$
$$R_i^{(j)} = \frac{4^j R_i^{(j-1)} - R_{i-1}^{(j-1)}}{4^j - 1}, \qquad i \geq j > 0.$$

Ovaj postupak se naziva *Rombergova integracija.* Ona omogućava dobijanje kvadraturnih formula veće tačnosti pomoću kvadraturnih formula manje tačnosti.

Izračunavanje integrala (2.9) se, dakle, svodi na formiranje tabele u čijoj se prvoj koloni nalaze približne vrednosti dobijene primenom trapezne kvadraturne formule za korake: $h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \ldots$ U drugoj, trećoj, ... koloni nalaze se približne vrednosti dobijene pomoću Rombergovih formula.

$$\begin{array}{ccccc}
O(h^2) & O(h^3) & O(h^4) & O(h^5) & \ldots \\
\hline
R_0^{(0)} & & & & \\
 & R_1^{(1)} & & & \\
R_1^{(0)} & & R_2^{(2)} & & \\
 & R_2^{(1)} & & R_3^{(3)} & \ldots \\
R_2^{(0)} & & R_3^{(2)} & \vdots & \\
 & R_3^{(1)} & \vdots & & \\
R_3^{(0)} & \vdots & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Ako iskoristimo Simpsonovu kvadraturnu formulu, biće:

$$I = \frac{h}{3}[f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{n-2}) + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{n-1})] + R(h),$$

pri čemu je n parno i $R(h) = O(h^4)$. Primenimo Ričardsonovu ekstrpolaciju za $k = 4$, $q = 2$ i $A(h) = \frac{h}{3}[f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + \ldots + f_{n-2}) + 4(f_1 + f_3 + \ldots + f_{n-1})]$:

$$R_i^{(0)} = A(\frac{h}{2^i}), \quad i \geq 0$$
$$R_i^{(j)} = \frac{16^j R_i^{(j-1)} - R_{i-1}^{(j-1)}}{16^j - 1}, \qquad i \geq j > 0.$$

Sada se izračunavanje integrala (2.9) svodi na formiranje tabele u čijoj se prvoj koloni nalaze približne vrednosti dobijene primenom Simpsonove kvadraturne formule za korake: $h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}, \ldots$ U drugoj, trećoj, ... koloni nalaze se približne vrednosti dobijene pomoću Rombergovih formula.

2.2 Primer

Ilustrujmo efikasnost Rombergove integracije na sledećem zadataku čije tačno rešenje je poznato:

$$I = \int_0^1 x e^x \, \mathrm{d}x = 1.$$

Primenimo Rombergove formule bazirane na trapeznim kvadraturnim formulama. Dobijeni rezultati prikazani su u tabeli (2.1). Sva izračunavanja vršena su u programu MATLAB 7.

Tabela 2.1.

1.359140914229523	0	0
1.091750774789793	1.002620728309884	0
1.023064479052757	1.000169047140412	1.000005601729114
1.005774107367820	1.000010650139507	1.000000090339447
1.001444027067708	1.000000666967670	1.000000001422881
1.000361038046700	1.000000041706364	1.000000000022277
0	0	0
0	0	0
0	0	0
1.000000002857071	0	0
1.000000000011507	1.000000000000348	0
1.000000000000045	1.000000000000000	1.000000000000000

Prvi element prve kolone $R_0^{(0)}$ izračunat je korišćenjem trapezne kvadraturne formule sa korakom $h = \frac{1}{2}$. Poslednji element $R_6^{(0)}$ je dobijen primenom trapezne kvadraturne formule sa korakom $h = \frac{1}{64}$. Njegovo izračunavanje zahteva određivanje vrednosti podintegralne funkcije u 129 čvorova. Vidimo da je izračunat sa 4 tačne cifre. Posle samo nekoliko koraka Rombergove metode dobijamo rezultat koji je tačan u dvostrukoj preciznosti.

3

Slaba forma eliptičkih graničnih problema

U ovom poglavlju biće izneti neki osnovi rezultati koji se tiču postavljanja varijacione formulacije eliptičkih graničnih problema.
Granični problemi za parcijalne diferencijalne jednačine eliptičkog tipa predstavljaju široku klasu matematičkih zadataka kojima se opisuju stacionarni fizički sistemi, tj. sistemi nezavisni od vremena. Klasična rešenja tih zadataka moraju da zadovolje diferencijalnu jednačinu i granični uslov u svakoj tački domena, odnosno njegove granice, pa moraju biti neprekidne, tj. neprekidno diferencijabilne funkcije ako se nalaze pod znakom izvoda.
Pomoću varijacione formulacije problema formuliše se slabo rešenje graničnog zadatka koje postoji uz znatno slabije uslove za koeficijente diferencijalne jednačine. Njegovu egzistenciju je znatno lakše pokazati, a svako slabo rešenje je ujedno i klasično ako je dovoljno glatko.

3.1 Uvodni primer

Kao modelni zadatak razmotrimo sledeći Dirihleov granični problem u ograničenoj oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:

$$-\Delta u + u = f, \quad x \in \Omega, \tag{3.1}$$

$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3.2}$$

Klasično rešenje zadatka (3.1), (3.2) je funkcija $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ koja diferencijalnu jednačinu (3.1) zadovoljava u svakoj tački domena i poništava se u svakoj tački granice $\partial\Omega$. Da bi takvo rešenje postojalo desna strana f mora biti neprekidna funkcija.
Pretpostavimo da granični problem (3.1), (3.2) ima klasično rešenje i pomnožimo jednačinu (3.1) proizvoljnom funkcijom $\omega \in C_0^1(\Omega)$. Parcijalnom integracijom dobijamo:

$$-\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n)\omega \mathrm{d}\sigma + \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla\omega + u\omega)\mathrm{d}x = \int_{\Omega} f\omega \mathrm{d}x, \tag{3.3}$$

gde je n jedinična spoljašnja normala na $\partial\Omega$. Budući da se funkcija ω poništava na rubu domena Ω dobijamo:

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \omega + u\omega)\mathrm{d}x = \int_\Omega f\omega \mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

Jednačina (3.4) se naziva slabom formom jednačine (3.1). Ona ima smisla i pod slabijim pretpostavkama:

$$u \in H^1(\Omega), \quad \omega \in H_0^1(\Omega), \quad f \in L_2(\Omega).$$

Funkcija ω naziva se test funkcija.
Definišimo:

$$\begin{aligned} a(u,\omega) &= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \omega + u\omega)\mathrm{d}x, \\ l(\omega) &= \int_\Omega f\omega \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Zadatak (3.1), (3.2) sada možemo da zapišemo u obliku:

$$\begin{cases} \text{Naći} \quad u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{tako da je} \\ a(u,\omega) = l(\omega), \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Dakle, dobili smo generalizaciju pojma rešenja diferencijalne jednačine. Pokažimo da je svako rešenje prethodnog zadatka koje je dva puta neprekidno diferencijabilno ujedno i rešenje zadatka (3.1), (3.2). Petpostavimo da imamo funkciju $u(x)$ koja je rešenje (3.4) i pripada prostoru $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Primenom formule parcijalne integracije u (3.4) dobijamo

$$-\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n)\omega \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega (\Delta u - u + f)\omega \mathrm{d}x, \quad \forall \omega \in C_0^1(\Omega),$$

tj.

$$\int_\Omega (\Delta u - u + f)\omega \mathrm{d}x = 0, \quad \forall \omega \in C_0^1(\Omega).$$

Odavde sledi da je

$$\Delta u - u + f = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

3.2 Varijaciona aproksimacija

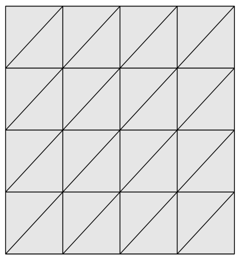
Označimo sa H realan Hilbertov prostor. U njemu postoji skalarni proizvod koji ćemo označiti sa $(\cdot,\cdot)$, on indukuje normu

$$\|u\|_H = \sqrt{(u,u)}$$

i u toj normi H je potpun prostor. $H^\star$ je prostor svih linearnih i neprekidnih funkcionala na H, on je normiran prostor sa normom

$$\|l\|_{H^\star} = \sup_{u \neq 0} \frac{l(u)}{\|u\|}.$$

Kada granični problem zapišemo u slaboj formi njegova numerička aproksimacija se svodi na zamenu beskonačnodimenzionalnog prostora H nekim njegovim potprostorom konačne dimenzije $S^h \subset H$. Mogući su različiti načini konstrukcije prostora S^h.
Metoda konačnih elemenata konstruiše prostor S^h kao prostor deo po deo polinoma. Prvo se domen na kojem je zadatak postavljen aproksimira unijom jednostavnih skupova koji čine triangulaciju domena. Funkcije iz S^h se zatim definišu kao polinomi određenog stepena na svakom pojedinačnom elementu iz triangulacije, uz određene uslove neprekidnosti na granicama susednih elemenata. Parametar h predstavlja dijametar najvećeg elementa triangulacije i pokazuje sa da prostor S^h aproksimira H tim bolje što je h manje.



Slika 3.1. Triangulacija domena

Apstraktni varijacioni zadatak ima sledeći oblik:

$$\begin{cases} \text{Naći} \quad u \in H \quad \text{tako da je} \\ a(u,\omega) = l(\omega), \quad \forall \omega \in H. \end{cases}$$

Odabirom konačnodimenzionalnog potprostora dolazimo do aproksimativnog varijacionog zadatka:

$$\begin{cases} \text{Naći} \quad u \in S^h \quad \text{tako da je} \\ a(u,\omega) = l(\omega), \quad \forall \omega \in S^h. \end{cases}$$

Ako želimo da obuhvatimo i situaciju u kojoj integrale u varijacionoj jednačini izračunavamo primenom neke formule numeričke integracije, onda treba prethodni diskretni zadatak zameniti zadatkom sledećeg oblika:

$$\begin{cases} \text{Naći} \quad u \in S^h \quad \text{tako da je} \\ a_h(u,\omega) = l_h(\omega), \quad \forall \omega \in S^h, \end{cases}$$

gde forme $a_h : S^h \times S^h \to \mathbb{R}$ i $l_h : S^h \to \mathbb{R}$ aproksimiraju $a(\cdot,\cdot)$ i $l(\cdot)$.

3.3 Laks-Milgramova lema

Laks-Milgramova lema predstavlja osnovni egzistencijalni rezultat na kom se bazira teorija slabih rešenja eliptičkih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Definicija: Preslikavanje $a : H \times H \to \mathbb{R}$ je bilinearna forma ako je linearno po svakoj promenljivoj posebno, tj. ako važi:

$$\begin{aligned} &a(\alpha u + \beta v, \omega) = \alpha a(u, \omega) + \beta a(v, \omega), \\ &a(u, \alpha v + \beta \omega) = \alpha a(u, v) + \beta a(v, \omega), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall u, v, \omega \in H. \end{aligned}$$

Definicija: Bilinearna forma $a : H \times H \to \mathbb{R}$ je ograničena ako postoji konstanta M takva da važi

$$|a(u, \omega)| \leq M \|u\|_H \|\omega\|_H, \quad \forall u, \omega \in H.$$

Sledeće svojstvo je esencijalno za Laks-Milgramovu lemu.

Definicija: Bilinearna forma $a : H \times H \to \mathbb{R}$ je koercivna ako postoji konstanta $\alpha > 0$ tako da važi:

$$\alpha \|v\|_H^2 \leq a(v, v) \quad \forall v \in H.$$

Lema (Laks-Milgram). *Neka je H Hilbertov prostor i neka je $a : H \times H \to \mathbb{R}$ bilinearna, ograničena i koercivna forma. Tada za svako $l \in H^\star$ problem*

$$\begin{cases} \textit{Naći} \quad u \in H \quad \textit{tako da je} \\ a(u, \omega) = l(\omega), \quad \forall \omega \in H. \end{cases}$$

ima jedinstveno rešenje $u \in H$.

Dokaz. Za svako $u \in H$ preslikavanje $u \to a(u, \omega)$ je neprekidna linearna forma na H. Iz Risove teoreme o reprezentaciji linearnog ograničenog funkcionala sledi da postoji element $A(u) \in H$ takav da je

$$a(u, \omega) = (A(u), \omega), \quad \forall \omega \in H.$$

Iz bilinearnosti forme $a(u, \omega)$ sledi linearnost preslikavanja $u \mapsto A(u)$. Uzimajući $\omega = A(u)$ dobijamo

$$\|A(u)\|_H^2 = a(u, A(u)) \leq M \|u\|_H \|A(u)\|_H,$$

odakle sledi neprekidnost $u \mapsto A(u)$.
Iz Risove teoreme sada sledi da postoji $f \in H$ tako da je $\|f\|_H = \|l\|_{H^\star}$ i

$$l(\omega) = (f, \omega), \quad \forall \omega \in H.$$

Sada je varijacioni problem ekvivalentan problemu:
Naći $u \in H$ tako da je

$$A(u) = f. \tag{3.5}$$

Da bismo dokazali teoremu treba dakle pokazati da je operator $A : H \to H$ bijektivan. Iz koercivnosti $a(u, \omega)$ sledi

$$\alpha \|u\|_H^2 \leq a(u, u) = (A(u), u) \leq \|A(u)\|_H \|u\|_H,$$

odavde sledi

$$\alpha \|u\|_H \leq \|A(u)\|_H, \quad \forall u \in H, \tag{3.6}$$

pa je operator A injektivan.
Pokažimo da je operator A surjektivan, tj. da važi $\mathrm{Im}(A) = H$. Dovoljno je pokazati da je $\mathrm{Im}(A)$ zatvoren u H i da je $\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \{0\}$. Zaista, u tom slučaju je $H = \{0\}^{\perp} = (\mathrm{Im}(A)^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(A)} = \mathrm{Im}(A)$, odakle sledi surjektivnost A.
Neka je $A(u_n)$ niz u $\mathrm{Im}(A)$ koji konvergira ka b u H. Iz (3.6) imamo da je

$$\alpha \|u_n - u_m\|_H \leq \|A(u_n) - A(u_p)\|_H \to 0, \quad n, m \to \infty.$$

Dakle, $\{u_n\}$ je Košijev niz u H, pa konvergira ka $u \in H$. Kako je A neprekidan sledi da $A(u_n)$ konergira ka $A(u) = b$. To znači da $b \in \mathrm{Im}(A)$, pa je $\mathrm{Im}(A)$ zatvoren.
Neka $\omega \in \mathrm{Im}(A)^{\perp}$, iz koercivnosti $a(u, \omega)$ sledi

$$\alpha \|\omega\|_H^2 \leq a(\omega, \omega) = (A(\omega), \omega) = 0,$$

a odavde je $\omega = 0$ i $\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \{0\}$.
Dakle, operator A je bijektivan. $\square$

Ako su ispunjeni svi uslovi koji obezbeđuju da se Laks-Milgramova lema može primeniti na varijacioni problem, tada isti uslovi obezbeđuju jedinstvenu rešivost njegove numeričke aproksimacije jer je jedina razlika između njih u funkcionalnom prostoru. Kako je svaki konačnodimenzionalni potprostor Hilbertovog prostora i sam Hilbertov prostor, vidimo da ostaju ispunjene sve pretpostavke ove leme.

4

Granični problem Šredingerovog tipa

U ovom poglavlju ćemo demonstrirati primenu metode dve mreže za razdvajanje sistema parcijalnih jednačina na primeru graničnog problema Šredingerovog tipa. Dvomrežna diskretizacija se zasniva na uvođenju dva prostora konačnih elemenata različitih dimenzija kojima odgovaraju finija i grublja triangulacija domena. Primenjujući dva prostora konačnih elemenata različitih dimenzija polazni problem rešavamo samo na grubljoj mreži, dok na finijoj mreži rešavamo dve razdvojene Poasonove jednačine.
Biće pokazano da se uz odgovarajući izbor grublje mreže postiže asimptotski optimalna tačnost.

4.1 Postavka problema

Razmotrimo sledeći granični problem Šredingerovog tipa:

$$-\Delta\psi(x) + V(x)\psi(x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{4.1}$$

$$\psi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{4.2}$$

gde je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ poligonalan, konveksan skup. Funkcija potencijala $V(x)$, kao i funkcije $\psi(x)$ i $f(x)$ su kompleksne, tj.

$$\begin{aligned} V(x) &= V_1(x) + iV_2(x), \\ f(x) &= f_1(x) + if_2(x), \\ \psi(x) &= \psi_1(x) + i\psi_2(x). \end{aligned}$$

Postavljeni problem je ekvivalentan sledećem:

$$-\Delta\psi_1(x) + V_1(x)\psi_1(x) - V_2(x)\psi_2(x) = f_1(x), \quad x \in \Omega \tag{4.3}$$

$$-\Delta\psi_2(x) + V_1(x)\psi_2(x) + V_2(x)\psi_1(x) = f_2(x), \quad x \in \Omega \tag{4.4}$$

$$\psi_1(x) = 0, \quad \psi_2(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{4.5}$$

Izvedimo slabu formu ovog problema. Uvedimo sledeće vektorske funkcije:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}(x) &= (\psi_1(x), \psi_2(x)), \\ \boldsymbol{V}(x) &= (V_1(x), V_2(x)), \\ \boldsymbol{f}(x) &= (f_1(x), f_2(x)). \end{aligned}$$

Za proizvoljnu vektorsku funkciju $\boldsymbol{\omega}(x) = (\omega_1(x), \omega_2(x))$ neka je

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^1\times H^1} = \sqrt{\|\omega_1\|^2_{H^1} + \|\omega_2\|^2_{H^1}},$$
$$\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^2\times H^2} = \sqrt{\|\omega_1\|^2_{H^2} + \|\omega_2\|^2_{H^2}}.$$

Uvedimo oznaku $\leq_c$ koja je ekvivalentna $\leq C$ za neku pozitivnu konstantu C.

Množenjem jednačina (4.3) i (4.4) test funkcijama $\omega_1, \omega_2 \in H^1_0(\Omega)$ respektivno i njihovim sabiranjem dobijamo:

$$\int_\Omega (-\Delta\psi_1\omega_1)\mathrm{d}x + \int_\Omega (V_1\psi_1\omega_1 - V_2\psi_2\omega_1)\mathrm{d}x - \int_\Omega \Delta\psi_2\omega_2\mathrm{d}x + \int_\Omega (V_1\psi_2\omega_2 + V_2\psi_1\omega_2)\mathrm{d}x$$
$$= \int_\Omega f_1\omega_1\mathrm{d}x + \int_\Omega f_2\omega_2\mathrm{d}x.$$

Ako primenimo parcijalnu integraciju i iskoristimo činjenicu da se test funkcije poništavaju na rubu domena dobijamo

$$\int_\Omega \nabla\psi_1\cdot\nabla\omega_1\mathrm{d}x + \int_\Omega (V_1\psi_1\omega_1 - V_2\psi_2\omega_1)\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla\psi_2\cdot\nabla\omega_2\mathrm{d}x + \int_\Omega (V_1\psi_2\omega_2 + V_2\psi_1\omega_2)\mathrm{d}x$$
$$= \int_\Omega f_1\omega_1\mathrm{d}x + \int_\Omega f_2\omega_2\mathrm{d}x.$$

Uvedimo sledeće oznake:

$$l(\boldsymbol{\omega}) = \int_\Omega f_1\omega_1\mathrm{d}x + \int_\Omega f_2\omega_2\mathrm{d}x,$$
$$a(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\omega}) = a^1(\psi,\omega) + R(\psi,\omega), \quad \text{pri čemu je}$$
$$a^1(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\omega}) = \int_\Omega \nabla\psi_1\cdot\nabla\omega_1\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla\psi_2\cdot\nabla\omega_2\mathrm{d}x,$$
$$R(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\omega}) = \int_\Omega (V_1\psi_1\omega_1 - V_2\psi_2\omega_1 + V_1\psi_2\omega_2 + V_2\psi_1\omega_2)\mathrm{d}x.$$

Slaba forma postavljenog problema glasi:

Naći $\boldsymbol{\psi} \in H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega)$ *tako da je:*

$$a(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\omega}) = l(\boldsymbol{\omega}), \quad \forall\boldsymbol{\omega} \in H^1_0(\Omega)\times H^1_0(\Omega). \tag{4.6}$$

Želimo da pokažemo da dati problem ima jedinstveno rešenje. U dokazu naredne teoreme koristićemo sledeći rezultat:

Teorema (Poenkareova nejednakost). *Ako je domen* $\Omega \subset R^n$ *ograničen u barem jednom smeru, onda postoji konstanta* $C > 0$ *takva da za svako* $u \in H^1_0(\Omega)$ *važi:*

$$\|u\|_{L_2} \leq C|u|_{H^1},$$

pri čemu je $|u|_{H^1} = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$.

Iz Poenkareove nejednakosti dobijamo sledeću ekvivalenciju normi na $H^1_0(\Omega)$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+C^2}}\|u\|_{H^1} \leq |u|_{H^1} \leq \|u\|_{H^1}, \quad \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

Važi sledeća:

Teorema 4.1.1. *Neka* $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, $\boldsymbol{V} \in L_\infty(\Omega) \times L_\infty(\Omega)$, $V_1(x) \geq 0$, $x \in \Omega$. *Tada problem* (4.6) *ima jedinstveno rešenje* $\boldsymbol{\psi} \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$, *pri čemu važi:*

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2 \times H^2} \leq_c \|\boldsymbol{f}\|_{L_2 \times L_2}.$$

Dokaz. Treba proveriti pretpostavke leme Laksa-Milgrama.
Preslikavanje $\boldsymbol{\psi} \mapsto a(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\omega})$ je linearno za fiksirano $\boldsymbol{\omega} \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Slično, preslikavanje $\boldsymbol{\omega} \mapsto a(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\omega})$ je linearno za fiksirano $\boldsymbol{\psi} \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, pa je $a(\cdot,\cdot)$ bilinearna forma.
Iz nejednakosti

$$\begin{aligned}
|(\nabla\psi_1, \nabla\omega_1)_{L_2}| &= |\int_\Omega \nabla\psi_1 \cdot \nabla\omega_1 \mathrm{d}x| \leq \|\nabla\psi_1\|_{L_2}\|\nabla\omega_1\|_{L_2} \\
&\leq \|\psi_1\|_{H^1}\|\omega_1\|_{H^1} \leq \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1\times H^1}\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^1\times H^1}, \\
|(\nabla\psi_2, \nabla\omega_2)_{L_2}| &\leq \|\nabla\psi_2\|_{L_2}\|\nabla\omega_2\|_{L_2} \leq \|\psi_2\|_{H^1}\|\omega_2\|_{H^1} \leq \|\boldsymbol{\psi}\|_1\|\boldsymbol{\omega}\|_1,
\end{aligned}$$

kao i nejednakosti

$$\begin{aligned}
|(V_1\psi_1, \omega_1)_{L_2}| &\leq \|V_1\|_{L_\infty}\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1\times H^1}\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^1\times H^1}, \\
|(V_2\psi_2, \omega_1)_{L_2}| &\leq \|V_2\|_{L_\infty}\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1\times H^1}\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^1\times H^1}, \\
|(V_1\psi_2, \omega_2)_{L_2}| &\leq \|V_1\|_{L_\infty}\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1\times H^1}\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^1\times H^1}, \\
|(V_2\psi_1, \omega_2)_{L_2}| &\leq \|V_2\|_{L_\infty}\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1\times H^1}\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^1\times H^1},
\end{aligned}$$

sledi

$$\begin{aligned}
|a(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\omega})| &= |(\nabla\psi_1, \nabla\omega_1)_{L_2} + (\nabla\psi_2, \nabla\omega_2)_{L_2} + (V_1\psi_1, \omega_1)_{L_2} - (V_2\psi_2, \omega_1)_{L_2} \\
&\quad + (V_1\psi_2, \omega_2)_{L_2} + (V_2\psi_1, \omega_2)_{L_2}| \\
&\leq |(\nabla\psi_1, \nabla\omega_1)_{L_2}| + |(\nabla\psi_2, \nabla\omega_2)_{L_2}| + |(V_1\psi_1, \omega_1)_{L_2}| \\
&\quad + |(V_1\psi_1, \omega_1)_{L_2}| + |(V_1\psi_1, \omega_1)_{L_2}| + |(V_1\psi_1, \omega_1)_{L_2}| \\
&\leq C\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1\times H^1}\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^1\times H^1}, \quad C = 2(1 + \|V_1\|_{L_\infty} + \|V_2\|_{L_\infty}),
\end{aligned}$$

pa je $a(\cdot,\cdot)$ neprekidna forma. Pomoću Poenkareove nejednakosti dobijamo koercivnost forme:

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) &= (\nabla\omega_1, \nabla\omega_1)_{L_2} + (\nabla\omega_2, \nabla\omega_2)_{L_2} + (V_1\omega_1, \omega_1)_{L_2} - (V_2\omega_2, \omega_1)_{L_2} \\
&\quad + (V_1\omega_2, \omega_2)_{L_2} + (V_2\omega_1, \omega_2)_{L_2} \\
&= \|\nabla\omega_1\|_{L_2}^2 + \|\nabla\omega_2\|_{L_2}^2 + (V_1\omega_1, \omega_1) + (V_1\omega_2, \omega_2) \\
&\geq \|\nabla\omega_1\|_{L_2}^2 + \|\nabla\omega_2\|_{L_2}^2 \geq_c \|\boldsymbol{\omega}\|_{H^1\times H^1}^2.
\end{aligned}$$

Linearnost forme $l(\cdot)$ direktno sledi iz osobine linearnosti integrala. Dokažimo još neprekidnost:

$$\begin{aligned}
|l(\boldsymbol{\omega})| &\leq \|f_1\|_{L_2}\|\omega_1\|_{L_2} + \|f_2\|_{L_2}\|\omega_2\|_{L_2} \\
&\leq \|\boldsymbol{f}\|_{L_2\times L_2}\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^1\times H^1} + \|\boldsymbol{f}\|_{L_2\times L_2}\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^1\times H^1} \\
&= 2\|\boldsymbol{f}\|_{L_2\times L_2}\|\boldsymbol{\omega}\|_{H^1\times H^1}.
\end{aligned}$$

Dakle, pretpostavke leme su ispunjene, pa problem (4.6) ima jedinstveno rešenje $\boldsymbol{\psi} \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Pri tome su ψ_1 i ψ_2 slaba rešenja problema (4.3), (4.5), pa važi:

$$\|\psi_1\|_{H^2} \leq_c \|f_1 + V_2\psi_2\|_{L_2} \leq_c \|\psi_2\|_{L_2} + \|f_1\|_{L_2},$$

$$\|\psi_2\|_{H^2} \leq_c \|f_2 - V_2\psi_1\|_{L_2} \leq_c \|\psi_1\|_{L_2} + \|f_2\|_{L_2}.$$

Dalje je

$$\|\psi_1\|_{H^2} \leq_c \|\boldsymbol{\psi}\|_{L_2\times L_2} + \|\boldsymbol{f}\|_{L_2\times L_2},$$
$$\|\psi_2\|_{H^2} \leq_c \|\boldsymbol{\psi}\|_{L_2\times L_2} + \|\boldsymbol{f}\|_{L_2\times L_2}.$$

Iz prethodnih nejednakosti sledi:

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2\times H^2} = \sqrt{\|\psi_1\|^2_{H^2} + \|\psi_2\|^2_{H^2}} \leq \|\psi_1\|_{H^2} + \|\psi_2\|_{H^2} \leq_c \|\boldsymbol{\psi}\|_{L_2\times L_2} + \|\boldsymbol{f}\|_{L_2\times L_2}. \tag{4.7}$$

Dakle,

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2\times H^2} \leq_c \|\boldsymbol{\psi}\|_{L_2\times L_2} + \|\boldsymbol{f}\|_{L_2\times L_2}. \tag{4.8}$$

Koristeći (4.6) dobijamo

$$\|\boldsymbol{\psi}\|^2_{H^1\times H^1} \leq_c a(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\psi}) = (\boldsymbol{f},\boldsymbol{\psi}) \leq_c \|\boldsymbol{\psi}\|_{L_2\times L_2}\|\boldsymbol{f}\|_{L_2\times L_2} \tag{4.9}$$
$$\leq_c \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1\times H^1}\|\boldsymbol{f}\|_{L_2\times L_2}, \tag{4.10}$$

a odatle je

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1\times H^1} \leq_c \|\boldsymbol{f}\|_{L_2\times L_2}.$$

Tvrđenje teoreme sada direktno sledi iz prethodne nejednakosti i (4.8):

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2\times H^2} &\leq_c \|\boldsymbol{\psi}\|_{L_2\times L_2} + \|\boldsymbol{f}\|_{L_2\times L_2}\\ &\leq_c \|\boldsymbol{\psi}\|_{H_1\times H_1} + \|\boldsymbol{f}\|_{L_2\times L_2}\\ &\leq_c \|\boldsymbol{f}\|_{L_2\times L_2}.\end{aligned}$$

□

4.2 Aproksimacija metodom konačnih elemenata

Aproksimirajmo problem metodom konačih elemenata.
Neka je $T^h = \{K\}$ uniformna triangulacija domena Ω i $S^h \subset H^1_0(\Omega)$ prostor konačnih elemenata:

$$S^h = \{\omega_h \in H^1_0(\Omega) \mid \omega_h|_K \in P^1_K,\ \forall K \in T^h\},$$

gde je P^1_K prostor polinoma stepena ne većeg od 1.

Problem glasi:

Naći $\boldsymbol{\psi}_h \in S^h \times S^h$ tako da je:

$$a(\boldsymbol{\psi}_h,\boldsymbol{\omega}_h) = l(\boldsymbol{\omega}_h), \quad \forall \boldsymbol{\omega}_h \in S^h \times S^h.$$

Postavlja se pitanje greške aproksimacije, tj. ocene razlike $\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|$ u različitim normama.
Teorema 4.2.1. *Neka $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$, $\boldsymbol{V} \in L_\infty(\Omega)\times L_\infty(\Omega)$, $V_1(x) \geq 0$, $x \in \Omega$. Tada važi:*

$$\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_{L_2\times L_2} \leq_c h^2\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2\times H^2},$$
$$\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_{H^1\times H^1} \leq_c h\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2\times H^2}.$$

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{e}_h = \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi_h}$. Tada je

$$a(e_h, \boldsymbol{\omega}_h) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\omega}_h \in S^h \times S^h.$$

Ako sa $\boldsymbol{\psi_I} \in S^h \times S^h$ označimo interpolant $\boldsymbol{\psi}$, onda je

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{e}_h\|^2_{H^1\times H^1} \leq_c a(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{e}_h) = a(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_I) + a(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{\psi}_I - \boldsymbol{\psi}_h) \\
&= a(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_I) \leq_c \|\boldsymbol{e}_h\|_{H^1\times H^1} \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi_h}\|_{H^1\times H^1}.
\end{aligned}$$

Odavde sledi

$$\|\boldsymbol{e}_h\|_{H^1\times H^1} \leq_c \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi_I}\|_{H^1\times H^1} \leq_c h\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2\times H^2}.$$

Ostaje da pokažemo ocenu greške u $L_2 \times L_2$ normi.
Razmotrimo pomoćni problem:

$$-\Delta u_1(x) + V_1(x)u_1(x) - V_2(x)u_2(x) = g_1(x), \quad x \in \Omega \tag{4.11}$$
$$-\Delta u_2(x) + V_1(x)u_2(x) + V_2(x)u_1(x) = g_2(x), \quad x \in \Omega \tag{4.12}$$
$$u_1(x) = 0, \quad u_2(x) = 0 \quad x \in \partial\Omega. \tag{4.13}$$

Tada za svako $\boldsymbol{g} \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ postoji jedinstveno rešenje ovog problema $\boldsymbol{u} \in (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$ takvo da je

$$a(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{w}), \quad \forall \boldsymbol{\omega}_h \in H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega), \tag{4.14}$$
$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^2\times H^2} \leq_c \|\boldsymbol{g}\|_{L_2\times L_2}. \tag{4.15}$$

Uzmimo $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{e}_h$ i neka je $\boldsymbol{u}_I$ interpolant $\boldsymbol{u}$, tada imamo da je

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{e}_h\|^2_{L_2\times L_2} = a(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{u}) = a(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_I) \\
&\leq_c \|\boldsymbol{e}_h\|_{H^1\times H^1} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_I\|_{H^1\times H^1} \leq_c h\|\boldsymbol{e}_h\|_{H^1\times H^1} \|\boldsymbol{u}\|_2 \leq_c h\|\boldsymbol{e}_h\|_{H^1\times H^1} \|\boldsymbol{e}_h\|_{L_2\times L_2}.
\end{aligned}$$

Odavde sledi

$$\|\boldsymbol{e}_h\|_{L_2\times L_2} \leq_c h\|\boldsymbol{e}_h\|_{H^1\times H^1} \leq_c h^2\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2\times H^2}.$$ □

4.3 Dvomrežna metoda konačnih elemenata

Uvedimo sada novi prostor konačnih elemenata $S^H (\subset S^h \subset H^1_0(\Omega))$, definisan na grubljoj triangulaciji T^H domena Ω sa korakom $H > h$.

ALGORITAM 1

Korak 1. Naći $\boldsymbol{\psi}_H \in S^H \times S^H$ tako da je $a(\boldsymbol{\psi}_H, \boldsymbol{\omega_H}) = l(\boldsymbol{\omega_H}), \quad \forall \boldsymbol{\omega_H} \in S^H \times S^H$.

Korak 2. Naći $\boldsymbol{\psi}^*_h \in S^h \times S^h$ tako da je $a^1(\boldsymbol{\psi}^*_h, \boldsymbol{\omega}_h) = l(\boldsymbol{\omega}_h) - R(\boldsymbol{\psi}_H, \boldsymbol{\omega}_h)$, $\forall \boldsymbol{\omega}_h \in S^h \times S^h$.

Primetimo da je sistem parcijalnih jednačina koji se javlja u drugom koraku algoritma razdvojen, uključuje dve Poasonove jednačine, a nerazdvojeni sistem rešavamo samo na grubljoj mreži u prvom koraku.
Pokažimo da rešenje $\boldsymbol{\psi}_h^*$ dobijeno ovim algoritmom postiže asimptotski optimalnu tačnost.
Teorema 4.3.1. *Neka* $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, $\boldsymbol{V} \in L_\infty(\Omega) \times L_\infty(\Omega)$, $V_1(x) \geq 0$, $x \in \Omega$. *Tada važi:*

$$\|\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^*\|_{H^1 \times H^1} \leq_c H^2, \tag{4.16}$$

$$\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h^*\|_{H^1 \times H^1} \leq_c h + H^2. \tag{4.17}$$

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{e}_h = \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h$, $\boldsymbol{e}_h^1 = \boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^*$. Važi:

$$a(\boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\omega}_h) = l(\boldsymbol{\omega}_h), \tag{4.18}$$

$$a^1(\boldsymbol{\psi}_h^*, \boldsymbol{\omega}_h) = l(\boldsymbol{\omega}_h) - R(\boldsymbol{\psi}_H, \boldsymbol{\omega}_h), \quad \forall \boldsymbol{\omega}_h \in S^h \times S^h. \tag{4.19}$$

Oduzimanjem (4.19) od (4.18) dobijamo

$$a^1(\boldsymbol{e}_h^1, \boldsymbol{\omega}_h) + R(\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_H, \boldsymbol{\omega}_h) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\omega}_h \in S^h \times S^h. \tag{4.20}$$

Uzimajući $\boldsymbol{\omega}_h = \boldsymbol{e}_h^1$ u prethodnoj jednakosti, dobija se

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{e}_h^1\|^2_{H^1 \times H^1} \leq_c a^1(\boldsymbol{e}_h^1, \boldsymbol{e}_h^1) \leq_c \|\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_H\|_{L_2 \times L_2} \|\boldsymbol{e}_h^1\|_{L_2 \times L_2} \\ &\leq \|\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_H\|_{L_2 \times L_2} \|\boldsymbol{e}_h^1\|_{H^1 \times H^1}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

a odavde je

$$\|\boldsymbol{e}_h^1\|_{H^1 \times H^1} \leq_c \|\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_H\|_{L_2 \times L_2}. \tag{4.22}$$

Iz teoreme (4.2.1) sledi

$$\|\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_H\|_{L_2 \times L_2} \leq \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_{L_2 \times L_2} + \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_H\|_{L_2 \times L_2} \leq_c h^2 + H^2. \tag{4.23}$$

Sada (4.16) sledi iz (4.22) i prethodne nejednakosti, a (4.17) iz teoreme (4.2.1), (4.16) i sledeće nejednakosti:

$$\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h^*\|_{H^1 \times H^1} \leq \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_{H^1 \times H^1} + \|\boldsymbol{e}_h^1\|_{H^1 \times H^1}.$$ □

Prema prethodnoj teoremi dovoljno je uzeti $H = \sqrt{h}$ da bi $\boldsymbol{\psi}_h^*$ bilo iste tačnosti kao i $\boldsymbol{\psi}_h$ u $H^1 \times H^1$ normi. Time je dimenzija prostora S^H značajno manja od dimenzije prostora S^h, pa najveći deo posla u Algoritmu 1 čini rešavanje dve razdvojene Poasonove jednačine u drugom koraku.

ALGORITAM 2

Neka je $\boldsymbol{\psi}_h^0 = 0$. Ako pretpostavimo da smo našli $\boldsymbol{\psi}_h^k \in S^h \times S^h$, tada $\boldsymbol{\psi}_h^{k+1} \in S^h \times S^h$ nalazimo na sledeći način:

Korak 1. Naći $\boldsymbol{e}_H \in S^H \times S^H$ tako da je $a(\boldsymbol{e}_H, \boldsymbol{\omega}_H) = l(\boldsymbol{\omega}_H) - a(\boldsymbol{\psi}_h^k, \boldsymbol{\omega}_H), \quad \forall \boldsymbol{\omega}_H \in S^H \times S^H$.

Korak 2. Naći $\boldsymbol{\psi}_h^{k+1} \in S^h \times S^h$ tako da je $a^1(\boldsymbol{\psi}_h^{k+1}, \boldsymbol{\omega}_h) = l(\boldsymbol{\omega}_h) - R(\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H, \boldsymbol{\omega}_h)$, $\quad \forall \boldsymbol{\omega_h} \in S^h \times S^h$.

Naredna teorema pokazuje da je dovoljno uzeti $H = h^{\frac{1}{k+1}}$ da bi se postigla optimalna tačnost.

Teorema 4.3.2. *Neka* $\boldsymbol{f} \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, $\boldsymbol{V} \in L_\infty(\Omega) \times L_\infty(\Omega)$, $V_1(x) \geq 0$, $x \in \Omega$. *Tada važi:*

$$\|\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^k\|_{H^1 \times H^1} \leq_c H^{k+1}, \quad k \geq 1, \tag{4.24}$$

$$\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h^k\|_{H^1 \times H^1} \leq_c h + H^{k+1}, \quad k \geq 1. \tag{4.25}$$

Dokaz. Kako važi

$$\begin{aligned} &a(\boldsymbol{\psi}_h, \boldsymbol{\omega}_h) = l(\boldsymbol{\omega}_h), \\ &a^1(\boldsymbol{\psi}_h^{k+1}, \boldsymbol{\omega}_h) = l(\boldsymbol{\omega}_h) - R(\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H, \boldsymbol{\omega}_h), \quad \forall \boldsymbol{\omega_h} \in S^h \times S^h, \end{aligned} \tag{4.26}$$

to je

$$a^1(\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^{k+1}, \boldsymbol{\omega}_h) = -R(\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H), \boldsymbol{\omega}_h), \quad \forall \boldsymbol{\omega}_h \in S^h \times S^h. \tag{4.27}$$

Uzimajući $\boldsymbol{\omega}_h = \boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^{k+1}$ u prethodnoj jednakosti dobijamo

$$\|\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^{k+1}\|^2_{H^1 \times H^1} \leq_c a^1(\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^{k+1}, \boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^{k+1}) \tag{4.28}$$

$$\leq_c \|\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H)\|_{L_2 \times L_2} \|\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^{k+1}\|_{L_2 \times L_2}, \tag{4.29}$$

a odavde je

$$\|\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^{k+1}\|_{H^1 \times H^1} \leq_c \|\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H)\|_{L_2 \times L_2}. \tag{4.30}$$

Iz (4.26) i prvog koraka algoritma sledi

$$a(\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H), \boldsymbol{\nu}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in S^H \times S^H. \tag{4.31}$$

Odavde je

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H)\|^2_{H^1 \times H^1} \leq_c a(\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H), \boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H)) \\ &= a(\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H), \boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^k) \\ &\leq_c \|\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H)\|_{H^1 \times H^1} \|\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^k\|_{H^1 \times H^1}, \end{aligned}$$

odakle sledi

$$\|\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H)\|_{H^1 \times H^1} \leq_c \|\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^k\|_{H^1 \times H^1}. \tag{4.32}$$

Neka je $\boldsymbol{u}$ rešenje pomoćnog problema

$$\begin{aligned} -\Delta u_1(x) + V_1(x) u_1(x) - V_2(x) u_2(x) &= g_1(x), \quad x \in \Omega \\ -\Delta u_2(x) + V_1(x) u_2(x) + V_2(x) u_1(x) &= g_2(x), \quad x \in \Omega \\ u_1(x) = 0, \quad u_2(x) &= 0 \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

pri čemu je $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H)$ i $\boldsymbol{u}_I \in S^h \times S^h$ interpolant $\boldsymbol{u}$. Tada je

$$\|\boldsymbol{u}\|_{H^1 \times H^1} \leq_c \|\boldsymbol{g}\|_{L_2 \times L_2},$$

pa iz (4.31) dobijamo

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H)\|^2_{L_2\times L_2} = a(\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H), \boldsymbol{u}) = a(\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H), \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_I)\\
&\leq_c \|\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H)\|_{H^1\times H^1}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_I\|_{H^1\times H^1}\\
&\leq_c H\|\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H)\|_{H^1\times H^1}\|\boldsymbol{u}\|_{H^2\times H^2}\\
&\leq_c H\|\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H)\|_{H^1\times H^1}\|\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H)\|_{L_2\times L_2},
\end{aligned}$$

odakle sledi da je

$$\|\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H)\|_{L_2\times L_2} \leq_c H\|\boldsymbol{\psi}_h - (\boldsymbol{\psi}_h^k + \boldsymbol{e}_H)\|_{H^1\times H^1}. \tag{4.33}$$

Sada iz (4.30), (4.32) i (4.32) sledi

$$\|\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^k\|_{H^1\times H^1} \leq_c H\|\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^{k-1}\|_{H^1\times H^1} \leq_c H^{k-1}\|\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^1\|_{H^1\times H^1}, \quad k \leq 1.$$

Primetimo da je $\boldsymbol{\psi}_h^1$ zapravo rešenje $\boldsymbol{\psi}_h^*$ dobijeno pomoću Algoritma 1, pa (4.24) sledi iz prethodne nejednakosti i (4.16).
(4.25) sledi iz (4.24), teoreme (4.2.1) i nejednakosti

$$\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h^k\|_{H^1\times H^1} \leq \|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_{H^1\times H^1} + \|\boldsymbol{\psi}_h - \boldsymbol{\psi}_h^k\|_{H^1\times H^1}. \qquad \square$$

4.4 Primer

Ilustrujmo algoritam 1 na sledećem primeru:

$$-\Delta\psi(\boldsymbol{x}) + V(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \tag{4.34}$$

$$\psi(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{4.35}$$

pri čemu je $\Omega = (0,1)\times(0,1)$, $V(\boldsymbol{x}) = 1 + i$.
Funkcija $f(\boldsymbol{x}) = ((\pi^2 + \frac{3}{2}) + (-2\pi^2 - \frac{1}{2})\cdot i)\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ je izabrana tako da je $\psi(\boldsymbol{x}) = (0.5 - i)\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ tačno rešenje problema.

Neka je $T^h = \{K\}$ triangulacija domena dobijena njegovom podelom na manje kvadrate ivice h i potom podelom svakog kvadrata dijagonalom na dva trougla (slika (4.1)). Neka je odgovarajući prostor konačnih elemenata:

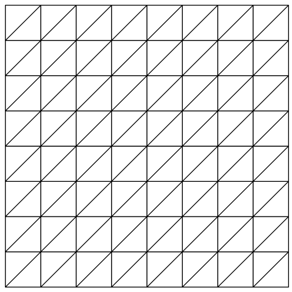
$$S^h(\Omega) = \{\omega \in H_0^1(\Omega) : \ \omega|_K \text{ je linearna}, \ \forall K \in T^h\}.$$

Primenimo prvo metodu konačnih elemenata koristeći mrežu sa korakom $h = \dfrac{1}{2^i}$, $(i = 3, 4, 5, 6)$.

Dobijeni rezultati prikazani su u tabeli (4.1). Sva izračunavanja vršena su korišćenjem PDE Toolbox-a u programskom paketu MATLAB 7.

Tabela 4.1.

h	$\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_{L_2\times L_2}$	$\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_{H^1\times H^1}$
$\frac{1}{8}$	7.6794D-02	9.3073D-01
$\frac{1}{16}$	2.4704D-02	3.9428D-01
$\frac{1}{32}$	7.8157D-03	9.2366D-02
$\frac{1}{64}$	9.5429D-04	7.8007D-02



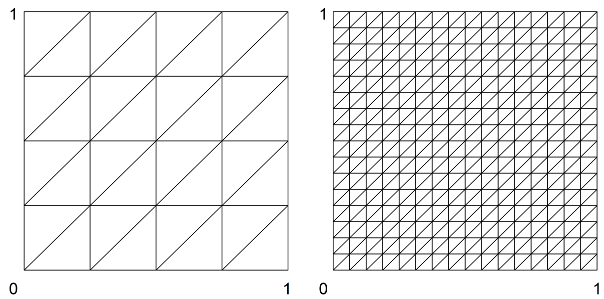
Slika 4.1. Mreža sa korakom $h = \frac{1}{8}$.

Vidimo da je

$$\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_{L_2 \times L_2} \approx O(h^2),$$
$$\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h\|_{H^1 \times H^1} \approx O(h),$$

što je u skladu sa teorijskim rezultatima iz teoreme (4.2.1).

Primenimo sada dvomrežni algoritam koristeći mreže sa korakom $h = \dfrac{1}{2^i}$, $(i = 4, 6, 8)$ i odgovarajuće grublje mreže sa korakom $H = \sqrt{h}$.



Slika 4.2. Dve mreže sa koracima $H = \frac{1}{4}$ i $h = \frac{1}{16}$.

Dobijeni rezultati prikazani su u tabeli (4.2).

Tabela 4.2.

(H, h)	$\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h^*\|_{H^1 \times H^1}$
$\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{16}\right)$	1.9553D-01
$\left(\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{64}\right)$	9.6071D-02
$\left(\dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{256}\right)$	2.4717D-02

Vidimo da je

$$\|\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_h^*\|_{H^1 \times H^1} \approx O(H^2),$$

što je u skladu sa teorijskim rezultatima iz teoreme (4.3.1).

5

Granični problemi u nepovezanim oblastima

U ovom poglavlju razmotrićemo primenu metode dve mreže na rešavanje problema eliptičkog tipa koji za domen imaju nepovezane oblasti. Kao modelni problem proučićemo sistem od dve jednačine eliptičkog tipa koje rešavamo na disjunktnim pravougaonicima. Ova dva problema su uparena nelokalnim interfejs uslovima na delovima granica pravougaonika.
Pomoću dvomrežne metode rešavanje problema sa multikomponentnim domenom na finijoj mreži svodi se na rešavanje originalnog problema na znatno grubljoj mreži i rešavanje dva problema sa povezanim domenom na finijoj mreži.

5.1 Postavka problema

Razmotrimo sledeći eliptički problem definisan na disjunktnim pravougaonicima $\Omega_1 = (a_1, b_1) \times (c_1, d_1)$ i $\Omega_2 = (a_2, b_2) \times (c_2, d_2)$ (slika (5.1)):

$$-\frac{\partial}{\partial x}(p_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(q_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}) + r_1 u_1 = f_1, \quad (x, y) \in \Omega_1, \tag{5.1}$$

$$u_1(x, c_1) = u_1(x, d_1) = 0, \quad a_1 \leq x \leq b_1, \tag{5.2}$$

$$u_1(a_1, y) = 0, \quad c_1 \leq y \leq d_1, \tag{5.3}$$

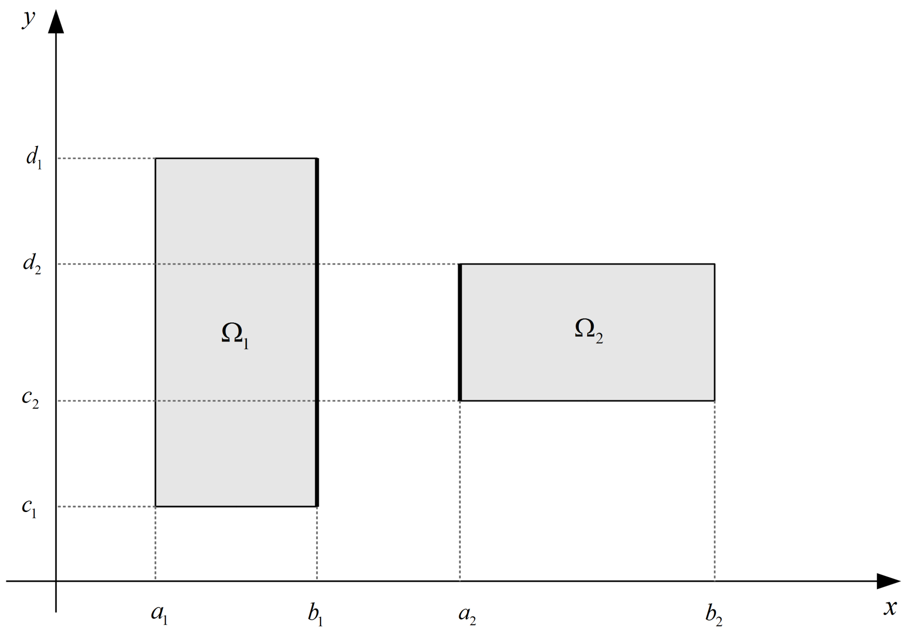
$$-\frac{\partial}{\partial x}(p_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(q_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}) + r_2 u_2 = f_2, \quad (x, y) \in \Omega_2, \tag{5.4}$$

$$u_2(x, c_2) = u_2(x, d_2) = 0, \quad a_2 \leq x \leq b_2, \tag{5.5}$$

$$u_2(b_2, y) = 0, \quad c_2 \leq y \leq d_2, \tag{5.6}$$

$$p_1(b_1, y)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1, y) + s_1(y)u_1(b_1, y) = \int_{c_2}^{d_2} \varphi_2(y, \eta)u_2(a_2, \eta)d\eta, \quad c_1 \leq y \leq d_1, \tag{5.7}$$

$$-p_2(a_2, y)\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2, y) + s_2(y)u_2(a_2, y) = \int_{c_1}^{d_1} \varphi_1(y, \eta)u_1(b_1, \eta)d\eta, \quad c_2 \leq y \leq d_2. \tag{5.8}$$



Slika 5.1. Domeni Ω_1 i Ω_2

Pretpostavićemo da su ispunjeni uslovi:

$$p_1,\ q_1,\ r_1 \in L_\infty(\Omega_1), \quad p_2,\ q_2,\ r_2 \in L_\infty(\Omega_2), \tag{5.9}$$

$$0 < p_1^0 \le p_1(x,y), \quad 0 < p_2^0 \le p_2(x,y), \quad 0 < q_1^0 \le q_1(x,y) \quad 0 < q_2^0 \le q_2(x,y), \tag{5.10}$$

$$s_1 \in L_\infty(c_1,d_1) \quad s_2 \in L_\infty(c_2,d_2), \tag{5.11}$$

$$\varphi_1 \in L_\infty((c_2,d_2)\times(c_1,d_1)), \quad \varphi_2 \in L_\infty((c_1,d_1)\times(c_2,d_2)). \tag{5.12}$$

Uvedimo prostor $L = L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$ sa skalarnim proizvodom

$$(u,\omega)_L = (u_1,\omega_1)_{L_2} + (u_2,\omega_2)_{L_2}$$

i normom

$$\|\omega\|_L = \sqrt{(\omega,\omega)_L},$$

gde je

$$(u_1,\omega_1)_{L_2} = \int_{\Omega_1} u_1\omega_1 dxdy, \quad (u_2,\omega_2)_{L_2} = \int_{\Omega_2} u_2\omega_2 dxdy.$$

Uvedimo i prostore:

$$H^1 = H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2),$$
$$H^2 = H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2),$$

sa skalarnim proizvodom

$$(u,\omega)_{H^1} = (u_1,\omega_1)_{H^1} + (u_2,\omega_2)_{H^1},$$
$$(u,\omega)_{H^2} = (u_1,\omega_1)_{H^2} + (u_2,\omega_2)_{H^2},$$

i normom

$$\|\omega\|_{H^1} = \sqrt{(\omega,\omega)_{H^1}},$$
$$\|\omega\|_{H^2} = \sqrt{(\omega,\omega)_{H^2}}.$$

H^1, H^2 i L su Hilbertovi prostori.
Neka je

$$H_0^1 = \{\omega = (\omega_1,\omega_2) \in H^1 |\ \omega_1 = 0 \text{ na } \Gamma_1, \quad \omega_2 = 0 \quad \text{na } \Gamma_2\},$$

gde su Γ_1, Γ_2 delovi granica pravougaonika:

$$\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \{(b_1,y)|\ y \in (c_1,d_1)\},$$
$$\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \setminus \{(a_2,y)|\ y \in (c_2,d_2)\}.$$

Uvedimo oznake $u = (u_1,u_2)$, $\omega = (\omega_1,\omega_2)$ i

$$a_1(u_1,\omega_1) = \int_{\Omega_1}\left(p_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + q_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial \omega_1}{\partial y} + r_1u_1\omega_1\right)dxdy + \int_{c_1}^{d_1} s_1(y)u_1(b_1,y)\omega_1(b_1,y)dy,$$
$$a_2(u_2,\omega_2) = \int_{\Omega_2}\left(p_2\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial \omega_2}{\partial x} + q_1\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial \omega_2}{\partial y} + r_2u_2\omega_2\right)dxdy + \int_{c_2}^{d_2} s_2(y)u_2(a_2,y)\omega_2(a_2,y)dy,$$
$$b_1(u_2,\omega_1) = -\int_{c_1}^{d_1}\int_{c_2}^{d_2}\varphi_2(y,\eta)u_2(a_2,\eta)\omega_1(b_1,y)d\eta dy,$$
$$b_2(u_1,\omega_2) = -\int_{c_2}^{d_2}\int_{c_1}^{d_1}\varphi_1(y,\eta)u_1(b_1,\eta)\omega_2(a_2,y)d\eta dy,$$
$$l_1(\omega_1) = \int_{\Omega_1} f_1\omega_1 dxdy, \quad l_2(\omega_2) = \int_{\Omega_2} f_2\omega_2 dxdy,$$
$$a(u,\omega) = a_1(u_1,v_1) + a_2(u_2,\omega_2) + b_1(u_2,\omega_1) + b_2(u_1,\omega_2),$$
$$l(\omega) = l_1(\omega_1) + l_2(\omega_2).$$

Slaba forma postavljenog problema glasi:

Naći $u = (u_1,u_2) \in H_0^1$ tako da je

$$a(u,\omega) = l(\omega), \quad \forall\omega \in H_0^1. \tag{5.13}$$

Važi sledeća lema:
Lema 5.1.1. *Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi* (5.9), (5.11) *i* (5.12) . *Tada je bilinearna forma $a(u,\omega)$ ograničena na $H^1 \times H^1$. Ako pored toga važi i* (5.10), *onda postoje $m,k > 0$ tako da važi:*

$$a(u,u) + k\|u\|_L^2 \geq m\|u\|_{H^1}^2, \quad \forall u \in H_0^1. \qquad \textit{(Gardingova nejednakost)}$$

Teorema 5.1.2. *Neka su ispunjeni uslovi* (5.9)-(5.12), *$f = (f_1,f_2) \in L$ i neka važi*

$$p_1,q_1 \in W_\infty^1(\Omega_1), \quad p_2,q_2 \in W_\infty^1(\Omega_2),$$
$$s_1 \in W_\infty^1(c_1,d_1), \quad s_2 \in W_\infty^1(c_2,d_2),$$
$$\varphi_1 \in W_\infty^1((c_2,d_2)\times(c_1,d_1)), \quad \varphi_2 \in W_\infty^1((c_1,d_1)\times(c_2,d_2)).$$

Neka 0 nije sopstvena vrednost odgovarajućeg problema sopstvenih vrednosti za (5.1)-(5.8). *Tada postoji jedinstveno rešenje $u \in H_0^1 \cap H^2$ problema* (5.1)-(5.8) *i važi*

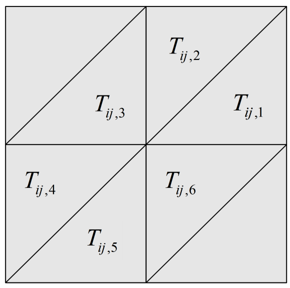
$$\|u\|_{H^2} \leq_c \|f\|_L.$$

5.2 Aproksimacija metodom konačnih elemenata

Uvedimo mrežu $\overline{\Omega}_h = \overline{\Omega}_h^1 \cup \overline{\Omega}_h^2$, gde su $\overline{\Omega}_h^1$ i $\overline{\Omega}_h^2$ mreže na odgovarajućim pravougaonicima:

$$\begin{aligned}
\overline{\Omega}_h^1 = \{(x_i, y_j)|\ & x_i = a_1 + (i-1)h_1,\ i = 1, \dots, N_1,\ x_{N_1} = b_1, \\
& y_j = c_1 + (j-1)k_1,\ j = 1, \dots, M_1,\ y_{M_1} = d_1\}, \\
\overline{\Omega}_h^2 = \{(x_i, y_j)|\ & x_i = a_2 + (i-1)h_2,\ i = 1, \dots, N_2,\ x_{N_2} = b_2, \\
& y_j = c_2 + (j-1)k_2,\ j = 1, \dots, M_2,\ y_{M_2} = d_2\}.
\end{aligned}$$

Označimo $h = \max\{h_1, h_2, k_1, k_2\}$.
Uvedimo sada odgovarajući prostor konačnih elemenata $S^h = S_1^h \times S_2^h \subset H_0^1$ kojem odgovara mreža $\overline{\Omega}_h$. Za kanonske elemente biramo elementarne trouglove. Svaki čvor (x_i, y_j) mreže predstavlja zajedničko teme za šest elementarnih trouglova, označimo ih sa $T_{ij,1}, \dots, T_{ij,6}$ (slika (5.2)).



Slika 5.2. Trouglovi koji odgovaraju čvoru (x_i, y_j)

Neka je $\{\phi_1^h\}$ baza prostora S_1^h, a $\{\phi_2^h\}$ baza prostora S_2^h. Približno rešenje $u_h = (u_{1,h}, u_{2,h})$ problema (5.13) tražimo u obliku linearne kombinacije:

$$u_{1,h} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{M_1} U_{ij}^1 \phi_{ij,h}^1(x, y), \quad u_{2,h} = \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{M_2} U_{ij}^2 \phi_{ij,h}^2(x, y). \tag{5.14}$$

Sada aproksimacija problema metodom konačnih elemenata glasi:

Naći $u_h \in S^h$ *tako da je*

$$a(u_h, \omega_h) = l(\omega_h), \quad \forall \omega_h \in S^h. \tag{5.15}$$

Teorema 5.2.1. *Neka su ispunjene pretpostavke teoreme 5.1.2. Tada rešenje* u_h *problema* (5.15) *zadovoljava:*

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_L &\le_c h^2 \|u\|_{H^2}, \\
\|u - u_h\|_{H^1} &\le_c h \|u\|_{H^2}.
\end{aligned}$$

Dokaz. Iz (5.13) i (5.15) sledi

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - \omega_h), \quad \forall \omega_h \in S^h.$$

Kako iz leme 5.1.1 sledi

$$\|u-u_h\|_{H^1}^2 \leq C_1 a(u-u_h, u-u_h) + C_2\|u-u_h\|_{L_2}^2,$$

za neke konstante C_1, C_2, to je

$$\|u-u_h\|_{H^1}^2 \leq C_1\|u-u_h\|_{H^1} \inf_{\omega_h\in S^h} \|u-\omega_h\|_{H^1} + C_2\|u-u_h\|_L^2. \tag{5.16}$$

Imamo da je

$$\|u-u_h\|_L = \sup_{g\in L} \frac{(u-u_h, g)_L}{\|g\|_L}.$$

Za svako $g \in L$ određujemo $v_g \in H_0^1$ tako da je

$$a(\nu, v_g) = (\nu, g)_L, \quad \forall \nu \in H_0^1.$$

Dakle, za svako $v_h \in S^h$ imamo

$$(u-u_h, g)_L = a(u-u_h, v_g) = a(u-u_h, v_g - v_h) \leq_c \|u-u_h\|_{H^1}\|v_g - v_h\|_{H^1},$$

odakle sledi

$$\|u-u_h\|_L \leq_c \sup_{g\in L} \Big(\frac{1}{\|g\|_L}\|u-u_h\|_{H^1} \inf_{v_h\in S^h} \|v_g - v_h\|_{H^1}\Big). \tag{5.17}$$

Pomoću aproksimacionih svojstava prostora konačnih elemenata i teoreme 5.1.2 dobijamo

$$\inf_{v_h\in S^h} \|v_g - v_h\|_{H^1} \leq_c h\|v_g\|_{H^2} \leq_c h\|g\|_L. \tag{5.18}$$

Iz (5.17) i (5.18) sledi

$$\|u-u_h\|_L \leq_c h\|u-u_h\|_{H^1}, \tag{5.19}$$

odakle iz (5.16) za dovoljno male h dobijamo

$$\|u-u_h\|_{H^1} \leq_c \inf_{\omega_h\in S^h} \|u-\omega_h\|_{H^1} \leq_c h\|u\|_{H^2}. \tag{5.20}$$

Procena u L-normi sledi direktno iz (5.19) i (5.20). □

Opisanim algoritmom problem (5.15) aproksimiramo sistemom linearnih jednačina po nepoznatim U_{ij}^1, U_{ij}^2.

5.3 Dvomrežna diskretizacija

Uvedimo sada novu, grublju mrežu $\overline{\Omega}_H = \overline{\Omega}_H^1 \cup \overline{\Omega}_H^2$, pri čemu je $H_1 > h_1, H_2 > h_2$, $K_1 > k_1, K_2 > k_2$, $H = \max\{H_1, K_1, H_2, K_2\}$, kao i odgovarajući prostor konačnih elemenata $S^H = S_1^H \times S_2^H$ pridružen ovoj mreži.

ALGORITAM

Korak 1. Naći $u_H = (u_{1,H}, u_{2,H}) \in S^H$ tako da je $a(u_H, \omega_H) = l(\omega_H), \ \forall \omega_H \in S^H$.

Korak 2.

a) Naći $u^*_{1,h} \in S^h_1$ tako da je $a_1(u_{1,h}, \omega_{1,h}) = l_1(\omega_{1,h}) - b_1(u_{2,H}, \omega_{1,h})$, $\forall \omega_{1,h} \in S^h_1$.

b) Naći $u^*_{2,h} \in S^h_2$ tako da je $a_2(u^*_{2,h}, \omega_{2,h}) = l_2(\omega_{2,h}) - b_2(u^*_{1,h}, \omega_{2,h})$, $\forall \omega_{2,h} \in S^h_2$.

Dakle, polazni problem opisanim algoritmom rešavamo samo jednom na grubljoj mreži, a potom taj problem razdvajamo na dva problema koje odvojeno rešavamo na finijoj mreži.
Naredna teorema daje procenu greške.

Teorema 5.3.1. *Neka su ispunjene pretpostavke teoreme 5.1.2. Tada za $u^*_{1,h}$ i $u^*_{2,h}$ važe sledeće ocene greške:*

$$\|u_1 - u^*_{1,h}\|_{H^1(\Omega_1)} \leq_c \frac{h_1^2 + k_1^2}{2} + \frac{H_1^3 + K_1^3}{2}, \tag{5.21}$$

$$\|u_2 - u^*_{2,h}\|_{H^1(\Omega_2)} \leq_c \frac{h_2^2 + k_2^2}{2} + \frac{H_2^3 + K_2^3}{2}. \tag{5.22}$$

Vidimo da je dovoljno uzeti da je $H_1 = h_1^{\frac{2}{3}}$, $H_2 = h_2^{\frac{2}{3}}$, $K_1 = k_1^{\frac{2}{3}}$, $K_2 = k_2^{\frac{2}{3}}$ da bismo postigli optimalnu tačnost u H^1 normi.

6

Problem sopstvenih vrednosti

U ovom poglavlju razmotrićemo dvomrežnu diskretizaciju za problem sopstvenih vrednosti. Njom se rešavanje problema sopstvenih vrednosti na finijoj mreži svodi na rešavanje problema sopstvenih vrednosti na znatno grubljoj mreži i rešavanje linearnog algebarskog sistema na finijoj mreži. Pokazuje se da uz odgovarajući izbor grublje mreže rezultat zadržava asimptotski optimalnu grešku.

6.1 Postavka problema

Razmotrimo sledeći Dirihleov granični problem:

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}) = \lambda u, \tag{6.1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{6.2}$$

u ograničenoj oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pretpostavićemo da su ispunjeni uslovi:

$$a_{ij}(x) \in L_\infty(\Omega), \tag{6.3}$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in \mathbb{R},\ \text{s.s. u } \Omega, \tag{6.4}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0 \sum_{i,j=1}^{n} |\xi_i|^2,\ \forall\xi,\ \text{s.s. u } \Omega,\ c_0 > 0. \tag{6.5}$$

Definicija: Broj λ za koji postoji netrivijalno rešenje graničnog problema (6.1), (6.2) naziva se sopstvenom vrednošću zadatka (6.1), (6.2). Odgovarajuće rešenje $u(x)$ naziva se sopstvenom funkcijom problema (6.1), (6.2).

Množenjem jednačine (6.1) test funkcijom $\omega \in H_0^1(\Omega)$ i parcijalnom integracijom dobijamo:

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_i}dx = \lambda \int_\Omega u(x)\omega(x)dx.$$

Ako uvedemo oznake:

$$a(u,\omega) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dx,$$
$$b(u,\omega) = \int_\Omega u(x)\omega(x) dx,$$

slaba forma postavljenog problema je:

$$a(u,\omega) = \lambda b(u,\omega).$$

Dakle, varijacioni zadatak glasi:

Naći $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *tako da je*

$$a(u,\omega) = \lambda b(u,\omega), \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega). \tag{6.6}$$

Poznato je da problem (6.6) ima prebrojivo mnogo sopstvenih vrednosti koje su sve pozitivne

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$$

Za odgovarajuće sopstvene funkcije $u_1, u_2, u_3...$ možemo pretpostaviti da je:

$$a(u_i, u_j) = \lambda_j b(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \tag{6.7}$$

gde je δ_{ij} Kronekerov simbol:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} .$$

Norma $\|\cdot\|_{H^1}$ je relativno kompaktna u odnosu na normu

$$\|v\|_{L_2} \equiv \sqrt{b(v,v)},$$

u smislu da se iz svakog ograničenog niza u normi $\|\cdot\|_{H^1}$ može izvući podniz koji je Košijev u odnosu na normu $\|\cdot\|_{L_2}$.
Lako se proverava da je forma $a(\cdot,\cdot)$ bilinearna, simetrična, ograničena i koercivna. U daljem radu koristićemo energetsku normu

$$\|\cdot\|_a = \sqrt{a(\cdot,\cdot)}$$

koja je ekvivalentna normi $\|\cdot\|_{H^1}$ na $H_0^1(\Omega)$.
Forma $b(\cdot,\cdot)$ je simetrična i bilinearna.
$H^{-1}(\Omega)$ je dual prostora $H_0^1(\Omega)$ sa normom

$$\|v\|_{-a} = \sup_{\substack{\omega \in H_0^1, \\ \|\omega\|_a = 1}} b(v,\omega).$$

$L_2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ kompaktno, pa za svako $v \in H_0^1(\Omega)$, $b(\omega, v)$ ima neprekidno produženje na $\omega \in H^{-1}(\Omega)$ tako da je $b(\omega, v)$ neprekidna na $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

6.2 Aproksimacija metodom konačnih elemenata

Aproksimirajmo problem metodom konačnih elemenata. Neka je $T^h = \{K\}$ uniformna triangulacija domena Ω. Uvedimo prostor konačnih elemenata na sledeći način:

$$S^h(\Omega) = \{\omega \in H_0^1(\Omega) : \omega|_K \in P_K^r, \forall K \in T^h\},$$

gde je P_K^r prostor polinoma stepena ne većeg od r.
Odabirom konačnodimenzionalnog potprostora dolazimo do aproksimativnog varijacionog zadatka:

Naći (λ_h, u_h), $u_h \in S^h(\Omega)$, $u_h \neq 0$ *tako da je*

$$a(u_h, \omega) = \lambda_h b(u_h, \omega), \quad \forall \omega \in S^h(\Omega). \tag{6.8}$$

Ova diskretna aproksimacija problema ima konačno mnogo sopstvenih vrednosti:

$$0 < \lambda_{1,h} \leq \lambda_{2,h} \leq \lambda_{3,h} \leq ... \leq \lambda_{n_h,h}, \quad n_h = \dim\, S^h,$$

i odgovarajućih sopstvenih funkcija $u_{1,h}, u_{2,h}, u_{3,h}..., u_{n_h,h}$, pri čemu važi:

$$a(u_{i,h}, u_{j,h}) = \lambda_{j,h} b(u_{i,h}, u_{j,h}) = \delta_{ij}.$$

Sopstvene vrednosti problema (6.6) zadovoljavaju min-max princip

$$\lambda_i = \min_{\substack{V_i \subset H_0^1(\Omega), \\ \dim\, V_i = i}} \max_{u_i \in V_i} \frac{a(u_i, u_i)}{b(u_i, u_i)}, \ i = 1, 2, \ldots$$

kao i problema (6.8):

$$\lambda_{i,h} = \min_{\substack{V_i \subset S^h, \\ \dim\, V_i = i}} \max_{u_i \in V_i} \frac{a(u_i, u_i)}{b(u_i, u_i)}, \quad i = 1, 2, ..., n_h.$$

Odavde direktno sledi

$$\lambda_i \leq \lambda_{i,h}, \quad i = 1, 2, ..., n_h.$$

Neka je

$$\delta_h(\lambda_i) = \sup_{v \in N(\lambda_i)} \inf_{\omega \in S^h} \|v - \omega\|_a,$$

gde je

$$N(\lambda_i) = \{v \in H_0^1(\Omega) : v \text{ je sopstvena funkcija koja odgovara } \lambda_i, \|v\|_a = 1\},$$

prostor sopstvenih funkcija.
Uvedimo još i

$$\eta_a(h) = \sup_{\substack{f \in H_0^1(\Omega), \\ \|f\|_a = 1}} \inf_{\omega \in S^h} \|L^{-1} f - \omega\|_a,$$

pri čemu $L^{-1} : H^{-1}(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ zadovoljava

$$a(L^{-1} f, \omega) = b(f, \omega), \quad \forall \omega \in S^h, \ f \in H^{-1}(\Omega).$$

Važi sledeća:

Teorema 6.2.1. *Za svako $u_{i,h}$ problema* (6.6) *($i = 1, 2, ..., n$) postoji sopstvena funkcija u_i problema* (6.8) *koja odgovara λ_i takva da je $\|u_i\|_a = 1$ i*

$$\|u_i - u_{i,h}\|_a \leq_c \delta_h(\lambda_i).$$

Pri tom je $\|u_i - u_{i,h}\|_{-a} \leq_c \eta_a(h)\|u_i - u_{i,h}\|_a$.
Za sopstvenu vrednost

$$\lambda_i \leq \lambda_{i,h} \leq \lambda_i + C_i\delta_h^2(\lambda_i),$$

gde je C_i konstanta koja ne zavisi od koraka h.

Lema 6.2.2. *Ako je Ω konveksna i poligonalna oblast, onda je*

$$\eta_a(h) = O(h), \quad \delta_h(\lambda_i) \leq_c h^r.$$

6.3 Dvomrežna diskretizacija

Neka je P_h ortogonalni projektor prostora $H_0^1(\Omega)$ na prostor $S^h(\Omega)$ definisan sa:

$$a(v - P_h v, \omega) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \omega \in S^h(\Omega).$$

Važi:
Lema 6.3.1. $\|P_h u_i - u_{i,h}\|_a \leq_c \lambda_{i,h} - \lambda_i + \lambda_i\|u_i - u_{i,h}\|_{-a}$
Dokaz. Pođimo od identiteta

$$a(P_h u_i - u_{i,h}, \omega) = (\lambda_i - \lambda_{i,h})b(u_{i,h}, \omega) + \lambda_i b(u_i - u_{i,h}, \omega),\ \forall \omega \in S^h.$$

Važi:

$$\begin{aligned}
&\|P_h u_i - u_{i,h}\|_a^2 = |a(P_h u_i - u_{i,h}, P_h u_i - u_{i,h})| \\
&= |(\lambda_i - \lambda_{i,h})b(u_{i,h}, P_h u_i - u_{i,h}) + \lambda_i b(u_i - u_{i,h}, P_h u_i - u_{i,h})| \\
&\leq_c (\lambda_{i,h} - \lambda_i)\|P_h u_i - u_{i,h}\|_a + \lambda_i\|u_i - u_{i,h}\|_{-a}\|P_h u_i - u_{i,h}\|_a,
\end{aligned}$$

a odavde direktno sledi tvrđenje. □

Navedimo još jedan pomoćni rezultat.
Lema 6.3.2. *Neka je λ sopstvena vrednost, a u odgovarajuća sopstvena funkcija problema* (6.6)*. Tada za svako $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ važi*

$$\frac{a(v, v)}{b(v, v)} - \lambda = \frac{a(v - u, v - u)}{b(v, v)} - \lambda\frac{b(v - u, v - u)}{b(v, v)}.$$

Dokaz. Važi:

$$\begin{aligned}
a(v - u, v - u) - \lambda b(v - u, v - u) =& a(v, v) - 2a(v, u) + a(u, u) - \lambda b(v, v) + 2\lambda b(v, u) \\
&- \lambda b(u, u).
\end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
a(v, u) &= \lambda b(v, u), \\
a(u, u) &= \lambda b(u, u),
\end{aligned}$$

dobijamo

$$a(v - u, v - u) - \lambda b(v - u, v - u) = a(v, v) - \lambda b(v, v),$$

a odavde direktno sledi tvrđenje. □

Neka su sada $S^H(\Omega)$ i $S^h(\Omega)$, $S^H(\Omega) \subset S^h(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, dva prostora konačnih elemenata kojima odgovaraju redom grublja mreža T^H i finija T^h.

ALGORITAM

Korak 1. Naći $\lambda_{i,H} \in \mathbb{R}$ i $u_{i,H} \in S^H(\Omega)$ $(i = 1, 2, ..., n_H)$ tako da je $\|u_{i,H}\|_a = 1$ i

$$a(u_{i,H}, \omega) = \lambda_{i,H} b(u_{i,H}, \omega), \quad \forall \omega \in S^H(\Omega).$$

Korak 2. Naći $u_{i,h} \in S^h(\Omega)$ $(i = 1, 2, ..., n_H)$ tako da je

$$a(u_{i,h}, \omega) = \lambda_{i,H} b(u_{i,H}, \omega), \quad \forall \omega \in S^h(\Omega).$$

Korak 3.

$$\lambda_{i,h} = \frac{a(u_{i,h}, u_{i,h})}{b(u_{i,h}, u_{i,h})}, \quad i = 1, 2, ..., n_H.$$

Vidimo da se problem sopstvenih vrednosti rešava samo u prvom koraku algoritma na grubljoj mreži.

Važi sledeća teorema:
Teorema 6.3.3. *Pretpostavimo da su $\lambda_{i,h}$ i $u_{i,h}$ $(i = 1, 2, ..., n_H)$ dobijeni pomoću algoritma 1. Ako je $S^H \subset S^h$, tada je*

$$\|u_i - u_{i,h}\|_a \leq_c \lambda_{i,H} - \lambda_i + \lambda_i \|u_i - u_{i,H}\|_{-a} + \|u_i - P_h u_i\|_a, \tag{6.9}$$

$$|\lambda_{i,h} - \lambda_i| \leq_c (\lambda_{i,H} - \lambda_i)^2 + \|u_i - u_{i,H}\|_{-a}^2 + \|u_i - P_h u_i\|_a^2. \tag{6.10}$$

Dalje je

$$\|u_i - u_{i,h}\|_a \leq_c \delta_H^2(\lambda_i) + \eta_a(H)\delta_H(\lambda_i) + \delta_h(\lambda_i), \tag{6.11}$$

$$|\lambda_{i,h} - \lambda_i| \leq_c \delta_H^4(\lambda_i) + \eta_a^2(H)\delta_H^2(\lambda_i) + \delta_h^2(\lambda_i). \tag{6.12}$$

Dokaz. Pođimo od identiteta

$$a(P_h u_i - u_{i,h}, \omega) = (\lambda_i - \lambda_{i,H}) b(u_{i,H}, \omega) + \lambda_i b(u_i - u_{i,H}, \omega), \ \forall \omega \in S^h.$$

Imamo da je

$$\begin{aligned} \|u_i - u_{i,h}\|_a^2 &= a(u_i - u_{i,h}, u_i - u_{i,h}) = a(P_h u_i - u_{i,h} + u_i - P_h u_i, u_i - u_{i,h}) \\ &\leq_c (\lambda_{i,H} - \lambda_i + \lambda_i \|u_i - u_{i,H}\|_{-a} + \|u_i - P_h u_i\|_a) \|u_i - u_{i,h}\|_a, \end{aligned}$$

pa odavde direktno sledi (6.9).
Iz Leme 6.3.2 imamo

$$\begin{aligned} |\lambda_{i,h} - \lambda_i| &= \left|\frac{a(u_{i,h}, u_{i,h})}{b(u_{i,h}, u_{i,h})} - \lambda_i\right| \\ &= \left|\frac{a(u_{i,h} - u_i, u_{i,h} - u_i)}{b(u_{i,h}, u_{i,h})} - \lambda_i \frac{b(u_{i,h} - u_i, u_{i,h} - u_i)}{b(u_{i,h}, u_{i,h})}\right|, \end{aligned}$$

a odavde i iz (6.9) dobijamo (6.10).
(6.11) i (6.12) dobijamo pomoću Teoreme 6.2.1. □

Uzimajući u obzir Lemu 6.2.2 imamo sledeće procene:

$$\begin{aligned} \|u_i - u_{i,h}\|_a &\leq_c H^{r+1} + h^r \\ |\lambda_{i,h} - \lambda_i| &\leq_c H^{2r+2} + h^{2r}. \end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da je dovoljno uzeti $H = h^{\frac{r}{r+1}}$ da bismo dobili optimalnu grešku.

6.4 Primer

Ilustrujmo izloženi algoritam na sledećem problemu sopstvenih vrednosti:

$$-\Delta u = \lambda u, \quad x \in \Omega, \tag{6.13}$$
$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{6.14}$$

pri čemu je $\Omega = (0,1) \times (0,1)$.
Nesposredno se proverava da je

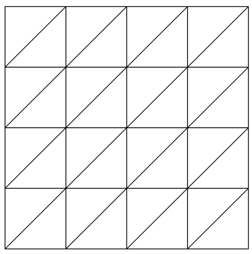
$$u(x) = \sin(i\pi(x-1))\sin(j\pi(y-1)), \quad i,j = 1,2,\ldots$$

sopstvena funkcija, a

$$\lambda = (i^2 + j^2)\pi^2,$$

odgovarajuća sopstvena vrednost datog problema.
Uvedimo triangulaciju domena $T^h(\Omega) = \{K\}$ (slika (6.1)) i prostor konačnih elemenata:

$$S^h(\Omega) = \{\omega \in H_0^1(\Omega) : \ \omega|_K \text{ je linearna}, \ \forall K \in T^h\}.$$



Slika 6.1. Mreža sa korakom $h = \frac{1}{4}$.

Označimo sa (λ_h, u_h) prvu sopstvenu vrednost i odgovarajuću sopstvenu funkciju problema (6.13), (6.14) koje su dobijene metodom konačnih elemenata.
Dobijeni podaci dati su u tabeli (6.1).

Tabela 6.1.

h	$\|u-u_h\|_{L_2}$	$\|\nabla(u-u_h)\|_{L_2}$
$\frac{1}{4}$	2.9592D-02	3.6582D-01
$\frac{1}{8}$	7.8655D-03	1.0903D-01
$\frac{1}{16}$	2.0180D-03	2.9097D-02
$\frac{1}{32}$	5.1958D-04	7.4391D-02
$\frac{1}{64}$	1.4283D-04	1.8733D-02
$\frac{1}{128}$	4.9541D-05	8.6940D-03
$\frac{1}{256}$	2.7492D-05	1.1741D-03

Prema teoremi (6.2.1) važi:

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L_2} \approx O(h).$$

Vidimo da su rezultati numeričkog eksperimenta prikazani u tabeli (6.1) saglasni sa teorijskim rezultatima.

Primenimo sada dvomrežni algoritam koristeći mreže sa korakom $h = \dfrac{1}{2^i}$, $(i = 4, 6, 8)$ i odgovarajuće grublje mreže sa korakom $H = \sqrt{h}$.
Označimo sa (λ^h, u^h) prvu sopstvenu vrednost i sopstvenu funkciju problema (6.13), (6.14) koje su dobijene korišćenjem dvomrežne metode.
Dobijeni rezultati dati su tabeli (6.2). Za ocenu greške korišćena je MATLAB funkcija *pdejmps*.

Tabela 6.2.

(H,h)	$\|\nabla(u - u^h)\|_{L_2}$
$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$	6.4821D-02
$\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{64}\right)$	2.9608D-02
$\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{256}\right)$	6.2749D-03

Iz teoreme (6.3.3) imamo da je

$$\|\nabla(u - u^h)\|_{L_2} \approx O(H^2).$$

Rezultati prikazani u tabeli (6.2) saglasni su sa navedenom procenom.

Literatura

[1] Allaire, G.: *Numerical analysis and optimization: An introduction to mathematical modelling and simulation*, Oxford University Press, 2007.

[2] Howard, P.: *Partial Differential Equations in MATLAB 7.0*, 2005.

[3] Jin, J., Shu, S., Xu, J.: *A two-grid discretization method for decoupling systems of partial differential equations*, Math. Comput. 75, 167-1626, 2006.

[4] Jovanović, B.: *Parcijalne jednačine*, Matematički fakultet, Beograd, 1999.

[5] Jovanović, B., Radunović, D.: *Numerička analiza*, Matematički fakultet, Beograd, 2003.

[6] Jurak, M.: *Metoda konačnih elemenata - predavanja*, 2004.

[7] Koleva, M., Vulkov, L. G.: *Two-grid decoupling method for elliptic problems on disjoint domains*, Lect. Notes in Comp. Sci., Springer - Verlag Berlin Heidelberg, V. 5910, 787 - 795, 2010.

[8] Xu, J., Zhou, A.: *A two-grid discretization scheme for eigenvalue problems*, Math. Comput. 70(233), 17-25, 2001.

[9] Zolić, A.: *Numerička matematika I*, Matematički fakultet, Beograd, 2008.