Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Model latinskih kvadrata u planiranju eksperimenata

-master rad-

Student: Danijela Milenković
1136/2011

Mentor: Vesna Jevremović

Beograd, 2012.

Rezime

Konstantna težnja ka poboljšanju kvaliteta rezultata, na efikasan i ekonomičan način, dovela je do razmatranja novih pristupa u istraživanjima. Da bi istraživanje, koje se realizuje putem jednog ili više eksperimenata, imalo pouzdane rezultate moramo ga temeljiti na statističkim modelima i metodama. Na dalje, kada budemo govorili o eksperimentima, podrazumevaćemo eksperimente čiji su rezultati interpretirani utvrđenim statističkim metodama.

Dosadašnji klasični eksperimenti su bili pouzdani, ali su imali konzervativan pristup i upoređivanje rezultata nije pružalo jasnu sliku razumevanja procesa statističkog zaključivanja. Planirani eksperiment obezbeđuje praktičan i efikasan način variranja faktora kako bi se postigao odgovor na pitanja definisana ciljem istraživanja. Takođe, pruža maksimum numeričkih podataka, na osnovu kojih možemo izvesti zaključke tog tipa, i objektivno razumevanje istraživačkog sistema, koje doprinosi većoj upućenosti u proces zaključivanja. S obzirom na ove prednosti planirani eksperiment ima sve veći značaj u istraživanjima.

U cilju smanjivanja potencijalne greške u krajnjem rezultatu, bira se jedan od četiri osnovna modela pri planiranju: model parova, model slučajnih blokova, model faktorijalnih planova ili model latinskih kvadrata. U ovom radu će posebna pažnja biti posvećena modelu latinskih kvadrata.

Ključne reči. Eksperiment, planiranje eksperimenta, analiza varijanse, latinski kvadrat.

Sadržaj

1. Eksperiment i definicije

1.1. Uvod

Napredovanja u nauci i tehnologiji često se temelje na statističkim istraživanjima. Tako se mogu ocenjivati neke karakteristike populacije na osnovu posmatranja jednog njenog, na pravilan način, izdvojenog dela (tzv. problem reprezentativnosti uzorka). Međutim, može se pristupiti i drugoj vrsti ispitivanja, to jest, možemo testirati uticaj nekog faktora na jedan deo populacije, kako bismo ocenili uticaj faktora kada bi on bio primenjen na celokupnoj populaciji. Planiranje ove vrste isptivanja naziva se planiranje eksperimenata.

Reč eksperiment u ovom slučaju znači ispitivanje, gde je sistem koji se ispituje pod kontrolom osobe koja vrši eksperiment, istraživača. Eksperiment bi se mogao definisati i kao niz testova u kojima se polazi od određene grupe pretpostavki i skupa ulaznih podataka za testiranje. Testiranjem se utvrđuje na koji način deluju faktori koje ispitujemo i kakve promene njihov uticaj izaziva na ulaznim podacima. Ulazni podaci predstavljaju bazu podataka rezultata nekog merenja. Takav skup podataka naziva se još i uzorak. Kod ovakvih posmatranja pretpostavljamo da je uzorak koji koristimo reprezentativni deo populacije. Možemo se zapitati kakva je uloga statističara u ovakvim istraživanjima.

Utvrđena slika o statističarima je da vešto koriste cifre i jednostavno prevode baze podataka u tabele rezultata. Ovakvo banalizovanje dovodi do njihovog nezadovoljstva, pa naučnici koji vode eksperimente često bivaju lišeni značajne pomoći. Istina je da statističari nisu uvek kompetentni za oblasti u kojima vrše eksperimente. Takođe, istina je da uz pomoć kompjutera, a kada ima dosta vremena i uz pomoć samo papira i olovke, od bilo kakve baze podataka, značajne ili ne, statističar može dati veliki broj zaključaka. U današnje vreme kompjuteri podatke obrađuju u višestrukim programima, ali isto tako kao povratnu informaciju mogu dati gomile cifara koje pak mogu biti beskorisne. Odavde sledi da uloga statističara u analizama eksperimenata danas nije da računaju i analiziraju rezultate eksperimenta, ali jeste da pomognu naučnicima da isplaniraju eksperiment u cilju dobijanja validnih i što efikasnijih rezultata.

Zamislite da treba izvesti veoma skup eksperiment iz koga ćemo dobiti mali broj podataka. Ukoliko je takav eksperiment loše isplaniran dobićemo nepotrebne zaključke i svakako neće biti koristi od takvog eksperimenta, a novac koji je obezbeđen za finansiranje tog eksperimenta će biti uzalud potrošen. Eksperiment će nam doneti značajne podatke ukoliko pre izvođenja dobro isplaniramo i proračunamo tok samog eksperimenta. Osim validnih rezultata svakako dobijamo i na efikasnosti i ekonomičnosti.

Dakle, kad problem koji posmatramo uključuje bazu podataka, koja može biti podložna greškama, jedino pravilna primena statističkih metoda može dovesti do relevantnih rezultata. U tom smislu, svaki problem koji podleže eksperimentu posmatra se sa dva aspekta: planiranje eksperimenata i statistička analiza podataka. Ova dva aspekta su usko povezana jer u zavisnosti od izabranog plana pristupamo odgovarajućoj statističkoj analizi.

1.2. Istorijat

Iako mnoge ideje planiranja eksperimenata imaju dugu istoriju, prva velika sistematska rasprava o primeni matematičke statistike u planiranju eksperimenata bila je ona od strane Ronalda Fišera (Ronald Fisher). U istoriji planiranja eksperimenata on dominira u periodu između Prvog i Drugog svetskog rata, 1918-1939. godine. Fišer je takođe uveo i analizu varijanse kao princip analize statističkih podataka. O planiranju eksperimenata napisao je dve knjige *Statistical Methods for Research Workers*, koja se pojavila 1925. godine, i *The Design of Experiments*, 1931. godine. Kako su prva istraživanja i radovi na ovu temu bili vezani za agrarnu industriju to su usvojeni termini iz ovih oblasti. Tako se često može čuti da se govori o tretmanima koji su primenjeni na jedinicama (sadnicama), a da su opet jedinice podeljene u blokove (parcele).

Jejts (Yates) je u seriji radova izdigao ovu temu na viši nivo. Sve više su se razvijali modeli planiranja eksperimenata koji su u početku bili primenjivani uglavnom u poljoprivredi i biološkim naukama, a kasnije i u industriji. Rad Boksa (Box) i Vilsona (Wilson), 1951. godine, bio je od velikog značaja u industrijskom kontekstu. Najnoviji industrijski modeli su naročito povezani sa imenom japanskog inženjera Tagučija (Taguchi). Opštije knjige koje obuhvataju naučna istraživanja i uključuju diskusije o planiranju eksperimenata napisali su Vilson (1952) i Beveridž (Beveridge, 1952). Koks (Cox) u knjizi na ovu temu (1958) naglašava opšte principe na kvalitetan način objedinjujući Boksa, Hantera V. (Hunter W.) i Hantera J. (Hunter J.). Veliki broj radova do kraja šezdesetih godina dvadesetog veka objavili su Herzberg (Herzberg), Kempthorn (Kempthorne) i Koks.

Mnoge opšte knjige o statističkim metodama imaju poglavlja o planiranju eksperimenata ali i tendenciju da stave glavni naglasak na statističku analizu, posebno Montgomeri (Montgomery, 1997). Piantadosi (Piantadosi, 1997) daje detaljan princip planiranja eksperimenta i analize klasičnih ispitivanja. Pažljivo i sistematsko izlaganje i naglasak na industrijske i biometrijske modele dali su Klark (Clarke) i Kempson (Kempson), a zatim i Din (Dean) i Vos (Voss) do 2000. godine.

1.3. Osnovni pojmovi

Tri osnovna elementa eksperimenta su eksperimentalna jedinica, tretman i rezultat. Kao što je već rečeno, eksperiment bismo mogli da definišemo kao niz testiranja u cilju ispitivanja uticaja različitih tretmana na eksperimentalne jedinice. Istraživač dodeljuje po jedan tretman svakoj eksperimentalnoj jedinici i na kraju posmatra dobijeni rezultat.

Eksperimentalne jedinice predstavljaju osnovne jedinice za koje su prikupljeni rezultati odgovarajućih merenja. Formalno rečeno, eksperimentalne jedinice su najmanja podela eksperimentalnog materijala nad kojima vršimo merenja izabranog obeležja u cilju utvrđivanja uticaja posmatranih tretmana. Različitim eksperimentalnim jedinicama tretmani se dodeljuju nezavisno. Na primer, u oftamologiji je razumno očekivati da se ne primenjuju isti tretmani na levo i desno oko pacijenta. Tada je eksperimentalna jedinica oko, a ne pacijent. Od svakog pacijenta, dakle, dobijamo po dve eksperimentalne jedinice.

Broj eksperimentalnih jedinica koje ulaze u istraživanje često nazivamo i veličina uzorka.

Tretmani su jasno definisane procedure koje se primenjuju na eksperimentalnim jedinicama. Jedan tretman može biti primenjen na svim eksperimentalnim jedinicama ili se primenjuje samo na jednoj eksperimentalnoj jedinici, zavisno od tipa eksperimenta. Tretman, kao procedura, predstavlja specifičnu kombinaciju različitih nivoa faktora. Pod faktorom podrazumevamo pojedinačnu vrstu uticaja primenjenu na eksperimentalnim jedinicama, a različite vrste uticaja se nazivaju nivoi faktora. Broj eksperimentalnih jedinica na kojima je jedan određeni tretman primenjen zove se broj ponavljanja određenog tretmana. Rezultat merenja je specifikovan kriterijumom poređenja tretmana.

Primer 1.3.1. Proučava se količina prinosa četiri hibridne vrste kukuruza u tri regiona koji imaju različite količine vlažnosti. Oblasti se biraju prema prosečnoj količini kiše u sezoni i rezultati se beleže po hektaru za svaku vrstu kukuruza. Ovaj primer predstavlja dvofaktorski eksperiment koji ima faktore „vrsta biljke“, sa 4 nivoa, i „geografsku lokaciju“, sa 3 nivoa. Eksperimentalne jedinice su posmatrani hektari zemlje pod kukuruzom, a obeležje koje merimo je količina prinosa.

1.4. Tok planiranja eksperimenta

Najvažniji aspekt planiranja je predmet istraživanja. Pitanja kojima se bavimo treba da budu relevantna i plodonosna. Obično to znači da smo upućeni na jedno ili više dobro definisanih pitanja ili hipoteza istraživanja, npr. spekulacije o procesu u osnovi neke pojave ili istraživanje i objašnjenje ranijih pronalazaka. Neka ispitivanja mogu imati manje fokusiran cilj. Na primer, neka industrijska istraživanja procesa pod proizvodnim uslovima mogu imati za cilj da identifikuju koji od nekoliko velikih, a potencijalnih uticaja, imaju najveći značaj.

U principu, opšti ciljevi će dovesti do sledećih zahteva. Prvo eksperimentalne jedinice moraju biti definisane i izabrane. Zatim tretmani moraju biti jasno precizirani. Promenljive veličine koje se mere na svakoj jedinici moraju biti specifikovane i treba unapred utvrditi obim uzorka koji će biti uzet u analizu. Na taj način dolazimo do osnovnih delova planiranja eksperimenta:

1) definisanje problema,
2) izbor eksperimentalnih jedinica, faktora i tretmana,
3) izbor obeležja koje daje validne rezultate,
4) izbor plana eksperimenta,
5) sprovođenje eksperimenta,
6) statistička analiza dobijenih rezultata,
7) razmatranje dobijenih zaključaka.

Na prvi pogled može se učiniti jednostavnim, ali u praksi određivanje osnovnog zadatka eksperimenta ne predstavlja nimalo lak posao. Neophodno je objediniti sve ideje u vezi sa realizacijom eksperimenta. Uglavnom je od velikog značaja biti upoznat sa oblašću istraživanja i krajnjim korisnicima rezultata. Može biti od velikog značaja napraviti listu pitanja i specifičnih problema na koje želimo da odgovorimo pomoću rezultata eksperimenta. Uglavnom u ovoj fazi eksperimenta većina naučnika i istraživača zaključi da je bolja strategija realizovanje više manjih eksperimenata, koji će sekvencijalno dati odgovore na pitanja, nego realizacija jednog sveobuhvatnog eksperimenta.

Pitanja u vezi eksperimentalnih jedinica su u izvesnoj meri specifikovana za svako polje primene. Ovo je povezano sa pitanjem da li jedinice treba da budu izabrane što je moguće uniformnije ili po unapred definisanom pravilu. U drugom slučaju razumno je da istraživanje i predmet merenja nametnu jasno određenu strukturu eksperimentalnih jedinica. Kada se jasno definiše predmet istraživanja, izbor faktora ne predstavlja veliki problem. Razlikujemo faktore koji su od značaja za istraživanje i faktore koji utiči na eksperimentalne jedinice ali njihov uticaj nije od značaja. Kada se izabere tip faktora, prelazi se na izbor nivoa i tretmana koji će biti primenjeni. Ključna osobina eksperimentalnih jedinica je da različite jedinice moraju biti u stanju da podnesu različite faktore, a samim tim i tretmane.

Izbor odgovarajućih promenljivih za merenje je ključni aspekt planiranja u širem smislu. Priroda merenja vrednosti obeležja koje posmatramo je direktno povezana sa greškom. Različite vrste promenljivih se mogu meriti i njihovo ispitivanje predstavlja centralno pitanje. Pri analizi imamo na umu tri vrste promenljivih. Osnovne promenljive, koje opisuju eksperimentalne jedinice pre primene tretmana, srednje promenljive i promenljive odgovora. Srednje promenljive, ili međupromenljive, obično daju privremeno objašnjenje ponašanja procesa koje vodi od tretmana do odgovora. Naravno, od najvećeg značaja su promenljive odgovora, jer se na osnovu njih izvodi zaključak. Tako su u kliničkim ispitivanjima, na samom početku istraživanja, na raspolaganju informacije kao što je starost, pol. Tokom primene određene vrste lečenja kao posebnu specifikaciju merimo temperaturu, krvni pritisak, itd., a sve u cilju dobijanja krajnjeg rezultata koji predstavlja vreme ozdravljenja ili vreme kritičnog događaja u progresiji bolesti. U poljoprivredi osnovne promenljive bi bile hemijski sastav zemljišta, prinos prethodne vegetacije. Moguće međupromenljive su gustina biljaka po kvadratnom metru, broj niklih biljaka, procena rasta u određenim vremenskim razmacima. Njihovo praćenje se vrši u cilju postizanja krajnjeg rezultata, a to može biti ocena prinosa na osnovu trenutnog stanja vegetacije.

Glavni cilj u planiranju eksperimenata je poređenje tretmana u zavisnosti od dobijenih rezultata, što se uglavnom postiže procenjivanjem granica mogućih varijacija rezultata različitih tretmana. Zahtevi koji u takvim procenama moraju biti ispunjeni su sledeći. Prvo, moraju se izbeći sistematske greške i pristrasne pretpostavke. Zatim se mora minimizirati efekat slučajne greške koja predstavlja nekontrolisani faktor istraživanja. Dalje, trebalo bi da bude moguće da se razumno oceni veličina slučajne greške, obično određivanjem odgovarajućih intervala poverenja. Eksperiment treba da postigne korisne rezultate sa dovoljno visokim nivoom preciznosti. Iz dobijenih rezultata treba izvesti odgovarajući zaključak i odgovoriti na pitanja definisana ciljem istraživanja. Ispunjavanje ovih uslova se postiže izborom pogodnog modela kojim se jasno definiše pridruživanje tretmana eksperimentalnim jedinicama.

Mora se uspostaviti i ravnoteža između troška po jedinici eksperimenta i povećanja preciznosti koje ćemo steći dodavanjem novih eksperimentalnih jedinica. Osim u retkim slučajevima kada se lako mogu uskladiti troškovi sa preciznošću, moramo unapred doneti odluku i o veličini eksperimenta kako bi se zaštitili od lažne preciznosti i nepotrebnog trošenja resursa. Češće se na ovaj način štitimo od mogućnosti da dobijemo malu preciznost, što može uzrokovati beskorisne rezultate. Ovakav vid kalkulacija je preporučljiv jer je u nekim istraživanjima uobičajeno da postoji maksimalna dozvoljena veličina uzorka i da je to ograničenje van kontrole istraživača. Tada treba unapred postaviti pitanje da li raspoloživi resursi mogu da proizvedu dovoljnu preciznost da bi se opravdao postupak istraživanja uopšte. Na primer, u eksperimentima sa životinjama, gde se uvek ima na umu zaštita životinja, dodatna je motivacija smanjiti broj životinja potrebnih za ispitivanje. Svakako, ne želimo da nepotrebno mnogo životinja bez razloga izložimo stresu zbog testiranja. Takođe, izbegavamo i suprotnu situaciju. Ukoliko bi bilo suviše malo životinja istraživanje ne bi imalo značaja jer bi životinje mogle da odreaguju na različite načine i ne bismo mogli da donesemo bilo kakav zaključak. Slučaj u kome testiranje mora da se obavi, a broj životinja je ograničen (npr. zaštićena vrsta čiji je mali broj jedinki dostupan) je slučaj ograničenog broja jedinki van kontrole istraživača.

Kada izvrši statističku analizu dobijenih podataka i izvede zaključke, istraživač ima zadatak da prezentuje rezultate grafički ili na neki drugi način. Kako se istraživanja vrše na uzorku, koji predstavlja deo populacije, treba takođe razmotriti kakav bi se efekat postigao kada bi utvrđeno trebalo proširiti na celu populaciju. Može se dogoditi da posle izvršenog eksperimenta ne dođemo do bitnih zaključaka ili odgovora na pitanja koja smo postavili u početku. Naručilac eksperimenta svakako neće biti zadovoljan ako ostane bez bilo kakvog rezultata. Tada treba predložiti sledeće korake u istraživanju, na primer, novi eksperiment pod izmenjenim uslovima.

1.5. Osnovni principi planiranja eksperimenta

Postoje tri osnovna principa koji predstavljaju sastavni deo svakog eksperimenta.

1) Mogućnost ponavljanja bazičnog eksperimenta više puta. Unapred se odredi princip primene tretmana na eksperimentalne jedinice i na ovaj način obezbeđujemo mogućnost da u potpunosti ponovimo eksperiment primenjujući drugi tretman. Ovaj princip nam obezbeđuje dve važne osobine. Prvo, dozvoljava istaživaču da oceni grešku koja se javlja prilikom merenja izabranog obeležja, i drugo, obezbeđuje smanjenje standardne devijacije rezultata. Ponavljanje bazičnog eksperimenta treba razlikovati od ponovljenog merenja. Naime, ponovljeno merenje se izvodi pod potpuno istim uslovima, nad istim eksperimentalnim jedinicama, dok ponavljanje bazičnog eksperimenta

podrazumeva samo mogućnost ponavljanja osnovnih principa eksperimenta. Na primer, neka vršimo merenja dužina metalnih cevi. Uzmemo prvu cev i merimo njenu dužinu. Ako merenje te cevi izvršimo, na primer, tri puta, onda je to slučaj ponovljenog merenja. Mogućnost ponavljanja bazičnog eksperimenta bi se ovde ogledala u obezbeđivanju jednakih uslova merenja, kao što je spoljna temperatura, jer je poznato da se neke vrste metala na višim temperaturama šire.

2) Slučajan izbor se nalazi u osnovi svih statističkih istraživanja. Pod slučajnim izborom podrazumevamo oba, i slučajan izbor eksperimentalnih jedinica u uzorak, i slučajan raspored testiranja eksperimentalnih jedinica. Tada rezultati merenja obeležja, kao i slučajne greške, predstavljaju nezavisne slučajne veličine. Slučajan izbor se postiže uglavnom pomoću različitih generatora ili tabela slučajnih brojeva. Ovaj pristup se još naziva i potpuno slučajan plan.

3) Grupisanje koristimo zbog povećanja preciznosti rezultata isključivanjem rezultata koji nisu od značaja. Na svaku eksperimentalnu jedinicu utiče jedan ili više faktora. Kao što smo već pomenuli slučajna greška predstavlja nekontrolisani faktor, dok ostali faktori mogu da se kontrolišu. Neki od kontrolisanih faktora su od većeg, a neki od manjeg značaja. Grupisanje nam u eksperimentu omogućava izolovanje efekata uticaja samo jednog faktora. Grupišemo eksperimentalne jedinice koje su pod uticajem istog faktora u blok i posmatramo blokove kao pojedinačne celine. Kada od krajnjih rezultata oduzmemo efekte pojedinačnih faktora dobijamo preciznije rezultate.

2. Statistička analiza

2.1. Uvod

Ukoliko je potrebno uporediti uticaj jednog faktora ili tretmana na određenu pojavu pristupa se klasičnim statističkim metodama. Na primer, posmatramo cementnu industriju. Jedan od osnovnih proizvoda u cementnoj industriji je beton. Brzina vezivanja betona, između ostalog, zavisi i od količine gipsa koju sadrži. Ako želimo da uporedimo uticaj dve različite, fiksirane, količine gipsa na vezivanje, koje predstavljaju faktor koji ispitujemo, pristupićemo klasičnom upoređivanju srednjih vrednosti t-testom. Međutim, često je slučaj da uslovi nisu idealni, već da na rezultate utiče više faktora. Tada moramo istovremeno razmatrati dva ili više faktora. Na primer, još jedan od faktora jeste voda. Veći procenat vode produžava vreme vezivanja betona. Takođe, i temperatura utiče na vezivanje. Više temperature dovode do bržeg isparavanja vode, a samim tim do skraćivanja vremena vezivanja. Planiranje eksperimenata je tada aspekt od velikog značaja.

Primer 2.1.1. (Primer slučajnog izbora eksperimentalnih jedinica pri testiranju). U proizvodnji muških košulja od velikog značaja je zatezna čvrstina vlakana koja se koristi za proizvodnju. Na osnovu ranije izvedenih eksperimenata inženjeri su utvrdili da veliki uticaj na vlakna ima udeo pamuka u njihovom sastavu. Međutim, određena vrsta košulja, koju su inženjeri posmatrali, zahtevala je da finalni proizvod sadrži između 10 i 40 procenata pamuka. Znajući ove uslove inženjer pristupa sledećem postupku. Izabere za početak koje procente će testirati. Neka su to 15, 20, 25, 30 i 35 procenata. Uz to neka zahteva da se testiranje ponovi $n = 5$ puta za svaki od izabranih procenata. To znači da je potrebno ukupno 25 različitih košulja koje treba testirati (5(vrsta)*5(testiranja)). Tretman kojem podležu svih 25 eksperimentalnih jedinica je rastezanje košulja.

Da bi na slučajan način izabrao raspored po kome će testirati košulje za početak ih numeriše od 1 do 25. Zatim, iste te brojeve, od 1 do 25, rasporedi u tabelu:

Tabela 2.1.1. Primer čvrstine vlakana

Udeo pamuka	Redni broj eksperimenta				
15	1	2	3	4	5
20	6	7	8	9	10
25	11	12	13	14	15
30	16	17	18	19	20
35	21	22	23	24	25

Bira slučajan broj od 1 do 25. Neka je to broj 7. To znači da prvo testira vlakna koja imaju u sebi 20% pamuka. Zatim bira slučajan broj od 1 do 25 koji nije jednak 7. Neka je dobijen broj 17. Dakle, sledeće testiranje se obavlja na vlaknima sa 30% pamuka. Ovaj postupak inženjer ponavlja dok ne dobije novi, slučajan, raspored za sve brojeve od 1 do 25. Novodobijeni raspored predstavlja redosled testiranja. Ovom postupku izbora testiranja inženjer neće pristupiti ukoliko su uslovi idealni i ukoliko faktor koji analiziramo ne menja svoja svojstva kroz vreme. Konkretno u ovom primeru na vlakna može uticati vlažnost, a to može dovesti do toga da rezultati ne budu uporedivi. Posle dobijenog rasporeda i izvršenog eksperimenta pristupa se analizi rezultata.

Rezultati eksperimenta se predstavljaju grafički na razne načine (dijagrami, histogrami, “box-plot” grafikoni). Za detaljnije analize ovakvo predstavljanje svakako nije dovoljno.

Pretpostavimo da treba testirati i razlike srednjih vrednosti sila pod kojom se vlakna kidaju za svih 5 procentnih udela pamuka. Na osnovu klasične statističke analize, proveru jednakosti možemo postići upoređivanjem parova različitih vrsta vlakana. U slučaju 5 različitih vrsta to i ne predstavlja puno posla, ali šta se dešava ako je broj vrsta veći? Za 5 vrsta postoji 10 različitih parova. Testiranje hipoteza o jednakosti se vrši sa unapred izabranim pragom značajnosti. Neka je prag značajnosti svih testova 0.95. Testiranja pojedinačnih parova, pri idealnim uslovima, su međusobno nezavisna. Kako važi pravilo proizvoda za verovatnoću nezavisnih događaja, to znači da će verovatnoća da sve hipoteze o jednakosti budu prihvaćene biti jednaka proizvodu verovatnoća da pojedinačne hipoteze o jednakosti budu prihvaćene. Odnosno, verovatnoća prihvatanja nulte hipoteze o jednakosti srednjih vrednosti jačine vlakana je $0.95^{10} = 0.60$. Sada se nameće drugo pitanje. Da li je to dovoljan prag značajnosti našeg istraživanja?

Da bismo prevazišli gubitak na značajnosti testa o jednakosti srednjih vrednosti jačine vlakana pristupamo statističkoj metodi koja se naziva analiza varijanse, ili disperziona analiza. Na prvi pogled sam naziv analiza varijanse nije adekvatan jer se testira jednakost srednjih vrednosti, međutim, glavni uticaj na naslov ima proces sprovođenja ove analize. Suština analize varijansi se sastoji u raščlanjavanju ukupne varijanse posmatranog skupa podataka na komponente: varijacije nastale pod dejstvom kontrolisanih faktora i varijacije nastale pod dejstvom nekontrolisanih faktora (npr. slučajne greške).

2.2. Jednofaktorska disperziona analiza

Kada eksperiment obuhvata više od dva tretmana treba izabrati raspored tretmana da bismo mogli pristupiti ispitivanju populacije. Kao što je pomenuto slučajan plan podrazumeva da se sve eksperimentalne jedinice izaberu na slučajan način. Takođe, na slučajan način se vrši izbor tretmana koji će biti dodeljen određenoj eksperimentalnoj jedinici. Broj tretmana i broj ponavljanja pojedinačnih tretmana je unapred određen.

Od merenja vrednosti obeležja koje ispitujemo, preko numeričke analize, do dobijanja rezultata može doći do pojave odstupanja u vrednostima. Izvori takvih varijacija mogu biti višestruki. Grupišemo eksperimentalne jedinice po tretmanima koji su na njima primenjeni. Varijacije u rezultatima mogu biti uzrokovane ili uticajima različitih tretmana ili varijacijama koje se javljaju unutar pojedinačnih grupa i koje predstavljaju greške u merenju vrednosti. Takva analiza varijanse se naziva jednofaktorska disperziona analiza. Zadatak koji nam predstoji je podela ukupne sume kvadrata odstupanja na dve komponente koje predstavljaju prethodno navedene varijacije.

Posmatrajmo eksperiment koji obuhvata više od dva tretmana, na primer k tretmana. Neka je tretman 1 primenjen na n_1 eksperimentalnih jedinica, tretman 2 na n_2 jedinica, i tako dalje, tretman k na n_k jedinica. Sa $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ označimo ukupan broj jedinica u eksperimentu. Rezultati merenja dati su u sledećoj tabeli, gde je y_{ij}, i-to merenje u j-tom tretmanu. U poslednjoj vrsti tabele za svaki tretman uzoračke sredine su date formulom

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}.$$

Tabela 2.2.1. Podaci za potpuno slučajan uzorak

	Tretman 1	Tretman 2	...	Tretman k
	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1k}
	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2k}
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$y_{n_1 1}$	$y_{n_2 2}$	$\cdots$	$y_{n_k k}$
Sredine	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$		$\bar{y}_k$

Sume kvadrata odstupanja sredina su redom:

$$\sum_{i=1}^{n_1}(y_{i1} - \bar{y}_1)^2,\ \sum_{i=1}^{n_2}(y_{i2} - \bar{y}_2)^2, \dots ,\ \sum_{i=1}^{n_k}(y_{ik} - \bar{y}_k)^2.$$

Označimo još i sredinu celokupnog uzorka sa $\bar{y} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\bar{y}_j$. Pretpostavimo da merenja koja odgovaraju j-tom tretmanu obrazuju slučajan uzorak. U slučaju realnih podataka neophodno je da pre postupka analize varijansi izvršimo dva testa. Prvi test je test na normalnu raspodeljenost podataka iz svakog od j uzoraka, a drugi, test o jednakosti disperzija po svim tretmanima. Dakle, merenja koja odgovaraju j-tom tretmanu treba da obrazuju slučajan uzorak iz populacije sa normalnom raspodelom čija je sredina m_j i varijansa σ^2. Pretpostavlja se da su uzorci međusobno nezavisni. Pretpostavimo i da oba prethodna testa imaju pozitivne rezultate. Sada možemo primeniti analizu varijansi. Uvedimo nove parametre:

- aritmetička sredina populacijskih sredina $m = \frac{\sum_{j=1}^{k} m_j}{k}$
- efekat j-tog tretmana $\beta_j = m_j - m,\ \ j = 1, 2, \dots, k.$

Pomoću ovih parametara uvodimo model za poređenje k tretmana

$$y_{ij} = m + \beta_j + e_{ij},\ \ i = 1,2,\dots,n_j,\ \ j = 1,2,\dots,k,$$

gde je $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = 0$, a e_{ij} su greške (reziduali), nezavisne slučajne veličine sa $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ raspodelom. Ocene parametara m i β_j, su redom $\bar{y}$ i $\bar{y}_j - \bar{y}$.

Pođimo sada od očigledne jednakosti:

$$y_{ij} - \bar{y} = (\bar{y}_j - \bar{y}) + (y_{ij} - \bar{y}_j).$$

Kvadriranjem dobijamo:

$$(y_{ij} - \bar{y})^2 = (\bar{y}_j - \bar{y})^2 + (y_{ij} - \bar{y}_j)^2 + 2(\bar{y}_j - \bar{y})(y_{ij} - \bar{y}_j).$$

Kako ove jednakosti važe za proizvoljan izbor i, to sumiranjem po svim i, za fiksirano j, dobijamo:

$$\sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{y}_j - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{y}_j - \bar{y})(y_{ij} - \bar{y}_j).$$

Poslednji član ove sume jednak je nuli zbog

$$\sum_{i=1}^{n_j} (\bar{y}_j - \bar{y})(y_{ij} - \bar{y}_j) = (\bar{y}_j - \bar{y}) \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j) = (\bar{y}_j - \bar{y}) \left(\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij} - n_j \bar{y}_j \right) = 0.$$

Korišćenjem ove činjenice, i sumiranjem po svim j, dobijamo:

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{y}_j - \bar{y})^2 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2.$$

Sa SS označićemo ukupnu sumu kvadrata odstupanja. Ona predstavlja zbir kvadrata razlika pojedinih vrednosti iz eksperimenta i njegove ukupne sredine

$$\mathrm{SS} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y})^2.$$

Zbir na desnoj strani se sastoji iz dva sabirka. Prvi sabirak označićemo sa $\mathrm{SS_T}$ i on predstavlja sumu kvadrata odstupanja između tretmana, tj. zbir kvadrata razlika između sredina pojedinih tretmana i ukupne sredine populacije

$$\mathrm{SS_T} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(\bar{y}_j - \bar{y}\right)^2.$$

Drugi sabirak je suma kvadrata razlika unutar tretmana. Ona se još naziva greška ili rezidualna suma kvadrata, otuda oznaka $\mathrm{SS_R}$, i predstavlja zbir kvadrata razlika vrednosti jedinica svakog tretmana posebno od njegove sredine

$$\mathrm{SS_R} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2.$$

Vrednosti y_{ij} možemo posmatrati kao realizovane vrednosti slučajnih promenljivih Y_{ij}, za sve moguće vrednosti i i j, koje su nezavisne i imaju normalnu raspodelu sa odgovarajućim očekivanjem i jednakom disperzijom σ^2. Prethodne sume tada postaju slučajne veličine koje zavise od Y_{ij}. Ispitivanje ima za cilj proveru nulte hipoteze koja tvrdi da su srednje vrednosti jednake, to jest da su sve srednje vrednosti jednake među sobom i jednake fiksiranoj vrednosti m. Na osnovu osobine da za n nezavisnih slučajnih veličina $X_1, X_2, \dots, X_n$, sa jednakom $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelom važi da njihova sredina $\bar{X}_n$ ima raspodelu $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$, možemo odrediti raspodele gore navedenih suma slučajnih veličina. Ove sume su sume kvadrata nezavisnih normalno raspodeljenih slučajnih veličina, pa zaključujemo da važi:

$$\frac{\mathrm{SS}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\frac{\mathrm{SS_T}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{k-1}$$

$$\frac{\mathrm{SS_R}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$$

Osim ovog zaključka od velike važnosti je činjenica da su ove sume nezavisne. Da bismo to dokazali koristićemo se teoremom Kokrana (Cochran) o kvadratnim formama. Za početak pojasnimo šta su to kvadratne forme.

Definicija 2.2.1. *Homogeni polinom drugog stepena od n realnih promenljivih je kvadratna forma.Ukoliko su i koeficijenti polinoma realni onda je to realna kvadratna forma.*

Primer 2.2.1.

a) $X_1^2 + 7X_1X_2 + X_2^2$;
b) $X_1^2 + 4X_2^2 + 6X_3^2 - 3X_1X_2$;
c) $(X_1 - 3)^2 + (X_2 - 4)^2$.

Sve su ovo kvadratne forme, s tim da poslednja forma nije kvadratna po X_1 i po X_2, ali jeste po $Y_1 = X_1 - 3$ i $Y_2 = X_2 - 4$.

Primer 2.2.2. Uzoračka disperzija je kvadratna forma po $X_1, X_2, \dots, X_n$, jer je

$$\begin{aligned}\bar{S}_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \bar{X}_n\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} {X_j}^2 - (\bar{X}_n)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} {X_j}^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n} {X_j}^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j\right) \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\sum_{j=1}^{n} {X_j}^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{i<j} X_i X_j\end{aligned}$$

Slično je i $\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \bar{X}_n\right)^2$ kvadratna forma.

Svaka kvadratna forma je jednoznačno određena svojom matricom čiji su članovi koeficijenti kvadratne forme. Tako je za kvadratnu formu $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j$ odgovarajuća matrica

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

pri čemu je $a_{ij} = a_{ji}$. Za kvadratnu formu kažemo da je nenegativna (nenegativno definitna) ako je njena matrica nenegativno definitna.

Navedimo sada teoremu Kokrana o raspodelama kvadratnih formi.

Kokranova teorema. *Neka je $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ prost slučajan uzorak iz normalne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ raspodele. Neka je suma kvadrata ovih veličina predstavljena u obliku*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k,$$

gde su Q_j kvadratne forme od $X_1, X_2, \dots, X_n$, sa matricama $\boldsymbol{A}_j$, ranga r_j, za $j = 1, \dots, k$. Slučajne promenljive $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ su nezavisne i $\frac{Q_j}{\sigma^2}$ ima χ^2 raspodelu sa r_j stepeni slobode ako i samo ako je $\sum_{j=1}^{k} r_j = n$.

Dokaz teoreme je dat u dodatku B.

Zaključak o raspodelama varijansi $\mathrm{SS}, \mathrm{SS_T}, \mathrm{SS_R}$ se slaže sa tvrđenjem teoreme. Takođe, teorema kao posledicu ima nezavisnost ovih varijansi. Razlaganje suma kvadrata odstupanja na ovaj način predstavlja se tabelom analize varijansi:

Tabela 2.2.2. Analiza varijansi za poređenje k tretmana

Izvor	Broj stepeni slobode	Suma kvadrata	Test-statistika
Tretmani	$k-1$	SS_T	$\frac{SS_T}{\sigma^2(k-1)}$
Reziduali	$n-k$	SS_R	$\frac{SS_R}{\sigma^2(n-k)}$
Ukupno	$n-1$	SS	

2.3. Testiranje nulte hipoteze testom količnika verodostojnosti

Testiramo nultu hipotezu H_0 o odsustvu razlika između tretmana nasuprot alternativnoj hipotezi H_1 da razlike postoje. Nultu hipotezu možemo zapisati na dva načina:

$$H_0: (m_1 = m_2 = \cdots = m_k = m),$$

odnosno

$$H_0: (\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0).$$

Alternativna hipoteza bi se tada mogla zapisati na sledeći način

$$H_0: \left(m_i \neq m_j, \qquad za\, neko\; i \neq j\right),$$

tj.

$$H_0: \left(\beta_i \neq \beta_j, \qquad za\, neko\; i \neq j\right),$$

za $i, j \in \{1,2,\ldots,k\}$. Testiranje vršimo testom količnika verodostojnosti.

Označimo sa Ω celokupni parametarski prostor

$$\Omega = \left\{(m_1, m_2, \ldots, m_k, \sigma^2), m_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, k, \sigma^2 > 0\right\}.$$

Parametarski prostor nulte hipoteze je

$$\omega = \left\{(m_1, m_2, \ldots, m_k, \sigma^2), m_1 = m_2 = \cdots = m_k = m, m_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, k, \sigma^2 > 0\right\}.$$

Formiramo funkcije verodostojnosti:

$$L(\Omega) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ij} - m_j\right)^2\right\}$$

$$L(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ij} - m\right)^2\right\}$$

Zbog osobine monotonosti logaritamske funkcije možemo posmatrati logaritme funkcija verodostojnosti

$$l(\Omega) = lnL(\Omega), \;\; l(\omega) = lnL(\omega).$$

Ocenjujemo vrednosti m, m_j i σ^2 za koje će funkcija verodostojnosti dostići svoj maksimum. Iz jednakosti $\frac{\partial l(\Omega)}{\partial m_j} = 0, j = 1, \ldots, k$, dobijamo ocene za sve m_j

$$\widehat{m}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}\,, \;\; j = 1, \ldots, k,$$

a iz jednakosti $\frac{\partial l(\Omega)}{\partial \sigma^2} = 0$, ocenu za σ^2

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ij} - \bar{y}_j\right)^2$$

Iz logaritmovane funkcije verodostojnosti za parametarski prostor nulte hipoteze, diferenciranjem po m i σ^2 dobijamo sledeće ocene ovih parametara

$$\widehat{m} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}$$

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2$$

Zamenom u formule funkcija verodostojnosti dobijamo

$$L(\widehat{\Omega}) = \left(\frac{n}{2\pi\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ij} - \bar{y}_j\right)^2}\right)^{\frac{n}{2}} exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}$$

$$L(\widehat{\omega}) = \left(\frac{n}{2\pi\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2}\right)^{\frac{n}{2}} exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}$$

Količnik verodostojnosti je količnik funkcija verodostojnosti pri nultoj hipotezi i opšte funkcije verodostojnosti, pa dobijamo da je

$$\Lambda = \frac{L(\widehat{\omega})}{L(\widehat{\Omega})} = \left(\frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ij} - \bar{y}_j\right)^2}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Na osnovu testiranja hipoteza testom količnika verodostojnosti, nultu hipotezu bismo odbacili ukoliko je ispunjeno $\Lambda \leq \Lambda_0$, gde je Λ_0 kritična vrednost. Na osnovu ranije uvedenih oznaka možemo izvršiti transformaciju količnika verodostojnosti kako bismo dobili test-statistiku koja ima poznatu raspodelu. Važi sledeći niz jednakosti

$$\Lambda = \left(\frac{SS_R}{SS}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\Lambda = \left(\frac{SS_R}{SS_T + SS_R}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\Lambda = \left(\frac{1}{\frac{SS_T}{SS_R} + 1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

Ukoliko je tačna nulta hipoteza statistika

$$F = \frac{\frac{\mathrm{SS_T}}{\sigma^2}/(k-1)}{\frac{\mathrm{SS_R}}{\sigma^2}/(n-k)}$$

ima Fišerovu raspodelu sa $(k-1, n-k)$ stepeni slobode, gde je $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$. Uvođenjem odgovarajuće smene

$$c = \Lambda_0^{\frac{-2}{n}} - 1$$

kritična oblast se prevodi u ekvivalentnu kritičnu oblast $W = \{F \geq c\}$. Dakle, odbacivanje ili prihvatanje hipoteze H_0 zavisi od toga da li je realizovana vrednost test-statistike F veća ili manja od odgovarajuće tablične vrednosti $F_\alpha(k-1, n-k)$, gde je α traženi prag značajnosti testa.

2.4. Intervali poverenja i višestruki intervali poverenja

Odbacivanje nulte hipoteze značilo bi da postoje značajne razlike između aritmetičkih sredina podataka pod dejstvom različitih tretmana. Međutim, odbacivanje nulte hipoteze ne precizira kakve su i kolike razlike u tretmanima. Jedan od načina utvrđivanja ovih razlika je određivanje intervala poverenja za razlike $m_i - m_j$, za sve parove tretmana. Ranije smo već uveli oznaku $\beta_j = m_j - m$. Razlika $m_i - m_j$ je tada jednaka razlici $\beta_i - \beta_j$. Statistike $\bar{Y}_i$ i $\bar{Y}_j$ imaju, redom, raspodele $\mathcal{N}(m_i, \frac{\sigma^2}{n_i})$ i $\mathcal{N}(m_j, \frac{\sigma^2}{n_j})$, i nezavisne su, pa iz toga sledi da njihova razlika $\bar{Y}_i - \bar{Y}_j$ ima normalnu raspodelu sa očekivanjem $m_i - m_j$ i disperzijom $\sigma^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)$. Vrednost σ^2 nije unapred poznata, pa je potrebno oceniti je nekom poznatom vrednošću. Iz dekompozicije ukupne sume kvadrata odstupanja sledi da postoje dve ocene veličine σ^2.

Jedna je bazirana na sumi kvadrata razlika između sredina tretmana, a druga na sumi kvadrata razlika unutar tretmana. Uporedimo ove dve ocene. Važi

$$E(\mathrm{SS_T}) = (k-1)\sigma^2 + n \cdot \sum_{j=1}^{k} {\beta_j}^2$$

gde je $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$. Matematičko očekivanje druge sume je

$$E(\mathrm{SS_R}) = (n-k)\sigma^2.$$

Ukoliko nulta hipoteza nije ispunjena to znači da ne važi ni jednakost

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0,$$

odnosno, bar jedna od vrednosti β_j je različita od nule. Kao posledica sledi da će onda i $\sum_{j=1}^{k} {\beta_j}^2$ biti strogo veća od nule. Tačan efekat tretmana ne znamo, pa ćemo kao bolju ocenu σ^2 izabrati vrednost $\frac{SS_R}{n-k}$. Ranije smo već utvrdili da ova veličina ima χ^2 raspodelu sa $n-k$ stepeni slobode, pa će količnik

$$t = \frac{\left(\bar{Y}_i - \bar{Y}_j\right) - \left(m_i - m_j\right)}{\sqrt{\frac{SS_R}{n-k}}\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}}$$

imati t-raspodelu sa $n-k$ stepeni slobode. Ovu statistiku koristimo za određivanje intervala poverenja za razliku $m_i - m_j$. Ukoliko je traženi nivo poverenja dat u obliku $100(1-\alpha)\%$ interval poverenja za razliku sredina $m_i - m_j$ između i-tog i j-tog tretmana dat je jednakošću

$$\left(\bar{y}_i - \bar{y}_j\right) \pm t_{\alpha/2} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}$$

gde je $s = \sqrt{\frac{SS_R}{n-k}}$, a $t_{\alpha/2}$ je odgovarajuća tablična vrednost iz t raspodele.

Ako interval poverenja za razliku $m_i - m_j$ sadrži i pozitivne i negativne vrednosti, smatramo da razlika između ovih sredina ne postoji. U suprotnom, u zavisnosti od toga da li su vrednosti samo pozitivne ili samo negativne, utvrđuje se koji tretman ima veći efekat.

Na ovaj način smo došli do pojedinačnih intervala poverenja. Ukoliko je broj tretmana jednak k, onda je ukupan broj parova $\binom{k}{2}$ i svaki ima nivo poverenja jednak $100(1-\alpha)\%$. Određivanje nivoa poverenja efekata svih parova objedinjavanjem prethodnih rezultata može biti težak zadatak. Da bi se ovaj problem prevazišao uvodimo višestruke intervale poverenja. Metod određivanja ovih intervala podrazumeva formiranje odgovarajućih intervala čija zajednička verovatnoća ne prevazilazi unapred zadat nivo poverenja. Određivanje višestrukih intervala poverenja je ista kao i određivanje pojedinačnih intervala poverenja. Razlika se ogleda u tome što se koristi druga tablična vrednost. Za $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$, i zadati nivo poverenja $100(1-\alpha)\%$, višestruki intervali poverenja su oblika

$$\left(\bar{y}_i - \bar{y}_j\right) \pm t_{\alpha/2r} \cdot s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}$$

gde je $s = \sqrt{\frac{SS_R}{n-k}}$, $r = \binom{k}{2}$, a $t_{\alpha/2r}$ je odgovarajuća tablična vrednost iz t raspodele sa $n-k$ stepeni slobode.

Ovim postupkom postižemo da verovatnoća da svih r tvrđenja o intervalima poverenja budu tačna ne prelazi vrednost $1-\alpha$. Glavni nedostatak postupka je što se sa porastom broja parova proširuju i intervali poverenja. U tom slučaju pristupa se određivanju višestrukih intervala poverenja razlika efekata samo podskupa tretmana koji su od glavnog interesa za istraživanje. Utvrđivanje postojanja razlika u efektima u zavisnosti od intervala poverenja je ista kao u slučaju jednostrukih intervala poverenja.

3. Klasifikacija modela planiranja eksperimenata

Planiranje eksperimenata ima za zadatak umanjivanje dejstava nekontrolisanih faktora, postizanje rezultata veće tačnosti sa manjim brojem ponavljanja eksperimenta, smanjivanje troškova procesa dobijanja određenih informacija i, kao najbitnije, utvrđivanje zakonitosti pojedinih pojava. Da bi se minimizirala eksperimentalna greška, potrebno je da se izabere odgovarajući model planiranja eksperimenata. Jedna od mogućih klasifikacija modela je:

- model parova,
- model slučajnih blokova,
- model faktorijalnih planova,
- model latinskih kvadrata.

U knjizi *The Design of Experiments* Fišer je razmatrao samo dva od navedenih modela: model slučajnih blokova i model latinskih kvadrata. Ostale modele razmatrali su Kokran i Koks. Nekompletne blokove u modelima nešto kasnije je uveo Jejts. Razmotrimo ukratko svaki od modela.

3.1. Model parova

Kao što samo ime kaže u ovoj metodi eksperimentalne jedinice se raspoređuju u parove i na njih se primenjuju samo dva tretmana. Na prvu eksperimentalnu jedinicu svakog para primenjuje se prvi tretman, a na drugu jedinicu drugi tretman. Označimo sa X i Y rezultate merenja obeležja posle primena tretmana. Rezultati merenja dati su tabeli 3.1.1. Označimo sa $D_i = X_i - Y_i$ dobijene razlike. Ove veličine predstavljaju nezavisne slučajne promenljive. Definišimo i sledeće statistike:

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i, \quad S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2$$

Tabela 3.1.1. Podaci za model parova

Par	Tretman 1	Tretman 2	Razlika
1	X_1	Y_1	$D_1 = X_1 - Y_1$
2	X_2	Y_2	$D_2 = X_2 - Y_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	X_n	Y_n	$D_n = X_n - Y_n$

Pretpostavljamo da slučajne veličine D_i obrazuju slučajan uzorak normalno raspodeljen sa očekivanjem δ i varijansom σ_D^2. Tada važi:

$$E(D_i) = E(X_i - Y_i) = \delta$$

$$V(D_i) = V(X_i - Y_i) = \sigma_D^2$$

za $i = 1,2,\dots,n$. Ako je sredina razlike δ jednaka nuli, to bi značilo da su tretmani ekvivalentni. Pozitivno δ znači da prvi tretman ima veći srednji uticaj, dok negativno δ ukazuje na to da veći uticaj ima drugi tretman. Hipoteza koju testiramo je oblika

$$H_0: \delta = 0$$

za unapred dati prag značajnosti α. Odgovarajuća test-statistika je

$$t_{n-1} = \frac{\bar{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$$

i ima Studentovu t-raspodelu sa $n-1$ stepeni slobode. Pretpostavka o normalnoj raspodeli veličina D_i može se izostaviti u slučaju velikih uzoraka. Tada se na osnovu centralne granične teoreme dobija da je raspodela veličine $\frac{\bar{D}-\delta}{S_D/\sqrt{n}}$ približno normalna za dovoljno veliko n.

3.2. Model slučajnih blokova

Sledeći zadatak neka je poređenje više od dva tretmana, npr. k tretmana. Pri definisanju eksperimenta može se utvrditi da eksperimentalni materijal nije homogen ili da će doći do uticaja spoljašnjih faktora koji nisu od značaja. Ukoliko nije moguće izolovati testiranje od takvih uticaja potrebno je umanjiti uticaje specifičnim planom eksperimentisanja.

Pretpostavimo da se vrši testiranje k tretmana. Treba izabrati eksperimentalne jedinice nad kojima ćemo izvršiti eksperiment tako da formiramo manje grupe sa homogenim članovima. Takve manje homogene grupe, koje još nazivamo i blokovima, moraju imati po k članova. U okviru svakog bloka na slučajan način eksperimentalnim jedinicama dodeljujemo tretmane. To jest u okviru bloka na slučajan način izaberemo jednu jedinicu i na nju primenimo prvi tretman. Od preostalih jedinica izaberemo na slučajan način sledeću i na nju primenimo drugi tretman, i tako dalje. Isti postupak primenjujemo na svaki blok. Ukoliko je moguće pogodnije je izabrati slučajan raspored jedinica po kome se izvode eksperimenti u svim blokovima. Poređenjem uticaja tretmana iz istog bloka ovom metodom dolazi se do znatnog umanjivanja spoljašnjih uticaja.

Primetimo i to da je model slučajnih blokova uopštenje modela parova. Takođe, ovaj model ne moramo primenjivati samo u slučaju nehomogenosti eksperimetnalnih jedinica. Može se koristiti i ako utvrdimo da će tokom ispitivanja postojati faktori koje je teško kontrolisati.

Prednost modela slučajnih blokova u odnosu na druge modele je veća preciznost rezultata u odnosu na potpuno slučajan plan. Testiranje se može primeniti na proizvoljnom broju tretmana. Takođe, u slučaju nedostatka nekih podataka u uzorku postoje metode za njihovu ocenu i prevazilaženje ovog tipa problema. Iz ovog razloga model slučajnih blokova je najčešće korišćen model.

3.3. Model faktorijalnih planova

U većini ispitivanja posmatra se upoređivanje dejstava više faktora. Neka svaki od faktora mora da sadrži najmanje dva nivoa. Model faktorijalnih planova podrazumeva ispitivanje svih mogućih kombinacija nivoa faktora koji se ispituju. To je jedan od najefikasnijih načina planiranja u eksperimentima. Karakteristika faktorijalnih planova je da se svaki nivo jednog faktora kombinuje sa svakim nivoom drugog faktora. Na taj način obezbeđujemo sagledavanje ne samo dejstva nivoa svakog pojedinačnog faktora, već merimo i efekat uticaja nivoa jednog faktora na drugi.

Kompletno planiranje modelom faktorijalnih planova zahteva veliki broj testiranja, pa sa porastom broja faktora raste eksponencijalno i broj mogućih testova. Najpoznatiji planovi ovog tipa su faktorijalni planovi oblika 2^k, koji podrazumevaju k faktora, svaki sa po dva nivoa. Glavni zadatak faktorijalnih planova je utvrđivanje interakcije između različitih nivoa. Dodavanje nivoa faktora osim složenije interpretacije, dovodi i do povećanja eksperimentalne greške. Zato je bolje početi sa malim brojem nivoa i faktora, a zatim ih dodavati postepeno, ukoliko je to neophodno, do postizanja određene tačnosti.

Razlikuju se dve vrste faktorijalnih eksperimenata: eksperimenti sa kvalitativnim i kvantitativnim nivoima. U eksperimente sa kvalitativnim nivoima spadaju oni kod kojih ne postoji prirodan redosled nivoa, na primer ispitivanje metoda učenja, metoda lečenja i tako dalje. Kod druge vrste eksperimenata postoji prirodan redosled nivoa, na primer ispitivanje količina određene vrste đubriva, uticaja različitih temperatura, i tako dalje.

3.4. Model latinskih kvadrata

Ranije smo se već upoznali sa mogućim raspoređivanjem eksperimentalnih jedinica u blokove u cilju smanjivanja eksperimentalne greške. Još neki od poznatih modela koriste princip blokova. Neka je dat eksperiment u kome uticaj na eksperimentalne jedinice osim tretmana i blokova ima još jedan faktor. Neka pri tom ne postoji uticaj između ta tri faktora. Kod modela slučajnih blokova pomenuli smo da su blokovi iste veličine i da se svaki tretman, u svakom bloku primenjuje najmanje jedanput. Specijalno, kada se svaki tretman primenjuje tačno jedanput onda se plan eksperimenta naziva model latinskih kvadrata. Primetimo da ovaj princip predstavlja formiranje blokova u dva pravca, prema eksperimentalnim jedinicama i prema faktorima. U sledećem poglavlju će biti rečeno nešto više o modelu latinskih kvadrata.

4. Latinski kvadrati u planiranju eksperimenata

4.1. Latinski kvadrati

Razmotrimo konkretan primer iz agrarne industrije - uzgoj graška. Od velikog je značaja pri ovakvom uzgoju vrsta semena, način zaštite od bolesti i tehnika uzgajanja. Da bismo imali profit od uzgoja ove biljke, potrebno je da imamo što obimniji i kvalitetniji rod, a da pri tom imamo mala ulaganja u zaštiti biljaka od spoljašnjih uticaja. U svakodnevnom životu ukoliko bi tretman A proizvodio u proseku 17.3, a tretman B 15.7 žbunova graška, ne bi bilo sumnje da je tretman A za 10.2% bolji od tretmana B. Međutim, potrebni su precizniji rezultati. Može se desiti da iako tretman B proizvodi manji broj žbunova graška, rod na svakom žbunu bude kvalitetniji, pa da u ukupnoj težini posle zrenja tretman B daje bolje rezultate. Ili pak, da žbunovi tretmana B nisu pravim pesticidima zaštićeni od bolesti, pa deo žbunova nije mogao da iznese rod do kraja.

Pretpostavimo da posmatramo tri različite vrste graška, koje možemo zaštititi pomoću jedne od 3 vrsta pesticida. Da bi naš eksperiment ispitivanja uzgoja graška bio korektan, potrebno je svaku od tehnika uzgajanja primeniti na svaku vrstu graška, u kombinaciji sa svakim pesticidom tačno jednom. Ako tehnike uzgajanja označimo velikim latiničnim slovima A, B i C jedan od mogućih rasporeda tehnika uzgajanja je sledeći:

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{array}$$

pri čemu vrste predstavljaju vrste pesticida, a kolone vrste graška koje ispitujemo.

Kvadratna shema dobijena na ovaj način predstavlja latinski kvadrat. To je, dakle, shema dimenzije $p \times p$ u kojoj je raspoređeno p različitih slova koja označavaju tretmane i gde se svako slovo pojavljuje tačno p puta. Ime je dobio po tome što se tretmani tokom planiranja eksperimenta označavaju velikim latiničnim slovima. Dakle, osnovna karakteristika je da se u svakoj vrsti i koloni, svaki tretman pojavljuje tačno jednom. Uvedimo i formalnu definiciju latinskog kvadrata.

Definicija 4.1.1. *Latinskim kvadratom nad konačnim skupom* Q, *kardinalnosti* $|Q| = p$, *naziva se matrica dimenzije* $p \times p$ *sa elementima iz* Q *takvim da je svaka vrsta i svaka kolona matrice permutacija skupa* Q.

Metod latinskih kvadrata se primenjuje u raznim oblastima istraživačkog rada. Njegove prednosti su to što se ispitivanja mogu izvršiti na malom broju eksperimentalnih jedinica, doprinosi smanjenju eksperimentalne greške i postupak statističke analize je relativno jednostavan. Glavni nedostatak je što sa povećanjem broja tretmana, neophodan je veći broj ponavaljanja, što eksperiment čini neekonomičnim. Zato se često traži drugi način ispitivanja ako dimenzije latinskog kvadrata prelaze 10×10. Takođe, male dimenzije, manje od 4×4, dovode do povećanja sume kvadrata greške zbog malog broja stepeni slobode. O osobinama latinskih kvadrata dimenzija većih od 7×7 malo je poznato.

4.2. Vrste latinskih kvadrata

Latinski kvadrati se razlikuju među sobom, pa tako postoje:

- standardni,
- transverzalni,
- dijagonalni,
- sistematski,
- uravnoteženi.

Ako su u prvoj vrsti i prvoj koloni tretmani raspoređeni po redu sistema oznaka (azbučni, abecedni red, redni brojevi), onda za takav latinski kvadrat kažemo da je standardnog oblika. Opšta forma ovakvog latinskog kvadrata dimenzije 4×4 je

A	B	C	D
B	bilo koji redosled koji zadovoljava latinski kvadrat		
C			
D			

Znajući da važi ovakva veza u rasporedu tretmana možemo dati tabelu broja standardnih i svih latinskih kvadrata dimenzije p.

Tabela 4.2.1. Broj latinskih kvadrata dimenzije p

Dimenzija latinskog kvadrata pxp	Broj standardnih latinskih kvadrata	Broj mogućih latinskih kvadrata
2x2	1	2
3x3	1	12
4x4	4	576
5x5	56	161 280
6x6	9 408	812 851 200

Veza između ovih brojeva je

$$broj\ mogućih = p!\,(p-1)! \cdot broj\ standardnih$$

što je posledica mogućih rasporeda prve vrste i prve kolone. Formula kojom bismo utvrdili broj latinskih kvadrata proizvoljne dimenzije još uvek nije poznata. Označimo sa $L(n)$ broj svih latinskih kvadrata dimenzije $n \times n$. Van Lint (van Lint) i Vilson (Wilson) su došli do gornje i donje granice za ovu vrednost, pa tako važi:

$$\frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}} \leq L(n) \leq \prod_{k=1}^{n} (k!)^{\frac{n}{k}}$$

Ako je oblik latinskog kvadrata sledeći:

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

tj. svi tretmani se javljaju u svakoj dijagonali po jedanput, latinski kvadrat se naziva transverzalan.

Ako je, pak, raspored takav da je na dijagonali raspoređen samo jedan tretman takav latinski kvadrat nazivamo dijagonalan i jedan od mogućih takvih rasporeda je:

A	B	C	D
D	A	B	C
C	D	A	B
B	C	D	A

Dvostruko-dijagonalan je onaj latinski kvadrat koji je dijagonalan po obe velike dijagonale, tj. na glavnoj dijagonali je raspoređen jedan tretman dok je na sporednoj raspoređen na svim mestima drugi tretman. Latinski kvadrat ovog tipa je očigledno moguće formirati samo u slučaju kada je n paran broj.

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

Može se desiti da latinski kvadrat treba da ispunjava određene uslove, kao na primer da A i B, po vrstama i kolonama budu uvek jedno do drugog. Tada govorimo o sistematskim latinskim kvadratima. Sistematski latinski kvadrat koji navodimo kao primer je oblika:

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B

Kada govorimo o skupovima latinskih kvadrata postoje još i uravnoteženi latinski kvadrati. Oni zadovoljavaju uslov, kao skup kvadrata, da se svaki tretman mora naći na svakoj od p^2 mogućih pozicija u kvadratu. Za $p = 4$ postoje 4 uravnotežena latinska kvadrata.

A B C D	B C D A	C D A B	D A B C
B C D A	C D A B	D A B C	A B C D
C D A B	D A B C	A B C D	B C D A
D A B C	A B C D	B C D A	C D A B

4.3. Slučajan izbor latinskog kvadrata

Pri radu sa latinskim kvadratima uglavnom radimo sa slučajno izabranim kvadratom. Međutim, slučajan izbor kvadrata zahteva poznavanje svih kvadrata određene dimenzije, a sa porastom broja vrsta i kolona postavlja se pitanje racionalnijeg izbora.

Jedan od mogućih načina je da formiramo latinski kvadrat čije će vrste predstavljati ciklične permutacije niza upotrebljenih latinskih slova. Na slučajan način izvršimo permutovanje vrsta, a zatim i permutovanje kolona tako formiranog latinskog kvadrata. Time nećemo izgubiti na korektnosti i dobićemo transformisani latinski kvadrat.

Drugi način je da se izvrši slučajan izbor koordinata tretmana koje unosimo u kvadrat, s tim da posebnu pažnju obratimo na korektnost latinskog kvadrata. Postupak bi bio sledeći. Na slučajan način izaberemo broj koji je manji ili jednak p, kako bismo na slučajan način izabrali koji tretman prvi raspoređujemo u kvadrat. Zatim se slučajno biraju parovi (i, j) za $i, j \in \{1,2, \dots, p\}$. Ovi parovi označavaju koordinate tretmana koji se prvi raspoređuje. Broj i označava broj vrste, a broj j označava broj kolone pozicije tretmana u latinskom kvadratu. Ukoliko neki izabrani par narušava osobine latinskog kvadrata on se odbacuje i bira se novi.

4.4. Statistička analiza modela latinskih kvadrata

Pretpostavimo da smo korektno izabrali, na slučajan način, latinski kvadrat i da treba pristupiti statističkoj analizi podataka. Uvedimo sledeće oznake. Sa y_{ijk} označavamo element koji nastaje pod dejstvom i-te vrste, j-te kolone i k-tog tretmana. Radi lakše numeracije tretmane ćemo, kada je to potrebno, umesto latiničnim slovima A, B, C, ... , označavati brojevima redom 1, 2, 3, ...

Sa m označavamo sredinu populacijskih sredina, tj. sredinu svih podataka u tabeli. Posmatrajući podatke po vrstama i kolonama pretpostavljamo da merenja koja odgovaraju i-toj vrsti čine slučajan uzorak iz populacije sa $\mathcal{N}(m_{i..}, \sigma^2)$, a da merenja koja se nalaze u j-toj koloni čine slučajan uzorak iz populacije sa $\mathcal{N}\left(m_{.j.}, \sigma^2\right)$ raspodelom. Takođe, merenja koja odgovaraju k-tom tretmanu čine slučajan uzorak iz populacije sa $\mathcal{N}(m_{..k}, \sigma^2)$ raspodelom. Kada smo govorili uopšteno o analizi varijanse, komentarisali smo samo uticaj tretmana na populaciju, što predstavlja slučaj jednofaktorske analize. U slučaju analize modelom latinskih kvadrata koristimo model oblika

$$y_{ijk} = m + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijk}, \qquad i = 1, \dots, p, \qquad j = 1, \dots, p, \qquad k = 1, \dots, p.$$

gde: $\alpha_i = m_{i..} - m$ je efekat i-te vrste; $\beta_j = m_{.j.} - m$ je efekat j-te kolone; $\gamma_k = m_{..k} - m$ je efekat k-tog tretmana. Za ove parametre važi da je

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0, \qquad \sum_{j=1}^{p} \beta_j = 0, \qquad \sum_{k=1}^{p} \gamma_k = 0.$$

Parametar e_{ijk} predstavlja slučajnu grešku, i to su nezavisne slučajne veličine sa $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ raspodelom. Dakle, u ovom slučaju primenjujemo analizu varijansi sa tri faktora. Uvedimo sledeće oznake:

$\bar{y}$ - aritmetička sredina svih podataka

$\bar{y}_{i..}$ - aritmetička sredina i-te vrste

$\bar{y}_{.j.}$ - aritmetička sredina j-te kolone

$\bar{y}_{..k}$ - aritmetička sredina k-tog tretmana

Sa q označimo sumu kvadrata odstupanja podataka iz tabele od sredine $\bar{y}$. Zatim, sa q_V, q_K, q_T, redom sume kvadrata odstupanja po vrstama, kolonama, tretmanima, i konačno sa q_R ostatak.

Polazimo od očigledne jednakosti

$$y_{ijk} - \bar{y} = (\bar{y}_{i..} - \bar{y}) + \left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}\right) + (\bar{y}_{..k} - \bar{y}) + \left(y_{ijk} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + 2\bar{y}\right)$$

čijim kvadriranjem i sabiranjem po svim mogućim članovima dobijamo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\left(y_{ijk} - \bar{y}\right)^2 \\ &= p\sum_{i=1}^{p}(\bar{y}_{i..} - \bar{y})^2 + p\sum_{j=1}^{p}\left(\bar{y}_{.j.} - \bar{y}\right)^2 + p\sum_{k=1}^{p}(\bar{y}_{..k} - \bar{y})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\left(y_{ijk} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + 2\bar{y}\right)^2\end{aligned}$$

Primetimo da skup podataka ima samo p^2 sabiraka, a da prethodna jednakost odgovara merenju p^3 sabiraka. Ovo odstupanje se javlja zbog uticaja tretmana, jer na svaki par (i, j)

utiče samo jedan tretman, a ne svi mogući. Da bi se prevazišla ova razlika uzimamo da je svako y_{ijk} koje nije uključeno u plan jednako nuli. U skladu sa ovim dogovorom definišemo:

$$\bar{y} = \frac{1}{p^2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} y_{ijk}$$

$$\bar{y}_{i..} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} y_{ijk}$$

$$\bar{y}_{.j.} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} y_{ijk}$$

$$\bar{y}_{..k} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} y_{ijk}$$

Sada možemo preći na računanje suma kvadrata odstupanja.

$$\begin{aligned} q &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\left(y_{ijk} - \bar{y}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} {y_{ijk}}^2 - 2\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} y_{ijk}\bar{y} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \bar{y}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} {y_{ijk}}^2 - 2p^2\bar{y}^2 + p^2\bar{y}^2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} {y_{ijk}}^2 - p^2\bar{y}^2 \end{aligned}$$

Za sumu kvadrata odstupanja po vrstama dobijamo:

$$q_V = p\sum_{i=1}^{p}(\bar{y}_{i..} - \bar{y})^2 = p\sum_{i=1}^{p} {\bar{y}_{i..}}^2 - p^2\bar{y}^2 = p\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} y_{ijk}\right)^2 - p^2\bar{y}^2$$

Označimo li zbir elemenata i-te vrste sa $V_i = \sum_{j=1}^{p} y_{ijk}$, dobijamo vezu

$$q_V = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} {V_i}^2 - p^2\bar{y}^2$$

Slično, ako označimo zbir elemenata j-te kolone sa $K_j = \sum_{i=1}^{p} y_{ijk}$, dobijamo

$$q_K = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} {K_j}^2 - p^2\bar{y}^2$$

Ako sa T_k označimo zbir svih elemenata k-tog tretmana dobijamo da je

$$q_T = \frac{1}{p}\sum_k {T_k}^2 - p^2\bar{y}^2$$

gde k prati mesta tretmana po vrstama i kolonama. Sa q_R smo označili ostatak, odnosno, rezidualnu sumu kvadrata i nju računamo kao razliku

$$q_R = q - q_V - q_K - q_T.$$

Odnosno, rezidualna suma kvadrata je jednaka:

$$q_R = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} {y_{ijk}}^2 - \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{p} {V_i}^2 + \sum_{j=1}^{p} {K_j}^2 + \sum_k {T_k}^2\right) + 2p^2\bar{y}^2$$

Ako u ovim formulama posmatramo y_{ijk} kao realizovane vrednosti slučajnih veličina Y_{ijk} koje imaju odgovarajuću normalnu raspodelu sa parametrima m_{ijk} i σ^2, to dobijamo slučajne promenljive $\bar{Y}_{i..}, \bar{Y}_{.j.}, \bar{Y}_{..k}, \bar{Y}$, zatim Q, Q_V, Q_K, Q_T, Q_R. Statistika $\frac{Q}{\sigma^2}$ ima χ^2 raspodelu sa $p^2 - 1$ stepeni slobode. Svaka od statistika $\frac{Q_V}{\sigma^2}, \frac{Q_K}{\sigma^2}, \frac{Q_T}{\sigma^2}$ ima χ^2 raspodelu sa $p - 1$ stepeni slobode. Na osnovu Kokranove teoreme sledi nezavisnost ovih statistika i da je raspodela statistike $\frac{Q_R}{\sigma^2}$ takođe χ^2, ali je broj stepeni slobode jednak

$$p^2 - 1 - 3(p-1) = (p-1)(p-2).$$

U tabeli analize varijansi to izgleda ovako:

Tabela 4.4.1. Tabela analize varijansi za model latinskog kvadrata

Izvor	Broj stepeni slobode	Suma kvadrata	Sredina kvadrata	F količnik
Vrste	$p-1$	Q_V	$S_V^2 = \frac{Q_V}{p-1}$	$F_V = \frac{S_V^2}{S_R^2}$
Kolone	$p-1$	Q_K	$S_K^2 = \frac{Q_K}{p-1}$	$F_K = \frac{S_K^2}{S_R^2}$
Tretmani	$p-1$	Q_T	$S_T^2 = \frac{Q_T}{p-1}$	$F_T = \frac{S_T^2}{S_R^2}$
Reziduali	$(p-1)(p-2)$	Q_R	$S_R^2 = \frac{Q_R}{(p-1)(p-2)}$	
Ukupno	p^2-1	Q	S_Q^2	

Sa ovako pripremljenim podacima možemo pristupiti testiranju hipoteza. U ovom slučaju imamo testiranje tri hipoteze:

$$H_{01}: \left(\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0\right)$$

$$H_{02}: \left(\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0\right)$$

$$H_{03}: \left(\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_p = 0\right)$$

protiv odgovarajućih alternativa koje predstavljaju komplementarne iskaze. Ako su nulte hipoteze tačne važi tvrđenje Kokranove teoreme, pa F količnici, F_V, F_K, F_T, imaju Fišerovu raspodelu sa $\left(p-1, (p-1)(p-2)\right)$ stepeni slobode. Na osnovu podataka iz uzorka određujemo realizovane vrednosti F količnika, a iz tablica za Fišerovu raspodelu, za dati prag značajnosti α, određujemo kritičnu vrednost F_α. Proveravamo za svaku hipotezu ponaosob da li je realizovana vrednost odgovarajućeg F količnika veća od tablične vrednosti F_α. U slučaju da je tablična vrednost manja od realizovane to bi značilo da postoje značajne razlike, pa odbacujemo nultu hipotezu. U suprotnom, prihvatamo nultu hipotezu i zaključujemo da nema značajnijih razlika.

Na ovom mestu je zgodno pomenuti glavnu prednost korišćenja modela latinskih kvadrata, a to je veća preciznost ocene, odnosno manja realizovana greška. Ukupnu varijansu uzorka, odnosno sumu kvadrata odstupanja, podelili smo na sume kvadrata odstupanja po vrstama, kolonama, tretmanima i rezidualnu sumu kvadrata. Na osnovu formula za prethodne sume kvadrata vidimo da smo prećutno vršili podelu celokupnog uzorka na delove, koje još nazivamo stratumima. Posmatrajmo slučaj podele uzorka po vrstama. Podaci jedne vrste predstavljaju podatke jednog stratuma. Zaključujemo da je uzorak koji ispitujemo, na ovaj način formiran, stratifikovani uzorak. Iz teorije uzoraka poznat je rezultat da stratifikovan uzorak daje preciznije rezultate i ima manju varijansu u odnosu na prost slučajan uzorak. Prilikom formiranja stratuma bitno je da stratumi budu homogeni. Pri podeli uzorka po vrstama svi članovi jednog stratuma su pod uticajem istog faktora definisanog tom vrstom. Na ovaj način smanjuje se odstupanje podataka unutar stratuma, što direktno utiče na umanjivanje sume kvadrata po vrstama. Slično rezonovanje se može primeniti i na kolone. Time smo izvršili dvostruku stratifikaciju, po vrstama i po kolonama.

4.5. Analiza modela latinskih kvadrata sa nepotpunim podacima

Može se dogoditi da podaci u tabelama ne budu potpuni, tj. da neki od podataka nedostaju. To se dešava u slučaju kada nije moguće izvršiti sva merenja, ako se mašina na kojoj merimo često kvari, pa to remeti regularnost ocene, ako dođe do poremećaja tokom eksperimenta, i tako dalje. Tada se postavlja pitanje da li je uopšte moguće izvršiti analizu metodom latinskih kvadrata. Način na koji prevazilazimo problem ovog tipa je ocena nedostajuće vrednosti.

Pretpostavimo da nedostaje samo jedna vrednost. Kao odgovarajuća ocena se uzima ona vrednost za koju je suma kvadrata reziduala minimalna. Podsetimo se formule ostatka:

$$q_R = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} {y_{ijk}}^2 - \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{p} {V_i}^2 + \sum_{j=1}^{p} {K_j}^2 + \sum_{k} {T_k}^2\right) + 2p^2\bar{y}^2.$$

U slučaju da nedostaje jedna vrednost, označimo je sa u, prethodna formula dobija sledeći oblik

$$q_R = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} {y_{ijk}}^2 + u^2$$

$$-\frac{1}{p}\left(\sum_{i} {V_i}^2 + (V+u)^2 + \sum_{j} {K_j}^2 + (K+u)^2 + \sum_{k} {T_k}^2 + (T+u)^2\right)$$

$$+2p^2\left(\frac{1}{p^2}(G+u)\right)^2$$

gde su V, K, T redom sume vrednosti iz vrste, kolone i tretmana gde se nalazi vrednost koja nedostaje, a G je suma svih poznatih vrednosti iz uzorka. Jednostruke sume se računaju po onim vrstama, kolonama i tretmanima koji ne sadrže element u. Napomenimo još i to da važi veza $y_{ijk}u = 0$, jer kada nam je vrednost y_{ijk} poznata tada je $u = 0$, ako je u vrednost koja se nalazi u kvadratu, y_{ijk} na tom mestu nedostaje, pa ga izjednačavamo sa nulom. Diferenciranjem poslednje jednakosti po u dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial u} q_R = 2u - \frac{2}{p}(V + K + T + 3u) + \frac{4}{p^2}(G + u).$$

Izjednačavanjem sa nulom i rešavanjem po u dobijamo vezu

$$u = \frac{p(V + K + T) - 2G}{(p-1)(p-2)}$$

Posle ocenjivanja ove vrednosti u daljoj analizi treba broj stepeni slobode sume kvadrata greške i ukupne sume kvadrata umanjiti za 1.

U slučaju da nedostaju dve vrednosti, možemo primeniti prethodni postupak ili vrednosti oceniti iterativnim postupkom. Zadajemo unapred jednu vrednost, a drugu određujemo na osnovu prethodne formule. Zatim se vraćamo na izračunavanje prve vrednosti pomoću iste formule i tako sve dok se ne dobiju vrednosti koje se malo razlikuju od prethodne. Broj stepeni slobode umanjujemo za 2, što predstavlja broj podataka koji nedostaju. Kada u latinskom kvadratu nedostaje više od 2 vrednosti, iterativni postupak ponavljamo sve dok ne dobijemo zadovoljavajuću tačnost, s tim da se na početku zadaju sve vrednosti sem prve i ponavlja se gore opisani postupak. Broj stepeni slobode kod ukupne sume kvadrata i sume kvadrata greške se umanjuje za broj vrednosti koje se ocenjuju.

5. Ilustracija modela latinskih kvadrata na konkretnom primeru u programskom jeziku R

Sa napretkom kompjuterske tehnologije uporedo se sve više razvijaju i proizvode softveri za rešavanje problema različitih tipova. Za rešavanje statističkih problema, i obradu statističkih podataka, danas postoji veliki broj softvera. Rešavanje problema modelom latinskih kvadrata može se obaviti u većini statističkih softvera. U ovom radu biće ilustrovan primer rešen u programskom jeziku **R**.

R je programski jezik specijalizovan za statističku obradu i grafičko prikazivanje podataka. Nastao je kao implementacija otvorenog koda jezika S. Programski jezik S je nastao sredinom XX veka, a tek krajem XX veka njegovim usavršavanjem formira se novi programski jezik koji postaje popularan među statističarima. Biblioteka ugrađenih funkcija programskog jezika **R** je jako bogata. Veliki broj funkcija se ne nalazi u osnovnom paketu programa, već se implementira preko specijalizovanih paketa za različite oblasti testiranja. Za ilustraciju primera koji sledi, koristili smo verziju **R**.2.9.2 i nisu učitavani dodatni paketi. Koristili smo osnovne statističke funkcije, a najveći deo koda je samostalno implementiran.

Neka nam je dat zadatak da testiramo potrošnju goriva kod putničkih automobila, tj. da testiramo koliko se milja može preći sa jednim galonom goriva. Pretpostavimo da je na nivou svih marki automobila izabrano 5 sličnih modela, različitih proizvođača. Angažovano je uz to i 5 profesionalnih vozača. Izabrano je da se testira potrošnja za vožnju pri brzini od 25, 35, 50, 60 i 70 milja na sat. Ako bismo radili analizu svih mogućnosti, morali bismo da izvršimo $5^3 = 125$ različitih eksperimenata. Ovo zahteva dosta vremena i nije ekonomično u smislu novčanih sredstava.

Kako u eksperimentu učestvuju 5 vozača, koji voze 5 različitih automobila sa različitim brzinama (5 nivoa brzina) to su ispunjeni uslovi za primenu modela latinskih kvadrata. Svaki od vozača, s obzirom da su profesionalni, zna da vozi svaki od automobila. Takođe, svaki automobil može da dostigne navedene brzine. Dakle, možemo zaključiti da ovi faktori nemaju međusobnu interakciju u smislu međusobne zavisnosti. Možemo pristupiti analizi podataka metodom latinskih kvadrata.

Za početak potrebno je da formiramo latinski kvadrat. Ako se prisetimo prethodno rečenog, pri analizi ne koristimo bilo koji kvadrat, nego slučajno izabran iz skupa svih mogućih kvadrata odgovarajuće dimenzije. U ovom slučaju $n = 5$. Definišimo funkciju koja će formirati na slučajan način latinski kvadrat. Nazovimo tu funkciju `latin()` i kao argument zadajmo dimenziju kvadrata. Funkcija će formirati matricu dimenzije $n \times n$ u čijim će vrstama biti postavljena latinična slova čiji se redni broj u abecedi poklapa sa rednim brojem vrste. Transponovanjem matrice, ugrađenom funkcijom t(), dobijamo da su ista slova postavljena po kolonama. Pomeranjem za po jedno mesto u levo elemenata sledeće vrste, u odnosu na prethodnu, dobijamo latinski kvadrat. Pomoću ugrađene funkcije sample(), koja za zadati prirodan broj n kao argument kao rezultat daje slučajan raspored svih prirodnih brojeva do n, izvršimo slučajno premeštanje vrsta, a zatim i kolona. Funkcija latin() kao izlaz vraća slučajno dobijen latinski kvadrat. Implementacija ove funkcije u **R**-u bi bila:

```
> latin<-function(n) {
+  x<-t(matrix(LETTERS[1:n],n,n))
+  for(i in 2:n)
+   x[i,]<-x[i,c(i:n,1:(i-1))]
+   x<-x[sample(n),]
+   x<-x[,sample(n)]
+  x }
```

Postavimo dimenziju kvadrata na 5.

```
> n<-5
```

Pozivanjem implementirane funkcije dobijamo latinski kvadrat koji ćemo koristiti u daljoj analizi.

```
> lat_kvadrat<-latin(n)
> rownames(lat_kvadrat)<-c("Prvi","Drugi","Treci","Cetvrti","Peti")
> colnames(lat_kvadrat)<-c("25","35","50","60","70")
> lat_kvadrat

         25  35  50  60  70
Prvi     "C" "E" "A" "D" "B"
Drugi    "A" "C" "D" "B" "E"
Treci    "B" "D" "E" "C" "A"
Cetvrti  "E" "B" "C" "A" "D"
Peti     "D" "A" "B" "E" "C"
```

Kada dobijemo latinski kvadrat izvršimo testiranje, po datom planu, i formiramo bazu podataka koja će sadržati sve neophodne podatke.

```
> tretman<-c()

> for(i in 1:n){ tretman<-c(tretman,lat_kvadrat[i,]) }

> podaci<-read.table("Populacija.txt",header=T)

> vozac<-c(rep("Prvi",n),rep("Drugi",n),rep("Treci",n),rep("Cetvrti",n),rep("Peti",n))

> brzina<-c(rep("25",1),rep("35",1),rep("50",1),rep("60",1),rep("70",1))

> baza<-data.frame(vozac,brzina,tretman,podaci)
```

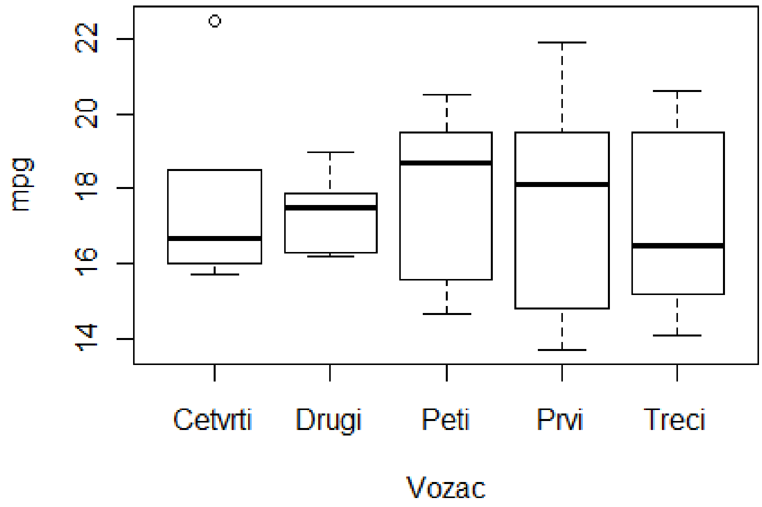
Dobijeni rezultati se nalaze u posebnom tekstualnom fajlu koji se zove Populacija.txt i učitavanjem podataka iz ovog fajla dobijamo sledeću tabelu.

```
> matrica<-matrix(baza$mpg,n,n,byrow=T,

+ dimnames=list(c("Prvi","Drugi","Treci","Cetvrti","Peti"),

+ c("25","35","50","60","70")))
```

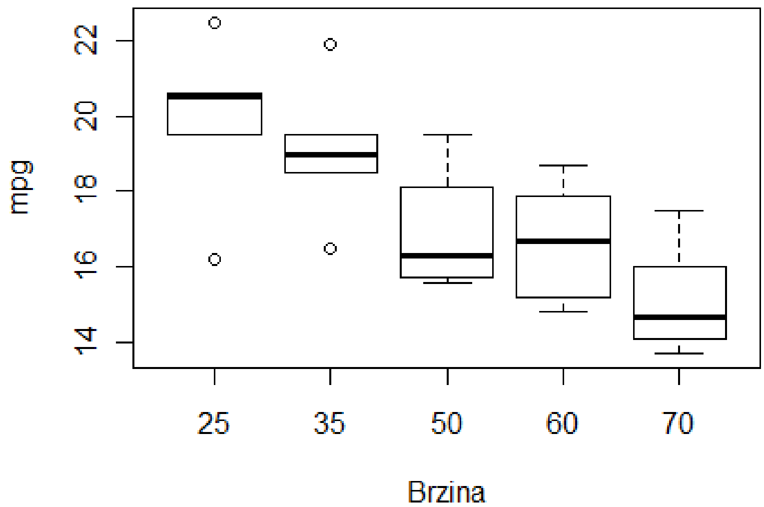
	25	35	50	60	70
Prvi	19.5	21.9	18.1	14.8	13.7
Drugi	16.2	19.0	16.3	17.9	17.5
Treci	20.6	16.5	19.5	15.2	14.1
Cetvrti	22.5	18.5	15.7	16.7	16.0
Peti	20.5	19.5	15.6	18.7	12.7

Već smo ranije pomenuli da analizu uglavnom započinjemo grafičkim predstavljanjem podataka. Zato za početak formiramo "box-plot" grafikone koji pokazuju zavisnost pređenih milja po galonu goriva od navedenih faktora. Sledeće tri naredbe služe za iscrtavanje traženih grafikona.

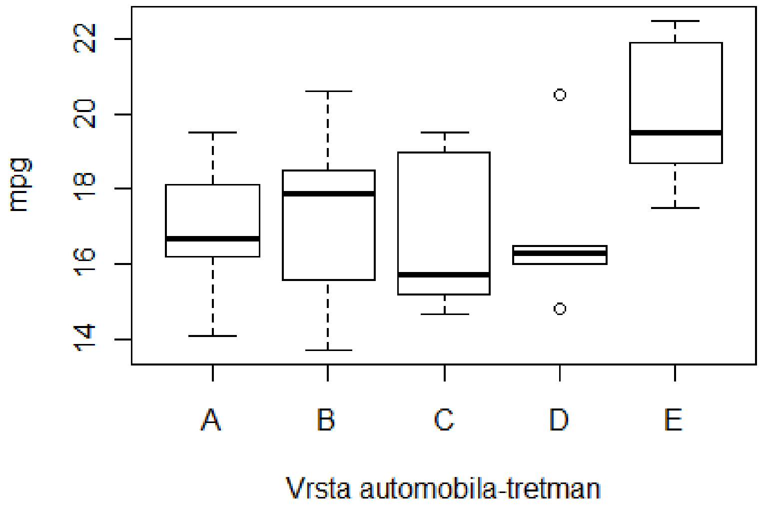
```
> plot(baza$vozac,baza$mpg,xlab="Vozac",ylab="mpg")

> plot(baza$brzina,baza$mpg,xlab="Brzina",ylab="mpg")

> plot(baza$tretman,baza$mpg,xlab="Vrsta automobila-tretman",ylab="mpg")
```



Slika 5.1. Box-plot vozača i milja po galonu goriva



Slika 5.2. Box-plot brzine i milja po galonu goriva



Slika 5.3. Box-plot tretmana i milja po galonu goriva

Posmatrajući "box-plot" grafikon vozača i milja po galonu goriva ne uočavamo neke značajne razlike, pa je očekivani rezultat prihvatanje nulte hipoteze o odsustvu uticaja vozača na broj pređenih milja. Kod "box-plot" grafikona brzine i milja po galonu vozila situacija je drugačija. Ovde je skoro očigledno da postoji veza. Sa porastom brzine, skoro linearno, opada broj pređenih milja po galonu goriva, ali odbacivanje hipoteze moramo potvrditi na verodostojniji način. Što se tiče grafikona tretmana i pređenih milja ne možemo ništa naslutiti. Zaključke izvedene na osnovu vizuelnih rezultata proveravamo dalje računski.

Formiramo model po kome radimo. Proveravamo zavisnost pređenih milja po galonu goriva od datih faktora.

```
> model<-lm(mpg~vozac+brzina+tretman, baza)
```

Analizu varijanse u programskom jeziku **R** možemo izvršiti na dva načina. Prva funkcija koju ćemo iskoristiti je aov(), čiji je argument formirani model. Druga funkcija je anova(). Obe funkcije vrše analizu varijanse, ali se njihova razlika vidi u rezultatima koje dobijamo. Funkcija aov() kao rezultat daje sume kvadrata odstupanja po faktorima i broj stepeni slobode. Odnosno, ova funkcija kao rezultat daje tabelu analize varijansi u obliku koji smo ranije naveli u tekstu. Prednost funkcije anova() je u tome što osim ovih vrednosti kao rezultat dobijamo i sredinu suma kvadrata, *F* količnike i *p*-vrednosti testa. Rezultat dobijen funkcijom aov() u ovom primeru je sledećeg oblika.

```
> aov(model)
Call:
   aov(formula = model)
Terms:
                     Vozac    brzina   tretman   Residuals
Sum of Squares      1.4024   81.3624   41.8624     31.0392
Deg. of Freedom          4         4         4          12
Residual standard error: 1.608291
```

Ovu funkciju ćemo dodatno iskoristiti kako bismo dobili informacije o uzoračkim sredina po brzinama, vozačima, tretmanima i ukupnu sredinu uzorka.

```
> print(model.tables(aov(model),"means"),digits=3)
         Tables of means
Grand mean
   17.488
vozac
Prvi   Drugi  Treci  Cetvrti  Peti
17.60  17.38  17.18  17.88  17.40
brzina
  25     35     50     60     70
19.86  19.08  17.04  16.66  14.80
tretman
  A      B      C      D      E
16.92  17.26  16.42  16.82  20.02
```

U cilju analize varijanse može se učiniti praktičnijim korišćenje funkcija anova(). Već smo pomenuli da je rezultat koji se postiže pozivanjem ove funkcije tabela sa svim neophodnim podacima. Ova tabela predstavlja kopiju tabele 4.4.1. s tim da sadrži realizovane vrednosti pomenutih test-statistika. Na osnovu kolone u kojoj se nalaze odgovarajuće p-vrednosti testa, odmah možemo doneti odluku o odbacivanju ili prihvatanju nulte hipoteze. Za naš primer funkcija anova(), daje sledeći rezultat:

```
> anova(model)
Analysis of Variance Table
Response: mpg
           Df   Sum Sq   Mean Sq   F value   Pr(>F)
vozac       4    1.402    0.351    0.1355    0.966058
brzina      4   81.362   20.341    7.8638    0.002369  **
tretman     4   41.862   10.466    4.0461    0.026482  *
Residuals  12   31.039    2.587
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Uočavamo da prve dve kolone u ovom rezultatu sadrže iste vrednosti kao i prve dve vrste u rezultatu dobijenom pomoću funkcije aov(). Na osnovu dobijenih p-vrednosti testa primećujemo da razlike u tome koji vozač je upravljao vozilom nisu značajne (0.01 < 0.966058). Razlike u markama automobila imaju blagi značaj (0.01 < 0.026482< 0.05), dok su razlike u uticajima brzine na potrošnju goriva značajne (0.002369 < 0.01). Ovo se poklapa sa očekivanim rezultatom. Svakako, na potrošnju goriva umnogome utiču ostali uslovi kao što su nagib puta, broj obrtaja pri testiranoj brzini, i tako dalje. Kako mi pri testiranju ujednačavamo trasu merenja, stepen prenosa brzine, korišćenje dodatne opreme (klima uređaj), to su značajne razlike u pređenim miljama po galonu očekivane. U terminima testiranja hipoteza zaključujemo da za prag značajnosti $\alpha = 0.01$ odbacujemo samo hipotezu o tome da ne postoji veza između brzine i pređenih milja po galonu goriva.

Posmatrajući matricu podataka uočavamo da je minimalna vrednost 12.7 u petoj vrsti i petoj koloni, dok je maksimalna vrednost 22.5 u četvrtoj vrsti i prvoj koloni.

```
> matrica_uzorak<-matrica
> matrica_uzorak

          25    35    50    60    70
Prvi     19.5  21.9  18.1  14.8  13.7
Drugi    16.2  19.0  16.3  17.9  17.5
Treci    20.6  16.5  19.5  15.2  14.1
Cetvrti  22.5  18.5  15.7  16.7  16.0
Peti     20.5  19.5  15.6  18.7  12.7
```

Ove vrednosti odstupaju od ostalih vrednosti, pa predstavljaju potencijalne autlajere. Da bismo ilustrovali analizu latinskih kvadrata sa nepotpunim podacima izostavićemo za početak vrednost iz pete vrste i pete kolone, 12.7.

Na osnovu izloženog u poglavlju 4.5. ocenu ove vrednosti postižemo na osnovu formule

$$u = \frac{p(V+K+T)-2G}{(p-1)(p-2)}.$$

Izračunavanjem potrebnih vrednosti V, K, T, G i korišćenjem činjenice $p = 5$, dobijamo vrednost za u. Za početak postavimo vrednost u petoj vrsti i petoj koloni na 0. Formulom sum() računamo sumu svih članova iz pete vrste i pete kolone.

```
> matrica[5,5]<-0

> p<-n

> V<-sum(matrica[5,])

> K<-sum(matrica[,5])
```

Da bismo odredili sumu svih elemenata koji su pod istim tretmanom potrebna nam je dodatna funkcija. Definišemo funkciju koja prolazi kroz latinski kvadrat formiran na početku, proverava sve članove i sabira one vrednosti kojima odgovara isti tretman kao i vrednosti koja se ocenjuje.

```
> zbir_T<-function(lat_kvadrat){

+ suma<-0

+ slovo<-lat_kvadrat[5,5]

+ for(i in 1:n){

+  for(j in 1:n){

+   if(lat_kvadrat[i,j]==slovo){ suma<-suma+matrica[i,j] }}}}

> T<-zbir_T(lat_kvadrat)
```

Suma svih članova matrice označena je sa G.

```
> G<-sum(matrica)
```

Dobijene su redom vrednosti $V = 74.3, K = 61.3, T = 69.4$ i $G = 424.5$. Na osnovu dobijenih rezultata možemo oceniti nedostajuću vrednost u.

```
> u<-(p*(V+K+T)-2*G)/((p-1)*(p-2))

> u

[1] 14.66667
```

Novodobijenu vrednost uvrstimo u matricu. Da bismo mogli da se pozovemo na postojeći model i iskoristimo funkciju analize varijansi, potrebno je da u bazi podataka izmenimo vrednost, tj. nekadašnje 12.7 zamenimo sa 14.66667.

```
> matrica[5,5]<-u

> baza$mpg[4*5+5]<-u

> model<-lm(mpg~vozac+brzina+tretman, baza)

> aov(model)

Call:

  aov(formula = model)

Terms:

                    Vozac     brzina   tretman  Residuals

Sum of Squares    1.67511  71.40844  38.28044  29.18267

Deg. of Freedom      4          4         4        12

Residual standard error: 1.559451
```

Upoređujući ove rezultate sa rezultatima koji su dobijeni primenom funkcije na originalni uzorak primećujemo da su neke vrednosti suma kvadrata razlika umanjene. To se i moglo očekivati jer je ocenjena vrednost 14.6667 bliža ostalim vrednostima u odnosu na 12.7. U ovom delu nam funkcija anova() neće dati više podataka nego funkcija aov(). Razlog je u tome što treba umanjiti broj stepeni slobode za jedan, zbog jedne ocenjene vrednosti. Funkcija anova() neće prepoznati ocenjivanje nedostajuće vrednosti, pa F količnike moramo odrediti postupno i tako doneti odluku o prihvatanju ili odbacivanju nulte hipoteze. Dakle, u ovom trenutku treba biti oprezan u čitanju rezultata. Za jedan treba umanjiti broj stepeni slobode sumu kvadrata greške i ukupnu sumu kvadrata odstupanja. F količnici tada imaju broj stepen slobode jednak $(p-1,(p-1)(p-2)-1)$. Tablična vrednost za prag značajnosti $\alpha = 0.01$ jednaka je 5.6683. Određujemo redom F količnike i odlučujemo da li hipoteze treba odbaciti ili ne. Kako je $F_V = 0.157929, F_K = 6.728755, F_T = 3.607113$, na osnovu tabele analize varijansi lako možemo doneti odluku o prihvatanju ili odbacivanju nulte hipoteze. Kao i u prethodnom slučaju odbacujemo samo hipotezu o tome da ne postoji veza između brzine i pređenih milja po galonu goriva.

U slučaju da odlučimo da izostavimo i drugi potencijalni autlajer dobili bismo latinski kvadrat sa dva nedostajuća podatka. Naravno, treba imati na umu da je postupak isti ukoliko nedostaje bilo koja druga vrednost, ne obavezno autlajer, ali da u ovom slučaju izostavljamo ove vrednosti radi ilustracije procesa rešavanja. U ovom slučaju pojaviće se veći broj iteracija. Kako nam nije unapred poznato koliko iteracija će biti dovoljno za postizanje preciznosti, postavićemo ograničenje. Kako su vrednosti date sa jednom decimalom, to ćemo zahtevati da se iterativni postupak završi kada se dva uzastopna rešenja za obe ocenjenje vrednosti razlikuju za manje od 0.1. Razlika u odnosu na prethodni primer, kada je nedostajala jedna vrednost, je u tome što sada jedna vrednost mora biti zadata na neki način, dok se druga vrednost u matrici postaviti na 0. Prvu vrednost ćemo zadati kao aritmetičku sredinu preostalih vrednosti iz iste vrste. Vodeći računa o tome da ispratimo opisani iterativni postupak na osnovu sledećeg niza naredbi dobićemo rezultate.

```
> matrica[4,1]<-0

> matrica[5,5]<-0

> u1<-sum(matrica[4,])/(n-1)

> matrica[4,1]<-u1

> u1<-matrica[4,1]

> u2<-matrica[5,5]

> nova1<-0

> nova2<-0
```

Sledeća while petlja proverava da li je postignuta navedena tačnost. Ako jeste izlazimo iz petlje, ali ako nije prolazimo iterativni proces. Da se podsetimo. Jedna vrednost se postavlja na 0, dok druga ima tekuću vrednost. Na osnovu formule ocenjujemo prvu vrednost, a zatim isti postupak primenimo za drugu vrednost. Predlog programskog rešenja problema u **R**-u bi mogao izgledati ovako:

```
> while(abs(u1-nova1)>0.1 & abs(u2-nova2)>0.1) {

+ u1<-nova1

+ u2<-nova2

+ matrica[5,5]<-0

+ V2<-sum(matrica[5,])

+ K2<-sum(matrica[,5])

+ zbir_T2<-function(lat_kvadrat) {

+ suma<-0

+ slovo<-lat_kvadrat[5,5]

+ for(i in 1:n){

+  for(j in 1:n){

+   if(lat_kvadrat[i,j]==slovo){ suma<-suma+matrica[i,j] }}}}

+ T2<-zbir_T2(lat_kvadrat)

+ G<-sum(matrica)

+ nova2<-(p*(V2+K2+T2)-2*G)/((p-1)*(p-2))
```

```
+ matrica[5,5]<-nova2
+ matrica[4,1]<-0
+ V1<-sum(matrica[4,])
+ K1<-sum(matrica[,1])
+ zbir_T1<-function(lat_kvadrat) {
+ suma<-0
+ slovo<-lat_kvadrat[4,1]
+ for(i in 1:n){
+  for(j in 1:n){
+   if(lat_kvadrat[i,j]==slovo){ suma<-suma+matrica[i,j] }}}}
+ T1<-zbir_T1(lat_kvadrat)
+ G<-sum(matrica)
+ nova1<-(p*(V1+K1+T1)-2*G)/((p-1)*(p-2))
+ matrica[4,1]<-nova1 }
```

Naravno, moglo bi se naći optimalnije rešenje i rešenje koje će vršiti ocenu nedostajućih vrednosti za proizvoljne pozicije u matrici. Na ovom mestu rešenje je namerno ilustrovano na ovaj način kako bi čitaoci mogli da isprate konkretan tok ovih iteracija. Rešenja dobijena na ovaj način su

```
> u1<-matrica[4,1]
> u2<-matrica[5,5]
> u1
[1] 22.7713
> u2
[1] 14.62221
```

Dakle, ocenjene vrednosti su za četvrtu vrstu, prvu kolonu 22.713, na poziciji maksimalne vrednosti, a na poziciji minimalne je ocenjena vrednost 14.62221. Ostalo je još izvršiti analizu varijanse.

```
> baza$mpg[3*5+1]<-matrica[4,1]
> baza$mpg[4*5+5]<-matrica[5,5]
> model<-lm(mpg~vozac+brzina+tretman, baza)
```

```
> aov(model)

Call:

   aov(formula = model)

Terms:

                    Vozac      brzina    tretman  Residuals

Sum of Squares    1.83803  72.87689   39.69166  29.14829

Deg. of Freedom         4         4          4        12

Residual standard error: 1.558533
```

Primenjujući isti način zaključivanja kao i u prethodnoj diskusiji, s tim što broj stepeni slobode u ovom slučaju umanjujemo za 2, jer smo ocenjivali dve nedostajuće vrednosti, dobijamo vrednosti F količnika. Tablična vrednost za prag značajnosti $\alpha = 0.01$ je u ovom slučaju jednaka 5.994339. Realizovane vrednosti F količnika su sledeće: $F_V = 0.1578153, F_K = 6.250515, F_T = 3.40435$. I u ovom slučaju odbacujemo samo hipotezu o tome da ne postoji veza između brzine i pređenih milja po galonu goriva.

Zaključak

Planiranje eksperimenata i statistička analiza su u jakoj vezi, ali je u ovom radu više pažnje posvećeno planiranju. Statistička analiza je zastupljena u onoj meri koja nam pruža kao rezultat vrednosti koje opisuju posmatrano obeležje. Cilj je da na osnovu raspodela verovatnoće odgovorimo na postavljena pitanja i utvrdimo da li postoje razlike u parametrima koje ispitujemo. Nulta hipoteza je uglavnom hipoteza o jednakosti vrednosti parametara. Odbacivanje nulte hipoteze bi značilo da postoje značajne razlike u vrednostima. Ukoliko je to od značaja određujemo intervale poverenja za razlike i donosimo zaključak o uticaju posmatranih tretmana.

Zadatak ovog rada je bio da predstavi prednost korišćenja latinskih kvadrata u planiranju eksperimenata. Kao što smo videli u primeru obrađenom u **R**-u, statistička analiza je jednostavna. Čak i u slučaju kada neke od vrednosti nedostaju iterativnim postupkom lako dolazimo do njihove ocene. Ključna prednost u odnosu na ostale modele je princip dvostruke stratifikacije, to jest podela populacije u dva smera, po vrstama i kolonama, čime se utiče na povećanje preciznosti ocene, što je posledica rezultata da stratifikovan uzorak daje precizniju ocenu nego prost slučajan uzorak.

Još jedna bitna osobina latinskih kvadrata je što se specijalno grupisanje podataka može proširiti po još jednoj osnovi. To znači da nam može biti dozvoljeno da dodamo još jedan tretman čiji nivo označavamo slovima grčkog alfabeta. Tada je reč o grčko-latinskim kvadratima. Oni nemaju veliku primenu jer se problemi ovog tipa ne javljaju često.

Latinski kvadrati nemaju primenu samo u planiranju eksperimenata. U algebri latinski kvadrati služe kao generalizacija grupa. U teoriji prenosa informacija kroz kanal, ukoliko postoji više tipova greške, a ne samo beli šum, latinski kvadrati predstavljaju matrice dekodiranja. Sa latinskim kvadratima se ne sreću samo matematičari i izvođači eksperimenata. Popularna je glavolomka poznata pod imenom sudoku. Sudoku predstavlja specijalan slučaj latinskog kvadrata dimenzije 9×9 koji je podeljen na 9 podkvadrata dimenzije 3×3. Osim u svakoj vrsti i koloni brojevi od 1 do 9 se bez ponavljanja moraju rasporediti i u podkvadratima. Naravno, ovde je reč o standardnoj verziji sudoku igrice. Poznata je i KenKen puzla koja je takođe primer latinskog kvadrata.

Dodatak A.
Ocenjivanje nepoznatih parametara

A.1. Ocenjivanje parametara jednofaktorskog modela

U poglavlju 2.2. kada smo govorili o jednofaktorskoj disperzionoj analizi pomenuli smo koje su ocene parametara modela

$$y_{ij} = m + \beta_j + e_{ij}, \;\; i = 1,2,\dots,n_j, \;\; j = 1,2,\dots,k,$$

gde je $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = 0$, a e_{ij} su reziduali koji predstavljaju nezavisne slučajne veličine sa $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ raspodelom. Naveli smo da su ocene uvedenih parametara m i β_j, redom, $\bar{y}$ i $\bar{y}_j - \bar{y}$. Pokažimo da je to zaista tako.

Ocena ovih parametara se dobija metodom najmanjih kvadrata. Ovaj metod se bazira na minimiziranju sume

$$L = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} e_{ij}^2,$$

odnosno sume

$$L = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ij} - m - \beta_j\right)^2.$$

Diferenciranjem sume L po m dobijamo

$$\frac{\partial L}{\partial m} = -2 \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ij} - m - \beta_j\right) = 0.$$

Ocene za $\beta_j, j \in \{1,\dots,k\}$, dobićemo kada sumu L diferenciramo po β_j

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_j} = -2 \sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ij} - m - \beta_j \right) = 0.$$

Primetimo da kada sumiramo po svim j od 1 do k prethodnu jednačinu dobijamo $\frac{\partial L}{\partial m}$. Dakle, sistem $(k + 1)$ jednačina koje smo dobili diferenciranjem sume L je linearno zavisan, pa bar jednu od jednačina možemo izostaviti. Kako treba oceniti $(k + 1)$ parametar, može se na trenutak učiniti da je nemoguće naći jednoznačnu ocenu ovih parametara. Međutim, jednoznačnost nam u ovom slučaju obezbeđuje uslov $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = 0$. Za proizvoljno $j \in \{1, \dots, k\}$ važi sledeći niz ekvivalentnih jednačina

$$-2 \sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ij} - m - \beta_j \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n_j} \left(y_{ij} - m - \beta_j \right) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij} - n_j m - n_j \beta_j = 0.$$

Deljenjem ove jednačine sa n_j dobijamo

$$\bar{y}_j - m - \beta_j = 0.$$

Sada iskoristimo uslov $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = 0$ tako što sumiramo prethodnu jednačinu po svim j od 1 do k i dobijamo

$$\sum_{j=1}^{k} \bar{y}_j - km - \sum_{j=1}^{k} \beta_j = 0.$$

Odavde sledi da je ocena za m

$$\widehat{m} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \bar{y}_j = \bar{y}.$$

Iz jednačina

$$\bar{y}_j - m - \beta_j = 0$$

direktno dobijamo ocene za $\beta_j, j \in \{1, \dots, k\}$

$$\hat{\beta}_j = \bar{y}_j - \bar{y}.$$

A.2. Ocenjivanje parametra σ^2

Pri formiranju jednostrukih i višestrukih intervala poverenja bilo je potrebno oceniti nepoznati parametar σ^2. Kao moguće ocene nametale su se sredina kvadrata odstupanja između tretmana i sredina kvadrata odstupanja unutar tretmana. Pod pretpostavkom nulte hipoteze i jedna i druga ocena su nepristrasne. Intervale poverenja i višestruke intervale poverenja određujemo u slučaju da nulta hipoteza ne važi. Tada treba proceniti koja je od ovih ocena bolja. Pokazaćemo da je u ovom slučaju jedna ocena nepristrasna, a druga nije.

Sredina suma kvadrata odstupanja između tretmana jednaka je $\frac{\mathrm{SS_T}}{k-1}$, dok je sredina suma kvadrata odstupanja unutar tretmana jednaka $\frac{\mathrm{SS_R}}{n-k}$. Izračunajmo matematička očekivanja ovih veličina.

Dokažimo da prva ocena nije nepristrasna.

$$E\left(\frac{\mathrm{SS_T}}{k-1}\right) = E\left(\frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\bar{y}_j-\bar{y})^2\right)$$

$$=\frac{1}{k-1}E\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\bar{y}_j-\bar{y})^2\right)$$

$$=\frac{1}{k-1}E\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(\bar{y}_j^2-2\bar{y}_j\bar{y}+\bar{y}^2)\right)$$

$$=\frac{1}{k-1}E\left(\sum_{j=1}^{k}n_j\bar{y}_j^2-2\bar{y}\sum_{j=1}^{k}n_j\bar{y}_j+n\bar{y}^2\right)$$

$$=\frac{1}{k-1}E\left(\sum_{j=1}^{k}n_j\bar{y}_j^2-2n\bar{y}^2+n\bar{y}^2\right)$$

$$=\frac{1}{k-1}E\left(\sum_{j=1}^{k}n_j\bar{y}_j^2-n\bar{y}^2\right)$$

$$=\frac{1}{k-1}E\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j}\left(\sum_{i=1}^{n_j}y_{ij}\right)^2-\frac{n}{k^2}\left(\sum_{j=1}^{k}\bar{y}_j\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{k-1}E\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j}\left(\sum_{i=1}^{n_j}y_{ij}\right)^2-\frac{n}{k^2}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}y_{ij}\right)^2\right).$$

Model $y_{ij} = m + \beta_j + e_{ij}$ zamenimo u ovu jednačinu.

$$E\left(\frac{\mathrm{SS_T}}{k-1}\right) = \frac{1}{k-1} E\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j}\left(\sum_{i=1}^{n_j}(m + \beta_j + e_{ij})\right)^2 - \frac{n}{k^2}\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}(m + \beta_j + e_{ij})\right)^2\right).$$

Posle kvadriranja i sumiranja, iskoristimo pretpostavku da su e_{ij} slučajne promenljive sa normalnom raspodelom, očekivanjem jednakim nula i disperzijom jednakom σ^2. To jest činjenicu da za sve moguće i i j važi $E(e_{ij}) = 0$ i $E(e_{ij}^2) = \sigma^2$. Traženo očekivanje tada postaje

$$E\left(\frac{\mathrm{SS_T}}{k-1}\right) = \sigma^2 + \frac{n}{k-1} \cdot \sum_{j=1}^{k} {\beta_j}^2,$$

gde je $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$. Ukoliko nulta hipoteza nije ispunjena to znači da ne važi ni jednakost

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0,$$

odnosno, bar jedna od vrednosti β_j je različita od nule. Kao posledica sledi da će onda i $\sum_{j=1}^{k} {\beta_j}^2$ biti strogo veća od nule.

Matematičko očekivanje druge ocene je

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{\mathrm{SS_R}}{n-k}\right) &= \frac{1}{n-k} E(\mathrm{SS_R}) \\
&= \frac{1}{n-k} E\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij} - \bar{y}_j)^2\right) \\
&= \frac{1}{n-k} E\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ij}^2 - 2y_{ij}\bar{y}_j + \bar{y}_j^2)\right) \\
&= \frac{1}{n-k} E\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}^2 - 2\sum_{j=1}^{k} n_j\bar{y}_j^2 + \sum_{j=1}^{k} n_j\bar{y}_j^2\right) \\
&= \frac{1}{n-k} E\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{k} n_j\bar{y}_j^2\right) \\
&= \frac{1}{n-k} E\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j}\left(\sum_{i=1}^{n_j} y_{ij}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Kao i u prethodnom slučaju zamenimo model $y_{ij} = m + \beta_j + e_{ij}$ u ovu jednačinu i dobijamo

$$E\left(\frac{\mathrm{SS_R}}{n-k}\right)=\frac{1}{n-k}E\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(m+\beta_j+e_{ij}\right)^2-\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{n_j}\left(\sum_{i=1}^{n_j}\left(m+\beta_j+e_{ij}\right)\right)^2\right).$$

Korišćenjem navedenih činjenica o raspodeli slučajnih veličina e_{ij}, očekivanje se svodi na

$$E\left(\frac{\mathrm{SS_R}}{n-k}\right)=\frac{1}{n-k}\left(nm+\sum_{j=1}^{k}n_j\beta_j^2+n\sigma^2-nm-\sum_{j=1}^{k}n_j\beta_j^2-k\sigma^2\right)$$

$$E\left(\frac{\mathrm{SS_R}}{n-k}\right)=\sigma^2.$$

Time smo dokazali da je ova ocena nepristrasna, pa zaključujemo da je $\frac{\mathrm{SS_R}}{n-k}$ bolja ocena parametra σ^2.

Dodatak B
Teoreme o kvadratnim formama

Analiza varijanse je neformalno počela da se koristi još početkom XIX veka od strane istraživača metode najmanjih kvadrata. Formalnu analizu varijanse zasnovao je Fišer 1918. godine, a prva primena analize varijanse objavljena je 1921. godine. Objavljivanjem knjige *Statistical Methods for Research Workers*, 1925. godine, Fišer dovodi poznavanje ove metode na viši nivo. Danas postoji nekoliko raznih tipova analize varijansi. U ovom radu su jednofaktorska i analiza varijanse sa tri faktora korišćene u planiranju eksperimenata. Jednofaktorska analiza varijanse je u planiranju eksperimenata od velikog značaja i koristi se za poređenje razlika između najmanje tri grupe podataka. Već smo napomenuli da je za dve grupe ekvivalentna klasičnom t-testu.

Ključna teorema na kojoj se baziraju zaključci pri analizi varijanse jeste teorema Kokrana. U ovom odeljku navešćemo pojmove i teoreme koji će nam biti od pomoći pri dokazivanju ove teoreme. Pomoćne teoreme se mogu podeliti u dve grupe: teoreme o raspodeli kvadratnih formi i teoreme o nezavisnosti kvadratnih formi. Dokazi teorema koje smo izostavili mogu se naći npr. u [3].

B.1. Teoreme o raspodelama kvadratnih formi

Definišimo najpre trag kvadratne matrice.

Definicija B.1.1. *Ako je* $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ *matrica dimenzije* $n \times n$, *onda tragom matrice* $\mathbf{A}$ *nazivamo sumu elemenata na glavnoj dijagonali matrice* $\mathbf{A}$, *u oznaci*

$$\mathrm{tr}\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Osobine traga matrice koje je neophodno znati prilikom dokazivanja teorema koje slede su:

- $\mathrm{tr}(a \cdot \mathbf{A} + b \cdot \mathbf{B}) = a \cdot \mathrm{tr}\mathbf{A} + b \cdot \mathrm{tr}\mathbf{B}$

- $\mathrm{tr}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BCA}) = \mathrm{tr}(\mathbf{CAB})$

gde su dimenzije matrica $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{C}$, redom, $n \times m$, $m \times k$ i $k \times n$, tj. matrice su saglasne.

- $\mathrm{tr}a = a$

gde je a bilo koji skalar.

Ovde ćemo uvesti malo formalniju ali ekvivalentnu definiciju kvadratnih formi pomoću n-dimenzionog slučajnog vektora $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Sa $\mathbf{M}'$ označavaćemo transponovanu matricu, matrice $\mathbf{M}$.

Definicija B.1.2. *Neka je $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ n-dimenzioni slučajan vektor i $\mathbf{A}$ realna i simetrična matrica dimenzije $n \times n$. Slučajna veličina $Q = \mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$ naziva se kvadratna forma i važi:*

$$Q = \mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_iX_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, X_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} a_{ij}X_iX_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, X_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} a_{ij}X_iX_j.$$

Ovaj princip predstavljanja kvadratnih formi umnogome olakšava dokazivanje sledećih teorema.

Teorema B.1.1. *Pretpostavimo da n-dimenzioni slučajni vektor $\mathbf{X}$ ima vektor matematičkih očekivanja $\boldsymbol{\mu}$ i kovarijacionu matricu $\boldsymbol{\Sigma}$. Neka je $Q = \mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$, gde je $\mathbf{A}$ realna i simetrična matrica dimenzije $n \times n$. Tada je*

$$E(Q) = \mathrm{tr}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}.$$

Spektralna dekompozicija matrica omogućuje nam rad sa dijagonalnim i ortogonalnim matricama koje imaju neke lepe osobine. Realna, simetrična matrica $\mathbf{A}$ se prevodi u dijagonalnu množenjem odgovarajućim ortogonalnim matricama sa leve i desne strane na sledeći način:

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}$$

gde je $\boldsymbol{\Lambda}$ dijagonalna matrica oblika $\boldsymbol{\Lambda} = diag\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$, sopstvenih vrednosti matrice $\mathbf{A}$, a matrica $\boldsymbol{\Gamma}' = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_\mathrm{n}]$ kolona odgovarajućih sopstvenih vektora. Matrica $\boldsymbol{\Gamma}$ je ortogonalna, što znači da važi $\boldsymbol{\Gamma}' = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}$. Rang matrice $\mathbf{A}$ je broj sopstvenih vrednosti različitih od 0. S obzirom da je matrica $\boldsymbol{\Lambda}$ dijagonalna onda se matrica $\mathbf{A}$ može još predstaviti u obliku

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_\mathrm{i}\mathbf{v}_\mathrm{i}'.$$

Za normalno raspodeljene slučajne promenljive pomoću ove reprezentacije možemo na jednostavan način predstaviti generatornu funkciju momenata kvadratne forme.

Teorema B.1.2. *Neka je $\mathbf{X}' = (X_1, \dots, X_n)$, gde je $(X_1, \dots, X_n)$ prost slučajan uzorak iz $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ raspodele. Pretpostavimo da je kvadratna forma oblika $Q = \sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$ za simetričnu matricu $\mathbf{A}$ ranga $r \leq n$. Tada Q ima generatornu funkciju momenata oblika*

$$M(t) = \prod_{i=1}^{r} (1 - 2t\lambda_i)^{-1/2} = |\mathbf{I} - 2t\mathbf{A}|^{-1/2},$$

gde su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ nenula sopstvene vrednosti matrice $\mathbf{A}$, $|t| < 1/(2\lambda^*)$ *i vrednost za λ^* data je formulom $\lambda^* = max_{1 \le i \le r} |\lambda_i|$.*

Znajući da je generatorna funkcija momenata slučajne promenljive sa χ^2 raspodelom koja ima n stepeni slobode

$$\widetilde{M}(t) = (1 - 2t)^{-n/2}$$

možemo utvrditi pod kojim uslovima će ove dve generatorne funkcije biti jednake. Kako generatorna funkcija na jedinstven način određuje raspodelu slučajne veličine prethodni zadatak možemo definisati i kao određivanje uslova pod kojim će kvadratna forma imati odgovarajuću χ^2 raspodelu. Sledeće dve teoreme daju odgovor na ova pitanja.

Teorema B.1.3. *Neka* $\mathbf{X}' = (X_1, \dots, X_n)$ *ima* $\mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ *raspodelu, gde je matrica* $\boldsymbol{\Sigma}$ *pozitivno definitna. Tada* $Q = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$ *ima χ^2 raspodelu sa n stepeni slobode.*

Iz linearne algebre, takođe, znamo da se matrica naziva idempotentnom ako zadovoljava $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Pokazaćemo važnu karakteristiku idempotentnih matrica. Pretpostavimo da je sa λ označena sopstvena vrednost matrice $\mathbf{A}$. Neka je sa $\mathbf{v}$ označen sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ. Važi sledeći identitet

$$\lambda\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}^2\mathbf{v} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$$

Direktno sledi jednakost $\lambda(1 - \lambda)\mathbf{v} = 0$, koja za nenula vektor $\mathbf{v}$ daje rešenje $\lambda = 0$ ili $\lambda = 1$. Dakle, ako su sve sopstvene vrednosti neke matrice jednake nuli ili jedinici, onda je ta matrica idempotentna. Rang idempotentne matrice jednak je broju sopstvenih vrednosti koje su jednake 1. Spektralna dekompozicija idempotentne matrice dozvoljava predstavljanje matrice u obliku proizvoda $\mathbf{A} = \boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}$, gde je $\boldsymbol{\Lambda}$ dijagonalna matrica, sopstvenih vrednosti matrice $\mathbf{A}$, što znači da su svi dijagonalni elementi jednaki ili 0 ili 1. Matrica $\boldsymbol{\Gamma}$ je ortogonalna matrica odgovarajućih sopstvenih vektora. Na osnovu osobina traga matrice i prethodne dekompozicije možemo zaključiti da je

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = \mathrm{tr}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\Gamma} = \mathrm{tr}\boldsymbol{\Lambda} = rang(\mathbf{A}).$$

Teorema B.1.4. *Neka je* $\mathbf{X}' = (X_1, \dots, X_n)$, *gde je* $(X_1, \dots, X_n)$ *prost slučajan uzorak sa* $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ *raspodelom. Neka je kvadratna forma oblika* $Q = \sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$ *za simetričnu matricu* $\mathbf{A}$ *ranga r. Tada Q ima χ^2 raspodelu sa r stepeni slobode ako i samo ako je matrica* $\mathbf{A}$ *idempotentna.*

Teorema daje potreban i dovoljan uslov da kvadratna forma ima χ^2 raspodelu, a to je idempotentnost matrice kvadratne forme $\mathbf{A}$. Ako je raspodela vektora $\mathbf{X}$ normalna $\mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\mathbf{I})$, tj. za nezavisne komponente vektora $\mathbf{X}$, raspodela kvadratne forme će biti necentrirana χ^2 raspodela. Broj stepeni slobode biće jednak rangu matrice $\mathbf{A}$, a parametar necentriranosti je tada $\sigma^{-2}\boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$. Specijalno, ako je $\boldsymbol{\mu} = \mu \cdot \mathbf{1}$, onda važi $\boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} = \mu^2 \sum_{i,j} a_{ij}$, gde je $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Ukoliko je $\mu \neq 0$ potreban i dovoljan uslov da χ^2 raspodela bude centrirana je da je matrica idempotentna i da je $\sum_{i,j} a_{ij} = 0$.

B.2. Teoreme o nezavisnosti kvadratnih formi

Na osnovu nekoliko sledećih teorema dobijaju se potrebni i dovoljni uslovi za nezavisnosti kvadratnih formi.

Teorema B.2.1. *Neka je* $\mathbf{X}' = (X_1, \dots, X_n)$, *gde je* $(X_1, \dots, X_n)$ *prost slučajan uzorak iz* $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ *raspodele. Za realne, simetrične matrice* **A** *i* **B** *neka su* $Q_1 = \sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$ *i* $Q_2 = \sigma^{-2}\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}$ *odgovarajuće kvadratne forme. Slučajne promenljive* Q_1 *i* Q_2 *su nezavisne ako i samo ako je* $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$.

Ova teorema, koju je dokazao Kreg (Craig) važi i u opštijem slučaju kada je prost slučajan uzorak uzet iz $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ raspodele, za proizvoljnu vrednost realnog broja μ. Takođe, važi i u slučaju da vektor **X** ima $\mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ raspodelu. Potreban i dovoljan uslov za nezavisnost kvadratnih formi je tada $\mathbf{A\Sigma B} = \mathbf{0}$.

Sledeću teoremu su dokazali Hog (Hogg) i Kreg, 1958. godine, i poznata je pod nazivom teorema o razlaganju kvadratnih formi.

Teorema B.2.2. (Hog i Kreg) *Neka je* $Q = Q_1 + \cdots + Q_k$, *gde su* $Q, Q_1, \dots, Q_k$ $(k+1)$ *slučajna veličina koje predstavljaju kvadratne forme od* n *nezavisnih slučajnih veličina sa normalnom* $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ *raspodelom. Neka je* $\frac{Q}{\sigma^2}, \frac{Q_1}{\sigma^2}, \dots, \frac{Q_{k-1}}{\sigma^2}$, *imaju* χ^2 *raspodelu, redom sa* $r, r_1, \dots, r_{k-1}$ *stepeni slobode i neka je* Q_k *nenegativna kvadratna forma. Tada:*

a) $Q_1, \dots, Q_k$ *su nezavisne;*
b) $\frac{Q_k}{\sigma^2}$ *ima* χ^2 *raspodelu sa* $r - r_1 - \cdots - r_{k-1}$ *stepeni slobode.*

I ova teorema se može dokazati u opštijem slučaju kada se pretpostavlja da se kvadratne forme $Q', Q_1', \dots, Q_k'$ odnose na slučajne veličine iz proizvoljne normalne raspodele. Ako je pri tom $Q' = Q_1' + \cdots + Q_k'$, zatim, $\frac{Q'}{\sigma^2}, \frac{Q_1'}{\sigma^2}, \dots, \frac{Q_{k-1}'}{\sigma^2}$ imaju centriranu ili necentriranu χ^2 raspodelu i Q_k' je nenegativna kvadratna forma, onda su $Q_1', \dots, Q_k'$ nezavisne i $\frac{Q_k'}{\sigma^2}$ ima odgovarajuću centriranu ili necentriranu χ^2 raspodelu.

B.3. Kokranova teorema

Kokran je ovu teoremu dokazao još 1934. godine u radu *The Distribution of Quadratic Forms in a Normal system*, koji je objavljen u zborniku *Proceedings of Cambridge Philosophical Society*.

Teorema B.3.1. (Kokran) *Neka je* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *prost slučajan uzorak iz normalne* $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ *raspodele. Neka je suma kvadrata ovih veličina predstavljena u obliku*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_k,$$

gde su Q_j kvadratne forme za $X_1, X_2, \dots, X_n$, sa matricama $\mathbf{A}_j$, ranga r_j, za $j = 1, \dots, k$. Slučajne promenljive $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ su nezavisne i $\frac{Q_j}{\sigma^2}$ ima χ^2 raspodelu sa r_j stepeni slobode ako i samo ako je $\sum_{j=1}^{k} r_j = n$.

Dokaz. Pretpostavimo da je ispunjeno $\sum_{j=1}^{k} r_j = n$. Jednakost

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k$$

implicira ekvivalentnu jednakost

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_k.$$

Uvedimo sledeću oznaku

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{I} - \mathbf{A}_i$$

to jest, matrica $\mathbf{B}_i$ predstavlja sumu svih matrica $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k$ osim matrice $\mathbf{A}_i$. Sa R_i označimo rang matrice $\mathbf{B}_i$. Kako je rang zbira matrica manji ili jednak zbiru pojedinačnih rangova važi nejednakost

$$R_i \leq \sum_{j=1}^{k} r_j - r_i = n - r_i.$$

S druge strane, važi

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i$$

pa sledi i nejednakost

$$n \leq r_i + R_i$$

odnosno

$$n - r_i \leq R_i$$

Zaključujemo da važi veza $R_i = n - r_i$. Sopstvene vrednosti matrice $\mathbf{B}_i$ su rešenja jednačine $|\mathbf{B}_i - \lambda\mathbf{I}| = 0$. Kako je $\mathbf{B}_i = \mathbf{I} - \mathbf{A}_i$, to se prethodna jednakost prevodi u njoj ekvivalentnu

$$|\mathbf{B}_i - \lambda\mathbf{I}| = |\mathbf{I} - \mathbf{A}_i - \lambda\mathbf{I}| = |\mathbf{A}_i - (1 - \lambda)\mathbf{I}| = 0.$$

Svaki koren ove jednačine koji predstavlja sopstvenu vrednost matrice $\mathbf{B}_i$, jednak je razlici jedinice i sopstvene vrednosti matrice $\mathbf{A}_i$. Rang matrice $\mathbf{B}_i$ je R_i, što znači da je tačno $n - R_i = r_i$ sopstvenih vrednosti jednako nuli. U terminima matrice $\mathbf{A}_i$, tačno r_i sopstvenih vrednosti matrice $\mathbf{A}_i$ biće jednako 1. Rang matrice $\mathbf{A}_i$ je r_i. Dakle, svaka nenula sopstvena vrednost matrice $\mathbf{A}_i$ je jednaka 1, pa zaključujemo da je matrica $\mathbf{A}_i$ idempotentna. Na osnovu teoreme B.1.4. kvadratna forma $\frac{Q_i}{\sigma^2}$, definisana matricom $\mathbf{A}_i$, ima χ^2 raspodelu sa r_i stepeni slobode. Pri uvođenju pomoćne matrice $\mathbf{B}_i$ nismo zahtevali dodatne uslove za indeks, pa pomenuta raspodela važi za svako $i = 1, \dots, k$. Osim toga kvadratna forma $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ je nenegativna, pa važe uslovi teoreme B.2.2. odakle sledi nezavisnost kvadratnih formi $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$.

Da bismo dokazali teoremu u potpunosti potrebno je da dokažemo i obrnuto. Pretpostavljamo da je

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_k$$

i da su kvadratne forme $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ nezavisne. Neka i $\frac{Q_j}{\sigma^2}$ imaju χ^2 raspodelu sa r_j stepeni slobode za svako $j = 1, \ldots, k$. Tada, na osnovu osobine da je broj stepeni slobode zbira nezavisnih slučajnih veličina sa χ^2 raspodelom, zbir broja stepeni slobode sabiraka, zaključujemo da $\sum_{j=1}^{k} \frac{Q_j}{\sigma^2}$ ima χ^2 raspodelu sa $\sum_{j=1}^{k} r_j$ stepeni slobode. Kako je

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{Q_j}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{\sigma^2}$$

što ima χ^2 raspodelu sa n stepeni slobode to važi da je $n = \sum_{j=1}^{k} r_j$. Ovim je teorema dokazana u potpunosti.

Literatura

[1] Cox D. R. and Reid, N. (2000), *The Theory of the Design of Experiments*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.

[2] Fisher, R. A. (1954), *Statistical Methods for Research workers*, Oliver and Boyd, Edinburg.

[3] Hogg, R. V., McKean, J. W. and Craig, A.T. (2005), *Introduction to Mathematical Statistics*, Pearson Education International.

[4] John, P. W. M. (1971), *Statistical design and analysis of experiments*, The Macmillan Company, New York.

[5] Lipkovski, A. (2007), *Linearna algebra i analitička geometrija*, Zavod za udžbenike, Beograd.

[6] Merkle, M. (2010), *Verovatnoća i statistika za inženjere i studente tehnike*, Akademska misao, Beograd.

[7] Mladenović, P. (2005), *Verovatnoća i statistika*, Matematički fakultet, Beograd.

[8] Montgomery, D. C. (2001), *Design and Analysis of Experiments*, John Wiley and Sons, New York.

[9] Petrović, Lj. (2007), *Teorija uzoraka i planiranje eksperimenata*, Centar za izdavačku delatnost Ekonomskog fakulteta u Beogradu, Beograd.

[10] Petrović, Lj. (2005), *Zbirka rešenih zadataka iz teorije uzoraka i planiranja eksperimenata*, Centar za izdavačku delatnost Ekonomskog fakulteta u Beogradu, Beograd.