Математички факултет

Универзитет у Београду

Мастер рад

Левијеви процеси и проблем првог достизања датог нивоа

Студент:
Бојана Милошевић

Ментор:
др Павле Младеновић

јул 2012.

Предговор

Мастер рад се састоји из четири целине.

У првој целини дефинисани су основни појмови који се појављују даље у раду, наведена су основна својства случајних величина и случајних процеса.

Друга целина је посвећена Левијевим процесима. Дате су важне особине истих, као и најпознатији представници Левијевих процеса (Брауново кретање, Пуасонов процес, сложени Пуасонов процес). Укратко су описане класе стабилних Левијевих процеса као и субординатора. Поглавље је завршено приказом неких од многобројних примена Левијевих процеса.

У трећем поглављу описан је проблем достизања датог нивоа Брауновог кретања и Брауновог кретања са померајем. Наведене су и доказане важне теореме које говоре о понашању случајне величине која представља време достизања датог нивоа.

Четврта глава посвећена је времену достизања датог нивоа код Левијевих процеса који се могу приказати као збир два независна процеса- Брауновог кретања са померајем и сложеног Пуасонов процеса. Приказан је рад " *First passage time law for some Lévy processes with compound Poisson: Existence of density* ђхији су аутори *Laure Coutin i Diana Dorobanty* [4], у коме је показано да је време достизања датог нивоа случајна величина која има густину.

Желела бих да се захвалим свом ментору професору др Павлу Младеновићу на безрезервној подршци, стрпљењу, указаном поверењу и стручној помоћи. Такође , захваљујем се свим осталим члановима катедре за вероватноћу и статистику, који су својим сугестијама, примедбама и идејама допринели да овај рад буде што бољи. Посебно се захваљујем др Јовану Вукмировићу који је својим приступом у настави, студентима непрекидно откривао чари математичке анализе и вероватноће.
Посебну захвалност дугујем и свом најбољем другу Милошу на свему што наше другарство чини. И на крају, захваљујем се својим родитељима и брату, на бескрајном стрпљењу и љубави.

Садржај

Ознаке 3

1 Теоријски увод 4

2 Левијеви процеси 8

2.1 Пуасонов процес 8

2.1.1 О односу нехомогеног и хомогеног Пуасоновог процеса 11

2.1.2 Пуасонова случајна мера 11

2.1.3 Центрирани (компензовани) Пуасонов процес 12

2.2 Сложени Пуасонов процес 13

2.2.1 Случајна мера индукована сложеним Пуасоновим процесом . . . 15

2.3 Левијева мера 15

2.4 Центрирани (компензовани) сложени Пуасонов процес 17

2.5 Брауново кретање 18

2.6 Левијеви процеси и бесконачно дељиве расподеле 21

2.7 Активност Левијевих процеса 25

2.8 Још неке важне класе Левијевих процеса 25

2.8.1 Стабилни процеси 25

2.8.2 Субординатори 27

2.8.3 Субординација 28

2.9 Времена заустављања и оператор померања 29

2.10 Левијеви процеси у свету око нас 31

3 Достизање нивоа код Брауновог кретања 32

4 Време достизања нивоа за Левијеве процесе са сложеним Пуасоновим процесом 39

Литература 49

Ознаке

$|A|$ кардиналност скупа A;

$\stackrel{D}{=}$ једнакост у расподели ;

$\stackrel{p}{=}$ једнакост у вероватноћи ;

$\stackrel{s.s}{=}$ скоро сигурна једнакост ;

$\mathbb{N}$ скуп природних бројева;

$\mathbb{Q}$ скуп рационалних бројева;

$\mathbb{R}$ скуп реалних бројева;

$\mathbb{Z}$ скуп целих бројева;

$\mathbb{Z}^+$ скуп ненегативних целих бројева;

$\mathbb{R}^+$ скуп ненегативних реалних бројева;

$\mathbb{Q}^+$ скуп ненегативних рационалних бројева;

$\overline{\mathbb{R}}$ проширен скуп реалних бројева, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$;

$\mathfrak{B}$ Борелова σ-алгебра ;

R^T скуп свих функција са доменом T и кодоменом R;

$\sigma(X)$ σ-алгебра генерисана случајном величином X;

$\mathcal{E}(\lambda)$ експоненцијална расподела са параметром λ, односно функцијом густине

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0;$$

$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ нормална (Гаусова) расподела са параметрима m и σ^2, односно функцијом густине

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ \ x \in \mathbb{R}$$

$\Phi(x),\ x \in R$ функција расподеле случајне величине са $\mathcal{N}(0,1)$ расподелом;

$\gamma(\alpha, \beta)$ Гама расподела са параметрима α и β односно функцијом густине

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}\beta^{\alpha}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)},\ x \geq 0,$$

где је $\Gamma(t)$ гама функција;

1 Теоријски увод

У овом одељку дефинисаћемо појмове које ћемо у даљем тексту користити.

Нека је $\big(\Omega, F, P\big)$ простор вероватноћа. Фамилија случајних величина $\{X_t,\ t \in T\}$, где је T неки бесконачан скуп, који се најчешће интерпретира као време, назива се случајни процес . Уколико је фазни простор случајног процеса $\big(R, \mathfrak{B}\big)$, тај процес се назива реални случајни процес.

Функција $X_t(\omega) : T \to R$, где је $\omega \in \Omega$ фиксирано, назива се трајекторија случајног процеса.

У зависности од тога да ли је T дискретан, односно непрекидан скуп разликујемо случајне процесе са дискретним временом (случајни низ) и случајне процесе са непрекидним временом.

Нека је $\{X(t),\ t \geq 0\}$ реалан случајни процес, $n \in \mathbb{N}$ фиксиран број и $t_1, t_2, ..., t_n \in T$ n произвољних елемената, тада се расподела случајног вектора $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ назива коначнодимензиона расподела случајног процеса одређена индексима $t_1, t_2, ..., t_n$. Та расподела је одређена функцијом расподеле

$$F_{t_1,t_2,...,t_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = P\big\{X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, ..., X_{t_n} \leq x_n\big\}.$$

Фамилија коначно димензионалних расподела случајног процеса у потпуности одређује расподелу вероватноћа случајног процеса. О томе говори Колмогоровљева теорема о егзистенцији. Пре него што дамо њену формулацију треба да дефинишемо још неке појмове.

Кажемо да фамилија коначнодимензионих расподела случајног процеса $\{X_t,\ t \in T\}$ задовољава услове:

сагласности: ако за сваку n-торку $(t_1, t_2, ..., t_n) \in T^n$ и свако $k < n,\ k, n \in \mathbb{N}$ важи једнакост:

$$F_{(t_1,t_2,...,t_k)}(x_1, x_2, ..., x_k) = F_{(t_1,t_2,...,t_n)}(x_1, x_2, ..., x_k, \underbrace{+\infty, ..., +\infty}_{n-k}),$$

симетрије: ако за свако $n \in \mathbb{N}$, сваку n-торку $(t_1, t_2, ..., t_n) \in T^n$ и сваку пермутацију $(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n)$ скупа $\{1, 2, ..., n\}$ важи једнакост:

$$F_{(t_1,t_2,...,t_n)}(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{(t_{\pi_1},t_{\pi_2},...,t_{\pi_n})}(x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, ..., x_{\pi_n}).$$

Нека је x произвољна функција из R^T и нека је $\Pi_{(t_1,t_2,...,t_n)} : R^T \to R^n$ функција дефинисана са

$$\Pi_{(t_1,t_2,...,t_n)}(x) = (x(t_1), x(t_2), ..., x(t_n)),$$

где је $(t_1, t_2, ..., t_n)$ произвољна n-торка из T^n. Скуп $A \subset R^T$ назива цилиндар ако се може представити у облику $A = \Pi^{-1}_{(t_1,t_2,...,t_n)}(B)$ за неку n-торку $(t_1, t_2, ..., t_n)$ из T^n и неки скуп B из R^n. Скуп B се тада назива основа цилиндра. Уколико је B Борелов скуп, A се назива Борелов цилиндар. Минимална σ-алгебра генерисана овим цилиндрима означена је са $\mathfrak{B}^T$ и назива се Борелова σ-алгебра, а њени елемент Бореловим скуповима у простору R^T.
Даље, нека је $P_{(t_1,t_2,...,t_n)} : \mathfrak{B}^n \to R$ вероватносна мера дефинисана са

$$P_{(t_1,t_2,...,t_n)}(B) = P(\Pi^{-1}_{(t_1,t_2,...,t_n)}(B)).$$

Приметимо да је овако дефинисана вероватносна мера, једнозначно одређена функцијом расподеле вероватноће $F_{(t_1,t_2,...,t_n)}$.

Теорема 1.1. *Нека је T бесконачан скуп и нека је за сваки природан број n и сваку n-торку $(t_1, t_2, ..., t_n)$ елемената из T дата вероватносна мера $P_{(t_1,t_2,...,t_n)}$ са одговарајућом функцијом расподеле $F_{(t_1,t_2,...,t_n)}$. Ако за дату фамилију функција расподела важе услови симетрије и сагласности, онда постоји тачно једна вероватносна мера $P : \mathfrak{B}^T \to R$, таква да за сваку n-торку $(t_1, t_2, ..., t_n)$ елемената из T, сваки Борелов скуп $B \in \mathfrak{B}^n$ и цилиндар A са основом B важи једнакост*

$$P(A) = P_{(t_1,t_2,...,t_n)}(B).$$

Доказ се може наћи у [13].

Ова теорема нам показује зашто је јако важно познавање коначнодимензионих функција расподеле случајног процеса.

Уколико су коначнодимензионе расподеле нормалне, процес се назива Гаусов случајни процес. Испитивање да ли је неки случајни процес Гаусов или не, се може лако извршити коришћењем следеће теореме.

Теорема 1.2. *Случајни процес $\{X_t, t \geq 0\}$ је Гаусов ако и само ако за сваку n-торку $(t_1, t_2, ..., t_n)$ елемената из T и $(a_1, a_2, ..., a_n)$ из $\mathbb{R}^n$, случајна величина Y дефинисана са*

$$Y = a_1 X_{t_1} + a_2 X_{t_2} + \cdots + a_n X_{t_n},$$

има нормалну расподелу.

Доказ се може наћи у [10].

Класификација случајних процеса се може извршити на основу још неколико критеријума. Следеће карактеризације процеса су веома важне у даљем проучавању случајних процеса.

Дефиниција 1.1. *Случајни процес $\{X_t,\ t \in T\}$ је са независним прираштајима ако су за свако $n \in N$ и произвољан низ $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, случајне величине $X_{t_1} - X_{t_0},\ X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ независне.*

Из дефиниције следи да је за познавање случајног процеса са независним прираштајима $\{X_t,\ t \in T\}$, довољно знати функције расподеле случајних величина X_t и X_{t-s}, односно знати функције

$$F_{X_t}(x) = P\{X_t \leq x\}$$

$$F_{X_t - X_s}(x) = P\{X_t - X_s \leq x\}.$$

На основу овог закључујемо да је, за познавање ове класе случајних процеса, довољно познавање њихових дводимензионалних функција расподела.

Уколико је случајни процес $\{X_t,\ t \in T\}$ Гаусов и са независним прираштајима онда се за проверу независности прираштаја може искористити следећа теорема.

Теорема 1.3. *Нека случајни вектор $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ има n-димензионалну нормалну расподелу. Случајне величине $X_1, X_2, ..., X_n$ су независне ако и само ако су некорелисане.[11]*

Дакле, уколико желимо да проверимо независност нормално распоређених величина $X_1, ..., X_n$, довољно је да покажемо да је одговарајућа матрица коваријансе случајног вектора $C(X) = [E(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)]_{i,j=1}^n$, дијагонална.

Посебну класу случајних процеса чине стационарни процеси.

Дефиниција 1.2. *Случајни процес $\{X_t,\ t \in T\}$, $T \subset \mathbb{Z}$ или $T \subset \mathbb{R}$,је строго стационаран уколико је за сваки природан број n и сваку n-торку $(t_1, t_2, ..., t_n) \in T^n$ и $h \in T$ испуњено:*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}) \stackrel{D}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, ..., X_{t_n+h}).$$

Дефиниција 1.3. *Случајни процес $\{X_t,\ t \in T\}$, $T \subset \mathbb{Z}$ или $T \subset \mathbb{R}$, је слабо стационаран уколико важи:*

$$E|X_t|^2 < \infty, \quad EX_t = const$$

као и

$$K(t,s) = E(X_t - EX_t)(X_s - EX_s) = K(t-s),$$

где су $t, s \in \mathbb{R}$.

Дефиниција 1.4. *Случајни процес је са стационарним прираштајима ако је за свако* $n \in N$ *и произвољан низ* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$

$$X_{t_{j+1}} - X_{t_j} \overset{D}{=} X_{t_{j+1}-t_j} - X_0, \;\; j = 1, 2..., n.$$

Уколико се ради о процесу са независним и стационарним прираштајима тип расподеле прираштаја одређује својства процеса.

2 Левијеви процеси

Дефиниција 2.1. *Случајни процес $\{X_t,\ t \geq 0\}$ се назива Левијев процес ако:*

1. $X_0 = 0$ *с.с;*
2. X *има независне и стационарне прираштаје;*
3. X *је стохастички непрекидан, односно за свако* $\varepsilon > 0$ *и за свако* $s \geq 0$

$$\lim_{t \to s} P\{|X_t - X_s| > \varepsilon\} = 0$$

Најпознатији представници Левијевих процеса су Пуасонов процес, сложени Пуасонов процес, Брауново кретање, Кошијев процес и Гама процес. Неке од њих ћемо детаљније приказати у наредним одељцима.

У овом раду бавићемо се само једнодимензионим Левијевим процесима, уз напомену да сва тврђења важе и за вишедимензионе Левијеве процесе, а докази тврђења се изводе аналогно.

2.1 Пуасонов процес

Дефиниција 2.2. *Случајни процес $\{N_t,\ t \geq 0\}$ се назива Пуасонов процес ако је:*

1. $N_0 = 0$ *с.с;*
2. *Случајни процес $\{N_t,\ t \geq 0\}$ има независне прираштаје;*
3. *Постоји неопадајућа функција $\mu : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, која је непрекидна с десне стране, $\mu(0) = 0$ и таква да за произвољне $0 < s < t$ случајна величина $N_t - N_s$ има $\mathcal{P}(\mu(t) - \mu(s))$ расподелу;*
4. *Са вероватноћом 1 трајекторије случајног процеса $\{N(t),\ t \geq 0\}$ су непрекидне с десне стране за $t \geq 0$ и имају леву граничну вредност за $t > 0$ (càdlàg својство)*[1].

Функција μ се назива *функција средње вредности.*

Дефиниција 2.3. *Случајни процес $\{N(t),\ t \geq 0\}$ се назива хомогени Пуасонов процес ако је $\mu(t) = \lambda t$.*

[1] скраћеница француског израза *continue à droite, limites à gauche*

Константа λ из дефиниције се назива интензитет хомогеног Пуасоновог процеса. Уколико је $\lambda = 1$ кажемо да се ради о *стандардном хомогеном Пуасоновом процесу.*

Од сада ћемо овај процес звати само Пуасонов процес, претпостављајући да се ради о хомогеном Пуасоновом процесу.

Следећа теорема нам говори о томе како се за дато λ може конструисати Пуасонов процес са интензитетом λ.

Теорема 2.1. *Нека је $\{S_n,\ n \in N\}$ низ независних случајних величина са $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом и $\{T_n,\ n \in N_0\}$ низ случајних величина дефинисан са $T_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$, за $n \geq 1$ и $T_0 = 0$ и*

$$N(t) = |\{k \geq 1 : T_k \leq t\}| \quad t \geq 0.$$

Тада је $\{N(t), t \geq 0\}$ хомоген Пуасонов процес са интензитетом λ.

Доказ теореме се може наћи у [12].

Поставља се питање, да ли се услов експоненцијалне распоређености случајних величина $\{S_n\}_{n\in N}$ може мало модификовати а да процес N_t опет има особине Пуасоновог процеса. Одговор на то даје следећа теорема:

Теорема 2.2. *Нека је $N_t = |\{k \geq 1 : T_k \leq t\}| \quad t \geq 0$ где је $\{T_n,\ n \in N\}$ произвољан растући низ случајних времена за који је[2] $P\{\lim_{n\to\infty} T_n = \infty\} = 1$. Тада је $\{N_t,\ t \geq 0\}$ Пуасонов процес ако и само ако је процес бројања са стационарним и независним прираштајима.*

Доказ теореме се може наћи у [3].

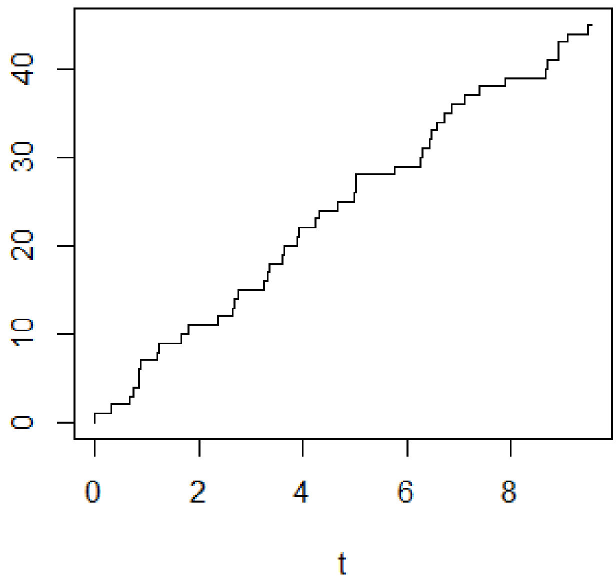
У раду ће нам бити потребна још једна карактеризација Пуасоновог процеса.

Теорема 2.3. *Случајни процес $\{N_t,\ t \geq 0\}$ је Пуасонов процес ако и само ако је процес са независним и стационарним прираштајима, $N_0 = 0$ и $P\{N_h > 1\} = o(h),\ \ h \to 0$.*

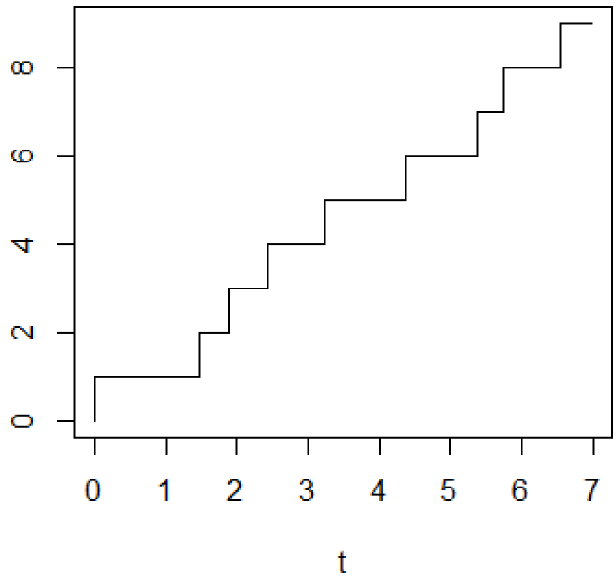
Лако се може показати да из последњег својства следи да је $P\{N_h = 1\} = \lambda h + o(h)$ и $P\{N_h = 0\} = 1 - \lambda h + o(h)$ кад $h \to 0$.

[2] Случајни процес $\{N_t,\ t \geq 0\}$ са овим особинама се назива процесом бројања

Пуасонов процес са параметром $\lambda = 5$



Пуасонов процес са параметром $\lambda = 1$



2.1.1 О односу нехомогеног и хомогеног Пуасоновог процеса

Теорема коју ћемо навести нам говори о односу хомогеног и нехомогеног Пуасоновог процеса.

Теорема 2.4. *Нека је μ функција средње вредности Пуасоновог процеса $\{N_t,\ t \geq 0\}$, и $\{\tilde{N}_t,\ t \geq\}$ стандардни хомоген Пуасонов процес. Тада важи:*

1. *Случајни процес $\{\tilde{N}_{\mu(t)},\ t \geq\}$ је Пуасонов процес са интензитетом λ.*
2. *Ако је μ растућа и непрекидна функција онда је $\{N_{\mu^{-1}(t)},\ t \geq 0\}$ стандардни хомоген Пуасонов процес.*

Доказ теореме се може наћи у [12].
Захваљујући овој теореми довољно је сва тврђења показати за хомоген Пуасонов процес.

2.1.2 Пуасонова случајна мера

Дефинисали смо Пуасонов процес као процес бројања. Тада је са

$$M(\omega, A) = |n \geq 1, T_n(\omega) \in A|$$

дефинисана мера на R^+.

$M(\omega, \cdot)$ узима вредности из Z^+ и очигледно је $M(\omega, A) < \infty$ за сваки ограничен мерљив подскуп A.

Приметимо да је $M(\omega, A)$ случајна врличина. Зато се овако дефинисана мера назива *Пуасоновом случајном мером.* Интензитет Пуасоновог процеса λ одређује очекивану вредност поменуте промењиве, односно

$$E(M(\cdot, A)) = \lambda|A|$$

где је $|A|$ Лебегова мера скупа A.
Пуасонов процес се сада може представити у облику $N_t(\omega) = \int_{[0,t]} M(\omega, ds)$.

Пуасонова случајна мера M наслеђује својства Пуасоновог процеса :

- $M([a, b])$ има $\mathcal{P}(\lambda(b - a))$ расподелу,
- за сваки Борелов скуп A, $M(A)$ има $\mathcal{P}(\lambda|A|)$ расподелу,
- за дискјунктне интервале $[a, b]$ и $[c, d]$, случајне промењиве $M([a, b])$ и $M([c, d])$ су независне случајне промењиве.

2.1.3 Центрирани (компензовани) Пуасонов процес

Дефиниција 2.4. *Нека је* $\{N_t,\ t \geq 0\}$ *Пуасонов процес. Тада се случајни процес* $\{\tilde{N}_t,\ t \geq 0\}$*, дефинисан са*

$$\tilde{N}_t = N_t - \lambda t$$

назива центрирани Пуасонов процес.

Приметимо да је $E(\tilde{N}_t) = 0$. Отуда и води порекло назива процеса.
За разлику од Пуасоновог процеса не узима целобројне вредности.

Уколико посматрамо процес $\frac{\tilde{N}_t}{\lambda}$ можемо уочити да тако конструисан процес има исто математичко очекивање и дисперзију као Брауново кретање, о коме ће бити више речи касније. То није случајно. Наиме, може се показати да је $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \frac{\tilde{N}_t}{\lambda} \stackrel{d}{=} B_t$ где је $\{B_t, t \geq 0\}$ стандардно Брауново кретање [6].

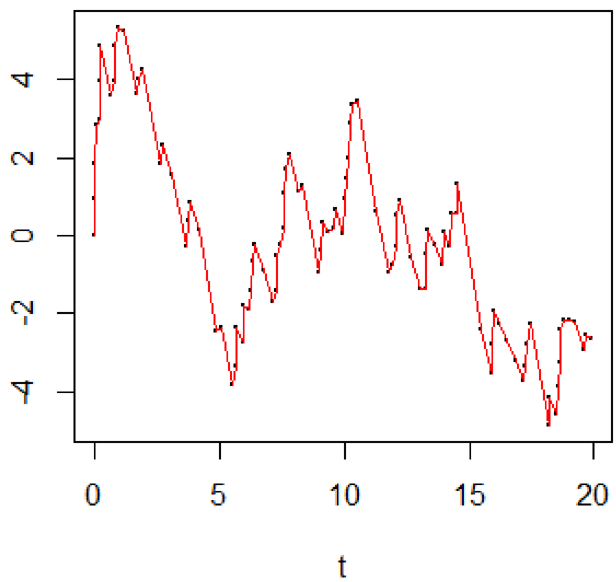
Још једно лепо својство центрираног Пуасонов процеса је и мартингалско својство.

Случајна мера $\tilde{M}$ индукована овим процесом се може дефинисати са

$$\tilde{M}(w, A) = M(w, A) - \lambda|A|.$$

Битно својство овако дефинисане мере је то што није увек позитивна.

Центрирани Пуасонов процес са параметром $\lambda = 5$



2.2 Сложени Пуасонов процес

Дефиниција 2.5. *Нека је Y_n, $n \in N$ низ независних и једнако расподељених случајних величина са функцијом расподеле F и $\{N_t,\ t \geq 0\}$ Пуасонов процес са интензитетом λ и $X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_t$. Тада се случајан процес $\{X_t,\ t \geq 0\}$ назива сложени Пуасонов процес са интензитетом λ.*

Приметимо да , ако је $Y_i = 1$, за свако $i \in N$, $\{X_t,\ t \geq 0\}$ је Пуасонов процес.

Занимљиво је да је сложени Пуасонов процес једини Левијев процес са део-по-део константним трајекторијама. Ово својство ћемо сада доказати.

Теорема 2.5. *Случајни процес $\{X_t,\ t \geq 0\}$ је сложен Пуасонов процес, ако и само ако је Левијев и трајекторије процеса су део-по-део константне функције.*

Скица доказа [3]:
$\Leftarrow$:

Прво ћемо конструисати процес $N = \{N_t,\ t \geq 0\}$ на следећи начин:

$$N_0 = 0,\ \ N_t = |0 < s < t : X_{s-} \neq X_s| \ \ \text{број скокова процеса } X \text{ до тренутка } t.$$

Показаћемо да је N_t Пуасонов процес.

- X_t је део-по-део непрекидна функција па је број скокова процеса у коначном интервалу коначан.
- Нека је $h < t$. Тада је $N_t - N_h = |0 < s < t : X_{s-} \neq X_s| - |0 < s < h : X_{s-} \neq X_s|$ $= |h < s < t : X_{s-} - X_{h-} \neq X_s - X_h|$. Одавде закључујемо да $N_t - N_h$ зависи само од $X_s - X_h$ за $h \leq s \leq t$, па је независност и стационарност прираштаја последица истих особина Левијевог процеса X_t.

- Формираћемо низ случајних величина $\{Y_n\}_{n \in N}$ чији су елементи величине скокова посматраног процеса $\{X_t,\ t \geq 0\}$, о дносно $Y_n = X_{S_n} - X_{S_{n-}}$ где је $S_n = \inf\{t :\ N_t \geq n\}$. Показаћемо да се ради о низу независних и једнако расподељених случајних величина.
  Уведимо следеће ознаке:

$$A_1 \in \sigma(X_s) \quad B_1 \in \sigma(N_r,\ r \leq s), \quad P(B_1) > 0$$

$$A_2 \in \sigma(X_t - X_s) \quad B_2 \in \sigma(N_r - N_s,\ r \leq s) \quad P(B_2) > 0.$$

На основу особина Левијевих процеса закључујемо да су A_1 и A_2 независни догађаји, а на основу претходно показаног, да су B_1 и B_2 су независни догађаји. Јасно је и да A_1 и B_1 не зависе од B_2, као и да A_2 и B_2 не зависе од B_1.

$$P\{A_1A_2|B_1B_2\} = \frac{P\{A_1B_1A_2B_2\}}{P\{B_1B_2\}} = \frac{P\{A_1B_1\}P\{A_2B_2\}}{P\{B_1B_2\}}$$

$$= \frac{P\{A_1B_1B_2\}P\{A_2B_2B_1\}}{P\{B_1\}^2P\{B_2\}^2} = P\{A_1|B_1B_2\}P\{A_2|B_1B_2\}$$

Узимањем специјалних скупова $B_1 = \{N_s = 1\}$ и $B_2 = \{N_t - N_s = 1\}$ добијамо независност Y_1 и Y_2. Слично се показује независност више од два прираштаја.

Да бисмо показали да су случајне величине Y_i једнако расподељене, приметимо да случајни процес (X_t, N_t) има стационарне прираштаје. Нека је f произвољна ограничена Борелова функција. Тада је за $0 < h < s$ и $n \in N_0$

$$E(f(X_h)|N_h = 1, N_s - N_h = n) = E(f(X_{s+h} - X_s)|N_{s+h} - N_s = 1, N_s - N_h = n)$$

па за свако $n \geq 0$, Y_1 и Y_{n+2} имају исту расподелу.

$\Rightarrow$:

- Путање су очигледно део-по-део константне јер Пуасонов процес $\{N_t,\ t \geq 0\}$ има пребројиво много скокова, а процес $\{X_t,\ t \geq 0\}$ је константан у временским интервалима између тренутака скокова.

- Независност прираштаја:
  Показујемо да су за $s < t$ случајне величине X_s и $X_t - X_s$ независне. Индукцијом се доказ може уопштити на доказивање независности произвољних n дисјунктних прираштаја.

  Како је $X_s = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N_s} Y_k, & \text{за } N_s > 0; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$

  као и

  $$X_t - X_s = \begin{cases} \sum_{k=N_s+1}^{N_t} Y_i, & \text{за } N_t - N_s > 0; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

  важи:

  $$P\{X_s \leq x_1,\ X_t - X_s \leq x_2\}$$

$$= \sum_{k\in N_0}\sum_{j\in N_0} P\{X_s \le x_1,\ X_t - X_s \le x_2 | N_s = k, N_t - N_s = j\} P\{N_s = k, N_t - N_s = j\}$$

$$= \sum_{k\in N_0}\sum_{j\in N_0} P\{X_s \le x_1 | N_s = k\} P\{X_t - X_s \le x_2 | N_t - N_s = j\} P\{N_s = k\} P\{N_t - N_s = j\} \quad (*)$$

$$= \sum_{k\in N_0} P\{X_s \le x_1 | N_s = k\} P\{N_s = k\} \sum_{j\in N_0} P\{X_t - X_s \le x_2 | N_t - N_s = j\} P\{N_t - N_s = j\}$$

$$= P\{X_s \le x_1\} P\{X_t - X_s \le x_2\}.$$

$(*)$ важи јер је $\{Y_n,\ n \in N\}$ низ независних случајних величина и Пуасонов процес има независне прираштаје.

- Стационарност прираштаја је последица стационарности Пуасоновог процеса и претпоставке да је $\{Y_n\}$ низ независних и једнако расподељених случајних величина.

- Стохастичка непрекидност процеса следи из

$$P\{|X_{t+s} - X_t| > \epsilon\} \le P\{|N_{t+s} - N_t| > 0\} = 1 - e^{-\lambda|s|} \underset{s\to 0}{\to} 0.$$

2.2.1 Случајна мера индукована сложеним Пуасоновим процесом

Аналогно случајној мери индукованој Пуасоновим процесом, може се дефинисати мера J_X индукована сложеним Пуасоновим процесом $\{X_t, t \ge 0\}$ дефинисана са

$$J_X(B) = \big|(X_t - X_{t-}, t) \in B\big|$$

где је B мерљив подскуп од $[0,\infty) \times R$. Дакле $J_x(A \times [a,b])$, $A \subseteq R$, представља број скокова у интервалу $[a,b]$ величине која припада скупу A.

2.3 Левијева мера

Дефиниција 2.6. *Мера μ индукована Левијевим процесом $\{X_t, t \ge 0\}$ дефинисана са*

$$\mu(A) = E|\{t \in [0,1] : \Delta X_t \ne 0,\ \Delta X_t \in A\}|, \quad A \in \mathcal{B}(R)$$

се назива Левијева мера процеса X.

Левијева мера се може дефинисати и на следећи начин.

Дефиниција 2.7. *Позитивна мера μ дефинисана на R (или $R\backslash\{0\}$) за коју важи:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 \wedge |x|^2)\mu(dx) < \infty$$

односно да је $\int_{|x|<1} |x|^2\mu(dx) < \infty$ *и* $\int_{|x|\geq 1} \mu(dx) < \infty$*, назива се Левијева мера.*

Ако је $\mu(dx) = g(x)dx$ *онда се функција* $g(x)$ *назива Левијева густина.*

Приметимо да Левијева густина има иста својства као функција густине неке случајне величине, осим услова интеграбилности.

Левијева мера неког Бореловог скупа A се може интерпретирати као очекиван број скокова процеса $\{X_t,\ t \geq 0\}$ величине која припада скупу A до тренутка $t = 1$. Ова интерпретација је у директној вези са мотивацијом за настајање ових процеса, са којом ћемо завршити овај теоријски увод.

Следеће тврђење нам даје везу између случајне мере индуковане сложеним Пуасоновим процесом и његове Левијеве мере.

Теорема 2.6. *Нека је* $\{X_t\}$ *сложени Пуасунов процес са интезитетом* λ*. Мера* J_X *је тада Пуасоснова случајна мера са интензитетом* $\nu(dx \times dt) = \mu(dx)dt = \lambda f(dx)dt$*.*

Узимајући у обзир тврђење и чињеницу да је број скокова сложеног Пуасоновог процеса у сваком коначном интервалу коначан, закључујемо да се сваки сложени Пуасонов процес може написати у облику

$$X_t = \sum_{s\in[0,t]} \Delta X_s = \int_{[0,t]\times R} x J_X(ds \times dx)$$

где је J_X Пуасонова случајна мера са интезитетом μdt.

Поставља се питање, да ли прозивољан Левијев процес има овакву или сличну репрезентацију. Одговор на то даје Леви-Итова теорема о декомпозицији о којој ће бити више речи касније.

2.4 Центрирани (компензовани) сложени Пуасонов процес

Дефиниција 2.8. *Нека је* Y_n, $n \in N$ *низ независних и једнако расподељених случајних величина са функцијом расподеле* F *и* $\{N_t,\ t \geq 0\}$ *Пуасонов процес са интензитетом* λ *и* $X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k - t\lambda EY_1$. *Тада се случајан процес* $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *назива компензовани сложени Пуасонов процес са интензитетом* λ.

Ова модификација сложеног Пуасоновог процеса је мартингал.

2.5 Брауново кретање

Дефиниција 2.9. *Случајни процес $\{W_t,\ t \geq 0\}$ назива се Брауновим кретањем , или Винеров процес* [3] *уколико за неку позитивну константу σ важи:*

1. $W_0 = 0$ *с.с;*
2. *За свако $s > 0$ и $t \geq 0$ случајна променљива $W_{t+s} - W_t$ има $\mathcal{N}(0, s\sigma^2)$ расподелу;*
3. *Случајни процес има независне прираштаје;*
4. *Случајни процес има непрекидне трајекторије са вероватноћом 1.*

Константа σ^2 се назива варијансом Брауновог кретања. Веома често се σ назива и параметар дифузије.
Уколико је $\sigma = 1$ процес се назива *стандардним Брауновим кретањем (СБК)*. Једноставно се показује да ако је $\{W_t,\ t \geq 0\}$ СБК онда је $\{aW_t,\ t \geq 0\}$ Брауново кретање са варијансом a^2, па је довољно навести и доказати тврђења за *СБК*.
Приметимо да Брануново кретање задовољава сва три услова из дефиниције Левијевих процеса.

Ако се последњи услов из дефиниције изостави може се показати да за сваки случајни процес који задовољава прва три услова постоји непрекидна модификација тог процеса за који је испуњен и услов 4 [2].

Теорема 2.7. *Нека је $\{W_t,\ t \geq 0\}$ стандардно Брауново кретање. Тада важи:*

1. $\{W_{t+a} - W_a,\ t \geq 0\}$ *је* СБК, *за свако $a > 0$;*
2. $\left\{\frac{1}{\lambda} W_{\lambda^2 t},\ t \geq 0\right\}$ *је* СБК, *за свако $\lambda \neq 0$;*
3. *Случајни процеси $\{W_t,\ t \geq 0\}$ и $\{tW_{1/t},\ t \geq 0\}$ имају исту расподелу вероватноћа.*

Прва два тврђења се показују непосредним проверавањем услова из дефиниције *СБК*.

Лако се показује да је $W_t \overset{D}{=} tW_{1/t}$ за $t > 0$. Међутим, случај $t = 0$ захтева посебну пажњу. Доказаћемо га у наредном поглављу након што прикажемо неке од особина времена достизања датог нивоа Брауновог кретања.

[3] $N.Wiener$ (1894 – 1964) амерички математичар

Теорема 2.8. *Скоро све трајекторије стандардног Брауновог кретања су нигде диференцијабилне , односно важи:*

$$P\biggl((\forall t>0)\ \overline{\lim_{h\to 0}}\left|\frac{W_{t+h}-W_t}{h}\right| = \infty\biggr) = 1.$$

Ово тврђење су формулисали и доказали Пели, Винер и Зигмунд[4] 1933. године. Међутим, знатно елегантнији доказ дали су Дворецки, Ердеш и Какутани[5]. Тај доказ ћемо у кратким цртама презентовати.

Доказ:

На основу претходне теореме видимо да је довољно доказати тврђење за случајни процес $\{W_t\ t\in[0,1)\}$. Ради једноставнијег записа, у доказу теореме користимо нотацију $W_t =: W(t)$.

Претпоставимо да је за неко $\omega\in\Omega$ трајекторија $W_t(\omega)$ диференцијабилна у некој тачки $s\in(0,1)$. Тада је та трајекторија диференцијабилна у s са десне стране. Тада важи:

$$(\exists\epsilon>0)(\exists l\in N)\ 0\le t-s<\epsilon \Rightarrow \bigl|W_t(\omega)-W_s(\omega)\bigr| < l(t-s).$$

Даље, нека је $i=[ns]+1$, где је n довољно велики природан број да би се бројеви $\frac{i+1}{n}$, $\frac{i+2}{n}$ и $\frac{i+3}{n}$ налазили у интервалу $[s,t]$.
Приметимо и да је $\frac{i-1}{n}\le s<\frac{i}{n}$.
Тада је за $j\in\{i+1,i+2,i+3\}$ испуњено:

$$\bigl|W_{\frac{j}{n}}(w)-W_{\frac{j-1}{n}}(w)\bigr| \le \bigl|W_{\frac{j}{n}}(w)-W_s(w)\bigr| + \bigl|W_s(w)-W_{\frac{j-1}{n}}(w)\bigr| \le \frac{4l}{n}+\frac{3l}{n}=\frac{7l}{n}\quad(*)$$

Означимо са $A^{i,j}_{l,n}$ скуп свих $\omega\in\Omega$ за које важи $(*)$. Очигледно је да је $A^{i,j}_{l,n}\in\mathcal{F}$.

Нека је

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=i+1}^{i+3}A^{i,j}_{l,n}.$$

Тада је A догађај из $\mathcal{F}$, догађај да постоји природан број l такав да за све довољно велике природне бројеве n постоје бројеви $i+1, i+2, i+3$ тако да важи $(*)$.
Приметимо да A садржи све догађеје ω за које је трајекторија $W_t(\omega)$ диференцијабилна бар у једној тачки, па је довољно показати да је $P\bigl(A\bigr)=0$.

[4]R.Paley (1907-1933) енглески математичар, A.Zigmund (1900-1902) пољски математичар

[5]A.Dvoretzky;(1916-2008) израелски математичар, P.Erdos (1913-1996), мађарски математичар, S. Kakutani, јапански математичар

Показаћемо да је

$$P\Big\{\bigcap_{n=m}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=i+1}^{i+3}A_{l,n}^{i,j}\Big\}=0$$

Да бисмо оценили поменуту вероватноћу искористићемо следећу оцену:

$$P\{|W_1|\le x\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\le\frac{2x}{\sqrt{2\pi}}$$

Сада је

$$P\Big\{\bigcap_{n=m}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=i+1}^{i+3}A_{l,n}^{i,j}\Big\}\le\varliminf_{n\to\infty}P\Big\{\bigcup_{i=1}^{n}\bigcap_{j=i+1}^{i+3}A_{l,n}^{i,j}\Big\}\le\varliminf_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}P\Big\{\bigcap_{j=i+1}^{i+3}A_{l,n}^{i,j}\Big\}$$

$$\le\varliminf_{n\to\infty}nP\bigg\{\bigg|W\Big(\frac{1}{n}\Big)\bigg|\le\frac{7l}{n}\bigg\}^3\le\lim_{n\to\infty}nP\Big\{|W_1|\le\frac{7l}{\sqrt{n}}\Big\}^3\le\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{14l}{n\sqrt{2\pi}}\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{(14l)^3}{(\sqrt{2\pi})^3n^2}$$

□

Трајекторије Брауновог кретања имају још важних својстава.

Теорема 2.9. *Скоро све трајекторије Брауновог кретања имају неограничену варијацију на сваком коначном интервалу.*

Ова теорема је директна последица претходне јер је функција ограничене варијације скоро свуда диференцијабилна (јер се може представити као збир једне растуће и једне опадајуће функције). Међутим, ипак постоји крива са својством да скоро све трајекторије не достижу неки виши ниво бесконачно много пута. О томе говори следећа теорема коју је формулисао и доказао Хинчин[6] 1933. године.

Теорема 2.10. (Закон итерираног логаритма)
Нека је $\{W_t,\ t\ge 0\}$ Винеров процес. Тада важи:

$$P\Big\{\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1\Big\}=1\ \ i\ \ P\Big\{\varlimsup_{t\to-\infty}\frac{W_t}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=-1\Big\}=1.$$

Доказ се може наћи у [15].

Напоменимо још да конструкција Брауновог кретања није једноставна и да се више њој може наћи у [15].

[6] А.Хинчин(1894-1959) руски математичар

2.6 Левијеви процеси и бесконачно дељиве расподеле

Бесконачно дељиве расподеле у директној су вези са Левијевим процесима. У овом поглављу видећемо и како.

Дефиниција 2.10. *Расподела случајне величине X се назива бесконачно дељивом, ако за свако $n \geq 1$ постоје независне, једнако распоређене случајне величине $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, ..., X_n^{(n)}$ тако да је*

$$X \stackrel{d}{=} X_1^{(n)} + X_2^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}.$$

Бесконачно дељиве расподеле можемо дефинисати и коришћењем карактеристичних функција.

Дефиниција 2.11. *Расподела случајне величине X, са карактеристичном функцијом $\phi_X(t)$, се назива бесконачно дељивом, ако за свако $n \geq 1$ постоји случајна величина $X^{(n)}(t)$, са карактеристичном функцијом $\phi_{X^{(n)}}$ тако да је за свако $t \in R$*

$$\phi_X(t) = (\phi_{X^{(n)}}(t))^n.$$

Нека је $\{X_t,\ t \geq 0\}$ Левијев процес. Ако X_t представимо у облику

$$X_t = (X_{t/n} - X_0) + (X_{2t/n} - X_{t/n}) + \cdots + (X_{nt/n} - X_{(n-1)t/n})$$

и присетимо се да су прираштаји независни и са истом расподелом, долазимо до закључка да је за свако $t \geq 0$ функција расподеле случајне променљиве X_t бесконачно дељива.

Ово својство процеса је веома значајно у пракси, посебно за симулацију процеса.

Примера ради, показаћемо да карактеристичне функције описаних процеса, задовољавају услов дефиниције 2.11.

1. ПУАСОНОВ ПРОЦЕС $\{N_t,\ t \in R\}$ са интензитетом λ:

$$\phi_t(u) := \phi_{N_t}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} P\{N_t = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = e^{-\lambda t(1-e^{it})} = \left(e^{-\frac{\lambda}{n} t(1-e^{it})}\right)^n,$$

2. СЛОЖЕНИ ПУАСОНОВ ПРОЦЕС $\{X_t,\ t \geq 0\}$ са интензитетомн λ:

$$\phi_t(u) := \phi_{X_t}(u) = E\big(e^{iuX_t}\big) = E\Bigg(e^{iu\sum_{k=0}^{N_t} Y_k}\Bigg) =$$

$$= E\Big(E\big(e^{iu\sum_{k=0}^{N_t}Y_k}\big|N_t=n\big)\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} E\Big(e^{iu\sum_{k=0}^{n}Y_k}\Big)\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(\phi_{Y_1}(u))^n\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} = e^{\lambda t(\phi_{Y_1}(u)-1)} = \big(e^{\frac{\lambda}{n}t(\phi_{Y_1}(u)-1)}\big)^n,$$

3. КОМПЕНЗОВАНИ ПУАСОНОВ ПРОЦЕС $\{X_t,\ t\geq 0\}$ са интензитетомн λ:

$$\phi_t(u) := \phi_{X_t}(u) = e^{\lambda t(\phi_{Y_1}(u)-1)}e^{-itu\lambda EY} = e^{\lambda t(\phi_{Y_1}(u)-1-iuEY_1)} = \big(e^{\lambda\frac{t}{n}(\phi_{Y_1}(u)-1-iuEY_1)}\big)^n,$$

4. БРАУНОВО КРЕТАЊЕ $\{W_t,\ t\geq 0\}$:

$$\phi_t(u) := \phi_{W_t}(u) = E\big(e^{iuW_t}\big) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}e^{-\frac{x^2}{2t\sigma^2}}dx = e^{-\frac{\sigma^2 tu^2}{2}} = \big(e^{-\frac{\sigma^2u^2}{2}\frac{t}{n}}\big)^n$$

Леви-Хинчинова (*Lévy – Khintchine*) теорема говори а карактеризацији бесконачно дељивих расподела, а самим тим и о карактеризацији Левијевих процеса.

Теорема 2.11. *Функција ϕ је карактеристична функција случајне променљиве са бесконачно дељивом раподелом, акко је облика*

$$\phi(u) = e^{-\psi(u)} \quad u\in R,$$

где је

$$\psi(u) = imu + \frac{\sigma^2u^2}{2} + \int(1-e^{iux}+iuxI_{\{|x|<1\}})\mu(dx)$$

за неке реалне бројеве m, $\sigma\geq 0$ и Левијеву меру μ.

Параметар m се назива параметар померајa, а σ^2 коефицијент (параметар) дифузије (или Нормална или Гаусова компонента). Функција ψ се назива карактеристични експонент.

Карактеристичне функције Левијевих процеса имају слично својство. Наиме, због стационарности и независности приараштаја, оне представљају решење функционалне једначине $\phi_{t+s}(u) = \phi_t(u)\phi_s(u)$. Како стохастичка непрекидност повлачи непрекидност с десна карактеристичне функције, познато је да је решење једначине функција $\phi_t(u) = e^{-t\psi(u)}$, где је $\psi(u)$ нека функција, која се назива (Левијев) карактеристични експонент.

За сваку тројку[7] (m,σ^2,μ) се може конструисати Левијев процес, такав да је његов

[7]карактеристична тројка Левијевог процеса

карактеристични експонент баш са тим параметрима (у Леви-Хинчиновој теореми). Зато је неизоставни део проучавања Левијевих процеса баш проучавање класе бесконачно дељивих расподела.

Теорема 2.12. *За свако $m \in R$, $\sigma \geq 0$,и Левијеву меру μ*

$$\psi(u) = imu + \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int (1 - e^{iux} + iuxI_{\{|x|<1\}})\mu(dx)$$

може се конструисати Левијев процес са карактеристичном функцијом $\phi(u) = e^{-t\psi(u)}$. И више,

$$X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)}$$

са карактеристичним експонентом $\psi = \psi^{(1)} + \psi^{(2)} + \psi^{(3)}$ где су $X^{(i)}$ независни Левијеви процеси са карактеристичним експонентима $\psi^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$; $X^{(1)}$ је Гаусов, $X^{(2)}$ сложени Пуасонов процес са скоковима величине веће или једнаке 1, а $X^{(3)}$ центрирани сложени Пуасонов процес са скоковима величине мање од 1.

$X^{(1)}$ је у ствари Брауново кретање са померајем, односно $mt+\sigma B_t$ јер је сваки случајни процес непрекидни Гаусов Левијев процес ако и само ако је Брауново кретање са померајем [3],[1]. Дакле, $X^{(1)}$ представља непрекидну компоненту полазног процеса. Преостале две компоненте представљају скокове процеса.

Случајни процес $X^{(2)}$ се може представити у облику

$$X^{(2)} = \sum_{s\in[0,t]} \Delta X_s I_{\{|\Delta X_s|>1\}}.$$

С обзиром на величину скокова и услов $\int_{|x|>1} \mu(dx) < \infty$, у суми фигурише коначан број сабирака, односно трајекторије процеса су део-по-део константне па се ради о сложеном Пуасоновом процесу.

Означимо са $X_t^\epsilon = \sum_{s\in[0,t]} \Delta X_s I_{\{1\geq|\Delta X_s|>\epsilon\}}$. Овако дефинисан случајни процес је поново сложени Пусонов процес. Међутим, случајни процес $\lim\limits_{\epsilon\to 0} X_t^\epsilon$ не би био коректно дефинисан јер се може догодити да посматрани процес $\{X_t,\ t \geq 0\}$ има бесконачно малих скокова до тренутка t. Посматрајмо зато случајни процес $\{\tilde{X}_t^\epsilon,\ \geq 0\}$ дефинисан са

$$\tilde{X}_t^\epsilon = X_t^\epsilon - t\int_\epsilon^1 x\mu(dx).$$

Показује се да је $X_t^{(3)} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \tilde{X}_t^\epsilon$.

Како се свака функција може апроксимирати део-по-део константним функцијама, за очекивати је и аналогно својство Левијевих процеса, тј. да се сваки такав процес може апроксимирати сложеним Пуасоновим процесом. Ова идеја се користи у доказу Леви-Итове теореме. Из приложеног видимо зашто је добро познавање особина сложеног Пуасоновог процеса важно за проучавање Левијевих процеса.

Ова теорема позната је под називом Леви-Итова ($Lévy - Itô$) теорема о декомпозицији. Доказ се може наћи у [3].

На овом месту напоменимо да је сложени Пуасонов једини Левијев процес са део-по-део константним трајекторијама, као и да је Брауново кретање једини Левијев процес са непрекидним трајекторијама.

2.7 Активност Левијевих процеса

Након што смо увели појам Левијеве мере и карактеристичне тројке за Левијев процес, можемо дати једну од могућих класификација. У зависности од особина Левијеве мере μ разликујемо 3 класе Левијевих процеса. Нека је $\{X_t,\ t \geq 0\}$ Левијев процес и (m, σ^2, μ) карактеристична тројка тог случајног процеса.

1. Ако је $\mu = 0$ ради се случајном процесу који нема скокове, дакле о Брауновом кретању.

2. Ако је $\mu(R) < \infty$ кажемо да је $\{X_t\ t \geq 0\}$ Левијев процес са коначном активношћу. Дакле, ради се о случајном процесу који има коначан очекиван број и малих и великих скокова, у јединици времена.

3. Ако је $\mu(R) = \infty$ ради се о Левијевом процесу са бесконачном активношћу. Овај услов се, због особина Левијеве мере, може написати у облику
$$\int_{|x|<1} \mu(dx) = \infty \quad \int_{|x|\geq 1} \mu(dx) < \infty.$$
На основу овога закључујемо да процес има бесконачан очекиван број малих скокова у јединици времена, као и коначан очекиван број великих скокова у јединици времена.

2.8 Још неке важне класе Левијевих процеса

У овом поглављу навешћемо још неке класе Левијевих процеса и описати њихова најважнија својства.

2.8.1 Стабилни процеси

Већ смо споменули да карактеристике расподеле прираштаја у потпуности одређују особине Левијевих процеса. Уколико се ради о стабилним расподелама Левијеве процесе називамо стабилним Левијевим процесима.

Дефиниција 2.12. *Случајна величина $X \in R$ има стабилну расподелу ако за свако $a > 0$ постоје константе $b(a)$ и $c(a)$ за које је испуњено*
$$b(a) > 0,\ c(a) \in R \quad \phi_X(s)^a = \phi_X(sb(a))e^{ic(a)s},\ \text{за свако } s \in R.$$
Уколико је
$$\phi_X(s)^a = \phi_X(sb(a)) \ \text{ за свако } s \in R.$$
говоримо о случајним величинама са строго стабилним расподелама.

Може се показати да постоји $\alpha \in (0,2]$ за који је $b(a) = a^{\frac{1}{\alpha}}$. Константа α се назива индекс стабилности расподеле са горе дефинисаним својством, а за расподелу се каже да је α-стабилна. Најпознатији представници ове класе расподела су:

- Нормална $N(m, \sigma^2)$ са индексом стабилности $\alpha = 2$;
- Кошијева расподела са индексом стабилности $\alpha = 1$ и функцијом густине $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sigma}{\sigma^2+(x-m)^2}, \;\; x \in R$;
- Левијева расподела са индексом стабилности $\alpha = \frac{1}{2}$ и функцијом густине $f(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x-m)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\sigma}{2(x-m)}}, \;\; x \in (m, \infty)$.

Дефиниција 2.13. *Левијев процес* $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *за који је испуњено да је* X_1 *(строго) стабилна случајна величина назива се (строго) стабилан Левијев процес.*

Из дефиниције следи да су Кошијев процес и Брауново кретање представници ове класе Левијевих процеса.

Следећа теорема нам даје потребне и довољне услове да би Левијев процес био α-стабилан.

Теорема 2.13. *Нека је* $\{X_t,\ \ t \geq 0\}$ *нетривијалан Левијев процес са карактеристичном тројком* (m, σ^2, μ). *Тада је* X α*-стабилан ако и само ако је испуњен неки од следећа два услова*

1. $\alpha = 2$ *и* $\mu = 0$ *(Брауново кретање);*
2. $\alpha \in (0,2),\ \sigma^2 = 0$ *и* $\mu(dx) = c_1 \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} I_{\{x<0\}} dx + c_2 \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} I_{\{x>0\}} dx, \;\; x \in R$, *за неке позитивне константе* c_1 *и* c_2 *за које је* $c_1 + c_2 > 0$.

Доказ се може наћи у [14].

Последица наведене теореме је да сви α-стабилни Левијеви процеси, $\alpha \neq 2$, имају "бесконачну активност", односно број великих скокова у неком временском интервалу је коначан, а број малих скокова бесконачан. Ово је последица тога што је $\int_{-\infty}^{\infty} \mu(dx) = \infty$.

Приметимо још да како се α приближава 0, тако активност процеса у околини нуле опада, репови Левијеве мере постају дебљи, односно повећава се број великих скокова. С друге стране, уколико се α приближава 2, повећава се број малих скокова, па репови Левијеве мере постају лакши.

Уколико је $c_1 = c_2$ ради се о симетричним Левијевим мерама.

2.8.2 Субординатори

Дефиниција 2.14. *Субординатор* $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *је Левијев процес чије су трајекторије неопадајуће функције.*

Ова класа Левијевих процеса је веома важна за конструкцију нових од постојећих Левијевих процеса.

Теорема 2.14. *Нека је* $\{X_t.\ t \geq 0\}$ *Левијев процес на* R. *Следећи услови су еквивалентни:*

1. $X_t \geq 0$ *с. с, за свако* $t > 0$;
2. $X_t \geq 0$ *с. с, за неко* $t > 0$;
3. *Трајекторије процеса су с.с неопадајуће функције.*
4. *За карактеристичну тројку* (m, σ^2, μ) *важи:*

$$\sigma^2 = 0, \quad \nu(-\infty, 0] = 0$$
$$\int_0^\infty (1 \wedge x)\mu(dx) < \infty, \;\; m - \int_0^\infty (1 \wedge x)\mu(dx) \geq 0.$$

На основу ове теореме закључујемо да су субординатори Левијеви процеси који немају негативне скокове.
Доказ се може наћи у [3].

Један од примера субординатора је и Гама процес. То је Левијев процес чији прираштаји имају γ -расподелу, односно $X_t \sim \gamma(\alpha t, \lambda)$. Може се показати да је карктеристична функција Гама процеса $\{X_t,\ t \geq 0\}$

$$\phi_{X_t}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - is}\right)^{\alpha t},$$

као и да је Левијева мера процеса дата са

$$\mu(dx) = \frac{\alpha e^{-\lambda x}}{x} I_{\{x>0\}} dx.$$

У доказу овог тврђења користи се следећа лема.

Лема 2.1. *a) Нека је* f *диференцијабилна функција и* $f' > 0$ *и* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. *Тада за* $b > a > 0$ *важи*

$$\int_0^\infty \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = f(0) log\left(\frac{b}{a}\right)$$

b),

$$\int_0^\infty (1 - e^{zx}) \frac{\alpha e^{-\lambda x}}{x} dx = \alpha \ln(1 - z\lambda), \quad Z \in \mathbb{C}.$$

Веома важан пример субординатора добија се коришћењем следеће теореме.

Теорема 2.15. *Нека је* $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *Левијев процес дефинисан на* $\mathbb{R}$ *и нека је* $f : R \to [0, \infty)$ *позитивна функција таква да је* $f(x) = O(x^2)$ *кад* $x \to 0$. *Тада је случајни процес* $\{S_t,\ t \geq 0\}$ *дефинисан са*

$$S_t = \sum_{s \leq t, \Delta X_s \neq 0} f(\Delta X_s)$$

субординатор.

Доказ се може наћи у [3].

Специјално, за $f(x) = x^2$ добија се да је

$$S_t = \sum_{s \leq t, \Delta X_s \neq 0} (\Delta X_s)^2$$

субординатор. Овај процес се обично обележава са $[X, X]$ и назива прекидна квадратна варијација процеса X.

2.8.3 Субординација

Веома често потребно је увођење такозваног случајног времена. Због својих особина (позитвни, растуће трајекторије и сл.) субординатори су доста погодни да се интерпретирају као случајно време. Такав поступак назива се субординација.

Теорема 2.16. *Нека је* $\{X_t,\ t \geq 0\}$ *Левијев процес са карктеристичном тројком* (m, σ^2, μ) *и карактеристичним експонентом* $\psi(s)$ *и* $\{S_t,\ t \geq 0\}$ *субординатор са карактеристичним експонентом* $l(s)$ *и карактеристичном тројком* $(0, \rho, b)$. *Тада је случајан процес* $\{Y_t,\ t \geq 0\}$ *дефинисан са*

$$Y(t, \omega) = X(S_t(t, \omega), \omega),\ \ \omega \in \Omega$$

Левијев процес са карактеристичном функцијом

$$\phi_{Y_t}(s) = e^{tl(\psi(s))}.$$

Један од познатијих субординатора је *B-Г* случајан процес[8] $\{Y_t,\ t \geq 0\}$ дефинисан на следећи начин:

$$Y_t = mS_t + \sigma B_{S_t}$$

где је S_t Гама процес, $m \in R$, $\sigma > 0$ константе, а B_t Брауново кретање. Дакле, ради се о субординираном Брауновом кретању.

[8] Variance Gamma process

2.9 Времена заустављања и оператор померања

Дефиниција 2.15. *Нека је (Ω, F, P) простор вероватноћа. Фамилија σ-подалгебри од F, $\{\mathfrak{F}_t,\ t \geq 0\}$ за коју важи:*

$$s < t \Rightarrow \mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$$

назива се филтрацијом. Уколико $\{X_t,\ t \geq 0\}$ случајни процес дефинисан на истом простору вероватноћа и $\mathfrak{F}_t = \sigma(X_t)$, кажемо да је филтрација $\{\mathfrak{F}_t,\ t \geq 0\}$ генерисана случајним процесом $\{X_t,\ t \geq 0\}$.

Дефиниција 2.16. *Нека је $\{\mathfrak{F}_t,\ t \geq 0\}$ филтрација дефинисана на простору догађаја $(\Omega, \mathcal{F})$. Случајна величина T назива се зауставно време у односу на филтрацију $\{\mathfrak{F}_t,\ t \geq 0\}$ ако догађај $\{T \leq t\}$ припада σ-алгебри $\mathfrak{F}_t$, за свако $t \geq 0$.*

Пример 2.1. *Свака ненегативна констата t је време заустављања.*

Пример 2.2. *Случајна величина $\tau_a = inf\{t \geq 0 : W_t \leq a\}$, је време заустављања у односу на филтрацију генерисану Брауновим кретањем.*

Пример 2.3. *Случајна величина $\tau_{max} = inf\{t \in [0,T] : W_t = \max\limits_{0 \leq u \leq T} W_u\}$ није време заустављања.*

Пример 2.4. *Нека је $\{N_t,\ t \geq 0\}$ Пуасонов процес и $T_n = \sum_{i=1}^{n} S_i$ низ тренутака скокова, где је $\{S_n\}_{n \in N}$ низ независних случајних величина са $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом. Случајна величина N_t није време заустављања у односу на филтрацију генерисану низом случајних величина $\{S_n,\ n \in N\}$ јер догађај $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$ зависи и од случајне величине S_{n+1}. Али зато случајна величина $N_t - 1$ јесте време заустављања у односу на поменуту филтрацију.*

Пример 2.5. *Нека су S и T времена заустављања у односу на исту филтрацију $\{\mathfrak{F}_t,\ t \geq 0\}$. Тада су и случајна величине $Z_1 = min(S,T)$, $Z_2 = max(S,T)$ и $Z_3 = S+T$ времена заустављања у односу на $\{\mathfrak{F}_t,\ t \geq 0\}$.*
За Z_1 и Z_2 је тврђење очигледно, зато ћеомо показати само за Z_3.
Због особина σ-алгебри довољно је показати да $\{Z_3 > t\} \in \mathfrak{F}_t$.

$$\{Z_3 > t\} = \{S = 0, T > t\} \cup \{T = 0, S > t\} \cup \{T > t,\ S > 0\} \cup \{0 < T < t, S + T > 0\}$$

Четврти догађај се може представити у облику

$$\{0 < T < t, S + T > 0\} = \bigcup_{r \in Q^+, r < t} \{t > T > r,\ S > t - r\}$$

одакле следи тврђење.

Дефиниција 2.17. *Нека је $\{X_t,\ t \geq 0\}$ случајни процес дефинисан на $(\Omega, \mathcal{F})$. Фамилија оператора $\{\theta_s,\ s \geq 0\}$ $\theta_s : \Omega \to \Omega$ за које важи:*

- *θ_s је $\mathcal{F}/\mathcal{F}$ мерљив,*
- *$X_{s+t}(\omega) = X_t(\theta_s(\omega))$ за свако $\omega \in \Omega$,*

назива се фамилија оператора померања.
Можемо дефинисати и случајни оператор померања θ_S , S време заустављања, на скупу $\{S(\omega) < \infty\}$ са $X_{S+t}(\omega) = X_t(\theta_S(\omega))$.

Ови оператори нам доста олакшавају рад са временима достизања нивоа чије особине проучавамо у осталим поглављима рада. Следећу теорему наводимо без доказа.

Теорема 2.17. *Нека су S и T времена заусатвљња која су коначна и $S < T$ скоро свуда и θ оператор померања. Тада је $T = S + T \circ \theta_S$. Уколико се изостави услов $S < T$ с.с, тада је $X_T \circ \theta_S = X_{S+T\circ\theta_S}$.*

Од великог значаја биће строго својство Маркова које ћемо дефинисати на два начина.

Дефиниција 2.18. *За случајни процес $\{X_t,\ t \geq 0\}$ дефинисан на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathfrak{F}_t, P)$ кажемо да је адаптиран на филтрацију $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$ ако је за свако $s \geq 0$ случајна променљива X_s мерљива у односу на σ-алгебру $\mathfrak{F}_s$.*

Дефиниција 2.19. а) *Случајни процес $\{X_t,\ t \geq 0\}$, адаптиран на филтарцију $\mathfrak{F}_t$, поседује својство Маркова ако је $s \leq t$*

$$P\{X_t \in A | \mathfrak{F}_s\} = P\{X_t \in A | X_s\}.$$

б) *Нека је S време заустављања које је скоро сигурно коначно и важе услови из првог дела дефиниције. Тада, $\{X_t,\ t \geq 0\}$ има строго својство Маркова ако је*

$$X_{t+S} - X_S \stackrel{d}{=} X_t,\ \ t \geq 0 \text{ и } X_{t+S} - X_S \text{ не зависи од } \mathfrak{F}_S \quad (*)$$

или еквивалентно

$$E(Y \circ \theta_S | \mathfrak{F}_S) = E(Y | X_S)$$

за сваку $\mathfrak{F}$- мерљиву случајну променљиву Y, где је $\mathfrak{F}$ најмања σ-алгебра која садржи $\bigcup_{t\geq 0} \mathfrak{F}_t$.

Може се дефинисати и општија дефиниција у којој је изостављен услов да је $S < \infty$ с.с., али тада се услов $(*)$ посматра само на скупу $\{S < \infty\}$.

Теорема 2.18. *Сваки Левијев процес поседује строго својство Маркова.*

Доказ ове врло важне теореме се може наћи у [1].

2.10 Левијеви процеси у свету око нас

Моделовање финансијских тржишта случајним процесима започело је 1900. год, са Башељеом [9] који је моделовао цене акција на француској берзи Брауновим кретањем. Овај модел се показао неадекватним из више разлога. На првом месту је ненегативност цена коју модел не претпоставља. Други проблем је претпоставка да скок цена не зависи од тренутне цене. То свакако није случај у пракси.
Тек 65 година касније Семјуелсон [10] је предложио да се логаритми цена акција моделирају Брауновим кретањем, тј. да за процес цена $\{S_t,\ t \geq 0\}$ је $S_t = S_0 e^{W_t}$ где је W_t Брануново кретање.
Непрекидност трајекторија, као и лаки репови расподеле прираштаја чинили су ове моделе недовољно добрим.
Тај проблем је отклоњен када је Брауново кретање W_t замењено уопштеним Левијевим процесом X_t, тј. цене разних финансијских деривата моделоване су процесом $S_t = S_0 e^{X_t}$. Овим је постигнута знатно већа флексибилност модела. Уколико су били потребни тешки репови расподела прирашатја, било је довољно да се узме нека од Левијевих мера са тешким репом. На исти начин се може решити и проблем прираштаја са асиметричним расподелама. Разни шокови на тржисту, односно велики скокови, сада су адекватно укључени у модел. Тако су настали и разни модели за одређивање цене опција, на пр. Мертонов модел[11] који претпоставља да се процес цена акција може моделовати процесом

$$S_t = S_0 e^{mt + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i},$$

где је N_t Пуасонов процес, а $\{Y_n\}$ низ независних случајних величина са $\mathcal{N}(\mu, \delta^2)$ расподелом, а цена се одређује на исти начин као и у Блек-Шоловом моделу[12].
Левијеви процеси нашли су велику примену и у актуарству. Најосновнији процес ризика дат је са

$$K_t = K_0 + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

где су Y_i независне и позитивне случајне величине које представљају величине одштета које се исплаћују клијентима у случајним тренуцима. Функција расподеле случајне величине Y_1 се бира у зависности од типа одштета које је потребно моделирати. Посебна пажња се посвећује вероватноћи разарања, тј. $P\{\inf\limits_{t>0}(K_t) < 0\}$ која се своди на проблем достизања датог нивоа Левијевог процеса, о којем ће бити више речи у наредним поглављима.

[9] L. Bachelier (1870-1946)- француски математичар
[10] L.Samuelson (1915-2009)- амерички економиста
[11] R.C.Merton (1944-)-амерички економиста
[12] F. Black (1938-1995), амерички економиста и M. Scholes(1941-), амерички економиста

3 Достизање нивоа код Брауновог кретања

Нека је $\{W_t,\ t \geq 0\}$ стандардно Брауново кретање. Означимо са τ_a случајну величину која представља време до достизања неког нивоа a, $a \in \mathbb{R}$, односно нека је $\tau_a = inf\{t \geq 0 : W_t = a\}$ (може бити коначно и бесконачно). У овом одељку показаћемо да је τ_a апсолутно непрекидна случајна величина и наћи њену густину.

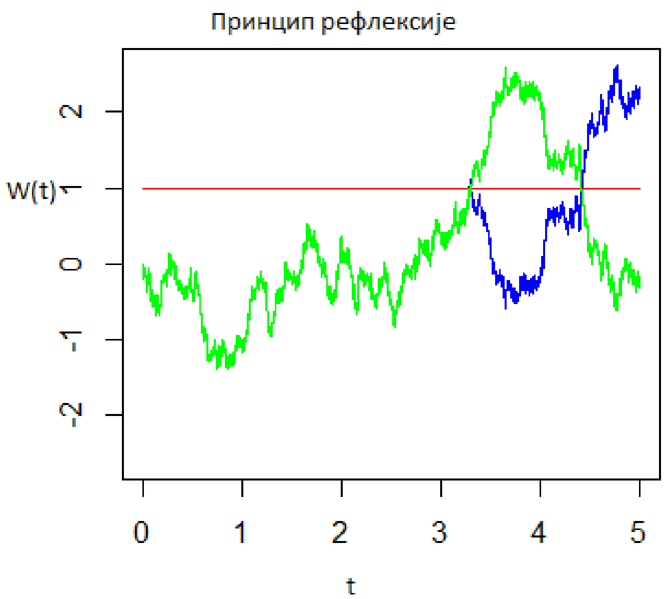
У извођењу користимо принцип рефлексије, односно његову последицу. Више о томе се може наћи у [8] . Напоменимо још да је принцип рефлексије директна последица строгог својства Маркова Брауновог кретања.

Принцип рефлексије :
Нека је $\{W_t, t \geq 0\}$ стандардно Брауново кретање и T време заустављања и нека је $\{\widetilde{W}_t, t \geq 0\}$ случајни процес дефинисан са:

$$\widetilde{W}_t = \begin{cases} W_t & \text{за } t \leq T, \\ 2W_T - W_t & \text{за } t > T. \end{cases}$$

Тада је $\{\widetilde{W}_t, t \geq 0\}$ стандардно Брауново кретање.

Графички се принцип може приказати на следећи начин.



Последица 3.1. *[8] Нека је $\{W_t,\ t \geq 0\}$ стандардно Брауново кретање и $\{M_t,\ t \geq 0\}$ случајни процес дефинисан са*

$$M_t = \max_{0 \leq u \leq t}\{W_u,\ u \geq 0\}$$

Тада је

$$P\{M_t \geq a\} = 2P\{W_t \geq a\}$$

Доказ :

Случајна величина τ_a је време заустављања па на њу можемо применити принцип рефлексије.

$$\begin{aligned}
P\{M_t \geq a\} &= P\{M_t \geq a, W_t > a\} + P\{M_t \geq a, W_t \leq a\} \\
&= P\{\tau_a \leq t, W_t > a\} + P\{\tau_a \leq t, W_t \leq a\} \\
&= P\{\tau_a \leq t, W_t > a\} + P\{\tau_a \leq t, 2a - a \leq \widetilde{W}_t\} \\
&= P\{\tau_a \leq t, W_t > a\} + P\{\tau_a \leq t, a \leq \widetilde{W}_t\} \\
&= 2P\{\tau_a \leq t, W_t > a\} = 2P\{W_t > a\}
\end{aligned}$$

Користили смо да $W_{\tau_a} = a$. □

Теорема 3.1. *[8] Случајна величина τ_a је апсолутно непрекидног типа и њена густина је*

$$f(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}, \quad t \geq 0.$$

Доказ :

Нека је $t \geq 0$.

$$P\{\tau_a \leq t\} = P\{M_t \geq a\} = 2(P\{W_t \geq a\})$$
$$= 2\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{u^2}{2t}} du \overset{u=z\sqrt{t}}{=} 2\int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Сада се може одредити густина случајне величине τ_a,

$$f_{\tau_a}(t) = (F_{\tau_a}(t))' = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}.$$

□

Приметимо да је $E\tau_a = \infty$, као и да је $P\{\tau_a < \infty\} = \lim_{t\to\infty} 2\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right) = 2(1-0.5) = 1$. Овај резултат је исти као и за време достизања датог нивоа код симетричног случајног лутања. То није изненађујуће јер управо оно представља " дискретизацију "Брауновог кретања.

У даљем тексту биће нам потребно да знамо и Лапласову трансформацију случајне величине τ_a.

$$L(a,\lambda) = E(e^{-\lambda\tau_a})$$
$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} f_{\tau_a}(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{2t}}dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-(\frac{a^2}{2t}+\lambda t)}dt = e^{-a\sqrt{2\lambda}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}e^{-\frac{(\frac{a}{\sqrt{t}}-\sqrt{2\lambda t})^2}{2}}dt$$
$$\overset{z=\frac{a^2}{2\lambda t}}{=} e^{-a\sqrt{2\lambda}}\int_0^\infty \sqrt{\frac{2\lambda}{2\pi z}}e^{-\frac{(\frac{1}{\sqrt{z}}-\sqrt{2\lambda z})^2}{2}}dz$$

Тада је

$$2L(a,\lambda) = e^{-a\sqrt{2\lambda}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{a}{\sqrt{t^3}}+\sqrt{\frac{2\lambda}{t}}\Big)e^{-\frac{(\frac{a}{\sqrt{t}}-\sqrt{2\lambda t})^2}{2}}dt$$
$$\overset{u=\frac{a}{\sqrt{t}}-\sqrt{2\lambda t}}{=} 4e^{-a\sqrt{2\lambda}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du = 2e^{-a\sqrt{2\lambda}}$$

Одавде закључујемо да је Лапласова трансформација посматране случајне величине

$$L(a,\lambda) = e^{-a\sqrt{2\lambda}}.$$

До сличног резултата се долази када је $a < 0$. Користећи својство симетрије Брауновог кретања, односно случајне величине са $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ расподелом, добијамо да је

$$Ee^{-\lambda\tau_a} = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}},\ \text{за } a \in R,\ \lambda > 0.$$

Следећа теорема даће нам одговор на питање какву раподелу има случајна величина која представља време до првог пресека са правом $y = a + bt$.

Теорема 3.2. *[8] Нека је $\tau_{a,b} = inf\{t \geq 0 : W_t = a + bt\}$. Функција расподеле случајне величине $\tau_{a,b}$, за $a > 0$, $-\infty < b < \infty$, је:*

$$F_{\tau_{a,b}}(t) = e^{-2ab}\Phi\Big(\frac{bt-a}{\sqrt{t}}\Big) + 1 - \Phi\Big(\frac{a+bt}{\sqrt{t}}\Big)$$

где је $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, функција расподеле случајне величине са $\mathcal{N}(0,1)$ расподелом.

Лема 3.1. *[8] Нека је $\tau_{a,b}$ горе дефинисана случајна величина. Тада је*

$$P\{\tau_{a,b} < \infty\} = \begin{cases} e^{-2ab} & \text{за } a > 0 \text{ и } b \geq 0\ , \\ 1 & \text{за } a > 0 \text{ и } b < 0. \end{cases}$$

Доказ леме:

Означимо са

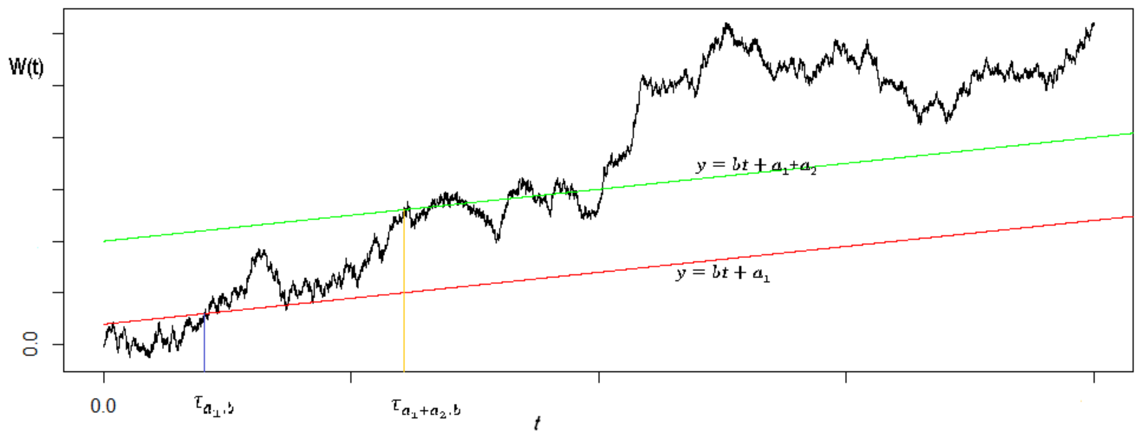
$$L(a,b,\lambda) = E(e^{-\lambda\tau_{a,b}}) = E(e^{-\lambda\tau_{a,b}}I_{\{\tau_{a,b}<\infty\}})$$

Тада је

$$P\{\tau_{a,b} < \infty\} = \lim_{\lambda \to 0} L(a, b, \lambda).$$

Одредићемо $L(a, b, \lambda)$ а затим тражену вероватноћу добити одатле, стављајући да $\lambda \to 0$.

Први корак у доказу је да приметимо да, због строге стационарности Брауновог кретања, је $\tau_{a_1+a_2,b} \overset{D}{=} \tau_{a_1,b} + (\tau_{a_1+a_2,b} - \tau_{a_1,b})$ као и да су $\tau_{a_1,b}$ и $(\tau_{a_1+a_2,b} - \tau_{a_1,b})$ независне случајне величине. То се може и графички приказати.



Одавде следи да је

$$L(a_1 + a_2, b, \lambda) = L(a_1, b, \lambda)L(a_2, b, \lambda).$$

Решење ове функционалне једначине је:

$$L(a, b, \lambda) = e^{-C(b)a}.$$

Треба још одредити константу $C(b)$ која зависи од b. Користећи особине условног очекивања и чињеницу да за $b \geq 0$ прво мора бити достигнут ниво a пре пресека са правом $bt + a$, добијамо:

$$L(a, b, \lambda) = \int_0^\infty E(e^{-\lambda \tau_{a,b}} | \tau_a = t) f_{\tau_a}(t) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} E(e^{-\lambda(\tau_{a,b} - \tau_a)} | \tau_a = t) f_{\tau_a}(t) dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} E(e^{-\lambda \tau_{bt,b}}) f_{\tau_a}(t)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(\lambda + C(b)b)t} f_{\tau_a}(t)dt \\
&= E(e^{-(\lambda + C(b)b)\tau_a}) = e^{-a\sqrt{2(\lambda + C(b)b)}}.
\end{aligned}
$$

Изједначавајући добијени израз са $e^{-C(b)a}$ добијамо једначину

$$C(b) = \sqrt{2(\lambda + C(b)b)}.$$

Квадрирањем претходне једнакости добија се квадратна једначина

$$C^2(b) - 2C(b)b - 2\lambda = 0.$$

Одбацујемо негативно решење квадратне једначине јер је $0 \leq L(a, b, \lambda) \leq 1$. Одавде закључујемо да је тражена константа

$$C(b) = b + \sqrt{b^2 + 2\lambda}$$

односно тражена Лапласова трансформација је

$$L(a, b, \lambda) = e^{-a(b + \sqrt{b^2 + 2\lambda})}.$$

Одавде је

$$P\{\tau_{a,b} < \infty\} = e^{-2ab}.$$

За $b < 0$ је $P\{\tau_{a,b} < \infty\} = 1$ јер пресек са правом $a + bt$ претходи достизању нивоа a а већ смо показали да је $P\{\tau_a < \infty\} = 1$. $\square$

Доказ теореме:

$$
\begin{aligned}
P\{\tau_{a,b} \leq t\} &= P\{(\exists s \in [0,t]) \, (W_s \geq a + bs)\} = P\{(\exists s \in [0,t]) \, (sW_{1/s} \geq a + bs)\} \\
&= P\big\{(\exists s \in [0,t]) \, \big(W_{1/s} \geq a/s + b\big)\big\} = P\{(\exists s \in \big[1/t, \infty)\big) \, (W_s \geq as + b)\}
\end{aligned}
$$

Уведимо следеће ознаке:

$$
\begin{aligned}
Q &= P\{(\exists s \in [0,t]) \, (W_s \geq a + bs)\} \\
\Delta Q &= P\{(\exists s \in [0,t]) \, (W_s \geq a + bs), W_{\frac{1}{t}} \in (x, x + \Delta x)\}.
\end{aligned}
$$

На основу претходног и коришћењем формуле условне и потпуне вероватноће добијамо:

$$\Delta Q = P\{(\exists s \in [1/t,\infty))\ (W_s \geq as+b)|W_{1/t} \in (x, x+\Delta x)\}P\{W_{1/t} \in (x, x+\Delta x)\}$$

$$= P\{(\exists s \in [1/t,\infty))\ (W_s \geq as+b)|W_{1/t} = x + \underset{\theta\in(0,1)}{\theta\Delta x}\}P\{W_{1/t} \in (x, x+\Delta x)\}.$$

Узимајући у обзир да је $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta x} = \frac{dQ}{dt}$, добијамо

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} P\{(\exists s \in [1/t,\infty))\ (W_s \geq as+b)|W_{1/t} = x\}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2t}{2}}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{a}{t}+b} P\{(\exists s \in [1/t,\infty))\ (W_s \geq as+b)|W_{1/t} = x\}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2t}{2}}dx + \int_{\frac{a}{t}+b}^{\infty}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2t}{2}}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{a}{t}+b} P\{\tau_{b-x+a/t,a} < \infty\}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2t}{2}}dx + 1 - \Phi\left(\frac{a+bt}{\sqrt{t}}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{a}{t}+b} e^{-2a(a/t+b-x)}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2t}{2}}dx + 1 - \Phi\left(\frac{a+bt}{\sqrt{t}}\right)$$

$$= e^{-2ab}\int_{-\infty}^{\frac{a}{t}+b}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(xt-2a)^2}{2t}}dx + 1 - \Phi\left(\frac{a+bt}{\sqrt{t}}\right)$$

$$= e^{-2ab}\Phi\left(\frac{bt-a}{\sqrt{t}}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{a+bt}{\sqrt{t}}\right).$$

□

На основу доказане теореме можемо наћи и функцију густине случајне величине $\tau_{a,b}$. Нека је $t \geq 0$.

$$f_{\tau_{a,b}}(t) = (F_{\tau_{a,b}}(t))' = e^{-2ab}f\left(\frac{bt-a}{\sqrt{t}}\right)\left(\frac{bt-a}{\sqrt{t}}\right)' - f\left(\frac{a+bt}{\sqrt{t}}\right)\left(\frac{bt+a}{\sqrt{t}}\right)'$$

$$= f\left(\frac{bt+a}{\sqrt{t}}\right)\left(\frac{bt-a}{\sqrt{t}}\right)' - f\left(\frac{a+bt}{\sqrt{t}}\right)\left(\frac{bt+a}{\sqrt{t}}\right)'$$

$$= f\left(\frac{bt+a}{\sqrt{t}}\right)\left(\frac{bt-a-a-bt}{\sqrt{t}}\right)' = f\left(\frac{bt+a}{\sqrt{t}}\right)\left(\frac{-2a}{\sqrt{t}}\right)'$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{(bt+a)^2}{2t}}.$$

До сличног резултата се може доћи и за $a < 0$. Више о томе се може наћи у [8].

Вратимо се недоказаном тврђењу из теореме 2.7.

Доказ теореме 2.7 (3.):

Као што смо већ напоменули, тврђење се једноставно доказује за $t > 0$ (показивањем да су коваријације процеса исте). Треба још показати да је

$$P\{\lim_{t\to 0}(tW_{1/t}) = 0\} = 1,$$

или еквивалентно да је

$$P\{\lim_{t\to\infty}(W_t)/t = 0\} = 1$$

Користићемо претходно показан резултат за $\tau_{a,b}$.

Нека је $a > 0$ и $b > 0$. Ако је $W_t \leq a + bt$ за свако $t \geq 0$ онда је $\overline{\lim_{t\to+\infty}}(W_t)/t \leq b$. Одавде закључујемо да је

$$P\big\{\overline{\lim_{t\to+\infty}}(W_t)/t \leq b\big\} \geq P\big\{W_t \leq a + bt, \text{за свако } t \geq 0\big\} = 1 - e^{-2ab}.$$

Нека $a \to \infty$. Тада је $P\big\{\overline{\lim_{t\to+\infty}}(W_t)/t \leq b\big\} = 1$, за све $b > 0$.
Уколико $b \to 0$ добијамо да је $P\big\{\overline{\lim_{t\to+\infty}}(W_t)/t \leq 0\big\} = 1$.

Слично се показује да је

$$P\big\{\underline{\lim_{t\to+\infty}}(W_t)/t \geq 0\big\} = 1$$

одакле непосредно следи тврђење. □

Даље, приметимо да је

$$\tau_{a,b} = inf\{t \geq 0 :\ W_t - bt \geq a\} = inf\{t \geq 0 :\ W_t + b't \geq a\}$$

где је $b' = -b$.
Дакле, "проблем достизања нивоа $a + bt$ Брауновог кретања", је еквивалентан "проблему достизања нивоа a Брауновог кретања са померајем $m = -b$".
У даљем тексту користићемо следеће ознаке:

$$\widetilde{\tau}_x = inf\{t \geq 0 : W_t + mt \geq x\}$$

$$\widetilde{f}(u,x) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi u^3}}e^{-\frac{(x-mu)^2}{2u}}I_{\{0,\infty\}}(u), \quad u \in \mathbb{R} \quad P\{\widetilde{\tau}_x = \infty\} = 1 - e^{mx-|mx|}$$

Закон расподеле сл. величине $\widetilde{\tau}_x$ на $\overline{\mathbb{R}}_+$ је

$$\widetilde{f}(u,x)du + P\{\widetilde{\tau}_x = \infty\}\delta_\infty(du)$$

Показали смо да ово важи за $z \geq 0$. За $z < 0$ доказ се изводи аналогно. Више о томе се може наћи у [7].

4 Време достизања нивоа за Левијеве процесе са сложеним Пуасоновим процесом

У овом одељку приказаћемо рад " *First passage time law for some Lévy processes with compound Poisson: Existence of density* "чији су аутори LAURE COUTIN[13] I DIANA DOROBANTY[14].

Нека је $\{X_t, t \geq 0\}$ случајни процес дефинисан са

$$X_t = mt + W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \;\; t \geq 0$$

где је $\{W_t,\ t \geq 0\}$ стандардно Брауново кретање, m реалан број, $\{N_t,\ t \geq 0\}$ Пуасонов процес са интензитетом a, $\{T_n,\ n \geq 0\}$ одговарајући низ тренутака у којим се дешавају скокови који су представљени низом независних случајних величина $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ са $\mathcal{E}(a)$ расподелом, $\{Y_n,\ n \geq 0\}$ низ независних случајних величина са истом функцијом расподеле F_Y. Претпоставља се и да су σ-алгебре генерисане са случајним низом $\{Y_n,\ n \geq 0\}$, и случајним процесима $\{N_t,\ t \geq 0\}$ и $\{W_t,\ t \geq 0\}$ независне.

Даље, нека је

$$\widetilde{X}_t = mt + W_t,\ t \geq 0$$

$$\tilde{\tau}_x = inf\{t \geq 0 : mt + W_t \geq x\}$$

као и

$$\tau_x = inf\big\{t \geq 0 : mt + W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \geq x\big\}.$$

Централно место у раду заузима следећа теорема.

Теорема 4.1. *Функција расподеле случајне величине $\tau_x(t)$ има десни извод у тачки $t = 0$ и диференцијабилна је за свако $t > 0$. Одговарајући изводи су редом једнаки*

$$f(t,x) = \begin{cases} \frac{a}{2}(2 - F_Y(x) - F_Y(x_-)) + \frac{a}{4}(F_Y(x) - F_Y(x_-)) & \text{за } t = 0, \\ aE(I_{\{\tau_x > t\}}(1 - F_Y)(x - X_t)) + E(I_{\{\tau_x > T_{N_t}\}}\tilde{f}(t - T_{N_t}, x - X_{T_{N_t}})) & \text{за } t > 0. \end{cases}$$

Може се показати и да је $P\{\tau_x = \infty\} = 0$ ако и само ако је $m + aE(Y_1) \geq 0$. Доказ

[13]IMT, University of Toulouse, France
[14]University of Lyon, France

се може наћи у [9].

Пре него што докажемо теорему приметимо да је овако дефинисан, случајни процес $\{X_t.\ t \geq 0\}$ Левијев процес јер је збир независних Левијевих процеса.

Лема 4.1. *Нека је G случајна величина са $N(0,1)$ расподелом и нека су $\mu \in R$, $\sigma \in R^+$ и $x^+ = max\{x, 0\}$. Тада, за свако $u \in R$ важи:*

$$E\big(\tilde{f}(u, \mu + \sigma G) I_{\{\mu+\sigma G>0\}}\big)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \frac{e^{-(\mu - mu)^2/(2(\sigma^2+u))}}{(\sigma^2+u)} E\Bigg[\bigg(\sigma G + \sqrt{\frac{u}{\sigma^2+u}}(\mu - mu) + m\sqrt{u(\sigma^2+u)}\bigg)^+\Bigg]$$

Тврђење ове леме је директна последица добијеног резултата за $\tilde{f}$ из претходног поглавља и смене променљиве у интеграцији.

Лема 4.2. *За свако $t > 0$ је*

$$\sup_{0<h\leq 1} E\Bigg[\bigg(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} I_{\{T_{N_t}<\tau_x\}} \tilde{f}(u - T_{N_t}, x - X_{T_{N_t}}) du\bigg)\Bigg] < +\infty$$

Доказ леме 4.2:

У доказу леме користимо особину нормалне расподеле да ако случајна величина има $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ расподелу, онда се она може представити у облику σG, где је G случајна величина са $\mathcal{N}(0,1)$ расподелом.

Означимо са

$$I(h) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} I_{\{T_{N_t}<\tau_x\}} \tilde{f}(u - T_{N_t}, x - X_{T_{N_t}}) du.$$

Приметимо да важи следећа импликација: $T_{N_t} < \tau_x \Rightarrow x - X_{T_{N_t}} > 0$.

На основу Јенсенове неједнакости је

$$E\big(I(h)\big) \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} E\big(I_{\{x-X_{T_{N_t}}>0\}} \tilde{f}(u - T_{N_t}, x - X_{T_{N_t}})\big) du$$

.

$$= \int_t^{t+h} E\big(I_{\{x - mT_{N_t} - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - G\sqrt{T_{N_t}}>0\}} \tilde{f}(u - T_{N_t}, x - mT_{N_t} - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - G\sqrt{T_{N_t}})\big) du$$

Даље, приметимо да је

$$E\big[I_{\{x-mT_{N_t}-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i-G\sqrt{T_{N_t}}>0\}}\tilde{f}(u-T_{N_t},x-mT_{N_t}-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i-G\sqrt{T_{N_t}})\big]$$

$$=E\big[E\big(I_{\{x-mT_{N_t}-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i-G\sqrt{T_{N_t}}>0\}}\tilde{f}(u-T_{N_t},x-mT_{N_t}-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i-G\sqrt{T_{N_t}})\big|\mathcal{F}\big)\big]$$

где је $\mathcal{F}$ филтрација генерисана случајним процесима $\{N_t,\ t\geq 0\}$ и $\{Y_i,\ i\in N\}$.

Случајна величина G и $-G$ из Леме 4.1 имају исту $N(0,1)$ расподелу па је на основу исте леме, стављајући да је $\sigma:=\sqrt{T_{N_t}}$, $\mu:=x-mT_{N_t}-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i$ и $u:=u-T_{N_t}$

$$E\big(I_{\{x-mT_{N_t}-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i-G\sqrt{T_{N_t}}\}}\tilde{f}(u-T_{N_t},x-mT_{N_t}-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i-G\sqrt{T_{N_t}})\big|\mathcal{F}\big)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(u-T_{N_t})(T_{N_t}+u-T_{N_t})}}e^{\frac{-(x-mT_{N_t}-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i-mu+mT_{N_t})^2}{2(T_{N_t}+u-T_{N_t})}}E\Bigg[\Big(-\sqrt{T_{N_t}}G+\sqrt{\tfrac{u-T_{N_t}}{T_{N_t}+u-T_{N_t}}}(x-mT_{N_t}-$$

$$\sum_{i=1}^{N_t}Y_i-mu+mT_{N_t})+m\sqrt{(u-T_{N_t})(T_{N_t}+u-T_{N_t})}\Big)^+|\mathcal{F}\Bigg]=$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi u(u-T_{N_t})}}e^{\frac{-(x-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i-mu)^2}{2u}}E\Bigg[\Big(-\sqrt{T_{N_t}}G+\sqrt{\frac{u-T_{N_t}}{u}}(x-\sum_{i=1}^{N_t}Y_i-mu)+m\sqrt{(u-T_{N_t})u}\Big)^+|\mathcal{F}\Bigg]}_{D}$$

У даљим апроксимацијама користимо:

- $(a+b)^+\leq(a)^++(b)^+$, за $a,b\in\mathbb{R}$;
- $t-T_{N_t}\leq u-T_{N_t}\leq 1+t-T_{N_t}$ за $t>0$ и $u\in(t,t+h)$;
- функција $\sqrt{x}e^{\frac{-x}{2}}$ је ограничена на $\mathbb{R}^+$ па постоји $C=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\sqrt{x}e^{\frac{-x}{2}}$
- $E|G|<\infty$.

На основу овог закључујемо да важи:

$$D\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Bigg[\frac{\sqrt{T_{N_t}}E|G|}{t\sqrt{t-T_{N_t}}}+\frac{C}{t^{3/2}}+\frac{|m|}{\sqrt{t}}\Bigg].$$

За $\alpha\in(-1,0]$ и $\gamma\in[0,\infty)$ је

$$E\big((t-T_{N_t})^\alpha T_{N_t}^\gamma\big)\leq t^\alpha+\sum_{i=1}^{\infty}E\big(I_{\{t>T_i\}}(t-T_i)^\alpha T_i^\gamma\big)<\infty$$

Последња неједнакост важи на основу Даламберовог критеријума за конвергенцију реда, као и следеће апроксимације:

$$E\big(I_{\{t>T_i\}}(t-T_i)^\alpha T_i^\gamma\big) = \int_0^t \frac{(t-u)^\alpha u^\gamma a^i u^{i-1} e^{-au}}{\Gamma(i)} du \leq \frac{a^i}{(i-1)!}\int_0^t u^{\gamma+i-1}(t-u)^\alpha du =$$

$$\frac{a^i t^{\gamma+i+\alpha}}{(i-1)!}\int_0^t \left(\frac{u}{t}\right)^{\gamma+i-1}\left(1-\frac{u}{t}\right)^\alpha du = \frac{a^i t^{\gamma+i+\alpha}}{(i-1)!}\int_0^1 u^{\gamma+i-1}(1-u)^\alpha du$$

$$= \frac{a^i t^{\gamma+i+\alpha}}{(i-1)!}\beta(\gamma+i,\alpha+1) = \frac{a^i t^{\gamma+i+\alpha}}{(i-1)!}\frac{\Gamma(\gamma+i)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\gamma+i+\alpha+1)}$$

Користили смо да $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ има $\Gamma(n,a)$ расподелу.

На основу свега претходног је $E(D) < \infty$ одакле следи тврђење леме.

Доказ теореме:

Постојање десног извода у тачки $t = 0$, биће показано по дефиницији, односно да постоји

$$\lim_{h\to 0}\frac{P\{\tau_x \leq h\}}{h}.$$

У доказу је коришћено да за Пуасонов процес $\{N_t,\ t\geq 0\}$ важи да је

$$P\{N_h \geq 2\} = o(h),\ \ P\{N_h = 1\} = ah + o(h),\ \ P\{N_h = 0\} = 1 - ah + o(h)\quad h\to 0,$$

као и тврђења доказана за случајни процес $\{\widetilde{X}_t,\ t\geq 0\}$ у претходном поглављу.

$$P\{\tau_x \leq h\} = P\{\tau_x \leq h, N_h \geq 2\} + P\{\tau_x \leq h, N_h = 1\} + P\{\tau_x \leq h, N_h = 0\}$$

Даље је

$$P\{\tau_x \leq h, N_h \geq 2\} \leq P\{N_h \geq 2\} = o(h).$$

На основу овога је

$$\lim_{h\to 0}\frac{P\{\tau_x \leq h, N_h \geq 2\}}{h} = 0.$$

Приметимо да је, за $0 \leq t \leq h$ $X_t(\omega) = \widetilde{X}_t(\omega)$ за свако ω за које је $N_h(\omega) = 0$.
Тада је

$$P\{\tau_x \leq h, N_h = 0\} = P\{\widetilde{\tau}_x \leq h, N_h = 0\} = P\{\widetilde{\tau}_x \leq h\}P\{N_h = 0\} = e^{-ah}P\{\widetilde{\tau}_x \leq h\}.$$

Претпоследња једнакост важи због независности случајних величина $\widetilde{\tau}_x$ и N_h.

$$\lim_{h\to 0}\frac{P\{\tau_x \le h, N_h = 0\}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{-ah}P\{\tau_x \le h\}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{P\{\tau_x \le h\}}{h} = 0$$

Уколико се до тренутка $t = h$ догодио тачно један скок ситуација је следећа:

$$P\{\tau_x \le h,\ N_h = 1\} = P\{\tau_x < T_1,\ N_h = 1\} + P\{\tau_x = T_1,\ N_h = 1\} + P\{T_1 < \tau_x \le h,\ N_h = 1\}$$

Дакле, разликујемо да ли се скок догодио пре него што је достигнут дати ниво, у моменту достизања датог нивоа или након достизања датог нивоа.

$$P\{\tau_x < T_1,\ N_h = 1\} = P\{\widetilde{\tau}_x < T_1,\ N_h = 1\} \le P\{\widetilde{\tau}_x < h,\ N_h = 1\} = P\{\widetilde{\tau}_x < h\}ahe^{-ah}$$

Због особина функције расподеле случајне величине $\widetilde{\tau}_x$, се може закључити да је

$$\lim_{h\to 0}\frac{P\{\tau_x < T_1,\ N_h = 1\}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{P\{\widetilde{\tau}_x < h\}ahe^{-ah}}{h} = 0$$

$$\begin{aligned} P\{\tau_x = T_1,\ N_h = 1\} &= P\{\widetilde{\tau}_x > T_1,\ \widetilde{X}_{T_1} + Y_1 \ge x,\ T_1 \le h < T_2\} = \\ &\stackrel{(1)}{=} ae^{-ah}\int_0^h E(I_{\{\widetilde{\tau}_x > s\}} I_{\{Y_1 > x - \tilde{X}_s\}})ds \\ &\stackrel{(2)}{=} ae^{-ah}\int_0^h E((1-F_Y)(x-\widetilde{X}_s)_-)ds - \int_0^h E(I_{\{\widetilde{\tau}_x \le s\}}(1-F_Y)(x-\widetilde{X}_s)_-)ds \end{aligned}$$

Како је F_Y функција расподеле и $\widetilde{X}_s = ms + W_s$ где је W_s непрекидна и симетрична функција, добија се:

$$\lim_{s\to 0} E\big(F_Y((s-\widetilde{X}_s)_-)\big) = \frac{F_Y(x) + F_Y(x_-)}{2}$$

$$\underset{s\to 0}{E}\big(I_{\{\widetilde{\tau}_x \le s\}}(1-F_Y)((x-\widetilde{X}_s)_-)\big) = 0.$$

Из свега претходног следи

$$\lim_{h\to 0}\frac{P\{\tau_x = T_1,\ N_h = 1\}}{h} = \frac{a}{2}\big(2 - F_Y(x) - F_Y(x_-)\big).$$

Следи образложење последње једнакости (1) и (2).

Означимо са

$$\Delta P = P\{\widetilde{\tau}_x > T_1,\ \widetilde{X}_{T_1} + Y_1 \ge x, S_2 > h - T_1 |\ T_1 \in (s, s+\Delta s)\}P\{T_1 \in (s, s+\Delta s)\}$$

$$= P\{\widetilde{\tau}_x > T_1,\ \widetilde{X}_{T_1} + Y_1 \geq x, S_2 > h - T_1 |\ T_1 \in (s, s+\Delta s)\} \int_s^{s+\Delta s} ae^{-au} du.$$

Сада је

$$\frac{\Delta P}{\Delta s} P = P\{\widetilde{\tau}_x > T_1,\ \widetilde{X}_{T_1} + Y_1 \geq x, S_2 > h - T_1 |\ T_1 \in (s, s+\Delta s)\} \frac{\int_s^{s+\Delta s} ae^{-au} du}{\Delta s}$$

односно

$$\frac{dP}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta s} = P\{\widetilde{\tau}_x > s,\ \widetilde{X}_s + Y_1 \geq x, S_2 > h - s\} ae^{-as}.$$

Сада се може одредити поменута вероватноћа.

$$\begin{aligned} P &= \int_0^h P\{\widetilde{\tau}_x > s,\ \widetilde{X}_s + Y_1 \geq x\} P\{S_2 > h - s\} ae^{-as} ds \\ &= \int_0^h P\{\widetilde{\tau}_x > s,\ \widetilde{X}_s + Y_1 \geq x\} e^{-a(h-s)} ae^{-as} ds \\ &= \int_0^h P\{\widetilde{\tau}_x > s,\ \widetilde{X}_s + Y_1 \geq x\} e^{-a(h-s)} ae^{-as} ds \\ &= e^{-ah} \int_0^h P\{\widetilde{\tau}_x > s,\ \widetilde{X}_s + Y_1 \geq x\} ds. \end{aligned}$$

Даље, приметимо да је

$$P\{\widetilde{\tau}_x > s,\ \widetilde{X}_s + Y_1 \geq x\} = P\{\widetilde{X}_s + Y_1 \geq x\} - P\{\widetilde{\tau}_x \leq s,\ \widetilde{X}_s + Y_1 \geq x\}.$$

Како бисмо објаснили и последњу једнакост, уведимо ознаку:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= P\{Y_1 > x - \widetilde{X}_s |\ \widetilde{X}_s \in (v, v+\Delta v)\} P\{\widetilde{X}_s \in (v, v+\Delta v)\} \\ &= P\{Y_1 > x - \widetilde{X}_s |\ \widetilde{X}_s \in (v, v+\Delta v)\} \int_v^{v+\Delta v} f_{\widetilde{X}_s}(u) du. \end{aligned}$$

$$\frac{dQ}{dv} = P\{Y_1 > x - v\} f_{\widetilde{X}_s}(v)$$

Одавде следи да је

$$Q = E(P\{Y_1 > x - \tilde{X}_s\}) = E((1 - F_Y)(x - \widetilde{X}_s)_-)$$

Слично се показује да је

$$P\{Y_1 > x - \widetilde{X}_s, \widetilde{\tau}_x \leq s\} = E(I_{\{\widetilde{\tau}_x \leq s\}} (1 - F_Y)(x - \widetilde{X}_s)_-)$$

Остаје још да се размотри и трећа могућност, да се скок догодио пре него што је достигнут ниво x. Тада је

$$P\{T_1 < \tau_x \le h,\ N_h = 1\} = P\{T_1 < \tau_x \le h,\ T_1 \le h < T_2\}$$

$$= E(E(I_{\{T_1 \le h\}} I_{\{T_1 < \tau_x\}} I_{\{\widetilde{\tau}_{x - X_{T_1}} \le h - T_1\}} I_{\{h - T_1 < S_2\}} | T_1))$$

$$= E(I_{\{T_1 \le h\}} I_{\{T_1 < \tau_x\}} E(I_{\{\widetilde{\tau}_{x - X_{T_1}} \le h - T_1\}} | T_1) E(I_{\{h - T_1 < S_2\}} | T_1))$$

$$= E(I_{\{T_1 \le h\}} I_{\{T_1 < \tau_x\}} e^{-a(h - T_1)} E(I_{\{\widetilde{\tau}_{x - X_{T_1}} \le h - T_1\}} | T_1))$$

$$= E(I_{\{T_1 \le h\}} I_{\{X_{T_1} \le x\}} e^{-a(h - T_1)} E(I_{\{\widetilde{\tau}_{x - X_{T_1}} \le h - T_1\}} | T_1))$$

$$- E(I_{\{\widetilde{\tau}_x \le T_1 \le h\}} I_{\{X_{T_1} \le x\}} e^{-a(h - T_1)} E(I_{\{\widetilde{\tau}_{x - X_{T_1}} \le h - T_1\}} | T_1))$$

Нека је $G(h) = E(I_{\{T_1 \le h\}} I_{\{X_{T_1} \le x\}} e^{-a(h - T_1)} E(I_{\{\widetilde{\tau}_{x - X_{T_1}} \le h - T_1\}} | T_1))$.

Како је $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} P\{\widetilde{\tau}_x \le h\} = 0$ довољно је показати да је $\lim\limits_{h \to 0} \frac{G(h)}{h} = \frac{a}{4}[F(x) - F(x^-)]$

$$G(h) = e^{-ah} \int_0^h e^{as} a e^{-as} \int_0^{h-s} E(I_{\{\widetilde{X}_s + Y_1 < x\}} \widetilde{f}(u, x - \widetilde{X}_s - Y_1)) du ds$$

$$= a e^{-ah} \int_0^h \int_0^{h-s} E(I_{\{\widetilde{X}_s + Y_1 < x\}} \widetilde{f}(u, x - \widetilde{X}_s - Y_1)) du ds$$

Коришћењем Леме 4.1 за $\mu = x - ms - Y_1$ и $\sigma = \sqrt{s}$ добија се да важи:

$$E\big(\widetilde{f}(u, x - \widetilde{X}_s - Y_1)) I_{\{\mu + \sigma G\}}\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E\Bigg[e^{-\frac{(x - m(u+s) - Y_1)^2}{2(s+u)}} \Bigg(\frac{x - Y_1}{(u+s)^{\frac{3}{2}}} + \frac{G\sqrt{s}}{\sqrt{u}(u+s)}\Bigg)^+\Bigg]$$

$$G(h) = \frac{a e^{-ah}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^h \int_0^{h-s} E\Bigg[e^{-\frac{(x - m(u+s) - Y_1)^2}{2(s+u)}} \Bigg(\frac{x - Y_1}{(u+s)^{\frac{3}{2}}} + \frac{G\sqrt{s}}{\sqrt{u}(u+s)}\Bigg)^+\Bigg] du\, ds$$

$$\overset{s=th\ u=hv\ J=h^2}{=} \frac{a e^{-ah} h}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \int_0^{1-t} E\Bigg[e^{-\frac{(x - mh(v+t) - Y_1)^2}{2h(v+t)}} \Bigg(\frac{x - Y_1}{\sqrt{h}(t+v)^{\frac{3}{2}}} + \frac{G\sqrt{t}}{\sqrt{v}(t+v)}\Bigg)^+\Bigg] dt\, dv.$$

J је Јакобијан трансформације.

Сада је

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a e^{-ah}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \int_0^{1-t} E\Bigg[e^{-\frac{(x - mh(v+t) - Y_1)^2}{2h(v+t)}} \Bigg(\frac{x - Y_1}{\sqrt{h}(t+v)^{\frac{3}{2}}} + \frac{G\sqrt{t}}{\sqrt{v}(t+v)}\Bigg)^+\Bigg] dtdv.$$

Нека је

$$A = \lim_{h\to 0} e^{-\frac{(x-mh(v+t)-Y_1)^2}{2h(v+t)}} \left(\frac{x-Y_1}{\sqrt{h}(t+v)^{\frac{3}{2}}} + \frac{G\sqrt{t}}{\sqrt{v}(t+v)} \right)^+$$

$$A = \begin{cases} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{v(t+v)}} G^+ & \text{за } Y_1 = x, \\ 0 & \text{за } Y_1 \neq x. \end{cases}$$

Може се применити Лебегова теорема о доминантној конвергенцији зато што је

$$\sup_{0\le h\le 1} e^{-(x-mh(t+v)-Y_1)^2/(2h(t+v))} \left(\frac{x-Y_1}{\sqrt{h}(t+v)^{3/2}} + \frac{G\sqrt{t}}{\sqrt{v(1+t)}} \right)^+$$

$$\le \frac{\sup_{z\ge 0} z e^{-z^2/2} + |m|}{\sqrt{t+v}} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{v}(t+v)} |G|$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(h)}{h} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \int_0^{1-t} E\left[\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{v}(t+v)} G^+ I_{\{x=Y_1\}} \right] dt\, dv$$

$$= \frac{a(F_Y(x) - F_Y(x-))E(G^+)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \int_0^{1-t} E\left[\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{v}(t+v)} \right] dt\, dv = \frac{1}{4} \Delta F_Y(x)$$

Постојање извода за $t > 0$.

У доказу се користи иста идеја као у првом делу. Разликују се случајеви када је број скокова у околини t нула, један и већи од два.

$$P\{t < \tau_x \le t+h\}$$

$$= P\{t < \tau_x \le t+h,\ N_{t+h}-N_t = 0\} + P\{t < \tau_x \le t+h,\ N_{t+h}-N_t = 1\} + P\{t < \tau_x \le t+h,\ N_{t+h}-N_t \ge 2\}$$

Следећа неједнакост очигледно важи.

$$P\{t < \tau_x \le t+h,\ N_{t+h} - N_t \ge 2\} \le P\{N_t \ge 2\} = o(h),\ h \to 0$$

Нека је $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ комплетна филтрација генерисана случајним процесима $\{W_t,\ t \ge 0\}$, $\{N_t,\ t \ge 0\}$ и низом случајних величина $\{Y_i,\ i \in N\}$.
Због особина Левијевих процеса важи:

$$P\{t < \tau_x \le t+h,\ N_{t+h} - N_t = 1\} = E(I_{\{\tau_x > t\}} P(\tau_{x-X_t} \le h,\ N_h = 1 | \mathcal{F}_t)).$$

На основу првог дела теореме је

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P(\tau_{x-X_t}\le h,\ N_h=1|\mathcal{F}_t)=\frac{a}{2}\Big(2-F_Y(x-X_t)-F_Y((x-X_t)_-)\Big)+\frac{a}{4}\Big(F_Y(x-X_t)-F_Y((x-X_t)_-)\Big)$$

Како је

$$P(\tau_{x-X_t}\le h,\ N_h=1|\mathcal{F}_t)\le\frac{P\{N_h=1\}}{h}=ae^{-ah}\le a$$

може се применити Лебегова теорема о доминатној конвергенцији.

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P\{t<\tau_x\le t+h,\ N_{t+h}-N_t=1\}=aE(I_{\{\tau_x>t\}}(1-F_Y)(x-X_t))+\frac{3a}{4}E(I_{\{\tau_x>t\}}\Delta F_Y(x-X_t))$$

Како је $E(I_{\{\tau_x>t\}}\Delta F_Y(x-X_t))=0$ (доказ се може наћи у [3]) добија се да је

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P\{t<\tau_x\le t+h,\ N_{t+h}-N_t=1\}=aE(I_{\{\tau_x>t\}}(1-F_Y)(x-X_t))$$

Остаје још да се покаже да је

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P\{t<\tau_x\le t+h,\ N_{t+h}-N_t=0\}=E(I_{\{\tau_x>T_{N_t}\}}\widetilde{f}(t-T_{N_t},x-X_{T_{N_t}}))$$

$$P\{t<\tau_x\le t+h,\ N_{t+h}-N_t=0\}=P\{t<\tau_x\le t+h<T_1\}+\sum_{k=1}^{\infty}P\{t<\tau_x\le t+h,\ T_k<t<t+h<T_{k+1}\}$$

$$=P\{t<\tilde{\tau}_x\le t+h<T_1\}+\sum_{k=1}^{\infty}P\{t<\tau_x\le t+h,\ T_k<t<t+h<T_{k+1}\}\quad(*)$$

На скупу $\{T_k<t\}$ је $X_t=X_{T_k}+X_{t-T_k}\circ\theta_{T_k}$, а на скупу $\{T_k<\tau_x\}$ је $\tau_x=T_k+\tau_{x-X_{T_k}}\circ\theta_{T_k}$.
Због тога је

$$I_{\{t<\tau_x\le t+h,\,T_k<t<t+h<T_{k+1}\}}=I_{\{T_k<t\}}\ I_{\{t-T_k<\tilde{\tau}_x\le t+h-T_k<S_{k+1}\}}\circ\theta_{T_k}$$

Иако T_{N_t} није време заустављања, репрезентација $(*)$ дозвољава да се искористи строго својство Маркова (T_k јесте време заустављања).

$$P\{t<\widetilde{\tau}_x\le t+h<T_1\}+\sum_{k=1}^{\infty}P\{t<\tau_x\le t+h,\ T_k<t<t+h<T_{k+1}\}$$

$$=e^{-a(t+h)}P\{t<\widetilde{\tau}_x\le t+h\}+\sum_{k=1}^{\infty}E(I_{\{T_k<t\}}I_{\{\tau_x>T_k\}}e^{-a(t+h-T_k)}E(I_{\{t-T_k<\widetilde{\tau}_{x-X_{T_k}}\le t+h-T_k\}}|T_k))$$

$$=e^{-ah}\int_t^{t+h}E(I_{\{0\le t<T_1\}})\tilde{f}(u,x)du+e^{-ah}\sum_{k=1}^{\infty}\int_t^{t+h}E(I_{\{T_k\le t<T_{k+1}I_{\{\tau_x>T_k\}}\}}\tilde{f}(u-T_k,x-X_{T_k}))du$$

Заменом места суме и интеграла добија се да је претходни израз једнак

$$e^{-ah}\int_t^{t+h} E(I_{\{T_{N_t}<\tau_x\}}\widetilde{f}(u-T_{N_t},x-X_{T_{N_t}}))du$$

Како је $\widetilde{f}$ непрекидна по u за свако $t>0$ важи:

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} I_{\{T_{N_t}<\tau_x\}}\widetilde{f}(u-T_{N_t},x-X_{T_{N_t}})du = I_{\{T_{N_t}<\tau_x\}}\tilde{f}(t-T_{N_t},x-X_{T_{N_t}})$$

Даље,

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} I_{\{T_{N_t}<\tau_x\}}\tilde{f}(u-T_{N_t},x-X_{T_{N_t}})du$$

је униформно интеграбилна за $0\le h\le 1$ (Лема 4.2) одакле је

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}P\{t<\tau_x\le t+h,\ N_{t+h}-N_t=0\} = E(I_{\{T_{N_t}<\tau_x\}}\widetilde{f}(t-T_{N_t},x-X_{T_{N_t}}))$$

$\square$

Литература

[1] Applebaum, D.*Lévy Processes and Stochastic Calculus* (2004)
Cambridge University Press

[2] Bilingsley, P. *Covergence of Probability Measures* (1999),(2'nd ed.)
John Wiley & Sons, New York

[3] Cont, R. , Tanakov,P., *Financial Modeling with Jumps*, (2004)
FL:Chapman & Hall/CRC

[4] Coutin, L. , Dorobantu, D. *First passage time law for some Lévy processes with coumpound Poisson: Existance of density* (2011)
Bernulli 17(4), 2011, 1127-1135

[5] Dvoretski,A.,Erdös,P.,Kakutani,S.*Nonincrease everywhere of the Brownian motion process,*
Proc.4th Berkaley Symp. on Math. Stat and Prob. Vol. II,103-116, (1961)

[6] Fristedt,B. , Gray, L.*A Modern Approach to Probability Theory*, (1997)
Birichäuser, Boston

[7] Karatzas, I. ,Shreve, S.E.,,*Brownian Motion and Stochastic Calculus*,(1991), (2'nd ed.)
Springer

[8] Kennedy, D. *Stochastic Financial Models* (2010)
CRC Press

[9] Levèvre, C. Loisel, S. *Finite-time Horizon Ruin Probabilities for Independent or Dependent Claim Amounts*,(2008)
Working paper WP2044, Cahiers de recherche de l'Isfa.

[10] Malishić, J. *Slučajni procesi*, (1989)
IRO "Gradjevinska knjiga", Beograd

[11] Merkle, M. *Verovatnoća i statistika*,(2010)
Akademska misao, Beograd

[12] Mikosch, T. *Non-Life Insurance Mathematics: an Introduction with Poison process*, (2009), (2'nd ed.)
Springer

[13] Младеновић, П. *Вероватноћа и статистика*, (2005)
Математички факултет у Београду

[14] Sato,K.I *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions* , (1999)

[15] Steele, M.J, *Stochastic Calculus and Financial Applications* , (2001) Springer