УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

О конструисању решења задатака у настави математике у Јапану

МАСТЕР РАД

Ментор: Проф. др Милан Божић

Студент: Драгана Савић

1034/2011

Београд, 2012

САДРЖАЈ

„ Ви дајете ученику готову науку.

Ја бих му радије дао средства којима се наука ствара.“

Ж.Ж. Русо

Увод

Математика и као наука и као наставни предмет не постоји за себе тј. није сама себи циљ већ је такође на услузи свима онима који желе да је разумеју и да живе са њом. Њене садржаје можемо унапредити ако упознамо њен настанак и развој кроз векове.

У лествици наука примарно место припада математици. Математика од давнина носи печат своје величине са израженим нагласком да је краљица и слушкиња свих наука. Поједини аутори истичу да је математика срце живота науке. Сагледавајући историју развоја математике видимо да је она спорије или брже у успону.

Човекова потреба за математичким знањима је јасно изражена од најранијих времена. О томе нам сведоче многи споменици материјалне културе – глинене плочице које потичу неколико хиљада година пре наше ере, откривене у храму бога Бала (Нипур). Оне носе обележје елементарних математичких операција. Египатска култура је сачувала и помоћно средство за рачунање абакус (абак). Сачувани су извори римског царства који говоре о њиховом математичком образовању и који су веома ценили математику али искључиво због њене практичне вредности. Иако је рачунање уз помоћ абака у суштини било мисаоно (усмено), ипак остаје чињеница да су скоро све познате и признате филозофске школе (Милетска, Питагорејска, Платонова, Аристотелова и њима сличне) за основ математичких знања узимале геометрију.

У средњем веку и математика доживљава сличну судбину као друге науке, умртвљеност научне мисли дуго се осећала током читавог средњег века. Нешто бржи ход на путу развоја математика доживљава после откривања закона месне вредности бројева (закон позиције места – појединих бројева у природном низу). Користећи се овим законом при сабирању, одузимању, множењу и дељењу у потпуности се потискује преживели начин рачунања помоћу абакуса. Међутим крутост и стега средњег века на плану развоја научне мисли утицала је и на математику. У приватним школама учило се кроз наставу која је имала вербално догматски карктер. Вербално научена математичка правила брзо се заборављају па се не могу користити у даљем ступњу образовања. Нови степен друштвеног развоја доноси са собом и нова обележја свести. Математици као наставном предмету се уступа легално место у наставним плановима. Она има своје садржаје а њена неопходност је условљена практичним потребама динамике развоја људског друштва (трговина, морепловство, почеци економије и технике). Након тога постављају се проблеми изналажења путева за преношење математичког знања. Појавом швајцарског педагога Песталоција у 18. и 19. веку настава као образовни програм добија своју праву димензију. Како је математика неодвојива компонента наставе уопште то она добија своју праву вредност. Песталоцијев став у погледу наставе математике ствара теорију формалног образовања. По тој теорији акценат се ставља на развој психичких функција ученика на штету фонда знања математичких чињеница и знања. Оваква теорија је негирала ранији приступ у настави математике. Раније теорије су се заснивале на механичком усвајању појмова и чињеница. У непосредној борби ових двају праваца теорија наставе математике је добила на квалитету. Вредно пажње је и учење немачког педагога Дистерверга као и Хербартово учење (немачки педагог) која поред доприноса имају и својих мањкавости. Односно њихови следбеници говоре о увођењу математичких садржаја у друге наставне предмете па доводе математику у ситуацију да се одриче својих садржаја. За наставу математике пресудна је 1905. година. Тада је одржана Меранска конференција на којој је истакнут захтев за потребама реформе наставе математике на свим нивоима. Тада је захтевано да се одстрани традиционализам и све што штети настави математике.

Крајем 19. века у први план избија спекулативни приступ настави математике. То подразумева доминацију формалних циљева и задатака наставе, јасноћу, логичност и слично. Почетком 20. века као реакција на спекулативну наставу јавља се лабараторијска настава, односно политехничка настава са практицистичким нагласком наставе математике. У другој половини 20. века влада дијаметрално супротан правац практицизму. То је такозвана „модерна математика“ која у први план ставља формализам, апстрактност и логичност.

Савремени живот је веома сложен и динамичан па је веома тешко уочити све проблеме који се појављују и који захтевају решење у све краћем времену. Тако се и математици постављају нови и сложени задаци. Настава математике мора бити у стању да усмери садашњег ученика за будући живот. У том животу математичка култура је нешто неизбежно и императив таквог живота. Наше данашње време је пуно покушаја да се настава математике прилагоди и приближи психофизичким могућностима ученика. Само таква настава је гаранција да ће настати, расти и развијати се интелектуално задовољство. Зато су напори многих теоретичара, методичара и практичара са поља математике оправдани када се залажу и ангажују за изналажење све савременијих путева - приступа у настави математике.

За истраживање су интересантне јапанске методе које се користе у настави математике као и њихови приступи у решавању проблема. У истраживачком поступку се прво прилази описивању проблема у математици, сагледава се образовни процес у Јапану и настава математике у Јапану кроз примере конкретних јапанских часова где се сагледава како ученици долазе до решења проблема. Циљ овог рада је да стекнемо боље разумевање зашто јапански ђаци имају висока постигнућа у математици и да покажем и опишем концепте предавања појединих лекција из математике у Јапану. Овај рад је покушај да се дубље осветле основне карактеристике наставе путем решавања проблема. Могуће је сагледати користи применом јапанске методе у настави математике и у нашим условима и тако побољшати резултате ученика, развијајући њихово мишљење и расуђивање.

Крајњи циљ овог рада је избор и усвајање ефикасних наставних метода којима се може допринети бољем усвајању знања и такође ефикасном оспособљавању ученика за даље образовање које је у савременим условима један непрекидан процес.

1. Уопште о решавању проблема у математици

„ *...Математика је пуна различитих проблема за размишљање. Она је скоро сва испуњена њима. Настава мора да води много рачуна о овој чињеници и да учи ученике математици највише баш путем проблема, тј. уз максимално учешће дечјег мишљења и расуђивања. То, опет, значи да у настави математике ученици треба, уз вођење и помоћ наставника, претежно самосталним мисаоним и вољним напором да упознају математичке појмове и величине, математичке операције и законитости, математичке симболе и правила. То је најефикасније учење математике...“* (Ничковић, 1976)

Проблем је такав мисаони или практични задатак у коме ученик треба да открије нешто ново њему до тада непознато, да реши неко спорно место, да израчуна неки податак, да би решио постављени проблем. У проблему се ученик увек среће с неком тешкоћом, с неком празнином коју треба да испуни да би дошао до решења. Борећи се са наведеним тешкоћама, ученик напредује према циљу који треба постићи. Ако нема тешкоће и празнине у задатку, онда то није проблем. Такође, задатак није или престаје да буде проблем ако се поново решава једном већ решени проблем или ако се у истом проблему незнатно измене бројчани подаци. Али, ако се дати проблем другачије постави, преструктуира или ако већ научени тип решења треба применити у неком новом проблему, онда имамо посла с проблемом, без обзира на то да ли је он вербалне природе или се састоји од бројчаних података или се ради о упознавању неке нове операције, дефиниције, правила, формуле. Такође, један задатак није проблем ако не захтева никакав умни напор.

Решавање проблема је стваралачки умни чин ученика. Да бисмо развили ово стваралачко мишљење морамо наћи најбоље путеве који нису одмах јасно означени. Односно тај процес тече спонтано ако је ученик мотивисан да реши неки проблем. Ученика треба постепено научити да решава проблеме. Наравно да у математици поједини проблеми имају доста специфичног што се не може подвести за заједнички именитељ који би важио за сваку ситуацију али у томе има и нечег заједничког. Потребно је створити атмосферу коју карактерише слободно постављање питања од стране ученика, избор активности, тражење допунских информација, да сам ученик поставља хипотезе, да сме да греши, да иде странпутицом и слично.

Усвајање знања ученика на овакав начин, осим образовних има и велику васпитну вредност која се огледа у формулисању свесне, сигурне и самосталне личности, квалитетно богате и оспособљене за самообразовање.

2. Образовање у Јапану

Слика 1.

Данашње развијене земље и оне које се боре да то постану, образовање стављају у врх развојних фактора, истичући како се престиж у свету и економском напретку огледа баш у образовању, односно у знању као његовом резултату. Многе развијене земље свој успех су постигле дајући приоритет развоју људског фактора. Брзи техничко технолошки прогрес доноси промене па се од људи у организацији и друштву уопште намеће потреба за усвајањем ових промена и прилагођавање променама.

Економски и научно - технолошки прогрес данашњег Јапана диктира нове захтеве систему образовања. Већ у другој половини 20. века развој образовања и васпитања добија приоритетни значај, односно држава ставља акценат на повећање интелектуалног, моралног, етичког и радног потенцијала младих. Најзначајнија реформа образовања у

Јапану, осамдесетих година прошлог века, имала је за циљ иновирање и модернизацију комплетног система образовања који треба да буде прилагођен друштвено – економским и технолошким новинама.

Принципи и циљеви образовања усклађени су са: развојним и образовним потребама ученика, захтевима и изазовима савременог живота, друштвено – економским и културним потребама савременог Јапана и света у целини. Принципи и циљеви дефинисани су кроз три основна става:

1. принцип наглашавања индивидуалности
2. доживотно учење
3. прилагођавање свим променама и интернационализација различитих сектора (Комленовић, 2007).

Знатна средства су издвојена за опремање школског простора, иновације у школском систему, развој курикулума, организацију наставног процеса и стручно усавршавање наставног кадра.

Основни циљ иновирања система образовања односио се на развој свеукупне личности ученика са различитим индивидуалним способностима и унапређивање учења током целог живота. Велика пажња посвећена је избору одговарајућих наставних садржаја и метода наставе који ће омогућити ученицима да се оспособе за укључивање у брзе друштвене и технолошке промене.

Оваква политика државе, однос педагога, родитеља, ученика и свеобухватне јавности према образовању позитивно се одразило на школство Јапана, чији су резултати у врху образовне скале света.

2.1. Неке карактеристике обавезног образовања у Јапану

Обавезно образовање у Јапану, формално образовање, стиче се у националним, локалним државним и приватним школама и траје девет година. Организовано је на два нивоа, основна и нижа средња школа. Основна школа (*Shogakko*) траје шест година, обухвата узраст деце од шесте до дванаесте године старости. Нижа средња школа (*Chugakko*) је наставак основне школе, траје три године и завршава се у петнаестој години детета.

Школска година у обавезној школи у Јапану почиње у априлу и завршава се у марту, траје 240 радних дана са 723,3 наставна часа (просек за 6 година). Школска недеља је петодневна, чини је од 25 наставних часова у првом разреду, 26 у другом, 28 у трећем, 29 од четвртог до шестог разреда и 30 часова недељно је планирано за ученике другог нивоа, ниже средње школе. Школски дан у јапанским школама почиње у 8.30 и завршава се у поподневним сатима (Догдибеговић и Аџемовић Црепуља, 1996).

Активности које су организоване после наставе најчешће су у координацији с редовном наставом и с активностима разредног старешине. Делимично због овога, јапанска деца виде школу не само као место за учење него такође као место где могу да се играју и буду са њиховим пријатељима.

После дневних школских активности велики број ученика похађа и припремне приватне школе (*Ichugakko*) у којима се организују различите активности, углавном спорт, уметност, култура или се раде домаћи задаци. У великим градовима овакве школе похађа и до 70 посто ученика.

2.1.1. Наставни план обавезног образовања у Јапану

Наставни планови различитих земаља се разликују у томе: шта се учи у току обавезног образовања, на који начин се учи, на ком узрасту и за које време се савлађују утврђени предмети или наставне области. Разлике су последице различитих система образовања (па и обавезног), али и различитог степена утицаја државе на утврђивање наставних планова, односно различитог степена слободе школе при избору појединих предмета, наставних области или групе предмета.

Наставни план Јапана је сличнији скупу смерница, које свака школа мора да тумачи тако да уклопи сопствене потребе. Наставници немају могућност да бирају алтернативни уџбеник, али су слободни да развијају њихове властите приступе наставном садржају траженог уџбеника.

У Јапану постоји велики број интегрисаних, мање или више сродних предмета у групе или наставне области. Математика је заступљена у већини наставних планова као појединачни предмет у току читавог обавезног образовања под истим називом, изузев у Јапану, где се аритметика изучава у основној, а математика у нижој средњој школи. Велики недељни фонд часова је предвиђен за наставу математике, 5 часова недељно у другом, трећем, четвртом, петом и шестом разреду. Етика је заступљена у наставном плану Јапана, кроз читаво обавезно образовање (1 час недељно). Изборна настава је заступљена од 7 разреда. Природне и друштвене науке се до краја обавезног школовања изучавају без поделе на појединачне предмете. Област уметности је подељена на два предмета: ликовну и музичку уметност (образовање). Ови предмети се називају лепе уметности и музика. Највећи фонд часова предвиђен за ову област је управо у наставном плану Јапана (34 часа). Техничко (радно) васпитање је заступљено од 5 разреда. У наставним плановима је област техничког васпитања заступљена само у једном делу обавезног образовања, једино се у наставном плану Јапана јављају два предмета: домаћинство (у 5 и 6 разреду) и индустријски дизајн и домаћинство (у 7, 8 и 9 разреду) (Догдибеговић и Аџемовић Црепуља, 1996).

2.2. Наставници и школа у Јапану

Наставници. Наставници заузимају цењено место у јапанском друштву и њихове плате рефлектују овај високи статус. Половину јапанских наставника у школама у Сендаиу чине мушкарци. Просечан наставник у Сендаиу је похађао школу 3-5 година а само 70 посто наставника првог разреда и 85 посто петог разреда су добили факултетску диплому. Остатак је добио сертификат за наставнике са двогодишњег колеџа.

Постављамо питање да ли је на одговарајућем степену заступљена професионалност у настави? Одговор лежи у начину на који су наставници обучавани. У припреми јапанских наставника, колеџи углавном обезбеђују обуку у основним областима, као што је језичка уметност, математика и наука. Од амбициозних наставника се очекује да упишу часове за методе предавања ових предмета, али се ово не остварује увек. Усавршавање подучавања се догађа и на послу. На пример сваки нови наставник сарађује блиско са ментором, искусним наставником за годину дана. Ментор је задужен да помогне новим наставницима. Наставници немају прилику да падну под уобичајене шаблоне интеракције зато што је њихов период рада у одређеној школи ограничен на седам година. На крају њиховог мандата у једној школи од њих се захтева да пређу у другачију школу, где они наилазе на другачије наставнике, другачије родитеље и нове групе деце.

Наставнички распоред дозвољава јапанским наставницима честе прилике да се међусобно повезују једни са другима. Наставници проводе неко време када су у школи радећи заједно на плановима лекција и делећи идеје о наставним техникама. Део објашњења зашто су јапански наставници тако искусни је да им њихов распоред дозвољава да уче једни од других и од искуснијих наставника. Тако су јапански наставници у стању да уче и примају помоћ једни од других. Уместо учења формалне теорије, јапански наставници уче њихове вештине преко посматрања и праксе. Јапански наставници генерално претпостављају да сва деца могу да стекну основне школске вештине ако уче марљиво. Наставници планирају њихове лекције са овим на уму. Наставници верују да они морају да покрију тему у потпуности први пут и не би требало да иду на следећи ниво осим ако деца нису савладала претходни. Они презентују сваку тему полако и темељно тако да се свим ученицима даје адекватна могућност да савладају материјал. Праћење и способност груписања унутар разреда се никада не практикује, и мало пажње се даје деци која могу имати специјалне потребе, као што су надарена деца или она која споро уче. Ове дечје потребе морају бити испуњене изван редовних часова кроз клубове и часове након школе, приватно подучавање или похађање специјалних школа, као што је добро познати јапански *juku* (Rohlen & LeTendre, 1998). Кохерентност лекције и различитост наставних техника које користе јапански наставници доприносе успеху цело разредног приступа.

Наравно, сви наставници јапанске основне школе нису подједнако ефектни али уопштено квалитет особа које почињу наставну професију је висок и наставници теже да усаврше њихове вештине кроз све њихове наставне године. Јапанци претпостављају да сви наставници могу да науче како да предају добро ако имају погодно вођење и добре моделе - да се добри наставници стварају а не рађају. Јапанско друштво гледа на наставу више као на занат, пошто се вештине могу усавршити кроз праксу и могу имати користи од подељеног знања и трикова знања. Слично, они очекују да ће сва деца бити у стању да савладају наставни програм ако им се да погодна инструкција и ако вредно уче.

Школа. Једна од првих ствари коју посетилац јапанској основној школи примећује је величина школе и велики број деце у сваком разреду. Просечан разред у Сендаиу укључује 38 ученика у првом разреду и 41 у петом разреду. Од јапанских наставника се очекује да сами руководе разредом ове величине, асистенти се никада не налазе у јапанским основним школама. Типична јапанска учионица има мало намештаја: мали сто и столица за наставника, клупе за децу и телевизор. Можда може да има сталак за часописе, једну или две биљке, ништа друго осим оставе позади за одлагање дечјег материјала. Зидни постери показују на пример правилне положаје за читање, писање и седење приликом говора. Ученици често преуређују цео намештај учионице само на основу фразе наставника („уђите у вашу групу за 4 особе"). Други рад наставника као припрема предавања, консултовање са другим наставницима, исправка радова, одиграва се у наставничкој просторији, где сваки наставник у школи има сто, књиге и други наставни материјал.

Школске зграде су типично направљене од изливеног бетона обојеног неутралном бојом. Суморност зграде и раштрканост учионице су просветљене дечјим цртежима, ауто портретима, дрворезима и другим уметничким производима који су обешени по ходницима или у позадини сваке учионице. Поред велике просторије за наставнике, школа обично има собу за конференцију, гимнастичку дворану и административне канцеларије а постоји и велико двориште за све школске приредбе, вежбу и игру.

3. Фазе у решавању проблема

Теоретичари решавања математичких проблема разликују две врсте математичких проблема: конструктивне проблеме и проблеме доказивања. Решавање конструктивних задатака подразумева конструкцију новог математичког објекта (геометријска фигура или тело, скуп бројева, низ, формула,...) или израчунавање неких његових битних карактеристика (обим, површина, запремина, елементи скупа,...) који задовољавају све постављене услове. Решавање доказних задатака је поступак којим се из датих услова који важе за један или више математичких објеката, коришћењем одређених логичких и математичких правила доказује неко ново својство или однос датих математичких творевина.

Математички проблеми су многима тешки јер не познају методику њиховог решавања. Ни један се посао не може успешно обавити ако се не зна где треба почети, како и којим редом обавити поједине радње.

Пример: Шта треба да ради столар када добије задатак да направи сто одређене димензије?

1) Радник одмах врши припрему и размишља шта му је све потребно за израду стола а то је: дрво, ексери, лепак и алат којим ће да ради.

2) Врши анализу тј. прегледа и одабира материјал који најбоље одговара величини, облику и другим особинама.

3) Планира којим редом ће да ради и на којој машини.

4) Када је све припремио планира када да почне израду, одабира најквалитетнији материјал и по могућности да је најефикаснији али не на рачун квалитета, итд.

5) При крају посла испитује да ли је рад успео, да ли одговара траженом квалитету, да ли је сто могао да се направи квалитетнији и размишља да евентуалне недостатке поправи.

У јапанским школама је најкоришћенији метод решавања проблема који потиче на теоријама које су дали Polya, Dewey и Walles. Базиран је на следећим фазама: разумевање проблема, развој решења, прогрес кроз дискусију и закључак. Сваки од ових корака је веома добро организован. Следећи делови се узимају у обзир: веза претходног садржаја са новим, развој садржаја и почетак другог без икакве видљиве везе, субподела јединица да се омогући спирално учење (Maria & Carlos).

Polya	**Dewey**	**Walles**
1. Разумевање проблема 2. Скицирање акционог плана 3. Извршење плана 4. Разматрање и ретроспектива	1. Експериментисање тешкоћом 2. Дефинисање тешкоће 3. Генерисање могућег решења 4. Доказивање решења резоновањем 5. Верификација решења	1. Припрема 2. Инкубација 3. Илуминација 4. Верификација

Табела 1. Фазе решавања проблема (Polya, Dewey и Walles)

Polya је, користећи фазе приликом решавања проблема, дао и на примерима објаснио један општи алгоритам за решавање проблема у својој књизи „Како ћу решити математички задатак?“.

ПРВО	РАЗУМЕВАЊЕ ЗАДАТКА
ТРЕБА ДА *РАЗУМЕШ* ЗАДАТАК	● *Шта је непознато?* ● *Шта је задато?* ● *Како гласи услов?*
	● Да ли је могуће задовољити услов? Да ли је услов довољан за одређивање непознате? Или није довољан? Можда је преодређен? Или контрадикторан?
	● Нацртај слику! Уведи препознатљиве ознаке!
	● Растави разне делове услова! Можеш ли их написати?

ДРУГО	ПРАВЉЕЊЕ ПЛАНА
ПОТРАЖИ ВЕЗУ ИЗМЕЂУ ЗАДАТОГ И НЕПОЗНАТОГ!	● Да ли си задатак већ видео? Или си исти задатак видео у нешто другачијем облику?
	● *Знаш ли неки сродан задатак?* Да ли знаш која теорема би ти могла бити од помоћи?
	● *Размотри непознату!* Покушај да се сетиш неког познатог задатка који садржи исту или сличну непознату!
АКО СЕ НЕ МОЖЕ НАЋИ НЕПОСРЕДНА ВЕЗА, МОРАЋЕШ ДА РАЗМОТРИШ ПОМОЋНЕ ЗАДАТКЕ.	● *Ево задатка који је сличан твом, а већ је решен! Можеш ли га употребити?* Можеш ли применити његов резултат? Можеш ли применити методу којом је тај задатак решен? Да ли можеш да уведеш неки помоћни елемент који би ти олакшао употребу тог задатка?
	● Можеш ли да другачије формулишеш задатак? Да ли га је могуће изразити на још неки начин? Врати се на дефиниције!
НА КРАЈУ ТРЕБА ДА НАПРАВИШ *ПЛАН* РЕШАВАЊА	● Ако не можеш да решиш постављени задатак покушај прво да решиш неки сродан задатак! Можеш ли да се сетиш неког лакшег задатка који му је сличан? Општији задатак? Специфичнији задатак? Аналогни задатак? Можеш ли да решиш део задатка? Задржи само један део услова, а одбаци други део; када је непозната тако одређена како се она може мењати? Да ли из датих података можеш извући нешто употребљиво? Да ли можеш да се сетиш неких других података који ти могу помоћи у одређивању непознате? Можеш ли да промениш непознату, или друге податке, или ако треба и једно и друго тако да нова непозната и нови подаци буду међусобно ближи?

	● Да ли си искористио све задато? Да ли си искористио услов у потпуности? Да ли си узео у обзир све битне појмове који се налазе у задатку?

ТРЕЋЕ	**ПРИМЕНА ПЛАНА**
ПРИМЕНИ СВОЈ ПЛАН!	● Када користиш план решавања *контролиши сваки корак*! ● Можеш ли јасно видети да је корак исправан? ● Можеш ли доказати да је корак исправан?

<table>
<tr><th>ЧЕТВРТО</th><th>ПРОВЕРА</th></tr>
<tr><td rowspan="3">ПРОВЕРИ ДОБИЈЕНО РЕШЕЊЕ</td><td>● Можеш ли проверити резултат?
● Можеш ли проверити доказ?</td></tr>
<tr><td>● Можеш ли резултат извести другачије?
● Можеш ли га уочити на први поглед?</td></tr>
<tr><td>● Можеш ли резултат или поступак употребити на неком другом задатку?</td></tr>
</table>

Табела 2. Алгоритам за решавање математичких проблема - Polya

Сам алгоритам не може решити ни један проблем али ће помоћи да се издиференцирају фазе у решавању и корак по корак дати проблем трансформише у облик из кога се далеко лакше добијају тражена решења.

На следећем примеру Polya је објаснио свој алгоритам.

Пример. Колика је дијагонала правоуглог паралелопипеда (квадра), коме су познате дужина, ширина и висина?

Овај задатак ће сигурно ученицима бити интересантнији ако га наставник конкретизује, тј. каже ученицима да учионица има облик квадра коме се димензије могу измерити или грубо проценити.

1) Разумевање задатка

Овако Polya замишља разговор између наставника и ученика:

„Шта је непознато?“

„Дужина дијагонале квадра.“

„Шта је задато?“

„Дужина, ширина и висина квадра.“

„Уведи препознатљиве ознаке! Којим словом да означимо непознату?“

„Са x.“

„a,b,c.“

„Како важи услов који веже a,b,c и x?“

„x је дијагонала квадра коме су a,b,c дужина, ширина и висина.“

„Има ли задатак смисла? Мислим тиме *да ли је услов довољан за одређивање непознате?“*

„Да. Ако знамо a,b,c, знамо квадар. Ако је одређен квадар, одређена је и дијагонала.“

2) Прављење плана

Створити идеју приликом решавања задатака је веома битно. Наставник треба ненаметљиво да помогне ученицима да до идеје дођу.

За решавање математичког задатка је потребан материјал који је повезан са раније стеченим знањима. Зато се поставља питање: *Знаш ли неки сличан задатак*?

Пошто постоји огроман број задатака који имају сличности корисно је дати савет: *Размотри непознату! Покушај да се сетиш неког познатог задатка који садржи исту или сличну непознату!*

Ако нам претходна питања ипак не помогну онда морамо задатак преобразити. *Можеш ли задтак другачије изразити? Ако не можеш да решиш постављени задатак покушај прво да решиш неки сличан задатак!*

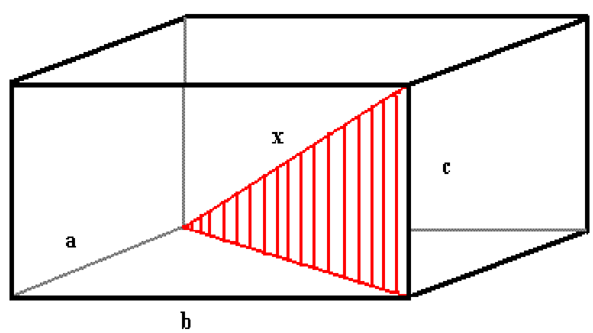
Да ли си искористио све задато? Да ли си искористио услов у потпуности? Ова питања нам помажу да се не удаљимо од првобитног задатка.

Вероватно ће постојати ученици који ће се заинтересовати за задатак и који ће већ имати властите идеје. Насупрот томе постојаће и они ученици код којих наставник неће моћи да открије никакав знак иницијативе. Када ученици не одговарају на постављена питања наставник треба да поново поставља та питања у измењеном облику.

„Ви се срећом сећате једног задатка који сте већ пре решили, а сличан је вашем садашњем. *Зашто га не употребите? Зашто не уведете помоћни елемент да помогнете да се овај задатак употреби?“*

...........(тачкице означавају ћутање ученика)

Ученици ће увести шрафирани правоугли троугао (слика 2).



Слика 2.

„Мислим да је била добра идеја нацртати тај троугао. Сад имате тај троугао, али имате ли непознату?“

„Непозната је хипотенуза тог троугла. Ми је можемо израчунати по Питагориној теореми.“

„Можете, ако су познате обе катете. Јесу ли оне познате?“

„Једна је катета задата, то је *c*. А другу, мислим није тешко наћи. Па да – друга катета је хипотенуза једног другог правоуглог троугла.“

„Врло добро. Сад видим да имате план.“

3) Примена плана

Веома је битно да ученик буде уверен у исправност сваког корака. *Можеш ли јасно видети да је корак исправан? Можеш ли доказати да је корак исправан?*

Ученици ће прво из једног правоуглог троугла, па затим из другог добити:

$\boldsymbol{x^2 = y^2 + c^2}$

$\boldsymbol{y^2 = a^2 + b^2}$

Одатле следи

$\boldsymbol{x^2 = a^2 + b^2 + c^2}$

$\boldsymbol{x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

4) Провера

Резултати до којих долазимо математичким путем, морају одговарати стварности. Зато је важно сваки пут размислити о добијеним резултатима. Велики број ученика не примењује методу провере. Најбоља је провера задатка да га још једном решимо али на други начин. *Можеш ли резултат извести другачије?* Ако на оба начина добијемо исти резултат онда смо задатак сигурно исправно решили. Поновним разматрањем резултата ученици учвршћују своје знање. Ученици могу бити подстакнути да свој начин решавања примене у неким другим случајевима. *Можеш ли резултат или поступак употребити за неки други задатак?* Пошто је наставник за квадар узео учионицу ученици ће вероватно предложити неку другу просторију. Наставник може поставити и овакав задатак : „У квадру је задата дужина, ширина и висина. Нађи удаљеност од његовог средишта до једног врха.“ Тражена удаљеност је половина израчунате дијагонале па ученици тако могу употребити добијени резултат.

Наравно да поједине фазе решавања не треба посебно истицати у сваком проблему. Некада је проблем тако једноставан да решавање не треба рашчлањавати у поједине фазе.

4. Настава математике у Јапану

Мото јапанског предавања је назван: „ *постепено решавање проблема*“. У поређењу са предавањима других земаља јапанско предавање садржи пет активности:

1. ПРЕГЛЕД ПРЕТХОДНЕ ЛЕКЦИЈЕ
2. ПРЕДСТАВЉАЊЕ ПРОБЛЕМА ЗА ТАЈ ДАН
3. УЧЕНИЦИ РАДЕ САМИ ИЛИ У ГРУПАМА
4. ДИСКУТОВАЊЕ О МЕТОДАМА ЗА РЕШАВАЊЕ
5. НАГЛАШАВАЊЕ И УКРАТКО ОПИСИВАЊЕ ГЛАВНИХ ТЕМА

Табела 3. Активности на јапанском предавању

У Јапану, основни предмети као што је математика се увек предају ујутру, када су деца одморна.

Наставник почиње час са кратким прегледом претходне лекције.

Затим, наставник као вешт професионалац који приступа разреду са тихим поверењем презентује проблем са енергијом и ентузијазмом.

Ученици приступају решавању задатка без икакве припреме, без икакавог претходног упуства, изузев објашњења термина о коме се у задатку говори. Ученици покушавају да реше задатке самостално или у групама. Наставници постављају бројна питања. Они истражују и воде. Међу јапанском школском децом готово да не постоји брига о томе да буду критиковани од стране наставника због давања погрешног одговора. Грешке се гледају као на могућности за дискутовање и исправљање погрешне интерпретације. Тако се у јапанским учионицама одржава бурна, ангажована атмосфера. Највећи део часа је посвећен управо решавању проблема од стране ученика. Они најчешће за решавање проблема користе конкретне објекте. Употреба конкретних објеката је потпомогнута чињеницом да су јапански основци снабдевени са *Sansu Setto* (математички сет). Ова кутија је пуна шарених, добро дизајнираних материјала који се користе у лекцијама математике: картонски облици различитих боја, сат, лењир, блокови, коцке и многи атрактивни предмети. Како деца постају старија, јапански наставници користе типове визуелне презентације као делимичних супституа за манипулацију конкретних објеката (цртежи, дијаграми, демонстрације). Ученици траже многе алтернативне путеве за решавање. Они излажу њихове исказане идеје и расправљају између себе. Они су често веома активни у слагању и неслагању са другим мишљењима и учесници су у конструкцији њиховог сопственог знања. Док ученици решавају проблем и дискутују, јапански наставници врло ретко користе временски подсетник и мање пожурују ученике (обавештавају ученике о времену које је остало за задатке или преусмеравају ученичку пажњу). Они стављају нагласак на размишљању о проблему пре него на покушавању да се дође брзо до одговора или решења. Коначно, ученици долазе до правих закључака (задаци се дизајнирају да теку од једног нивоа до следећег).

Затим ученици представљају њихова различита решења целом разреду и процењују значајност и ефективност решења друге деце.

Након тога наставник и ученици описују главне теме.

5. Примери часова математике у Јапану, решавање проблема и оцена часова

5.1. Тема лекције: Површина троугла

Овај час је одржан у петом разреду основне школе. Јапански наставници су се фокусирали на увод у проналажење формуле за површину троугла. Ученици су упознати са појмом површине и они знају како да израчунају површину правоугаоника.

Сегмент	Дужина (мин)	Опис
1	3.6	Презентација проблема
2	14.5	Покушаји ученика да реше проблем на сопствена начин
3	29.0	Дискусија на нивоу разреда о решењима до којих су ученици дошли, наставник води дискусију до коначне формуле
4	5.0	Рад на следећим практичним проблемима из књиге (ученици раде сами)

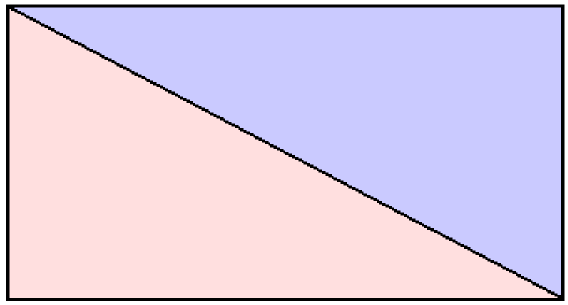
Табела 4. Преглед јапанског предавања о налажењу површине троугла

Јапанско предавање је подељено на четири сегмента: презентација проблема, ученици покушавају да сами реше проблем, разредна дискусија о решењима до којих су ученици дошли и ученици раде сами на даљим практичним проблемима из уџбеника. Наставник готово увек почиње час постављањем проблема и остатак предавања је оријентисан на разумевање и решавање тог проблема.

Јапанско предавање је почело тако што је наставник питао ученике које врсте троуглова су они научили до сада. Ученици су набрајали једнакокраке, једнакостраничне и правоугле троуглове а наставник је стављао папирну верзију сваке врсте на таблу. Он је говорио деци да је њихов задатак да мисле о томе како наћи површину било којег троугла. Онда је делио троуглове од папира као што су они на табли заједно са маказама и лепком. Ова очигледна средства су се користила као алат за размишљање и као објекти рефлектовања проблема. Он је подучавао ученике да не проналазе површину него само да мисле о томе који би био најбољи начин да се пронађе површина. Говорио је ученицима да могу да секу, савијају и вуку троуглове. На тај начин наставник је деци давао минимално директна упуства.

Ученици су радили самостално на својим местима док је наставник записивао шта свако дете ради. Он је подржавао стваралачки приступ. Његов циљ је био да ученици почну да развијају метод за решавање. Ученици су били активно заузети у овом делу, и мада нису били формално подељени у групе, постојала је велика дискусија и интеракција међу ученицима који су седели у близини једни других. Решавали су проблеме на различите начине. Наставник је очекивао да ће ученици сами доћи до формуле. Говорио је мало, пошто је шетао по просторији. Када је разговарао са појединим ученицима примедбе су биле кратке и нејасне. Он је једино давао предлог на пример ученику који је имао потешкоћу у раду са оштроуглим троуглом да покуша да ради прво са правоуглим троуглом. Наставник није давао директно инструкције детету и није говорио деци да ли су њихова решења тачна или нетачна. Улога наставника није улога тутора него истраживача, проучавајући дечје мишљење о проблему.

Онда су се ученици позивали испред табле да покажу и објасне своја решења, односно да објасне њихове методе за проналажење површине различитих врста троуглова. Важно је приметити да је нагласак у Јапану на јавном предавању односно дискусија одговора и тачних и нетачних је јавна и када наставник даје примедбе ученицима такође то чини јавно. Ученичко мишљење у јапанској учионици је вредновано и легитимисано. Ученици су користили изрезане облике и цртање кредом да би објаснили њихове приступе. Један ученик је објаснио да је од два троугла направио правоугаоник (слика 3). Она зна да је површина правоугаоника дужина пута ширина, па пошто постоје два троугла у правоугаонику, површина једног од њих је половина површине правоугаоника. Након што је сваки ученик објаснио своје решење, наставник и остатак разреда су дискутовали о исправности тог решења. Онда је наставник у сарадњи са ученицима, написао формулу која сумира решење ученика, на пример „основа пута висина ⁄ 2“.



Слика 3.

Укупно девет различитих ученика су презентовали решење. У јапанској лекцији се резултати до којих је дошао сваки ученик пишу на табли. Циљ је да се сними метод који је ученик користио. Један ученик је написао формулу „основа ⁄ 2 пута висина“, други „основа пута висина ⁄ 2“. Фокус је на проблему и решењу а формула је представљена само као резиме онога шта је урађено. На крају, наставник је усмерио пажњу на формуле на табли и питао ученике да ли су видели било коју врсту обрасца. Ватрена дискусија је настала када су ученици приметили а онда потврдили да различите информалне формуле које резултују из различитих решења су стварно исти приступ решењима без обзира на врсту троуглова, односно за све троуглове формула за проналажење њихове површине је у основи иста. (Rohlen & LeTendre, 1998)

Наставник је појаснио идеје које су ученици представили разреду. Ученици су имали бројне шансе за укључивање, укључујући шансу да представе своје идеје на табли и да примете да ли је њихов приступ био исти или различит од сваке представљене идеје. У завршних пет минута предавања, ученици су користили формулу да реше неке проблеме у њиховом уџбенику.

Овај час је снимљен и група јапанских и америчких наставника математике је гледала час. Њихова мишљења су активирана кроз процес критиковања актуелног предавања у учионици снимљеног на видео траци (Jacobs & Morita, 2011).

Планови предавања могу да обезбеде увид у то како наставници замишљају и планирају њихова предавања. Наставник чије је предавање снимано је обезбедио писани план предавања. Јапански план је детаљан и истиче кохерентност активности лекције. Јапански план предавања поставља текућу лекцију у контекст лекције које му претходе и следе га и у контекст математичког наставног програма. План почиње изјављивањем да је ова лекција трећа од шест лекција у јединици о површини четвороуглова и троуглова. Претходна лекција је била о примени формуле за проналажење површине паралелограма. Предмет текуће лекције јесте да се научи да троуглови могу бити трансформисани тако да се формула коришћена за проналажење површине четвороугла може применити на проблем проналажења површине троуглова. Следећа лекција је о примени формуле за проналажење површине троуглова. У њиховом планирању, јапански наставници раде да обезбеде да су најважније везе створене од ученика.

Јапански наставници учествују у ученичком размишљању. Размишљање деце увек игра централну улогу у планирању активности предавања јапанских наставника. Јапански наставни план наглашава шта ће ученици мислити а не шта ће наставник рећи или урадити. Користећи формулу која се уобичајено користи за наставне планове у Јапану, наставник дели лекцију на три корака: разумевање проблема, истрага и генерализација. За сваки корак у који улази, постоје четири врсте информација: активности учења кроз које води ученике, очекиване ученичке реакције на активности, просечно време које ће бити утрошено на том кораку и смернице или савет који може да понуди у одговору на ученичке реакције. У наставном плану Јапана постоји колона означена са „очекивана ученичка реакција “ где наставник пажљиво набраја решења, и добра и она мање добра која очекује да ученици предложе. Фасцинантна вежба у планирању припрема наставника је да слуша оно шта ученици имају да кажу и дозвољава му да мисли унапред о томе како да олакша ученицима да разумеју. На јапанском предавању, ученици су провели све време размишљајући и дискутујући о томе како да се изведе формула за проналажење површине троугла. Очекивало се да ће ученицима требати време да конструишу извођење. Ученици то не би разумели у моменталном бљеску увида.

Оцењивање часа од стране јапанских наставника

Јапански наставници који су коментарисали ово предавање су се сложили да овај час представља типичан јапански начин предавања. Наставници помажу ученицима да реше неки проблем тако што користе различите путеве: претходне лекције, информације добијене из лекција. Ти изазовни проблеми су посебно смишљени. Лекција је замишљена као прича и садржаји се надовезују.

Јапански наставници су најчешће дискутовали о наставниковом излагању садржаја, темпу, времену и о употреби материјала учионице.

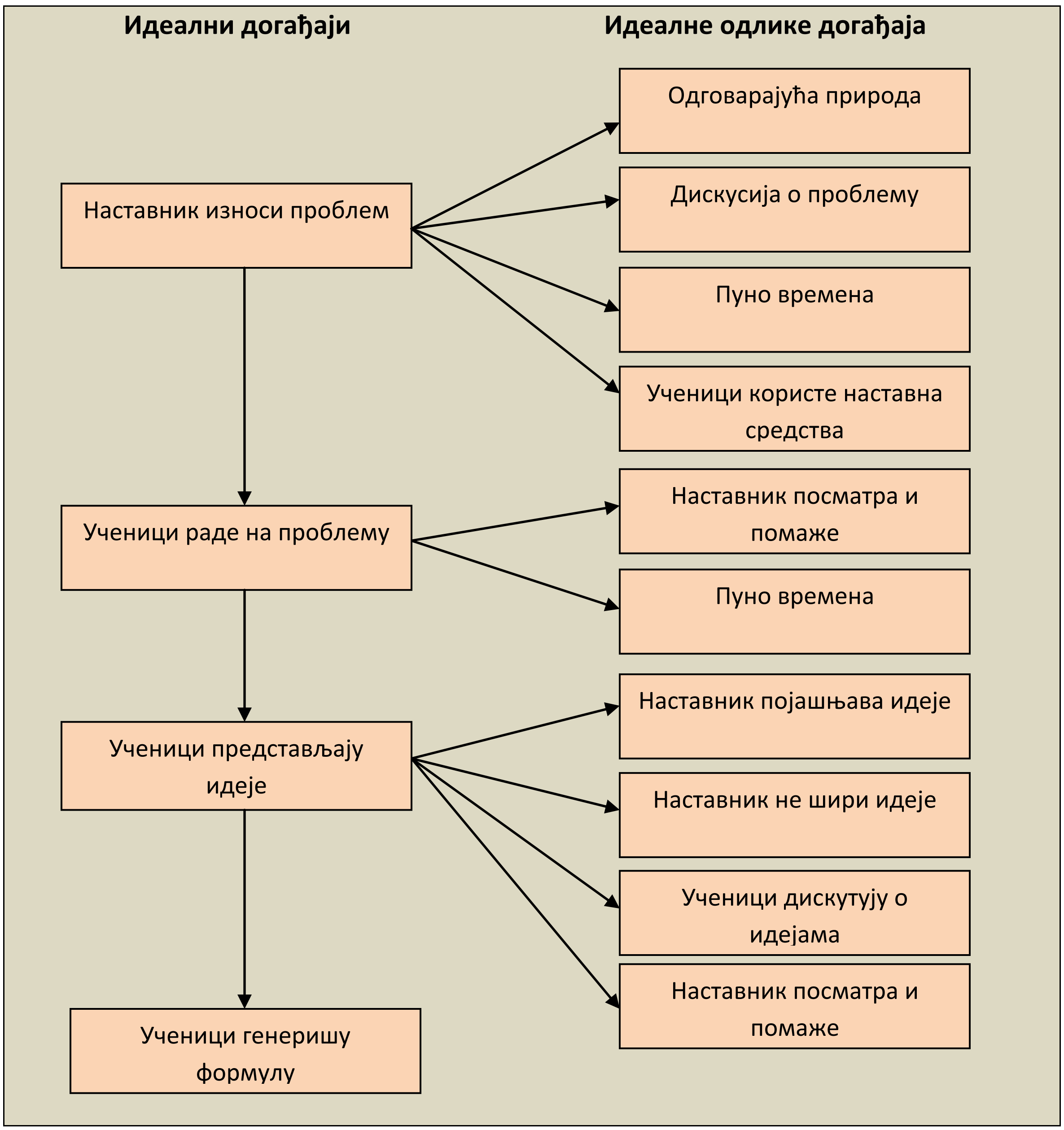
Прво, неке од критичких примедби које су јапански наставници упутили се односе на то да је наставник дао ученицима превише троуглова да раде са њима. Већином су сматрали да разред није активно дискутовао о проблему. Такође, они су критиковали наставника за пропуст да није обезбедио довољно времена за овај процес.

Друго, када су ученици радили на проблему, јапански наставници су се увелико фокусирали на наставниково посматрање и помагање ученицима. Њихови утисци нису били најповољнији. Међутим, потпуно су били задовољни дужином времена које је наставник посветио њиховом самосталном раду.

Треће, у делу када су ученици представили своје идеје и извели формулу, јапански наставници су изразили мишљење да наставник не би требао да проширује идеје ученика у овом делу. Неке од примедби су да наставник не сугерише формулу и укључивање већег броја ученика у дискусију о другим приступима.

Јапански наставници су били веома негативни када су ученици били задужени за практичне проблеме. Многи су се жалили на специфичну природу практичних проблема, коментаришући на пример, да проблеми нису били везани за активности које су управо завршене. Они су често давали строге критике о времену које је потребно за решавање ових проблема и о темпу предавања уопште. Јапански наставници су предлагали да би време у разреду требало бити боље коришћено када би наставник проводио више времена на другим сегментима предавања, што је супротно раду на практичним проблемима.

Наставници који су гледали ово снимљено предавање су саставили идеалну скрипту за ову лекцију. Скрипте су „менталне слике“ или како људи очекују да предавање у учионици изгледа. У њиховој идеалној скрипти, од ученика би требало прво тражити да презентују своје идеје, без икаквог поимања формула осим ако их ученици нису извели. Онда би наставник постепено водио ученике да генеришу формулу. Јапански наставници су саставили идеалну скрипту за ово предавање (слика 4).



Слика 4.

Оцењивање часа од стране америчких наставника

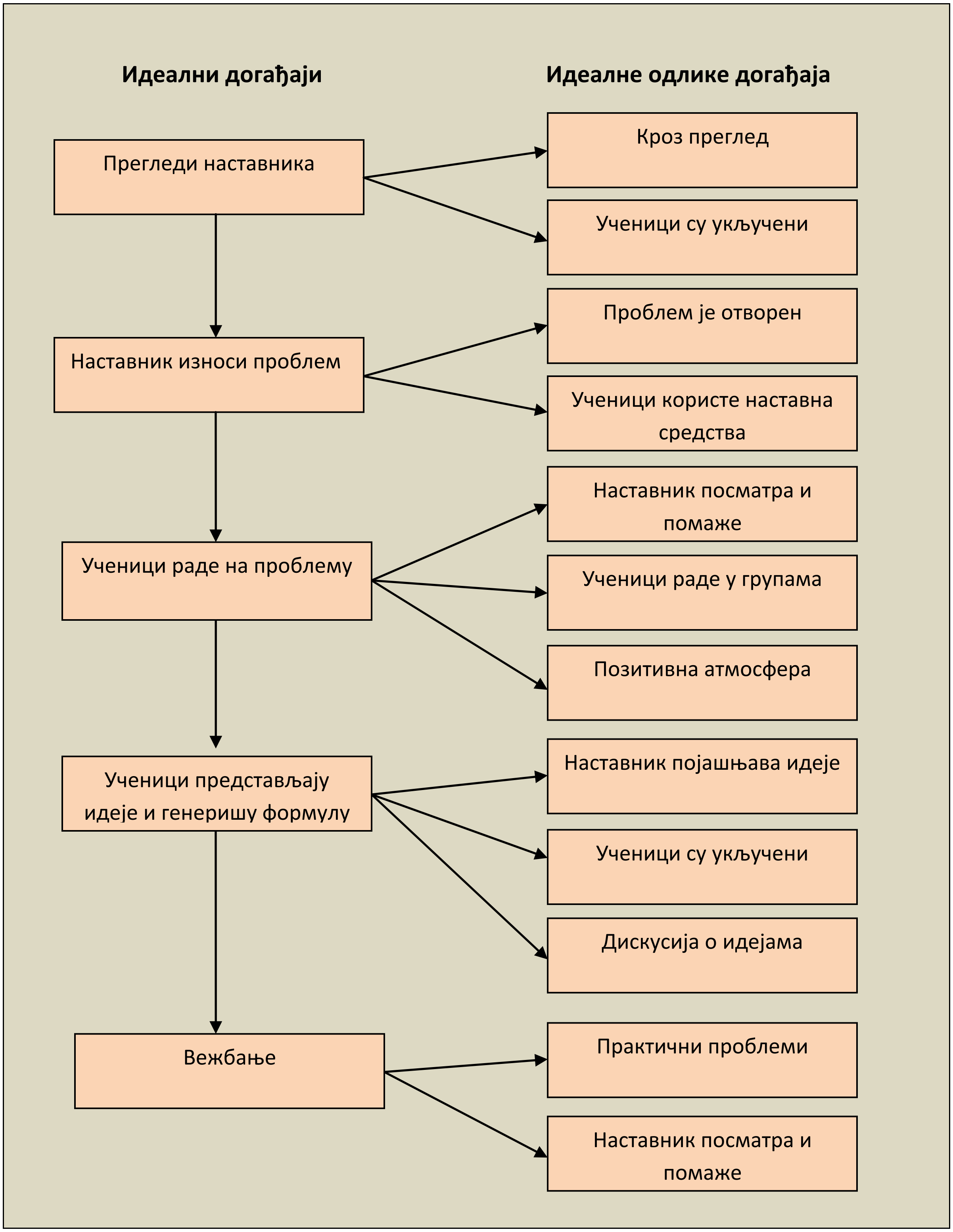
У првом сегменту јапанског предавања амерички наставници су често коментарисали преглед садржаја. Они су желели да виде укљученост ученика у преглед. Амерички наставници су били задовољни како је наставник изнео проблем деци. Они су били позитивно изненађени чињеницом да су ученици решавали проблем и да су им дата наставна средства која су им помогла у решавању.

У другом сегменту тј. делу када су ученици радили на проблему амерички наставници су изнели позитиван став о наставниковом помагању ученицима. Примедба америчких наставника у овом делу је била да су ученици требали да раде заједнички у малим групама.

У трећем сегменту предавања амерички наставници су били веома задовољни наставниковим појашњавањем идеја које су ученици представили разреду и тиме што су ученици могли да упоређују идеје. Сматрали су да је требало постојати више дискусије о идејама ученика.

У четвртом сегменту амерички наставници су изнели позитиван став о наставниковом обезбеђивању времена за вежбање и наставниковом помагању ученицима док раде.

Амерички наставници су саставили идеалну скрипту за ово предавање (слика 5).


Идеални догађаји
Идеалне одлике догађаја
Прегледи наставника
Кроз преглед
Ученици су укључени
Наставник износи проблем
Проблем је отворен
Ученици користе наставна средства
Ученици раде на проблему
Наставник посматра и помаже
Ученици раде у групама
Позитивна атмосфера
Ученици представљају идеје и генеришу формулу
Наставник појашњава идеје
Ученици су укључени
Дискусија о идејама
Вежбање
Практични проблеми
Наставник посматра и помаже

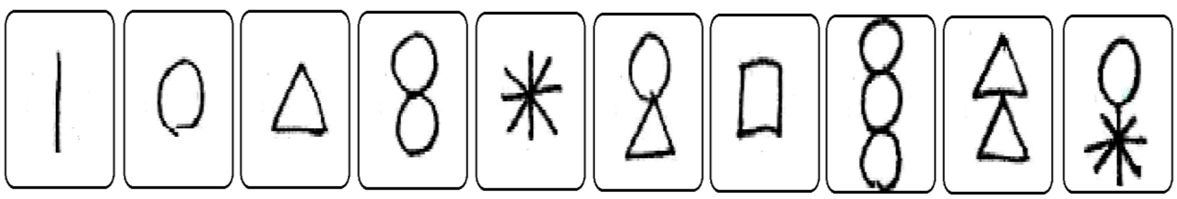
Слика 5.

5.2. Тема лекције: Прости и сложени бројеви

Циљ овог часа је стицање знања из математике о простим и сложеним бројевима и развијање способности ученика да уоче број као последицу других бројева. Такође ово укључује и разумевање чињенице да неки бројеви не могу бити производ других бројева осим јединице и њих самих.

План предавања се састојао из три етапе: уводних активности, активности за задатак 1 и активности за задатак 2 (Miyakawa).

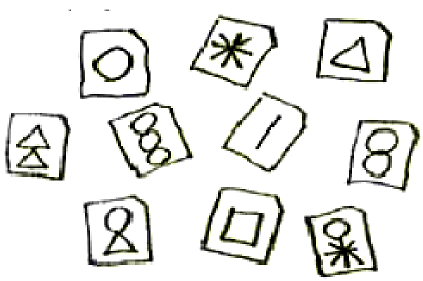
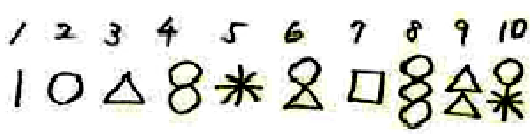
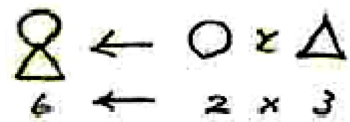
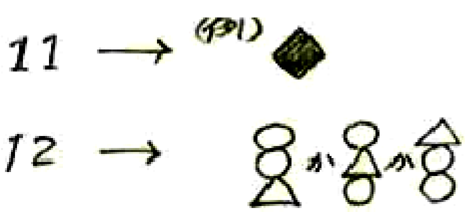
У току уводних активности наставник је поделио папириће који су садржавали различите симболе (слика 6) и два празна папирића.



Слика 6.

Наставник је очекивао да ће ученици доћи до правила која ће им омогућити да изврше задатак 1 (пронађу описна правила која их карактеришу и која ће касније бити потврђена) и задатак 2 (предвиде симболе на празним папирићима). Све ове активности се одвијају кроз предвиђање „игре” као у теорији дидактичких ситуација: налажење јасних правила и налажење симбола за празне папириће.

Циљ лекције је да ученици примете да су цели бројеви сачињени од простих бројева и њихових производа. Ток лекције је садржан у плану.

Ток лекције	**Тачке разматрања**
1. Опазити десет дизајна приказаних на папирићима и одредити шта представљају. 	(1) Поставити десет папирића на таблу насумице. Питати ученике шта примећују. • ако се јави нека идеја везана за бројеве питајте за разлоге
2. Поређати папириће и идентификовати „правила”. 	(2) Водити ученике да гледају како се састављa неки од других симбола. 
3. Користећи откривена „правила” размислити како 11 и 12 могу бити представљени. 	(3) Потврдити да ови дизајни представљају бројеве, а онда размишљати о другим бројевима. • дискутовати и проверити идеје за 11 и 12 • потврдити да 11 мора бити представљено са новим симболом док 12 може бити представљен комбиновањем 2, 2 и 3
4. Направити графикон дизајна бројева до 20.	(4) Користећи правила која су открили, дати ученицима да направе симболе до 20.

Спровођење активности на часу

1) Уводне активности

Пре него што су приступили решавању задатка 1 и задатка 2 ученици су били питани шта су уочили на папирићима који су употребљени у лекцији тако што су их лепили на таблу случајним избором. Ученици су требали да одреде симболе на празним папирићима. Да би ово одредили они су требали да направе предлоге начина којима би карактерисали папириће на бази јасних правила. Након што је наставник јасно питао да ли су уочили неки од критеријума за класификацију, ученици су дали две категоризације: на основу броја симбола на сваком папирићу и на основу комбинације различитих симбола на сваком папирићу. Утврдили су да постоје папирићи са једним, два или три симбола. Кроз учешће у активности и њихове одговоре наставник је развијао њихове интелектуалне способности. У овој етапи видимо да су ученици упознати са симболима и препознају јасно описана правила о разлици између једног симбола и комбиновању симбола.

2) Активности на задатку 1

Наставник је лепио папириће полако један по један на таблу и јасно назначавао поредак папирића с лева на десно, али папирићима још нису биле дате нумеричке вредности. Док је наставник лепио папириће он је тражио од ученика да посматрајући његов начин ређања утврде који папирић треба да буде следећи. Наставник је водио одељење на путу којим је он очекивао да иду и правила која је он очекивао да утврде су у почетку била описна. Ево неких правила која су ученици дали.

1. Неки папирићи имају само један симбол док други имају многоструке симболе.
2. Ако је број велики, број симбола се повећава, са неким изузецима.
3. Јавља се најмање један круг у свака два папирића.
4. Паран број има најмање један круг.
5. Јавља се најмање један троугао у свака три папирића.
6. Бројеви који се множе са три имају најмање један троугао.

7. Прости бројеви увек имају један симбол, не више, и различит од осталих.

8. Сложени бројеви увек имају више од два симбола.

9. Симбол представља број.

10. Симбол представља прост број.

11. Круг представља број „2“.

12. Троугао представља број „3“.

13. Комбиновање симбола представља множење бројева.

Нека од ових правила су делотворнија за други задатак а нека нису. Наставник је потенцирао као интересантно откриће да сваки папирић који одређује паран број има круг. Нека од ових правила су однос између симбола који се ређају.

Тако један ученик каже*: Број „2” има један круг и „4” има два круга, па ја мислим... два и два су четири. И следећи је „6”...*

Наставник*: Круг значи два. Два и два су четири. Да ли разумете? Два и два су четири. Како то још можемо рећи у математици?*

Прва тврдња ученика да „два и два су четири” је двосмислена и такође чини се да ученик није сигуран у свој одговор. Наставник је у овом моменту разјашњавао одговор ученика, наводио ученика да се фокусира на њега говорећи*: Како то још можемо рећи у математици*? Ово питање је наводило ученике да размишљају о односу између састављених симбола и да формулишу идеју. У теорији дидактичких ситуација, наставник је стављао ученике у позицију да формулишу. Ученици су размишљали о датом задатку како би нашли јасна правила у датом поретку папирића и симбола. Дакле, они су требали бити активни.

Ученик*: „2” плус „2” једнако је* „4”, „2” *пута* „2” *једнако је* „4”.

Наставник: *Оба су тачна, зар не?... Ова четири ученика желе рећи да то није тачно. Па, молим вас објасните зашто се против.*

Ученик: *Мислим да је тачно да два круга на четвртом папирићу означавају збир две двојке или производ две двојке, али ако је тако када дођемо до шестог папирића, троугао треба представљати број „3” и добијамо „3” плус „2”, што је пет. Па, не мислим да би ово могло бити сабирање.*

Наставник је потврдио ваљаност овог последњег одговора. Потврдио је ово правило за остале бројеве на табли: 2 x 2 x 2 = 8, 2 x 5 = 10. Затим је наводио на закључак и записао јасно на табли да је правило које они траже множење.

2) Активности на задатку 2

Ове активности су усмерене на проналажење графичког представљања бројева односно на проналажење симбола за представљање бројева 11 и 12.

Претходно утврђено описно правило да прости бројеви увек имају један симбол, не више и различит од осталих омогућава ученицима да предвиде симбол на једанаестом папирићу и да је то један симбол. Један од ученика истиче да бројеви који имају само један симбол као што су бројеви 1, 2, 3, 5, 7 могу бити подељени само са 1 или са самим собом. Тако и 11 може бити подељен само са 1 или са самим собом па папирић мора имати само један симбол, као претходно са кругом, троуглом... Тако су ученици на једанаестом папирићу записали један симбол који се разликује од претходних, тј. нови симбол. Ова битно утврђена чињеница послужиће за разумевање концепта сложених бројева.

Са тачке гледишта теорије дидактичких ситуација у намери да испуне дати задатак, наћи симболе за 11, циљна математичка идеја у лекцији (неки бројеви не могу бити резултат других бријева осим 1 и њих самих) је извучена.

Наставник је задао задатак за проналажење симбола на дванаестом папирићу. Говорио је ученицима да то запишу у својим свескама. Дискутовало се на табли о одговорима као што су шест кругова („○○○○○○”) као и четири троугла („ΔΔΔΔ”). Наставник је само појашњавао идеје ученика и питао друге ученике из разреда да ли су оне исправне или не и зашто. Ученици су уочили да је коришћено нежељено правило сабирање уместо множења. Наставник је питао да ли има одговора који се разликују од ових. Једна ученица је написала ○○Δ. Упитана за разлог она је објаснила да је 4 x 3 = 12 (○○Δ). У одговорима је успостављена социјална интеракција. У последњем делу активности за проналажење симбола за 12, наставник је тражио други начин за представљање броја 12. Како је комбиновање графичких презентација бројева јасно приказано, ученици су свесни идеја. Они су дали одговор Δ○○ и ○Δ○. Наставник је тако покушавао да извуче идеју од ученика да поредак бројева у производу није битан.

Запажања о овом часу

Ово предавање је снимљено како би се одредиле карактеристике доброг предавања у Јапану. Истраживачи и наставници који су посматрали ово предавање су дали своја запажања о овом часу. Сложили су се да су ученицима постављени веома захтевни проблеми и да су ученици дошли до својих решења. Проблем је био добро осмишљен и наставник је добро водио час. Сматрали су да је организација одељења на овом часу могла бити унапређена. Правило множења у овој лекцији је имало главну улогу. Међутим, множење за неке ученике нема боље место у односу на сабирање. Као што је људима природније да користе сабирање за комбиновање симбола него множење, неопходно је створити ситуацију да ученици дају множењу посебно место. Мишљења су да начин постављања питања у задатку 1 није био довољно јасан да наведе ученике да дођу до скривеног правила које важи за поређане папириће. Предност графичког представљања је што визуелно приказује структуру броја и систем који се састоји простих, другим речима, комбиновања простих бројева.

6. Јапанске идеје за решавање познатих проблема

Ево још неколико примера из јапанске праксе који нам одговарају на често постављена питања како да градиво предвиђено наставним програмима учинимо занимљивим за сву децу и како да у учионици успоставимо изазовне ситуације које ће покренути ученике да активно уче и да на критички начин сагледавају градиво које обрађују.

Започињање предавања са само бројевима и математичким симболима може смањити дечју мотивацију да уче математику и може да их примора да се ослањају на учење напамет. Зато је боље почети свако предавање са неком врстом проблема.

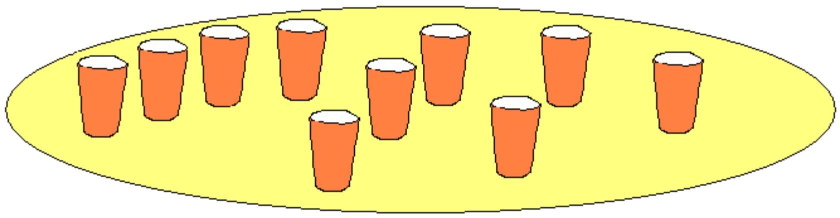
Пример 1: *просек* (први начин)

Наставник је причао ученицима о пет особа које су отишле да пецају. Свако је упецао различит број риба. Наставник је изложио графикон са приказом сваке особе и броја рибе које је та особа упецала. Наставник је онда питао ученике како би они могли да израчунају просечан број упецане рибе. Једна ученица је предложила да би она скупила све рибе заједно и поделила бројем особа. Наставник је питао да ли постоје други начини да се реши проблем. Други ученик је рекао: „Ја бих узео нешто рибе од Б и дао их Е, итд., док се не изједначе бројеви.“ А трећи ученик је рекао: „Ја бих прво сакупио све рибе и онда дао једну свакој особи све док се задња не расподели.“ Други ученик је предложио да прерасподели остатак рибе једнако дугима. Уместо да стопира дискусију након саслушања првог ученичког тачног и стандардног одговора, наставник је задржао децу да размишљају о проблему. Када су они завршили наставник је објаснио и расправио свако од решења. Тако су јапански наставници креирали услове који су вероватно водили дубљем разумевању, наглашавањем како би алтернативне процедуре могле бити коришћене да се реши исти проблем и како би исте процедуре могле бити коришћене да се реше различити проблеми.

Далеко од истицања учења напамет и тренирања, лекције подстичу концептуални приступ решавања проблема.

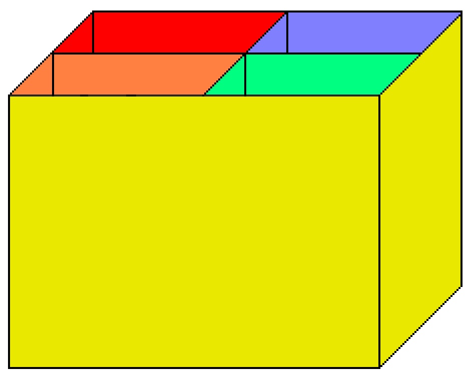
просек (други начин)

Наставница петог разреда је прво презентовала деци проблем. Четворо деце А, Б, Ц и Д су имали 4,3,2 и 1 чашу сока (слика 7). „У просеку, колико чаша сока има свако дете?"



Слика 7.

Наставница је онда изложила велику посуду подељену преградама на четири једнака дела (слика 8).



Слика 8.

Сипала је сваку чашу детета у једну од подељених секција. „Шта ће се десити ако померим ове?" Наставница је показивала на преграде које су делиле посуду. Ученици су одговорили да ће се сок поравнати. Померила је преграде да би течност дошла на једнак ниво. Онда је вратила преграде да покаже како сво четворо деце сада имају исти износ сока. Пропратила је ову демонстрацију са објашњењем концепта „просека".

Пример 2: *Питагорина теорема*

Јапански наставници сматрају да ће се вероватноћа да Питагорина теорема буде примењена учењем напамет увелико смањити ако се користи у различитим проблемима.

Сви смо били у ситуацији да упознамо ученике који су склони да задатке решавају шаблонски, тј. по готовим рецептима. Они решавају задатке тако што механички понављају одређене шеме. Ученици тада не размишљају о задатку и не доносе закључке. Они познају прототип механизма који се примењује и само пазе да се не збуне у редоследу извођења операција. Ученик може да увежба неке поступке али може и све да их заборави чим неко време тај посао не обавља. Зато треба, поред стандардних задатака где је потребно на пример израчунати једну катету ако су познате хипотенуза и друга катета правоуглог троугла или израчунати хипотенузу ако су познате обе катете правоуглог троугла, саставити и задатке где ће ученици бити приморани да мисле а не само да примењују формулу и да схвате да Питагорина теорема има практичну примену. Ево неколико таквих задатака које можемо задати ученицима.

Задатак 1. Да ли је троугао правоугли ако су му странице 9 cm, 12 cm и 15 cm ?

Решење: Користимо Питагорину теорему, односно потребно је да видимо да ли је хипотенуза (највећа страница) на квадрат једнака збиру квадрата над катетама (друге две странице). Очигледно да јесте, јер је:

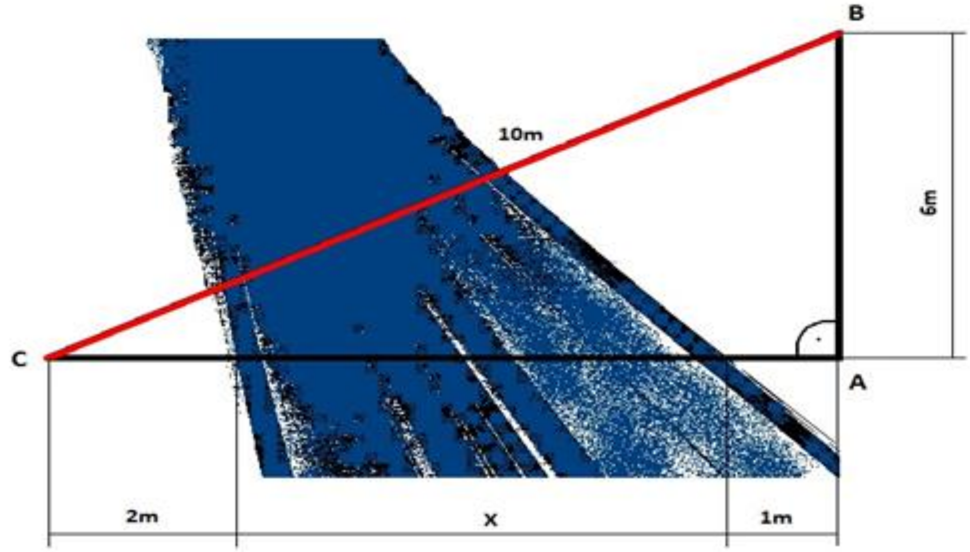
$(15 \text{ cm})^2 = (12 \text{ cm})^2 + (9 \text{ cm})^2$

$225 \text{ cm}^2 = 144 \text{ cm}^2 + 81 \text{ cm}^2$

$225 \text{ cm}^2 = 225 \text{ cm}^2$

Питагорина теорема се примењује и тамо где је неприступачно односно где не можемо да одредимо све елементе. На пример:

Задатак 2. Одредити ширину реке x на слици 9 ако се у њеној близини, односно на растојању од обале реке 1 m налази стуб висине 6 m, а растојање од тачке C до обале реке на супротној страни је 2 m и ако се зна да је дужина жице од тачке C до B 10 m.



Слика 9.

Решење: Израчунаћемо растојање AC по Питагориној теореми.

$(AC)^2 = (BC)^2 – (AB)^2$

$(AC)^2 = (10\ m)^2 – (6\ m)^2$ односно

$(AC)^2 = 64\ m^2$

$AC = \sqrt{64}\ m$

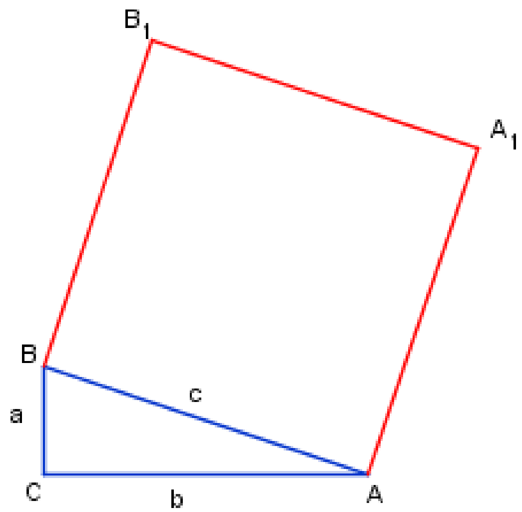
$AC = 8\ m.$

Ширину реке, коју смо обележили са x, израчунаћемо ако од ове дужине одузмемо 1 m (растојање са једне стране обале) и 2 m (растојање са друге обале), па је x = 5 m.

Користећи Питагорину теорему можемо конструисати и неке геометријске фигуре као на пример у следећем случају.

Задатак 3. Конструисати квадрат чија је површина 10 cm^2.

Решење: Ученици треба да размишљају и претпостављају да је тај квардат над хипотенузом, а он је једнак збиру квадрата над обе катете, па оне морају да имају мерне бројеве 1 и 3 односно катете морају да буду a = 1cm i b = 3 cm (слика 10).



$c^2 = a^2 + b^2$

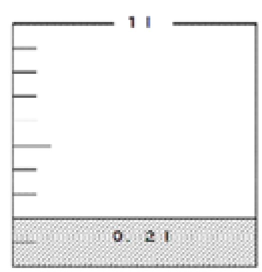
$c^2 = (1\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2$

$c^2 = 10\text{ cm}^2$

Слика 10.

Оваквим начином учимо ученике да исте принципе можемо применити на различите врсте проблема.

Пример 3. Јапански наставници представљају и упоређују децималне бројеве тако што користе конкретне објекте, дијаграме и бројевну праву. Циљ такве активности је да ученици разумеју значење и величину децималних бројева.



Слика 11. Слика 12. Слика 13.

Наставник помаже ученицима да схвате да количина течности у једном литру мерне чаше је два од десет подједнако подељених делова (слика 11). Користећи ову чињеницу ученици треба да направе дијаграм (слика 12), а затим искористе тај дијаграм и 0.2 l представе на бројевној правој (слика 13). Такође, потребно је додати још један децимални број на бројевној правој да би ученици упоредили величине два децимална броја.

Пример 4. Наставница показује разреду два идентична пехара, један је пола пун а други је трећину пун соком. Она пита децу колико сока ће имати ако би сипала сок из два пехара у један. У овом примеру нагласак је на разумевању у релевантности извесних математичких операција, не на проналажењу брзог одговора или решења.

7. Пример јапанског часа математике у Србији

7.1. Тема лекције: Унутрашњи и спољашњи углови четвороугла

„Јапански" час је одржан у Основној школи „Мирослав Антић" у Београду, у шестом разреду.[1] На часу је коришћен следећи наставни материјал: хамер папир, колаж папир, креде, картице са задацима, лепак, маказе, маркери, селотејп, фломастери, шестар, угломер. Час је трајао шездесет минута. На часу су присуствовали директор школе, заменик директора, психолог школе и наставница математике која предаје овом одељењу.

У уводном делу часа, који је трајао пет минута, поделиле смо ученике на пет група уједначених способности и свакој групи смо поделиле по један папир са бројем који је представљао број њихове екипе. Објасниле смо им да ће на овом часу учити кроз игру и такмичење. Задатак ученика је био да уоче одређена својства о унутрашњим и спољашњим угловима четвороугла. Потребно је било урадити дате задатке, који ће се бодовати и на крају ће бити проглашена победничка група. Свакој групи смо поделиле по два конвексна и два неконвексна четвороугла од колаж папира, и хамер папир на коме ће решавати задатке.

Главни део часа трајао је педесет минута. Прва етапа у такмичењу била је квиз знања. Свакој групи смо поставиле по два различита питања. Питања су била везана за лекције које су обрађивали на претходним часовима са циљем да се подсете претходног градива и уведу у наставну јединицу коју смо обрађивале. За сваки тачан одговор група је добијала по један поен. Одговор је могао дати било који члан групе којој је питање било намењено. Док је једна група одговарала на питања ученици из осталих група су слушали,

[1] Реализација часа је спроведена тимски, од стране три наставника.

утврђивали да ли су одговори тачни, и ако је било потребно исправљали су нетачне одговоре. Тако је нека група могла добити додатне поене.
Квиз је садржао следећа питања:

1. Колики је збир унутрашњих углова троугла, а колики је збир спољашњих углова троугла?
2. Колики је збир унутрашњег угла троугла и њему одговарајућег спољашњег?
3. Шта је четвороугао?
4. Набројати његове елементе.
5. Шта је угао?
6. Шта су суседни углови четвороугла?
7. Шта је дијагонала четвороугла?
8. Шта је конвексан четвороугао?
9. Шта су наспрамни углови четвороугла?
10. Да ли суседна темена четвороугла одређују дијагоналу? Зашто?

Углавном су групе тачно одговориле на постављена питања, и свака група је добила поене у квизу. Једна група је погрешно одговорила на једно питање, па је друга група уместо њих дала тачан одговор и тако добила додатни поен.

Друга етапа у главном делу часа била је рад на задацима. Групе су добијале један по један задатак који су били исти за све групе. Циљ је био да група уради задатке што пре. Када су урадили дати задатак, ученици су нас обавештавали да су завршили и ми смо проверавале тачност решења и давале групи следећи задатак. Такође смо нагласиле ученицима да све што раде уредно пишу на хамер папиру, јер ће на крају излагати своја решења на табли.
Списак задатака које су ученици требали урадити:

1) Један конвексан и један неконвексан четвороугао залепити на хамер папир и обележити њихове елементе.
2) Утврдити колики је збир унутрашњих углова датог четвороугла. То утврдити на бар два различита начина. И записати те начине на хамер папиру.
3) Наведите још неке начине помоћу којих можемо утврдити збир унутрашњих углова овог четвороугла.

4) Ако смо утврдили колики је збир унутрашњих углова датог четвороугла, да ли можемо тврдити да то важи за сваки четвороугао? И зашто? Одговор образложити и записати на хамер папиру.

5) Формулисати теорему о збиру унутрашњих углова четвороугла и доказати је.

(Упутство за доказ: нацртати произвољан четвороугао на хамер папиру, обележити његове елементе и нацртати дијагоналу тог четвороугла.)

6) Утврдити колики је збир спољашњих углова датог четвороугла од колаж папира. И све записати на хамер папиру.

7) Формулисати теорему о збиру спољашњих углова четвороугла и доказати је.

(Упутство за доказ: сетити се како смо доказали теорему о збиру спољашњих углова троугла, и искористити дати четвороугао за проверу.)

8) Све што сте написали и нацртали на хамер папиру препишите у школске свеске.

Ученици су прво залепили два четвороугла на хамер папиру и обележили елементе четвороуглова. Затим су почели да траже начине помоћу којих би утврдили збир унутрашњих углова четвороугла. Углавном су ученици дошли до идеје да измере углове угломером па да их саберу, и да отцепе углове датог четвороугла а затим их надовежу и залепе један до другог, и тако добију круг. На основу тога су закључили да је збир унутрашњих углова четвороугла 360º. Неки ученици су се сетили да углове могу конструктивно пренети и сабрати и тако добити збир. Било је и идеја, које су само поменули, да од укупног збира унутрашњих и спољашњих углова одузму спољашње углове.

Код четвртог задатка ученици су имали различита мишљења. Неки ученици су сматрали да на основу једног четвороугла могу тврдити колики је збир унутрашњих углова произвољног четвороугла, док су други ученици закључили да не могу тврдити исто на основу само једног четвороугла. Ми смо их наводиле на одговор да мора постојати неко правило или теорема на основу ког можемо тврдити да важи за све четвороуглове. Једна група је дала одговор да су утврдили збир унутрашњих углова и конвексног и неконвексног четвороугла, и добили су исти збир, па су на основу тога тврдили да важи за све.

Слика 14.

У петом задатку ученици су требали формулисати теорему о збиру унутрашњих углова четвороугла и доказати је. Добили су упутство да нацртају дијагоналу четвороугла. Уз помоћ упутства три групе су самостално доказале теорему, одмах су се сетили да је четвороугао дијагоналом подељен на два троугла, и да је збир унутрашњих углова троугла 180º. Уочили су да је угао четвороугла подељен дијагоналом на два угла, који припадају различитим троугловима. И када су сабрали углове оба троугла добили су збир унутрашњих углова четвороугла. Остале две групе смо наводиле да уоче на шта је подељен четвороугао дијагоналом, и шта знају за унутрашње углове троугла. Па су и они доказали теорему.

У шестом задатку ученици су имали сличне идеје као за унутрашње углове. Неки су угломером измерили углове, али су се и сетили да их могу конструктивно пренети и сабрати (слика 14). Једна група се сетила да је збир унутрашњег угла четвороугла и њему одговарајућег спољашњег угла 180º. И тако су утврдили да је збир спољашњих углова датих четвороуглова 360º.

Седми задатак су две групе решиле без помоћи наставника. Одмах су се досетили да је збир унутрашњег угла четвороугла и њему одговарајућег спољашњег угла 180º. Па су користили чињеницу да меру спољашњег угла добијамо када од 180º одузмемо њему одговарајући унутрашњи угао. И када саберу све спољашње углове добијају збир 360º. Једној групи смо помогле да се присете правила за збир унутрашњег и спољашњег угла, као и осталим двема групама, којима је била потребна детаљнија помоћ. Требале смо их и навести како да искористе то правило.

Затим су ученици у школским свескама записали све оно што су писали на паноу. За сваки тачно урађен задатак групе су добиле по један поен. Док су ученици вредно радили задатке ми смо их обилазиле, пратиле њихов рад и давале упутства групама које нису могле самостално да реше сваки задатак. Након свих урађених задатака, групе су бирале представника који је презентовао решење своје групе на табли, за одређени задатак (слика 15).

Слика 15.

Ученици су на табли презентовали различите начине на основу којих су утврдили колики је збир унутрашњих углова датих четвороуглова, затим су на табли доказивали теорему о збиру унутрашњих углова четвороугла, и на крају теорему о збиру спољашњих углова четвороугла. У току решавања задатака забележиле смо која је група прва тачно урадила одређени задатак, па су представници тих група решавали задатке на табли. Док је једна група презентовала своје решење задатка, остале групе су слушале, и могле су допунити оно што није речено. Ученици су пажљиво слушали ученика који је решавао задатак на табли. Групе су добијале одговарајући број поена за презентације. Доказивање теорема носило је највише поена. Ученици су били веома активни на часу, добро мотивисани и заинтересовани за проналажење различитих решења задатака. Међу ученицима истих група била је успостављена добра комуникација, заједнички су правили пано и украшавали га. Код ученика је био развијен такмичарски дух, интересовали су се да ли је њихова група прва урадила дати задатак.

Начин бодовања (слика 16):

- тачан одговор на питање у квизу – 1 поен
- исправност тј. урађени сви задаци – 8 поена
- иновативност тј. пронаћи нови, другачији начин којим се може утврдити збир унутрашњих углова четвороугла – 2 поена
- естетика паноа – 2 поена
- презентовање различитих начина на основу којих се утврђује збир унутрашњих углова четвороугла – 4 поена
- доказ теореме о збиру унутрашњих углова четвороугла – 5 поена
- доказ теореме о збиру спољашњих углова четвороугла – 5 поена
- урађен задатак на табли, у коме се примењује стечено знање – 4 поена
- излагање ученика на табли – 3 поена

Слика 16.

Након презентовања решења задатака, ученици су радили примере како би утврдили оно што су научили кроз задатке са картица. Поделиле смо свакој групи картице са два иста примера тј. задатка у којима је требало применити теореме о збиру унутрашњих и спољашњих углова.

Пример 1. Дата су три унутрашња угла четвороугла $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 76^\circ$, $\gamma = 123^\circ$. Одреди преостали угао тог четвороугла.

Пример 2. Дата су три спољашња угла четвороугла $\alpha_1 = 60^\circ$, $\beta_1 = 120^\circ$, $\delta_1 = 80^\circ$. Одреди преостали спољашњи угао тог четвороугла.

Све групе су тачно урадиле примере, разумели су шта се од њих тражи. Када су урадили задатке две одабране групе су радиле задатке на табли, а то су биле групе које нису презентовале своја решења задатака. Ученици из осталих група су пратили рад ученика на табли и исправљали грешке. Групе које су радиле задатке на табли добијале су одговарајући број поена. Након урађених примера на табли сабрале смо поене за сваку групу и прогласили која група је победила.

У завршном делу часа, који је трајао пет минута, питале смо групу која је имала најмање поена шта су данас радили на часу, шта су научили, које теореме. И одговорили су да су то теореме о збиру унутрашњих и спољашњих углова четвороугла. Затим смо задале ученицима домаћи задатак, да ураде пар задатака из збирке.

На крају часа, ученицима смо поделиле анкету која је била анонимна. Анкета је садржала следећа питања:

1. Да ли је час био занимљив?
2. Да ли мислиш да би требало бити више оваквих часова?
3. Да ли ти се свидео рад у групи са другим ученицима?
4. Да ли си на овом часу научио/ла више него на стандардним часовима?
5. Да ли је атмосфера на часу била радна?
6. Шта си научио/ла на овом часу?

На првих пет питања ученици су одговарали заокруживањем понуђених одговора: да или не. Анкету је попуњавало двадесет осам ученика.

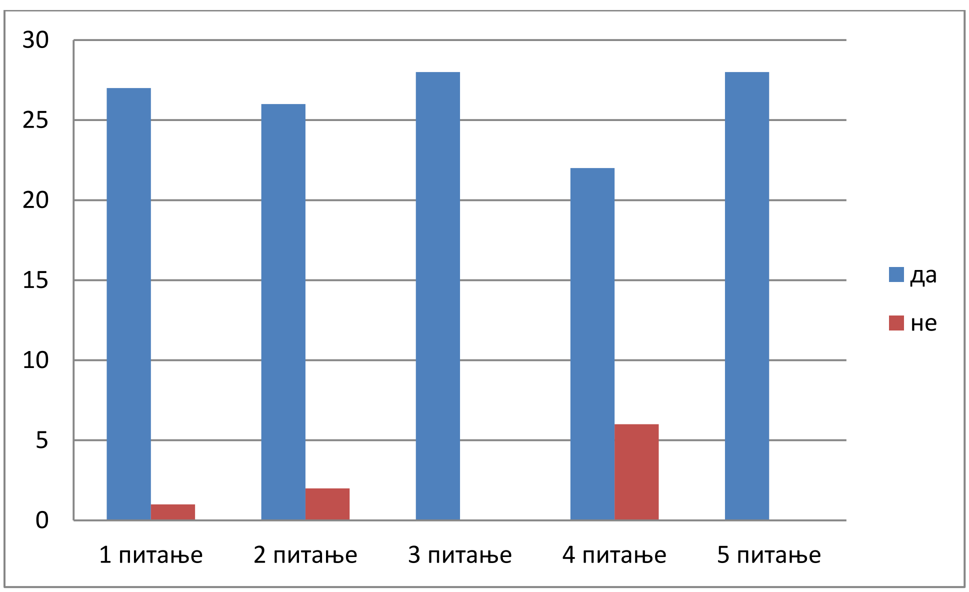


График 1. Резултати анкете за првих пет питања

На основу резултата анкете видимо да су сви ученици одговорили позитивно на питање „Да ли ти се свидео рад у групи?“ и „Да ли је атмосфера на часу била радна?“. И на преостала три питања већина ученика је заокружила да. На питање шта су научили на часу, ученици су најчешће одговарали да су научили пуно тога о четвороуглу, да су научили нешто ново што раније нису знали, али нису конкретно написали шта је то ново што су научили. Неки ученици су тачно написали да су научили колики је збир унутрашњих и спољашњих углова четвороугла. Један ученик је одговорио да је научио да се збир унутрашњих и спољашњих углова може израчунати на више начина. Било је и одговора да су научили да доказују теореме, као и одговора: „да треба да имам више оваквих часова и да је у друштву боље радити“, „да тимски рад увек помаже“, „научили смо да сарађујемо и радимо заједнички и нешто ново о четвороугловима“. Један ученик је написао: „Овде се доста више научи него на часу“. Овај одговор нас наводи на закључак да је ученик на овом часу пажљиво пратио наставу, примио више знања него на уобичајеном часу и да му је атмосфера у тимском раду одговарала. Неки ученици су и усмено прокоментарисали да им је час био занимљив и да треба бити више оваквих часова.

Запажања о овом часу

Сматрамо да је ученицима час био веома занимљив, да су ученици били мотивисани задацима, и да су чланови свих група били су укључени у рад и решавање задатака. Оваквим начином рада ученици су развијали логичко мишљење, дедуктивно закључивање (уопштавање правила), закључивање по аналогији (повезивање претходних знања), развијали су способности вербалног изражавања и презентовања својих идеја, ученици су се оспособљавали за активно учествовање у настави, за анализу и просуђивање туђих одговора. До пуног изражаја су били заступљени и васпитни ефекти: упорност и истрајност. Тиме што су ученици углавном сами долазили до решења, откривали податке, правила и слично, боље ће их памтити и ефикасније ће се њима служити. Било је потребно доста времена за обраду ове теме, али ово време ће се сигурно не само надокнадити него и удвостручити. Овакав начин учења је уверљивији и тиме знања претвара у убеђења.

Моја запажања која се тичу овог часа у смислу примедби се односе на велики број задатака за чије је решавање требало више времена па су ученици можда били мало пожуривани да што пре реше дати задатак, односно требали су имати више времена за размишљање о задацима. Што се тиче начина бодовања, задатак који се односио на иновативност, односно проналажење новог начина за утврђивање збира унутрашњих углова четвороугла је требао носити више поена.

7.2. Примери са интелигентним решењима из наше праксе

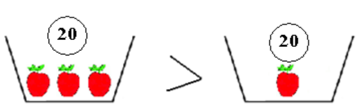
У сваком послу па и у математици можемо пронаћи: нова, нешаблонска, оригинална, краћа, економичнија, лепша односно интелигентнија решења тако да су сједињени практичност и лепота. Ево таквих примера (Шпијуновић, 2005).

Пример 1. У једној корпи има два пута више јабука него у другој. Ако се из сваке корпе узме по 20 јабука, онда ће у првој остати три пута више јабука него у другој. Колико је јабука било у свакој корпи?

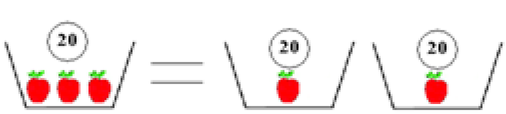
Оригиналност у решавању овог задатка огледа се у коришћењу графичких симбола и решавању задатка полазећи од његовог краја и извођењу обрнутих операција (слика 17).

Решење:

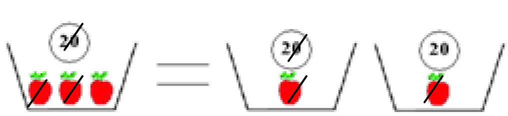
· У једној корпи има три пута више јабука него у другој.



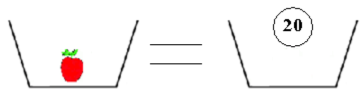
· Вратимо у сваку корпу по 20 јабука па ће прва корпа бити два пута тежа од друге.



· Да би корпе биле у равнотежи, морамо на десну страну додати још једну корпу.



· Скидамо једнаке тежине.



· Одавде се директно види да је у првој корпи било 80, а у другој 40 јабука.

Слика 17.

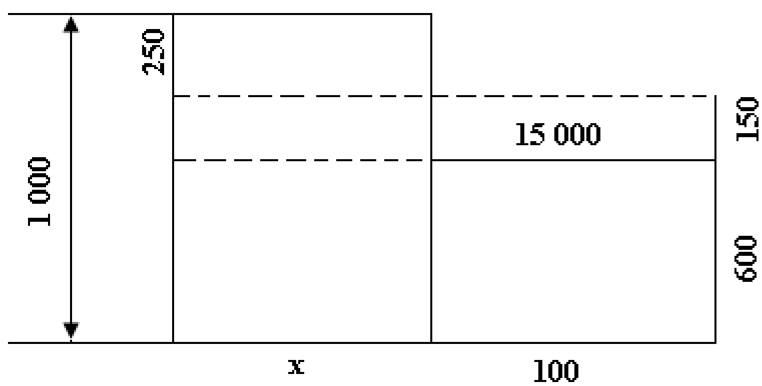
Пример 2. Трговац је помешао извесну количину белог пасуља по цени од 1000 динара и 100 kg пасуља по цени од 600 динара. Колико је било пасуља од 1000 динара ако је 1 kg мешавине продаван по цени од 750 динара?

Флексибилност у решавању овог задатка огледа се у ослобађању од шаблона и коришћењу „методе правоугаоника”.

Решење: Ако је пасуља од 1000 динара било x kg, тада се његова цена може изразити правоугаоником површине 1000 · x, а цена 100 kg пасуља од 600 динара правоугаоником површине 100 · 600 (слика 18).

$$1000 \cdot x + 100 \cdot 600 = (x + 100) \cdot 750$$

$$x = 60 \text{ kg}$$



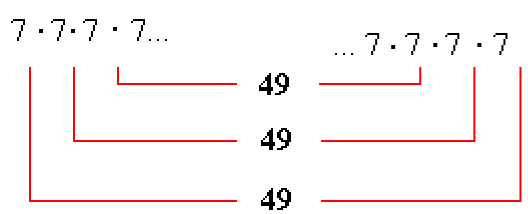
Слика 18.

Пример 3. Којом цифром се завршава производ $7 \cdot 7 \cdot 7 \ldots 7 \cdot 7 \cdot 7$, у коме се број 7 појављује као чинилац 100 пута?

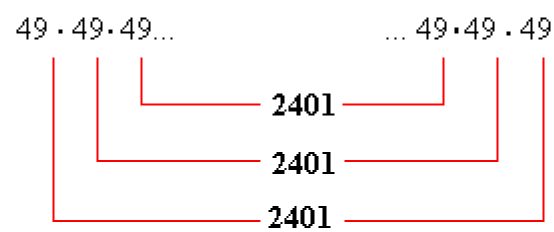
Већина ученика, будући да располаже знањима везаним за множење бројева, овај задатак покушаће решити тако што ће редом множити бројеве 7 · 7 = 49, 49 · 7 = 343, 343 · 7 = ...

Такав поступак је мукотрпан и спор, а и практично неизводљив у оквиру времена којим ученици располажу на часу или на такмичењу. Ево како задатак можемо решити много брже и лакше.

Решење: Међу 100 седмица има 50 парова чији је производ 7 · 7 = 49 (слика 19).



Слика 19.



Слика 20.

Слично томе, може се образовати 25 парова (49 · 49) чији се производ завршава цифром 1 (слика 20). Производ 25 бројева који се завршавају цифром један је, такође број који се завршава цифром 1. (Производ 7 · 7 · 7 ... 7 · 7 · 7 се завршава цифром 1.)

Пример 4. Ученик је прочитао једну трећину књиге и остало му је да прочита још 60 страница. Колико страница има књига?

Могућа редефиниција (употреба података у задатку на нов, другачији начин) овог задатка била би: Две трећине књиге износе 60 страница. Колико страница има књига?

Решење: Наведеном редефиницијом, односно конструкцијом новог задатка, у задатак је уведен податак две трећине, који у првобитном тексту није дат, али који битно олакшава процес решавања постављеног задатка. Ако две трећине књиге имају 60 страница, онда једна трећина књиге (поновна редефиниција) има 30 страница, а цела књига 3 · 30 = 90 страница.

Пример 5. Колико је 26 · 5 ? (циљ је да ученици одговоре усмено и то што пре)

Овај пример илуструје поједностављивање рачуна. Са 5 можемо множити тако што половину броја помножимо са 10.

Решење: 26 · 5 = 130, јер је половина од 26 једнака 13, а 13 · 10 = 130.

8. Резултати јапанских ученика у TIMSS истраживањима

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) – представља међународно проучавање постигнућа ученика основне школе из математике и природних наука (испитује постигнућа ученика у 4. и 8. разреду основне школе). Циљ TIMSS истраживања јесте да се утврде нивои знања ученика из математике и природних наука.

Циљ TIMSS истраживања су значајна зато што омогућавају међусобно поређење образовних система различитих земаља и мере промене у ефикасности образовања једне земље сваке четврте године.

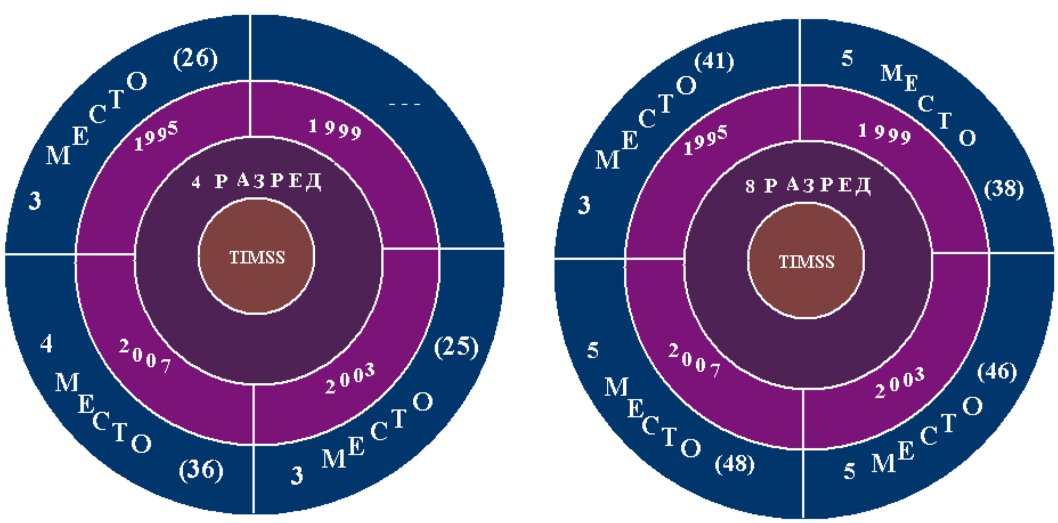


График 2. Достигнућа јапанских ученика у математици

У поређењу са Немачком или САД, просечно достигнуће јапанских ученика осмог разреда указивало је на различит ниво математичког резоновања на коме стварно разумевање математичких концепата и процедура постаје могуће.

Зашто су јапански ученици постигли тако добре резултате?

На први поглед било је из западне перспективе сасвим изненађујуће да су јапански ученици постигли тако пуно. Они су сматрали да се предавања у Јапану одржавају под релативно неповољним околностима:

1) Од првих до деветих разреда, далеко више од 90 посто свих ученика уче заједно у школама.

2) Апсолутно не постоји диференцијација у погледу достигнућа, као ни понављања разреда, нити индивидуализована учења.

3) Сви разреди су релативно велики. Јапански TIMSS разреди су се на пример састојали од 37 ученика у просеку, док су амерички и немачки TIMSS разреди су имали само 27 и 24 ученика.

У поређењу са математичким часовима у САД и Немачкој, јапанска математичка предавања су комплекснија и у исто време конструисана кохерентније. Математичка предавања у Немачкој и у САД су у већем опсегу инструкција у стицању знања, која се усмеравају према мајсторству рачунских процедура. У Немачкој математички концепти који воде до једног решења се развијају у интеракцијама наставници – ученици, а у САД наставници обично представљају концепте праћених вежбањем ових нових концепата. Међутим, мада је јапанско предавање много више захтевније, фокусира се на математичко разумевање и представља виши ниво дидактичког квалитета, важно је такође да се узме ван школски концепт јапанских ученика у разматрања да би се генерисала објашњења за њихов висок ниво достигнућа. Анализа TIMSS студије је открила да више од 60 посто јапанских ученика узимају додатне математичке часове ван школе, и насупрот већине других земаља, не само слаби него и ученици високих и средњих нивоа способности раде ово (Поменула сам да се деца ван школе приватно подучавају или похађају специјалне школе такозване juku). Са овим на уму једна веродостојна претпоставка је, да није само врста инструкције него и специфична подела рада између школе и куће то што даје јапанским ученицима да раде тако добро како је то изашло у TIMSS истраживањима (Köller & Schümer). На математичким предавањима у јавним школама фокус је најистакнутији на трансмисији концептуалног знања, приватне образовне институције, са друге стране, желе да пренесу углавном процедурално знање, тј. рачунске вештине.

Сумирајући ово, изгледа да је сасвим јасно, да је једна важна детерминанта јапанског високог нивоа достигнућа ефективна комбинација когнитивног захтевајућег математичког предавања у јавним школама и веома традиционалног, на примеру рачунских компетенција фокусирајући инструкције у приватним школама.

Закључак

На прагу новог миленијума потреба за математичким знањем суштинска је за живот човека и будући развој друштвене заједнице. Математички начин мишљења је драгоцено стечено математичко образовање примењљиво у другим делатностима. Математика се користи у многим областима наука (биологији, медицини, хемији, механици, социјалним наукама, економији и др.) и омогућава остварење значајних резултата ових наука на добробит човека.

Карактеристика савременог живота је његова динамичност а математичка култура готово императив таквог живота. Пред математиком се данас постављају нови задаци, а настава математике треба да оспособи садашњег ученика за будући живот.

Савремено друштво је изложено снажним и брзим променама којима се прилагођава и систем образовања, најчешће економски развијених земаља. Једна од њих је и Јапан који је несумњиво у њиховом самом врху а математичка постигнућа јапанских ученика су високо оцењена.

Описујући и анализирајући методе у настави математике из јапанске праксе кроз више конкретних примера и приступа конструктивног решавања проблема дошло се до закључка да је посебан циљ наставе математике у Јапану да код ученика развија стваралачко мишљење и посебно способност за самостално решавање проблема.

Решавање проблема је процес који у највећој мери активира све интелектуалне потенцијале ученика. То је процес који обезбеђује примену стечених знања и метода и њихову синтезу у логичан низ чињеница, које из датих услова изводе потребне закључке и корак по корак воде ка добијању крајњег решења.

Главна улога јапанских наставника је да садржаје учини занимљивим свој деци, приступачнијим и осетљивим према њиховом усвајању. Наставник је онај који посматра и помаже, појашњава идеје, подстиче ученике да питају, истражују, експериментишу и тим путем дођу до решења.

На овај начин постиже се већа мотивисаност јапанских ученика, такмичарски дух, примерена могућност сарадње, критичко мишљење, боље схватање суштине и законитости, знања су трајнија и квалитетнија, као и већа примењљивост стечених знања.

Јапанске идеје за решавање познатих математичких проблема говоре о томе да они креирају различите услове који воде њиховом дубљем разумевању и подстичу концептуални приступ у решавању проблема. Ови начини учења су ефикаснији и кориснији али и захтевају од наставника посебну припрему.

Метода у настави математике као приступ конструктивног решавања проблема примењена је на часовима математике у шестом разреду Основне школе „Мирослав Антић" у Београду и сагледани су резултати спроведене анкете. Резултати су потврдили претпоставку о позитивном утицају на квалитет рада у настави код нас, што за резултат има повећано интересовање ученика, њихову мотивацију и креативност у раду, развој логичког мишљења, дедуктивно закључивање, закључивање по аналогији, али и презентовање одговора, критичког мишљења што на крају води повећању стваралачких способности ученика.

Сопствена критичка запажања односе се на то да се поменута метода не може увек применити у настави. Ученици су на поменутом часу пожуривани у раду како би стигли да на време ураде све задатке, тако да их је могло бити мање. Такође, иновативност (као другачији начин долажења до решења) могла је бити више бодована ставка у поменутој анкети.

Иако метода захтева више времена за припрему наставника, резултати ученика као стечена знања до којих су дошли развијајући своје мишљење су вреднија а могућности даљег коришћења и ширења знања су веће.

Посебно задовољство сваком наставнику чини проналажење нових алтернативних путева ширења идеја и развијање способности ученика за решавање проблема конкретизујући објекте као и задовољство презентовања резултата посебно оних оригиналних, интелигентних, економичнијих.

Трагање за иновацијама у настави математике и испитивање тог доприноса на трајност и квалитет ученичког знања је креативан и перманентан процес који може бити унапређен како у образовном процесу тако и кроз сарадњу са другим наставницима. У наставним плановима је потребно обезбедити примењивост ових садржаја у којима креативност наставника долази до изражаја и као такву је више вредновати.

Литература

1. Rohlen, P.T., LeTendre K. G. (1998): *Teaching and Learning in Japan*, Cambridge: Cambridge University press

2. Jacobs, K. J. & Morita, E. (2011): *Japanese and American Teachers' Evaluations of Videotaped Mathematics Lessons*, Journal for Research in Mathematics Education

3. Miyakawa, T. : *A study of "good" mathematics teaching in Japan*, University of Tsukuba

4. Polya, G. (1966): *Како ћу решити математички задатак*?, Загреб: Школска књига

5. Комленовић, Ђ., (2007): *Организација обавезног образовања и наставе географије у Јапану*, Настава и васпитање бр.4, 357 – 520

6. Догдибеговић, Т., Аџемовић – Црепуља, З. (1996): *Компаративна анализа наставних планова обавезног образовања у неким земљама* света (први део), Настава и васпитање бр. 4 – 5, 601 – 847

7. Догдибеговић, Т., Аџемовић – Црепуља, З. (1996): *Компаративна анализа наставних планова обавезног образовања у неким земљама* света (други део), Настава и васпитање бр. 1, 1 – 143

8. Шпијуновић, К. (2005): *Стваралачко мишљење и математичко образовање*, Ужице: Учитељски факултет

9. Maria, D. A. & Carlos, E. C.: *The method of problem solving based on the Japanese and Polya's models. A classroom experience in Chilean schools*, Catholic University of Talea – Chile

10. Köller, O. & Schümer,G. : *Why did Japanese Students do so well in TIMSS? Results from the TIMSS Videotape Study and Information about the Educational System in Japan*, Center for Educational Research

11. Ничковић, Р. (1976): *Учење путем решавања проблема у елементарној настави математике (експериментална провера на примеру наставног програма математике у 1. и 2. разреду основне школе)*, Београд: Научна књига

12. Смолец, И. (1964): *Како да учим математику?*, Загреб: Школска књига

13. Драгичевић, Л. (2000): *Методика наставе математике са ужестручним прилозима за праксу,* Бијељина: Учитељски факултет

14. Петровић, Н., Пинтер, Ј. (2006): *Методика наставе математике*, Сомбор: Педагошки факултет