UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

STOHASTIČKI PROCESI ITO U SEPARABILNOM HILBERTOVOM PROSTORU

EKVIVALENTNOST WIENEROVOM PROCESU

DOKTORSKA DISERTACIJA

Mr. mat. LJILJANA PETRUŠEVSKI

BEOGRAD 1986.

SADRŽAJ

GLAVA IV NEKI POSEBNI SLUČAJEVI STOHASTIČKOG PROCESA ITO

U V O D

Osnovna tema ovog rada su stohastički procesi Ito u separabilnom Hilbertovom prostoru i njihova ekvivalentnost slučajnom procesu Wienera sa vrednostima u istom Hilbertovom prostoru. Takodje se posmatraju spektralni tipovi nekih posebnih stohastičkih procesa Ito.

Prve dve glave su opšteg karaktera. Date su osnovne definicije i teoreme u vezi sa slučajnim promenljivim i slučajnim procesima u Hilbertovom prostoru. Ove osnovne postavke učinjene su, saglasno opštoj teoriji verovatnoće i slučajnih procesa ([5], [19], [21]), na osnovu opšte teorije mere i integrala ([4]).

U glavi III je definisan spektralni tip slučajnog procesa, zatim je definisana ekvivalentnost slučajnih procesa i posebno su razmatrani slučajni procesi ekvivalentni Wienerovom procesu u Hilbertovom prostoru kao što je to učinjeno u [20]. Kraj treće glave je originalan deo rada. Posmatra se stohastički proces Ito u separabilnom Hilbertovom prostoru i njegova ekvivalentnost procesu Wienera u odnosu na koji je on zadat.

Ovaj problem, ali sa aspekta ekvivalentnosti Gausovskih raspodela koje odgovaraju stohastičkom procesu Ito i procesu Wienera u odnosu na koji je on zadat, za realne slučajne procese rešava ЕРШОВ ([10]), a za slučajne procese sa vrednostima u n-dimenzionalnom Euklidskom prostoru R_n СКОРОХОД ([7]). Ю. А. РОЗАНОВ posmatra realni stohastički proces Ito ([20]) što je i bila osnovna ideja za ovaj rad.

U četvrtoj glavi se posmatraju neki posebni slučajevi stohastičkog procesa Ito koji su rešenja zadatih stohastičkih integralnih jednačina. Postavljaju se uslovi pod kojima je stohastički proces Ito ekvivalentan odgovarajućem procesu Wienera. Razmatraju se spektralni tipovi zadatih stohastičkih procesa Ito. I ovo je originalan deo rada izuzev delova koji se odnose na operatornu eksponencijalnu funkciju, evolucionu familiju operatora i samo rešenje zadate stohastičke integralne jednačine. Osnovni rezultati su dati u obliku teorema u ovoj glavi.

G L A V A I

S L U Č A J N E P R O M E N L J I V E S A V R E D N O S T I M A U S E P A R A B I L N O M H I L B E R T O V O M P R O S T O R U

1. OSNOVNE DEFINICIJE.

U ovom delu su date neke osnovne definicije medju kojima centralno mesto zauzima definicija slučajne promenljive koja uzima vrednosti u separabilnom Hilbertovom prostoru. Slučajna promenljiva se definiše kao merljivo preslikavanje iz prostora verovatnoće u Hilbertov prostor kao što je to uobičajeno u literaturi ([5],[21],[23]). Značajno mesto ima i TEOREMA 1. Ona je posledica opšte teorije mere i integrala (videti [4]) i omogućava posmatranje slučajne promenljive kao slabo merljivog preslikavanja iz prostora verovatnoće u separabilan Hilbertov prostor (videti [19]). Na ovaj način se proučavanje slučajnih promenljivih u Hilbertovom prostoru svodi na proučavanje skalarnih slučajnih promenljivih t.j. skalarnih slučajnih funkcija ([19]).

Proizvoljan skup Ω sa nekom σ-algebrom $\mathfrak{U}$ svojih podskupova $A \subseteq \Omega$ nazivamo *m e r l j i v i m* prostorom i označavamo ga sa $(\Omega,\mathfrak{U})$. Nenegativnu σ-aditivnu funkciju definisanu na σ-algebri $\mathfrak{U}$, $P=P(A)$, $A \in \mathfrak{U}$ nazivamo *m e r o m* , a uredjenu trojku $(\Omega,\mathfrak{U},P)$ *p r o s t o r o m s m e r o m* .

Neka je $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ proizvoljan prostor s merom. Označimo sa $\mathfrak{A}^*$ mnoštvo svih skupova oblika $A\cup E'$ gde je $A \in \mathfrak{A}$, a E' je podskup skupa $E \in \mathfrak{A}$ mere $P(E)=0$. Jednostavno je pokazati da je $\mathfrak{A}^*$ σ-algebra. Ako oblast definisanosti mere P produžimo na $\mathfrak{A}^*$, uzimajući da je $P(A\cup E')=P(A)$, P je mera na σ-algebri $\mathfrak{A}^*$ i $(\Omega,\mathfrak{A}^*,P)$ je nov prostor s merom koji nazivamo L e b e g o v i m p r o š i r e n j e m prostora s merom $(\Omega,\mathfrak{A},P)$. Mera P, produžena na σ-algebru $\mathfrak{A}^*$, naziva se Lebegovim produženjem mere P. σ-algebra $\mathfrak{A}^*$ je Lebegovo proširenje σ-algebre $\mathfrak{A}$ (u odnosu na meru P). Ako je mera P na σ-algebri $\mathfrak{A}$ normirana $(P(\Omega)=1)$, tada je normirana mera i njeno Lebegovo produženje.

Neka je $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ prostor s merom i $(\Omega,\mathfrak{A}^*,P)$ njegovo Lebegovo proširenje.

1.-Neka je E' proizvoljan podskup skupa $E \in \mathfrak{A}$ mere $P(E)=0$. Iz same definicije sledi da $E' \in \mathfrak{A}^*$ i $P(E')=0$ $(E'=\theta\cup E'$, θ-prazan skup).

2.-Neka je A' podskup skupa $B' \in \mathfrak{A}^*$ mere $P(B')=0$. Tada $A' \in \mathfrak{A}^*$ i $P(A')=0$. Zaista, iz datih uslova imamo

$$B' = B \cup E'$$

gde je $B \in \mathfrak{A}$ i $E' \subseteq E \in \mathfrak{A}$, $P(E)=0$. Skup $B \in \mathfrak{A}$ je mere

$$P(B)=P(B')=0$$

pa imamo da

$$A' \subseteq B' = B\cup E' \subseteq B\cup E$$

t.j. A'je podskup skupa $B\cup E \in \mathfrak{A}$, mere $P(B\cup E)=0$ odakle, na osnovu osobine 1. sledi naše tvrdjenje.

3. Neka je $A' \in \mathfrak{A}^*$ mere $P(A')=0$. Tada postoji skup $A \in \mathfrak{A}$ mere $P(A)=0$ takav da $A' \subseteq A$. Zaista, iz datih uslova

$$A' = M\cup E'$$

gde je $M \in \mathfrak{A}$, $E' \subseteq E \in \mathfrak{A}$, $P(E)=0$ i $P(M)=P(A')=0$

Odavde sledi da je A' podskup skupa $A=M\cup E \in \mathfrak{A}$ mere $P(A)=0$.

Koristeći navedene osobine jednostavno je dokazati da podskup skupa Ω, $A' \in \mathfrak{A}^*$ ako i samo ako postoji skup $A \in \mathfrak{A}$ takav da je $P(A' \Delta A)=0$.

Neka je $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ proizvoljan prostor s merom. Podskupove skupa Ω koji pripadaju Lebegovom produženju $\mathfrak{A}^*$ σ-algebre $\mathfrak{A}$ nazivamo m e r l j i v i m s k u p o v i m a. Drugim rečima, skup $A \subseteq \Omega$ je merljiv ako i samo ako $A \in \mathfrak{A}^*$ gde je σ-algebra $\mathfrak{A}^*$ Lebegovo produženje σ-algebre $\mathfrak{A}$ (u odnosu na meru P).

Neka je H proizvoljan s e p a r a b i l a n Hilbertov prostor. Minimalna σ-algebra $\mathfrak{B}$ nad otvorenim skupovima tog prostora naziva se Borelovom σ-algebrom, a skupovi $B \in \mathfrak{B}$ Borelovim skupovima. Preslikavanje $\xi=\xi(\omega)$ merljivog prostora $(\Omega,\mathfrak{A})$ sa merom P na σ-algebri $\mathfrak{A}$ u merljiv prostor $(H,\mathfrak{B})$ je m e r l j i v o ako je inverzna slika svakog skupa $B\in\mathfrak{B}$ merljiv podskup u Ω t.j. ako za svako $B \in \mathfrak{B}$

$$\xi^{-1}(B) = \{ \omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B \} \in \mathfrak{A}^*$$

gde je $\mathfrak{A}^*$ Lebegovo produženje σ-algebre $\mathfrak{A}$.
Saglasno opštoj definiciji, funkcija $f=f(t)$ koja vrši preslikavanje iz merljivog prostora $([a,b],\mathfrak{B}_{[a,b]})$ u merljiv prostor $(H,\mathfrak{B})$ je merljiva ako je inverzna slika

$$f^{-1}(B) = \{ t \in [a,b] : f(t) \in B \}$$

skup merljiv u Lebegovom smislu za svaki Borelov skup B separabilnog Hilbertovog prostora H.
Funkcija $\xi=\xi(\omega)$ koja vrši preslikavanje merljivog prostora $(\Omega,\mathfrak{A})$ sa merom P na σ-algebri $\mathfrak{A}$ u Hilbertov prostor H je s l a b o m e r l j i v a ako je za svako $u \in H$ skalarni proizvod $(u,\xi) = (u,\xi(\omega))$ skalarna merljiva funkcija.

Proizvoljan skup Ω sa nekom σ-algebrom $\mathfrak{A}$ svojih podskupova $A \subseteq \Omega$ i definisanom na $\mathfrak{A}$ normiranom merom P: $P(\Omega)=1$, nazivamo p r o s t o r o m v e r o v a t n o ć e . Posmatrajući prostor verovatnoće, elemente $\omega \in \Omega$ nazivamo e l e m e n t a r n i m d o g a d j a j i m a , skupove $A \in \mathfrak{A}$ d o g a d j a j i m a , a meru $P(A)$ v e r o v a t n o ć o m odgovarajućeg dogadjaja A. Prostor verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ je, očigledno, jedan prostor s merom i njegovo Lebegovo produženje je nov prostor verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{A}^*,P)$. Merljivu funkciju definisanu na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ sa vrednostima u merljivom prostoru $(H,\mathfrak{B})$ gde je H separabilan Hilbertov prostor i $\mathfrak{B}$ σ-algebra Borelovih skupova $B \subseteq H$ nazivamo s l u č a j n o m p r o m e n l j i v o m sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Slučajna promenljiva ξ inducira u $(H,\mathfrak{B})$ normiranu meru μ_ξ:

$$\mu_\xi(B) = P(\,\xi^{-1}(B)\,)\ , \quad B \in \mathfrak{B}$$

i samim tim nov prostor verovatnoće $(H,\mathfrak{B},\mu_\xi)$. Mera μ_ξ se naziva r a s p o d e l o m v e r o v a t n o ć e slučajne promenljive ξ. Proizvoljnu funkciju $\xi=\xi(\omega)$ definisanu na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H, kratko ćemo nazivati s l u č a j n i m e l e m e n t o m u Hilbertovom prostoru H.

L E M A 1. Neka su slučajni elementi ξ i η u separabilnom Hilbertovom prostoru H slabo merljive funkcije. Tada su $\|\xi\|^2 = \|\xi(\omega)\|^2$, $\|\xi\| = \|\xi(\omega)\|$ i $(\xi,\eta) = (\xi(\omega),\eta(\omega))$ merljive skalarne funkcije. ($(.,.)$ označava skalarni proizvod u Hilbertovom prostoru H, a $\|.\|$ normu elemenata Hilbertovog prostora indukovanu ovim skalarnim proizvodom.)

D O K A Z Tvrdjenje teoreme neposredno sledi iz jednakosti

$$\|\xi(\omega)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(e_k,\ \xi(\omega))|^2$$

$$(\xi(\omega),\ \eta(\omega)) = \sum_{k=1}^{\infty} (\xi(\omega),\ e_k)(e_k,\ \eta(\omega))$$

koje su ispunjene za svako $\omega \in \Omega$ i gde je $\{e_k\}_1^\infty$ ortonormirana baza separabilnog Hilbertovog prostora H.

T E O R E M A 1. Slučajni element $\xi=\xi(\omega)$ separabilnog Hilbertovog prostora H je slučajna promenljiva ako i samo ako je ξ slabo merljiva funkcija.

D O K A Z Neka je $\xi=\xi(\omega)$ slučajna promenljiva u separabilnom Hilbertovom prostoru H t.j. merljivo preslikavanje iz merljivog prostora $(\Omega,\mathfrak{A})$ u merljiv prostor $(H,\mathfrak{B})$. Za fiksirano $u \in H$, $\Phi(v) = (u,v)$ je neprekidna skalarna funkcija argumenta $v \in H$: $\Phi(v) \to \Phi(v_0)$, kad $v \to v_0$ u smislu jake konvergencije u Hilbertovom prostoru H. Posmatramo skalarnu funkciju $(u,\xi)=\Phi(\xi)=x(\omega)$ definisanu na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{A},P)$. Ako je G otvoren skup skalara, tada je $U=\Phi^{-1}(G)$ otvoren skup u Hilbertovom prostoru H i $x^{-1}(G)=\xi^{-1}(U) \in \mathfrak{A}^*$ gde je $\mathfrak{A}^*$ Lebegovo proširenje σ-algebre $\mathfrak{A}$ u odnosu na meru P. Ovo je dovoljno za merljivost skalarne funkcije $x=x(\omega)=(u,\xi(\omega))$ t.j. inverzna slika svakog Borelovog skupa B skalara je merljiv skup u Ω odnosno $x^{-1}(B) \in \mathfrak{A}^*$. S obzirom na proizvoljnost elemenata $u \in H$, odavde, na osnovu same definicije sledi da je slučajni element $\xi=\xi(\omega)$ slabo merljiva funkcija. Obrnuto, neka je slučajni element $\xi=\xi(\omega)$ separabilnog Hilbertovog prostora H slabo merljiva funkcija i neka je $\{u_k\}_1^\infty$ prebrojiv svuda gust skup tačaka u separabilnom Hilbertovom prstoru H. Tada su $\xi-u_k$, $k=1,2,\dots$ slabo merljive funkcije i na osnovu LEME 1. merljive su realne funkcije $\|\xi\|=\|\xi(\omega)\|$ i $x_k(\omega)=\|\xi-u_k\|=\|\xi(\omega)-u_k\|$, $k=1,2,\dots$ Neka je G otvoren skup u Hilbertovom prostoru H, a ε_k poluprečnik najveće otvorene sfere $S(u_k,\varepsilon_k) \subseteq G$. Ako je $G_k=S(u_k,\varepsilon_k)$, tada

$$\xi^{-1}(G_k) = x_k^{-1}([0,\varepsilon_k]) \in \mathfrak{A}^*$$

Iz jednakosti $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \xi^{-1}(G_k) \in \mathfrak{A}^*$ sledi

$$\xi^{-1}(G) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \xi^{-1}(G_k) \in \mathfrak{A}^*$$

odakle sledi da je slučajni element $\xi=\xi(\omega)$ merljiva funkcija t.j. $\xi=\xi(\omega)$ je slučajna promenljiva u Hilbertovom prostoru H.

Iz ove teoreme sledi da slučajnu promenljivu sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H možemo definisati i kao slabo merljivo preslikavanje iz prostora verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ u Hilbertov prostor H (videti [19]). Slučajni element $\xi=\xi(\omega)$ Hilbertovog prostora H je slabo merljiva funkcija ako i samo ako je $\xi(u)=(u,\xi)$ skalarna slučajna funkcija, pa, bar po nekim pitanjima, proučavanje slučajne promenljive $\xi=\xi(\omega)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H možemo svesti na proučavanje slučajne funkcije $\xi(u)=(u,\xi)$. Slučajnu funkciju $\xi(u)=(u,\xi)$ možemo posmatrati i kao slučajnu promenljivu sa vrednostima u skupu trajektorija H^*-skupu linearnih ograničenih funkcionala definisanih na H t.j. kao merljivo preslikavanje iz prostora verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ u merljiv prostor $(H^*,\mathfrak{B}_{H^*})$ gde je $\mathfrak{B}_{H^*}$ minimalna σ-algebra nad cilindričnim skupovima

$$\{\ v^*=v^*(u)=(u,v)\in H^*:\ [(u_1,v),(u_2,v),\ldots,(u_n,v)]\in\Gamma\ \}$$

gde je Γ-Borelov skup n-dimenzionalnog vektorskog prostora R_n. Neka je ξ slučajna promenljiva sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H. Skalarne funkcije (u,ξ) su merljive i srednja vrednost

$$A(u) = E(u,\xi)=\int_\Omega (u,\xi(\omega))\ P(d\omega)$$

je linearan funkcional na Hilbertovom prostoru H. Ako se on može predstaviti u obliku

$$A(u) = E(u,\xi) = (u,A),\quad A\in H \tag{1}$$

kažemo da je slučajna promenljiva $\xi=\xi(\omega)$ **s l a b o i n t e g r a b i l n a** i

$$A = (S)\int_\Omega \xi(\omega)\ P(d\omega)$$

je njena **s l a b a s r e d n j a v r e d n o s t**. Korelaciona funkcija slučajne funkcije $\xi(u)=(u,\xi)$

$$B(u,v) = E\ [(u,\xi)-A(u)]\overline{[(v,\xi)-A(v)]}$$

je bilinearan pozitivan funkcional. Ako je on neprekidna funkcija svojih argumenata $u,v \in H$, može se predstaviti u obliku

$$B(u,v)=(B_*u,v)$$

gde je B_* linearan ograničen pozitivan operator u separabilnom Hilbertovom prostoru H koji nazivamo korelacionim operatorom slučajne promenljive ξ.

Slučajna promenljiva ξ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H je G a u s o v s k a ako je za svako $u \in H$ skalarni proizvod (u,ξ) Gausovska slučajna promenljiva. Posmatrajmo Gausovsku slučajnu promenljivu ξ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H i za $u,v \in H$ jednakost

$$E\,[(u,\xi)-(v,\xi)]^2 = A^2(u-v) + B(u-v,u-v) \qquad (2)$$

Za svako fiksirano $\omega \in \Omega$, skalarni proizvod (u,ξ) je neprekidna funkcija od $u \in H$, a kako se radi o Gausovskim slučajnim promenljivim odavde sledi neprekidnost u srednjem kvadratnom t.j

$$E\,[(u,\xi)-(v,\xi)]^2 \to 0 \quad \text{kad} \quad \|u-v\| \to 0$$

Iz jednakosti (2) sledi neprekidnost srednje vrednosti $A(u) = E(u,\xi)$ što je dovoljno za slabu integrabilnost slučajne promenljive ξ. Dakle, svaka Gausovska slučajna promenljiva ξ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H je slabo integrabilna i njena slaba srednja vrednost je element $A \in H$ takav da je

$$E(u,\xi) = \int_\Omega (u,\xi)\, P(d\omega) = (u,A)$$

što simbolički pišemo

$$A = (s) \int_\Omega \xi(\omega)\, P(d\omega)$$

Neka je $(\Omega,\mathfrak{U},P)$ prostor verovatnoće, H-separabilan Hilbertov prostor i $\mathfrak{B}$ σ-algebra Borelovih skupova Hilbertovog prostora H. Skup slučajnih promenljivih definisanih na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{U},P)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H t.j. merljivih preslikavanja iz prostora verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ u merljiv prostor $(H,\mathfrak{B})$ je linearni vektorski prostor. Množenje skalarom slučajne promenljive ξ je definisano pomoću množenja skalarom u Hilbertovom prostoru H:

$$\alpha\ \xi = \alpha\ \xi(\omega)$$

Hilbertov prostor H je linearan vektorski prostor.Za proizvoljne slučajne promenljive ξ i η sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H i proizvoljne skalare α i β, $\alpha\ \xi + \beta\ \eta$ je slučajna promenljiva sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H.Ovo tvrdjenje je neposredna posledica TEOREME 1. i jednakosti

$$(\ u,\ \alpha\ \xi + \beta\ \eta) = \bar{\alpha}\ (u,\xi) + \bar{\beta}\ (u,\eta)$$

Odavde jednostavno sledi naše tvrdjenje da je skup slučajnih promenljivih definisanih na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H linearan vektorski prostor.

Ako su $\xi=\xi(\omega)$ i $\eta=\eta(\omega)$ slučajne promenljive na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H, tada je $\xi-\eta$ slučajna promenljiva, $\|\ \xi-\eta\ \|$ realna slučajna promenljiva i skup

$$\{\ \xi = \eta\ \} = \{\ \omega :\ \|\ \xi(\omega)-\eta(\omega)\ \| = 0\ \} \in \mathfrak{A}^*$$

t.j. on je merljiv.

Ako je $P\{\xi=\eta\}=1$ za slučajne promnljive ξ i η kažemo da su e k v i v a l e n t n e . Jednostavno je videti da je ovako definisana ekvivalentnost medju slučajnim promenljivim relacija ekvivalencije u skupu slučajnih promenljivih definisanih na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H, pa možemo, kada se ukaže potreba za tim, umesto slučajnih promenljivih posmatrati njihove klase ekvivalencije i pod slučajnom promenljivom podrazumevati celu klasu medjusobno ekvivalentnih slučajnih promenljivih.

Uočimo niz $\{ \xi_n \}_1^\infty$ slučajnih promenljivih sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Za niz $\{ \xi_n \}_1^\infty$ kažemo da konvergira s k o r o i z v e s n o ka slučajnoj promenljivoj ξ ako je

$$P\{ \omega \in \Omega: \xi_n(\omega) \to \xi(\omega) \text{ kad } n \to \infty \} = 1 \qquad (3)$$

gde konvergenciju posmatramo kao jaku konvergenciju u Hilbertovom prostoru H. Dakle, niz slučajnih promenljivih konvergira skoro izvesno ka slučajnoj promenljivoj ξ ako i samo ako je

$$P\{ \omega \in \Omega: \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| \to 0, \text{kad } n \to \infty \} = 1 \qquad (4)$$

t.j. ako i samo ako niz realnih slučajnih promenljivih $\{\|\xi_n-\xi\|\}_1^\infty$ skoro izvesno konvergira nuli. Koristeći nejednakost

$$\| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| \geq | \|\xi_n(\omega)\|-\|\xi(\omega)\| |$$

jednostavno se dobija da iz skoro izvesne konvergencije niza slučajnih promenljivih $\{\xi_n\}_1^\infty$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru sledi skoro izvesna konvergencija niza $\{\|\xi_n\|\}_1^\infty$ realnih slučajnih promenljivih. Takodje je jednostavno videti da iz skoro izvesne konvergencije niza slučajnih promenljivih $\{\xi_n\}_1^\infty$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H, sledi za svako $u \in H$ skoro izvesna konvergencija niza $\{ (u,\xi_n) \}_1^\infty$ skalarnih slučajnih promenljivih. Niz $\{\xi_n\}_1^\infty$ slučajnih promenljivih sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H k o n v e r g i r a u v e r o v a t n o ć i ka slučajnoj promenljivoj ξ ako za za svako $\varepsilon > 0$

$$P\{ \| \xi_n-\xi \| > \varepsilon \} \to 0 \quad \text{kad } n \to \infty \qquad (5)$$

Očigledno je da niz slučajnih promenljivih $\{\xi_n\}_1^\infty$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H konvergira u verovatnoći ako i samo ako niz $\{ \| \xi_n-\xi \| \}_1^\infty$ realnih slučajnih promenljivih konvergira u verovatnoći ka nuli. Iz skoro izvesne konvergencije niza $\{\xi_n\}_1^\infty$ ka slučajnoj promenljivoj ξ sledi njegova konvergencija u verovatnoći ka slučajnoj promenljivoj ξ. Ako niz $(\xi_n)_i$ slučajnih promenljivih konvergira u verovatnoći ka slučajnoj promenljivoj ξ, postoji njegov delimični niz koji konvergira skoro izvesno ka slučajnoj promenljivoj ξ.

2. SREDNJA VREDNOST SLUČAJNE PROMENLJIVE SA VREDNOSTIMA U SEPARABILNOM HILBERTOVOM PROSTORU

U prethodnom delu je definisana slaba srednja vrednost i posebno razmotrena slaba srednja vrednost Gausovske slučajne promenljive kao što je to uradjeno u [19]. Ovde se definiše srednja vrednost slučajne promenljive kao Lebegov integral funkcije sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru ([5],[21],[23]) Oslanjajući se na opštu teoriju mere i integrala ([4]) detaljno su izvedene osnovne osobine srednje vrednosti i razmotreni neki osnovni stavovi.

Neka je, kao do sada, $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ prostor verovatnoće i H separabilan Hilbertov prostor. Slučajni element ξ na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H naziva se p r o s t o m s l u č a j n o m p r o m e n l j i v o m ako uzima konačno mnogo vrednosti u_i na medjusobno disjunktnim skupovima E_i , $i=1,2,\dots,n$ iz σ-algebre $\mathfrak{A}$ čija je unija ceo skup Ω t.j.

$$E_i = \xi^{-1}(u_i) = \{ \omega : \xi(\omega)=u_i \} \in \mathfrak{A}$$

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \text{za} \quad i \neq j \quad \text{i} \quad \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega .$$

Ovako definisan slučajni element ξ Hilbertovog prostora H je očigledno slabo merljivo, pa samim tim i merljivo preslikavanje iz merljivog prostora $(\Omega,\mathfrak{A})$ u merljiv prostor $(H,\mathfrak{B})$ što opravdava naziv "slučajna promenljiva". I više od toga, za svako $B \in \mathcal{B}$,

$$\xi^{-1}(B) = \{ \omega: \xi(\omega) \in B \} \in \mathcal{U} .$$

Prostu slučajnu promenljivu možemo predstaviti u obliku

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} u_i \, I_{E_i} \tag{6}$$

gde su I_{E_i} - indikatori dogadjaja $E_i \in \mathcal{U}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Niz prostih slučajnih promenljivih $\{\xi_n\}_1^{\infty}$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H konvergira skoro izvesno ka slučajnom elementu ξ ako je

$$P\{ \omega \in \Omega: \xi_n(\omega) \to \xi(\omega), \text{ kad } n \to \infty \} = 1$$

gde konvergenciju $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$, kad $n \to \infty$ posmatramo kao jaku konvergenciju u Hilbertovom prostoru H.

TEOREMA 2. Slučajni element $\xi = \xi(\omega)$ separabilnog Hilbertovog prostora H je slučajna promenljiva ako i samo ako postoji niz $\{\xi_n\}_1^{\infty}$ prostih slučajnih promenljivih koji skoro izvesno konvergira ka slučajnom elementu ξ.

DOKAZ . Neka je $(\Omega,\mathcal{U},P)$ prostor verovatnoće i na njemu $\xi = \xi(\omega)$ slučajna promenljiva sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H.Neka je $\{u_n\}_1^{\infty}$ prebrojiv svuda gust skup u Hilbertovom prostoru H. Za dato $\varepsilon > 0$, označimo sa

$$B_n = \{ \omega \in \Omega: \| \xi(\omega)-u_n \| < \varepsilon \}$$

i sa

$$A_n = B_n \, B_{n-1}^{c} \ldots B_1^{c} \qquad \text{t.j.}$$

$$A_n = \{ \omega \in \Omega: \| \xi(\omega)-u_n \| < \varepsilon \text{ i } \| \xi(\omega)-u_k \| \geq \varepsilon, \ 1 \leq k \leq n \}$$

Očigledno su B_n, $n=1,2,\ldots$ i A_n, $n=1,2,\ldots$ merljivi skupovi pri čemu su A_n, $n=1,2,\ldots$ uzajamno disjunktni i

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$$

Skupove A_n, $n=1,2,\ldots$ kao merljive skupove možemo predstaviti u obliku

$$A_n = C_n \cup E_n'$$

gde su medjusobno disjunktni skupovi $C_n \in \mathfrak{U}$, $n=1,2,\dots$ i skupovi $E_n' \subseteq E_n \in \mathfrak{U}$, $P(E_n)=0$. Tada imamo da je:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \cup E'$$

gde $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{U}^*$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathfrak{U}$ i $E' = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n'$ je podskup skupa $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{U}$ mere $P(E)=0$. Odavde imamo konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n)$$

pa se za svako $\varepsilon > 0$ može odrediti $N=N(\varepsilon)$ tako da je

$$P(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} C_n) < \varepsilon \quad .$$

Ako definišemo prostu slučajnu promenljivu sa

$$\xi_\varepsilon(\omega) = \begin{cases} u_n \ , & \omega \in C_n \ , \ n \leqslant N \\ 0 \ , & \omega \notin \bigcup_{n=1}^{N} C_n \end{cases}$$

imamo da je

$$P\{ \| \xi(\omega)-\xi_\varepsilon(\omega) \| > \varepsilon \} < \varepsilon \qquad (7)$$

jer

$$\{ \| \xi(\omega)-\xi_\varepsilon(\omega) \| > \varepsilon \} \subseteq \{ \| \xi(\omega)-\xi_\varepsilon(\omega) \| \geqslant \varepsilon \} \subseteq \bigcup_{N+1}^{\infty} C_n \cup E$$

Dakle, za svako $\varepsilon > 0$, postoji prosta slučajna promenljiva $\xi_\varepsilon = \xi_\varepsilon(\omega)$ takva da važi relacija (7). Neka je ε_n proizvoljan monotono opadajući niz brojeva takvih da $\varepsilon_n \to 0$ kad $n \to \infty$. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ počev od nekog n_0 , $\varepsilon_n < \varepsilon$ pa

$$\{ \| \xi_{\varepsilon_n}-\xi \| > \varepsilon \} \subseteq \{ \| \xi_{\varepsilon_n}-\xi \| > \varepsilon_n \} \ , \ n > n_0$$

i

$$P\{ \| \xi_{\varepsilon_n}-\xi \| > \varepsilon \} \leqslant P\{ \| \xi_{\varepsilon_n}-\xi \| > \varepsilon_n \} < \varepsilon_n \ , \ n > n_0$$

Odavde sledi

$$P\{ \| \xi_{\varepsilon_n}-\xi \| > \varepsilon \} \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty$$

t.j. niz prostih slučajnih promenljivih ξ_{ε_n} konvergira u verovatnoći i, prema poznatim stavovima, neki njegov delimični niz konvergira skoro izvesno ka slučajnoj promenljivoj ξ. Obrnuto, neka je na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{U},P)$, $\{\xi_n\}_1^\infty$ niz prostih slučajnih promenljivih koji skoro izvesno konvergira slučajnom elementu ξ. Skup na kome ξ_n ne konvergira je merljiv skup $E \in \mathfrak{U}^*$ mere $P(E)=0$. Neka je G otvoren skup Hilbertovog prostora H i G_n skup elemenata $u \in G$ takvih da otvorena kugla $S(u,1/n) \subseteq G$. Za $\omega \notin E$, $\xi(\omega) \in G$ ako i samo ako za sve dovoljno velike k $\xi_k(\omega)$ pripada nekom G_n t.j.

$$\xi^{-1}(G) \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \xi_k^{-1}(G_n) \setminus E$$

Za prostu slučajnu promenljivu ξ_k, $\xi_k^{-1}(G_n) \in \mathfrak{U}$ odakle sledi da $\xi^{-1}(G) \in \mathfrak{U}^*$ što je dovoljno za merljivost slučajnog elementa ξ t.j. za svaki Borelov skup $B \subseteq H$

$$\xi^{-1}(B) \in \mathfrak{U}^*$$

i $\xi = \xi(\omega)$ je slučajna promenljiva.

Za prostu slučajnu promenljivu

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} u_i I_{E_i} \quad (E_i \cap E_j = \theta \text{ za } i \neq j \text{ , } \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega \text{)}$$

kažemo da je i n t e g r a b i l n a i njen i n t e g r a l definišemo na sledeći način:

$$\int_\Omega \xi(\omega) \, P(d\omega) = \sum_{i=1}^{n} u_i \, P(E_i) \tag{8}$$

Integral

$$E\,\xi = \int_\Omega \xi(\omega) \, P(d\omega)$$

nazivamo s r e d n j o m v r e d n o š ć u proste slučajne promenljive ξ. Jednostavno je videti da za prostu slučajnu promenljivu ξ, $E\,\xi \in H$ i

$$\|E\xi\| = \|\int_\Omega \xi(\omega) \, P(d\omega)\| \leq \int_\Omega \|\xi(\omega)\| \, P(d\omega)$$

Za proizvoljnu slučajnu promenljivu ξ kažemo da je i n t e g r a b i l n a ako postoji niz $\{\xi_n\}_1^\infty$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| P(d\omega) = 0 \qquad (9)$$

Iz uslova (9) imamo da je niz

$$E\,\xi_n = \int_\Omega \xi_n(\omega)\, P(d\omega)$$

elemenata Hilbertovog prostora H konvergentan (u smislu jake konvergencije) i i n t e g r a l slučajne promenljive ξ definišemo:

$$\int_\Omega \xi(\omega)\, P(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \xi_n(\omega)\, P(d\omega)$$

Integral

$$E\,\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\, P(d\omega)$$

nazivamo s r e d n j o m v r e d n o š ć u slučajne promenljive ξ. Ovako definisana srednja vrednost slučajne promenljive $\xi = \xi(\omega)$ ne zavisi od izbora niza prostih slučajnih promenljivih koji skoro izvesno konvergira ka ξ. Zaista, neka su $\{\xi_n\}_1^\infty$ i $\{\eta_n\}_1^\infty$ dva niza prostih slučajnih promenljivih koji skoro izvesno konvergiraju ka slučajnoj promenljivoj ξ i neka je

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| P(d\omega) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| \eta_n(\omega)-\xi(\omega) \| P(d\omega) = 0$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \xi_n(\omega)\, P(d\omega), \qquad B = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \eta_n(\omega)\, P(d\omega)$$

Iz nejednakosti

$$\| \int_\Omega \xi_n(\omega)\, P(d\omega) - \int_\Omega \eta_n(\omega)\, P(d\omega) \| \leq$$

$$\leq \int_\Omega \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| P(d\omega) + \int_\Omega \| \eta_n(\omega)-\xi(\omega) \| P(d\omega)$$

sledi A=B t.j. srednja vrednost slučajne promenljive je definisana jednoznačno.

Jednostavno je videti da ako postoji srednja vrednost slučajne promenljive ξ, tada postoji i njena slaba srednja vrednost i one su medjusobno jednake. Za proizvoljan merljiv skup E definišemo

$$\int_E \xi(\omega)\ P(d\omega) = \int_\Omega \chi_E(\omega)\ \xi(\omega)\ P(d\omega)$$

gde je karakteristična funkcija:

$$\chi_E(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in E \\ 0 & \omega \notin E \end{cases}$$

TEOREMA 3. Srednja vrednost $E\,\xi$ slučajne promenljive $\xi = \xi(\omega)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H postoji ako i samo ako postoji srednja vrednost $E\|\xi\|$.

DOKAZ. Pretpostavimo da za slučajnu promenljivu ξ postoji srednja vrednost $E\,\xi$. Na osnovu definicije to znači da postoji niz $\{\xi_n\}_1^\infty$ prostih slučajnih promenljivih koji skoro izvesno konvergira ka slučajnoj promenljivoj ξ i

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|\xi_n(\omega)-\xi(\omega)\|\ P(d\omega) = 0$$

Odavde imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \big|\ \|\xi_n(\omega)\|-\|\xi(\omega)\|\ \big|\ P(d\omega) = 0$$

gde je $\{\|\xi_n\|\}_1^\infty$ niz prostih skalarnih slučajnih promenljivih koji skoro izvesno konvergira ka slučajnoj promenljivoj $\|\xi\|$. Odavde je jasno da postoji granična vrednost

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|\xi_n(\omega)\|\ P(d\omega) = \int_\Omega \|\xi(\omega)\|\ P(d\omega) = E\|\xi\|$$

Obrnuto, neka je ξ slučajna promenljiva i neka postoji srednja vrednost $E\|\xi\|$. Najpre dokažimo da za slučajnu promenljivu ξ postoji niz $\{\xi_n\}_1^\infty$ prostih slučajnih promenljivih koji u verovatnoći konvergira ka ξ i zadovoljava

$$\|\xi_n(\omega)\| \leq 2\|\xi(\omega)\|$$

Neka je $\{\eta_n\}_1^\infty$ niz prostih slučajnih promenljivih koji u verovatnoći konvergira ka ξ . Na osnovu konstrukcije ovakvog niza u TEOREMI 2. postoji niz dogadjaja $A_n \in \mathfrak{U}$, $n=1,2,\dots$ za koje $P(A_n) \to 0$ kad $n \to \infty$ i niz brojeva ε_n takav da je

$$\| \eta_n(\omega)-\xi(\omega) \| < \varepsilon_n \quad za \quad \omega \notin A_n$$

Definišimo niz prostih slučajnih promenljivih $\{\xi_n\}_1^\infty$ na sledeći način:

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} \eta_n(\omega) & ako \quad \omega \notin A_n \text{ i } \|\eta_n(\omega)\| > 2\varepsilon_n \\ 0 & u \text{ suprotnom slučaju} \end{cases}$$

Ako $\omega \notin A_n$ i $\|\eta_n(\omega)\| > 2\varepsilon_n$, imamo

$$\| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| < \varepsilon_n .$$

Ako $\omega \notin A_n$ i $\|\eta_n(\omega)\| \leqslant 2\varepsilon_n$, imamo:

$$\| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| \leqslant \|\xi(\omega)\| \leqslant \| \xi(\omega)-\eta_n(\omega) \| + \|\eta_n(\omega)\| \leqslant \varepsilon_n+2\varepsilon_n=3\varepsilon_n$$

Dakle, ako $\omega \notin A_n$,

$$\| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| \leqslant 3\varepsilon_n$$

odakle jednostavno sledi da niz prostih slučajnih promenljivih $\{\xi_n\}_1^\infty$ konvergira u verovatnoći ka slučajnoj promenjivoj ξ . Dalje, ako $\omega \in A_n$ ili $\|\eta_n(\omega)\| \leqslant 2\varepsilon_n$ imamo da je $\xi_n(\omega)=0$, pa je zadovoljeno $\|\xi_n(\omega)\| \leqslant 2\|\xi(\omega)\|$. Ako $\omega \notin A_n$ i $\|\eta_n(\omega)\| > 2\varepsilon_n$, biće

$$\|\xi(\omega)\| \geqslant \|\eta_n(\omega)\|-\| \eta_n(\omega)-\xi(\omega) \| > \|\eta_n(\omega)\|-\varepsilon_n > \|\xi_n(\omega)\| /2$$

odakle sledi

$$\|\xi_n(\omega)\| \leqslant 2\|\xi(\omega)\|.$$

Na taj način za svako $\omega \in \Omega$ važi nejednakost

$$\|\xi_n(\omega)\| \leqslant 2\|\xi(\omega)\| \tag{11}$$

gde niz $\{\xi_n\}_1^\infty$ prostih slučajnih promenljivih u verovatnoći konvergira ka slučajnoj promenljivoj ξ.
S obzirom na dokazanu nejednakost (11) za svaki merljiv skup E imamo da je

$$\int_E \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| P(d\omega) \leq 3 \int_E \|\xi(\omega)\| P(d\omega)$$

odakle, na osnovu apsolutne neprekidnosti $\int_E \|\xi(\omega)\| P(d\omega)$ sledi da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $\delta > 0$ tako da je:

$$\int_E \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| P(d\omega) < \varepsilon/2 \quad \text{za } P(E) < \delta \qquad (12)$$

Da bismo dokazali naše tvrdjenje, razmotrimo

$$\int_\Omega \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| P(d\omega) \qquad (13)$$

Niz slučajnih promenljivih $\{\xi_n\}_1^\infty$ konvergira u verovatnoći ka slučajnoj promenljivoj ξ, pa za svako $\varepsilon > 0$ i svako $\delta > 0$ postoji $N=N(\varepsilon)$ tako da

$$P\{ \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| > \varepsilon/2 \} < \delta \quad \text{za} \quad n > N(\varepsilon)$$

Označimo sa

$$E = \{ \omega \in \Omega: \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| > \varepsilon/2 \}.$$

Naš integral (13) možemo predstaviti u obliku

$$\int_\Omega \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| P(d\omega) =$$

$$= \int_E \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| P(d\omega) + \int_{\Omega\setminus E} \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| P(d\omega)$$

Za $n > N=N(\varepsilon)$

$$\int_{\Omega\setminus E} \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| P(d\omega) \leq (\varepsilon/2) \int_{\Omega\setminus E} P(d\omega) < \varepsilon/2$$

Kako je $P(E) < \delta$, na osnovu relacije (12) imamo:

$$\int_E \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| P(d\omega) < \varepsilon/2$$

za svako n, pa i za $n > N=N(\varepsilon)$.

Stoga, za unapred dato $\varepsilon > 0$

$$\int_\Omega \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| P(d\omega) < \varepsilon \quad \text{za} \quad n > N=N(\varepsilon)$$

što znači da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| \xi_n(\omega)-\xi(\omega) \| P(d\omega) = 0$$

t.j. postoji srednja vrednost

$$E\,\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega)\, P(d\omega)$$

slučajne promenljive ξ.

Navedimo još neke osobine srednje vrednosti:

1. Za proizvoljne slučajne promenljve ξ i η i proizvoljne skalare λ i μ :

$$E(\lambda\,\xi + \mu\,\eta) = \lambda\, E\,\xi + \mu\, E\,\eta$$

2. $\| E\,\xi \| = \| \int \xi(\omega)\, P(d\omega) \| \leqslant \int \| \xi(\omega) \|\, P(d\omega) = E\,\|\xi\|$

3. Neka za slučajnu promenljivu η sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H postoji srednja vrednost $E\,\eta$ i neka je ξ slučajna promenljiva za koju je skoro izvesno

$$\| \xi(\omega) \| \leqslant \| \eta(\omega) \|$$

Tada postoji i srednja vrednost $E\,\xi$ slučajne promenljive ξ.

4. Neka je ξ slučajna promenljiva sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H i A linearni ograničen operator koji vrši preslikavanje Hilbertovog prostora H u Hilbertov prostor H_1. Ako postoji srednja vrednost $E\,\xi$, tada postoji i srednja vrednost slučajne promenljive $A\,\xi = A\,\xi(\omega)$ i važi

$$E(A\,\xi) = \int_{\Omega} A\,\xi(\omega)\, P(d\omega) = A \int_{\Omega} \xi(\omega)\, P(d\omega) = A(E\,\xi)$$

Neka je $(\Omega,\mathfrak{U},P)$ prostor verovatnoće. U linearnom vektorskom prostoru slučajnih promenljivih definisanih na prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{U},P)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H uočimo skup $L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$ slučajnih promenljivih koje zadovoljavaju $E\,\|\xi\|^2 < \infty$. Jednostavno je videti da je $L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$ linearni vektorski prostor. Za $\xi,\eta \in L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$ definišemo skalarni proizvod

$$\langle \xi,\eta \rangle = E\,(\xi,\eta) = \int_{\Omega} (\xi(\omega),\eta(\omega))\; P(d\omega) \qquad (14)$$

i normu indukovanu ovim skalarnim proizvodom

$$|||\xi|||^2 = E\,\|\xi\|^2 = \int_{\Omega} \|\xi\|^2\; P(d\omega)$$

Ovako definisan normirmirani prostor $L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$ je kompletan. Zaista, neka je $\{\xi_n\}_1^{\infty}$ fundamentalan niz u $L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$ i $\{e_k\}_1^{\infty}$ ortonormirana baza u Hilbertovom prostoru H. Za svako $\omega \in \Omega$ imamo da je:

$$\xi_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n(\omega)\; e_k$$

gde su $a_k^n(\omega) = (\,\xi_n(\omega),e_k\,) = \overline{(\,e_k,\ \xi_n(\omega)\,)}$

skalarne slučajne promenljive.
Na osnovu naše pretpostavke

$$E\,\|\,\xi_n-\xi_m\,\|^2 = E\sum_{k=1}^{\infty} |\,a_k^n-a_k^m\,|^2 \to 0 \quad \text{kad} \quad n,m \to \infty$$

t.j. za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N=N(\varepsilon)$ tako da je

$$\text{za} \quad m,n > N \qquad E\,\|\,\xi_n-\xi_m\,\|^2 = E\sum_{k=1}^{\infty} |\,a_k^n-a_k^m\,|^2 < \varepsilon$$

Tim pre je

$$\text{za} \quad m,n > N \qquad E\sum_{k=1}^{j} |\,a_k^n-a_k^m\,|^2 < \varepsilon \quad \text{za svako} \quad j. \qquad (16)$$

Niz skalarnih slučajnih promenljivih $a_k^m = \overline{(e_k,\xi_m)}$ je fundamentalan u Hilbertovom prostoru skalarnih slučajnih promenljivih $x = x(\omega)$, $E|x|^2 < \infty$, pa postoji granična vrednost u srednjem kvadratnom t.j.

$$E\,|\,a_k^m-a_k\,|^2 \to 0 \quad \text{kad} \quad m \to \infty.$$

Iz nejednakosti (16) kad $m \to \infty$ sledi:

$$\text{za} \quad n > N \qquad E\sum_{k=1}^{j} |\,a_k^n-a_k\,|^2 \leq \varepsilon \quad \text{za svako} \quad j$$

i odavde kad $j \to \infty$

$$\text{za} \quad n > N \qquad E\sum_{k=1}^{\infty} |\,a_k^n-a_k\,|^2 \leq \varepsilon \qquad (17)$$

Slučajna promenljiva

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\omega)\, e_k \in L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$$

($E\,\|\xi\|^2 < \infty$) i iz nejednakosti (17) sledi da za svako ε, postoji $N=N(\varepsilon)$ tako da je

$$\text{za} \quad n > N \qquad E\,\|\,\xi_n - \xi\,\|^2 < \varepsilon$$

t.j. fundamentalan niz $\{\xi_n\}_1^{\infty}$ je konvergentan u prostoru $L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$ i granična vrednost

$$\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n \in L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$$

$L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$ sa skalarnim proizvodom definisanim jednakošću (14) je Hilbertov prostor. Govoreći o slučajnim promenljivim kao elementima Hilbertovog prostora $L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$ ne pravimo razliku medju ekvivalentnim slučajnim promenljivim jer su slučajne promenljive ξ i η ekvivalentne ako i samo ako je $|||\,\xi-\eta\,|||^2 = 0$ t.j. $\xi = \eta$ kao elementi Hilbertovog prostora $L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$. Konvergenciju niza $\{\xi_n\}_1^{\infty}$ slučajnih promenljivih

$$\xi_n \in L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H) \qquad n = 1,2,\ldots$$

u smislu jake konvergencije u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$ nazivamo konvergencijom u s r e d n j e m k v a d r a t n o m Drugim rečima niz slučajnih promenljivih $\{\xi_n\}_1^{\infty}$, $E\,\|\xi_n\|^2 < \infty$ k o n v e r i r a u s r e d n j e m k v a d r a t n o m ka slučajnoj promenljivoj ξ ako

$$E\,\|\,\xi_n - \xi\,\|^2 \to 0 \qquad \text{kad} \quad n \to \infty$$

Tada je i za slučajnu promenljivu ξ, $E\,\|\xi\|^2 < \infty$. Ako niz $\{\xi_n\}_1^{\infty}$ slučajnih promenljivih sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H konvergira u srednjem kvadratnom ka slučajnoj promenljivoj ξ, tada on konvegira u srednjem kvadratnom ka slučajnoj promenljivoj ξ i u verovatnoći. Tvrdjenje sledi neposredno iz nejednakosti Čebiševa

$$P\{\|\xi_n-\xi\| > \varepsilon\} \leq \frac{E\|\xi_n-\xi\|^2}{\varepsilon^2}$$

Ako niz $\{\xi_n\}_1^\infty$ slučajnih promenljivih $\xi_n \in L^2(\Omega,\mathfrak{A},P,H)$ konvergira u srednjem kvadratnom ka slučajnoj promenljivoj ξ, tada je $E|(u,\xi_n)|^2 < \infty$ za svako $u \in H$ i niz skalarnih slučajnih promenljivih $\{(u,\xi_n)\}_1^\infty$ konvergira u srednjem kvadratnom ka skalarnoj slučajnoj promenljivoj (u,ξ), $E|(u,\xi)|^2 < \infty$ za svako $u \in H$. Tvrdjenje neposredno sledi iz nejednakosti

$$E|(u,\xi_n)|^2 \leq \|u\|^2 E\|\xi_n\|^2$$

$$E|(u,\xi_n)-(u,\xi)|^2 = E|(u,\xi_n-\xi)|^2 \leq \|u\|^2 E\|\xi_n-\xi\|^2$$

Neka je $\{\xi_n\}_1^\infty$ niz slučajnih promenljivih $\xi_n \in L^2(\Omega,\mathfrak{A},P,H)$ i A linearan ograničen operator u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Tada

$$A\xi_n = A\xi_n(\omega) \in L^2(\Omega,\mathfrak{A},P,H)$$

jer je

$$E\|A\xi_n\|^2 \leq \|A\|^2 E\|\xi_n\|^2$$

Ako niz slučajnih promenljivih $\{\xi_n\}_1^\infty$ konvergira u srednjem kvadratnom ka slučajnoj promenljivoj ξ, tada niz $\{A\xi_n\}_1^\infty$ konvergira u srednjem kvadratnom ka slučajnoj promenljivoj $A\xi$.

Na kraju ovog dela definišimo nezavisnost dogadjaja, σ-algebri i slučajnih promenljivih sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru. Neka je $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ prostor verovatnoće i $(\Omega,\mathfrak{A}^*,P)$ njegovo Lebegovo proširenje. Za dogadjaje $A_1,A_2 \in \mathfrak{A}$ (i uopšte merljive skupove $A_1,A_2 \in \mathfrak{A}^*$ koje jednostavnosti radi možemo nazvati dogadjajima) kažemo da su **nezavisni** ako je

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) \tag{18}$$

Za σ-algebre $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}^*$ kažemo da su **nezavisne** ako je jednakost (18) ispunjena za proizvoljne skupove $A_1 \in \mathfrak{A}_1$,

$A_2 \in \mathfrak{U}_2$. Jednostavno je videti da su σ-algebre $\mathfrak{U}_1$ i $\mathfrak{U}_2$ nezavisne ako i samo ako su nezavisna njihova Lebegova produženja. Neka su $\overset{1}{\mathfrak{U}}_1$ i $\overset{1}{\mathfrak{U}}_2$ σ-algebre koje se respektivno od σ-algebri $\mathfrak{U}_1$ i $\mathfrak{U}_2$ razlikuju skupovima mere nula. σ-algebre $\mathfrak{U}_1$ i $\mathfrak{U}_2$ su nezavisne ako i samo ako su nezavisne σ-algebre $\overset{1}{\mathfrak{U}}_1$ i $\overset{1}{\mathfrak{U}}_2$. Za slučajne promenljive ξ_1 i ξ_2 sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H kažemo da su n e z a v i s n e ako je

$$P\{ \xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2 \} = P\{ \xi_1 \in B_1 \} P\{ \xi_2 \in B_2 \} \qquad (19)$$

za proizvoljne Borelove skupove B_1, B_2 Hilbertovog prostora H. Označimo sa $\mathfrak{U}_1$ σ-algebru generisanu slučajnom promenljivom ξ_1, t.j. minimalnu σ-algebru nad skupovima oblika

$$\{ \xi_1 \in B \} \text{ za proizvoljan Borelov skup } B \subseteq H .$$

Označimo sa $\mathfrak{U}_2$ σ-algebru generisanu slučajnom promenljivom ξ_2. Slučajne promenljive ξ_1 i ξ_2 su nezavisne ako i samo ako su nezavisne σ-algebre $\mathfrak{U}_1$ i $\mathfrak{U}_2$ generisane ovim slučajnim promenljivim. S obzirom na TEOREMU 1. odavde sledi da su slučajne promenljive ξ_1 i ξ_2 sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H nezavisne ako i samo ako su za svako $u,v \in H$ nezavisne skalarne slučajne promenljive (u,ξ_1) i (v,ξ_2). (σ-algebra $\mathfrak{U}_\xi$ generisana slučajnom promenljivom ξ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H se poklapa sa σ-algebrom generisanom skalarnim slučajnim promenljivim (u,ξ), $u \in H$ ako ne razlikujemo σ-algebre koje se razlikuju skupovima mere nula. Preciznije, Lebegova produženja σ-algebre $\mathfrak{U}_\xi$ i σ-algebre generisane slučajnim promenljivim (u,ξ), $u \in H$ se poklapaju.)

Neka je $\xi(t)$, $t \in T$ familija slučajnih promenljivih i neka je $\mathfrak{U}$ minimalna σ-algebra nad skupovima $\{ \xi(t) \in B \}$ gde su $t \in T$ i B proizvoljan Borelov skup Hilbertovog prostora H. Za σ-algebru $\mathfrak{U}$ kažemo da je generisana slučajnim promenljivim $\xi(t)$, $t \in T$. Neka su $\xi(t)$, $t \in T_1$ i $\xi(t)$, $t \in T_2$ dve familije slučajnih promenljivih. Za skupove slučajnih promenljivih

$$\xi(t),\ t \in T_1 \quad \text{i} \quad \xi(t),\ t \in T_2$$

kažemo da su n e z a v i s n i ako su nezavisne σ-algebre $\mathfrak{U}_1$ i $\mathfrak{U}_2$ generisane ovim skupovima slučajnih promenljivih. S obzirom na TEOREMU 1. skupovi

$$\xi(t),\ t \in T_1 \quad \text{i} \quad \xi(t),\ t \in T_2$$

slučajnih promenljivih su nezavisni ako i samo ako su nezavisni skupovi skalarnih slučajnih promenljivih

$$(u,\xi(t)),\ t \in T_1,\ u \in H \quad \text{i} \quad (u,\xi(t)),\ t \in T_2,\ u \in H.$$

Slučajne promenljive ξ_1 i ξ_2 sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H su n e k o r e l a c i o n e ako je za $u,v \in H$

$$E\,(u,\xi_1)(v,\xi_2) = E\,(u,\xi_1)\ E\,(v,\xi_2)\ .$$

G L A V A II

S L U Č A J N I P R O C E S I S A V R E D N O S T I M A U S E P A R A B I L N O M H I L B E R T O V O M P R O S T O R U

1. DEFINICIJA SLUČAJNOG PROCESA

Definicija slučajnog procesa koja će biti data u ovom delu je standardna. Pojam raspodele slučajnog procesa takodje. Na isti način su dati u navedenoj literaturi.

Familiju slučajnih promenljivih $\xi = \xi(t) = \xi(\omega,t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ definisanih na nekom prostoru verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{U},P)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H nazivamo s l u č a j n i m p r o c e s o m sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H . Dakle, za svako fiksirano $t \in [a,b]$, $\xi(t)$ je slučajna promenljiva sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Za fiksirano $\omega \in \Omega$, neslučajnu funkciju $\xi(\omega,\ ) = \xi(\omega,t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H nazivamo t r a j e k t o r i j o m slučajnog procesa $\xi = \xi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Označimo sa X skup funkcija definisanih na intervalu $[a,b]$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H i sa $\mathcal{B}_X$ minimalnu σ-algebru nad cilindričnim skupovima

$$\{ x = x(t):\ x(t_1)\in B_1,\dots,x(t_n)\in B_n \} \qquad (1)$$

gde su $B_1,B_2,\dots,B_n$ Borelovi skupovi Hilbertovog prostora H; $t_1,t_2,\dots,t_n \in [a,b]$. Napomenimo da je $\mathcal{B}_X$ na osnovu poznatih stavova minimalna σ-algebra nad skupovima oblika

$$\{ x = x(t) : [(u_1, x(t_1)), \ldots, (u, x(t_n))] \in B \}$$

gde su $t_1, \ldots, t_n \in [a,b]$, $u_1, \ldots, u_n \in H$ i B Borelov skup n-dimenzionalnog vektorskog prostora R_n . Slučajni proces $\xi = \xi(t) = \xi(\omega, t)$ možemo definisati i kao slučajnu promenljivu sa vrednostima u merljivom prostoru $(X, \mathfrak{B})$ jer je preslikavanje $\xi = \xi(\omega, \ )$ iz merljivog prostora $(\Omega, \mathfrak{U})$ u merljiv prostor $(X, \mathfrak{B}_x)$ merljivo ako i samo ako je $\xi = \xi(t)$ slučajni proces t.j. ako je $\xi(t)$ za svako $t \in [a,b]$ slučajna promenljiva. Dakle, slučajni proces $\xi = \xi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, definiše merljivo preslikavanje $\xi = \xi(\omega, \ )$ iz merljivog prostora $(\Omega, \mathfrak{U})$ u merljiv prostor $(X, \mathfrak{B}_x)$. Inverzna slika σ-algebre $\mathfrak{B}_x$, t.j. kolekcija skupova

$$\xi^{-1}(B), \ B \in \mathfrak{B}_x$$

predstavlja σ-algebru generisanu slučajnim promenljivim

$$\xi(t), \ a \leqslant t \leqslant b$$

t.j. minimalnu σ-algebru nad skupovima

$$\{ \xi(t) \in B, \ t \in [a,b], \ B \in \mathfrak{B} \}$$

($\mathfrak{B}$-Borelova σ-algebra Hilbertovog prostora H).

Merljivo preslikavanje $\xi = \xi(\omega, \ )$ iz merljivog prostora $(\Omega, \mathfrak{U})$ u merljiv prostor $(X, \mathfrak{B}_x)$ definiše normiranu meru P_ξ u merljivom prostoru $(X, \mathfrak{B}_x)$

$$P_\xi(B) = P\{ \omega : \xi(\omega, \ ) = \xi(\omega, t) \in B \} \qquad (2)$$

koju nazivamo r a s p o d e l o m slučajnog procesa $\xi = \xi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Slučajni procesi $\xi_1 = \xi_1(t)$ i $\xi_2 = \xi_2(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ su s t o h a s t i č k i e k v i v a l e n t n i ako je

$$P\{ \xi_1(t) \neq \xi_2(t) \} = 0$$

za svako $t \in [a,b]$. Slučajni proces $\xi = \xi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ je s t o h a s t i č k i n e p r e k i d a n ako je za svako $\varepsilon > 0$

$$\lim_{s \to t} P\{ \| \xi(s) - \xi(t) \| \geqslant \varepsilon \} = 0$$

Slučajni proces $\xi(t)$, $a \leq t \leq b$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H za koji je $E\,\|\xi(t)\|^2 < \infty$, $a \leq t \leq b$ možemo posmatrati kao funkciju na intervalu $[a,b]$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega,\mathfrak{A},P,H)$. Na taj način možemo govoriti o neprekidnosti, diferencijabilnosti, integrabilnosti slučajnog procesa $\xi = \xi(t)$, $a \leq t \leq b$. Slučajni proces $\xi(t)$ je n e p r e k i d a n u tački t ako

$$E\,\|\,\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\,\|^2 \to 0 \quad \text{kad} \quad \Delta t \to 0;$$

kažemo još, slučajni proces $\xi(t)$ je u tački t neprekidan u srednjem kvadratnom. Slučajni proces je n e p r e k i d a n s a l e v e s t r a n e ako

$$E\,\|\,\xi(s)-\xi(t)\,\|^2 \to 0 \quad \text{kad} \quad s \to t-0$$

Neka je $H(\xi)$ linearna zatvorenost nad slučajnim promenljivim $\xi(t)$, $a \leq t \leq b$ (u srednjem kvadratnom) t.j. zatvaranje linearnog vektorskog prostora slučajnih promenljivih oblika

$$\sum_k \alpha_k\, \xi(t_k)$$

(u odnosu na normu $|||\xi|||^2 = E\,\|\xi\|^2$). $H(\xi)$ je potprostor Hilbertovog prostora $L^2(\Omega,\mathfrak{A},P,H)$ i slučajni proces $\xi = \xi(t)$, $a \leq t \leq b$ možemo posmatrati kao funkciju na intervalu $[a,b]$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru $H(\xi)$. $H(\xi)$ je, na primer, separabilan ako je $\xi(t)$, $a \leq t \leq b$ slučajni proces neprekidan u srednjem kvadratnom sa leve strane.

2. FUNKCIJE REALNOG ARGUMENTA SA VREDNOSTIMA U HILBERTOVOM PROSTORU

U prethodnom odeljku bilo je dovoljno razloga da se kaže nešto uopšte o funkcijama definisanim na odsečku $[a,b]$ realne prave sa vrednostima u Hilbertovom prostoru. U ovom delu, ako se to posebno ne kaže, ne pretpostavlja se separabilnost Hilbertovog prostora. Za ovim delom se jednostavno ukazala potreba, da bi se održao princip o doslednosti u izlaganju. Pisan je na osnovu navedene literature pri čemu su ključnu ulogu imale [4] i [22].

Neka je $\mathcal{B}_{[a,b]}$ σ-algebra Borelovih skupova intervala $[a,b]$. Par $([a,b], \mathcal{B}_{[a,b]})$ je merljiv prostor i $([a,b],\mathcal{B}_{[a,b]},m)$ prostor s Borelovom merom m. Već smo rekli da je Lebegovo produženje σ-algebre $\mathcal{B}_{[a,b]}$ (u odnosu na meru m), σ-algebra skupova merljivih u Lebegovom smislu. Funkciju $f = f(t), t \in [a,b]$ definisanu na prostoru s merom $([a,b],\mathcal{B}_{[a,b]},m)$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H nazivamo p r o s t o m funkcijom ako ona uzima konačno mnogo vrednosti $u_i \in H$ na medjusobno disjunktnim skupovima Δ_i iz σ-algebre $\mathcal{B}_{[a,b]}$ čija je unija ceo odsečak $[a,b]$ t.j.

$$\Delta_i = f^{-1}(u_i) = \{t \in [a,b]: f(t)=u_i\} \in \mathcal{B}_{[a,b]}$$

$$\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset \quad \text{za} \quad i \neq j \quad \text{i} \quad \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i = [a,b].$$

Prostu funkciju $f = f(t)$ možemo predstaviti u obliku

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i \, \chi_{\Delta_i}(t)$$

gde su χ_{Δ_i} karakteristične funkcije skupova Δ_i, $i=1,\ldots,n$.

$$\chi_{\Delta}(t) = \begin{cases} 1 & t \in \Delta \\ 0 & t \notin \Delta \end{cases}$$

za proizvoljan skup $\Delta \in \mathcal{B}_{[a,b]}$.

Funkciju $f = f(t)$, $t \in [a,b]$ definisanu na prostoru s merom $([a,b],\mathcal{B}_{[a,b]},m)$ sa vrednostima u proizvoljnom Hilbertovom prostoru H nazivamo m e r l j i v o m (u jakom smislu) ako postoji niz prostih funkcija $f_n = f_n(t)$, $t \in [a,b]$ koji skoro svuda konvergira ka funkciji $f(t)$ u smislu jake konvergencije t.j. za skoro svako $t \in [a,b]$

$$\| f_n(t)-f(t) \|^2 \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty$$

gde je $\| \ \|$ norma u Hilbertovom prostoru H indukovana njegovim skalarnim proizvodom: $\|u\|^2 = (u,u)$. Ovakva definicija nalazi svoje opravdanje u sledećem. Ako je H separabilan Hilbertov prostor, funkcija $f = f(t)$, $t \in [a,b]$ je merljiva ako i samo ako je

$$f^{-1}(B) = \{ t \in [a,b] : f(t) \in B \}$$

skup merljiv u Lebegovom smislu za svaki Borelov skup Hilbertovog prostora H, t.j. za separabilan Hilbertov prostor H definicija se svodi na već ranije uvedenu definiciju merljivosti funkcije sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Dokaz navedenog tvrdjenja je identičan dokazu TEOREME 2. jer u ovom dokazu nismo koristili da je P normirana mera već samo da je Ω skup konačne mere $P(\Omega) < \infty$. Treba samo merljiv prostor $(\Omega,\mathcal{U})$ zameniti merljivim prostorom $([a,b],\mathcal{B}_{[a,b]})$.

Dalje, neka je H proizvoljan Hilbertov prostor za koji, i dalje, ne pretpostavljamo separabilnost. Za prostu funkciju

$$f = f(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{\Delta_i}(t)\, u_i \tag{3}$$

$$(\Delta_i = f^{-1}(u_i),\ \Delta_i \cap \Delta_j = \theta \ \text{ za } i \neq j,\ \ \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i = [a,b])$$

definisanu na merljivom prostoru $([a,b],\mathcal{B}_{[a,b]})$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H kažemo da je *integrabilna* i definišemo *integral*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} u_i\, m(\Delta_i) \tag{4}$$

Očigledno je prosta funkcija $f = f(t)$, $t \in [a,b]$ integrabilna ako i samo ako je integrabilna realna funkcija $\|f(t)\|$, $t \in [a,b]$ i

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt$$

Funkciju $f = f(t)$ koja vrši preslikavanje iz merljivog prostora $([a,b],\mathcal{B}_{[a,b]})$ u proizvoljan Hilbertov prostor H nazivamo *integrabilnom*, ako postoji niz $\{f_n\}_1^\infty$ prostih funkcija koji skoro svuda konvergira ka funkciji f i osim toga zadovoljava uslov

$$\int_a^b \|f_n(t)-f_m(t)\| \, dt \to 0 \quad \text{kad} \quad m,n \to \infty \tag{5}$$

Odavde sledi da je $\int_a^b f_n(t)\,dt$ fundamentalan niz u Hilbertovom prostoru H i definišemo

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt \tag{6}$$

gde je granična vrednost u smislu jake konvergencije u Hilbertovom prostoru H. Za proizvoljan skup $\Delta \in \mathcal{B}_{[a,b]}$ definišemo integral

$$\int_\Delta f(t)\,dt = \int_a^b \chi_\Delta(t) f(t)\,dt$$

1. Merljiva funkcija $f = f(t)$ koja vrši preslikavanje iz merljivog prostora $([a,b],\mathcal{B}_{[a,b]})$ u proizvoljan Hilbertov prostor H je integrabilna ako i samo ako je integrabilna realna funkcija $\|f(t)\|$. Ako je H separabilan Hilbertov prostor, dokaz je sličan dokazu TEOREME 3. Ako H nije separabilan, dokaz je nešto složeniji i ovde ga nećemo izvoditi.

2. Na osnovu definicije integrala, za proizvoljnu merljivu funkciju i proizvoljno $\Delta \in \mathcal{B}_{[a,b]}$

$$\int_\Delta f(t)\,dt \in H$$

i

$$\left\| \int_\Delta f(t)\,dt \right\| \leqslant \int_\Delta \|f(t)\|\,dt$$

3. $\int_\Delta (\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t))\,dt = \alpha_1 \int_\Delta f_1(t)\,dt + \alpha_2 \int_\Delta f_2(t)\,dt$

4. Ako je $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ ($\Delta_1,\Delta_2 \in \mathcal{B}_{[a,b]}$) i $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$

$$\int_\Delta f(t)\,dt = \int_{\Delta_1} f(t)\,dt + \int_{\Delta_2} f(t)\,dt$$

5. Ako je $f(t)$, $t \in [a,b]$ integrabilna funkcija sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H i A linearan ograničen operator iz

Hilbertovog prostora H u Hilbertov prostor H_1, tada je $A\,f(t)$ integrabilna funkcija i

$$\int_{\Delta} A\,f(t)\,dt = A\int_{\Delta} f(t)\,dt$$

6. Ako je $f = f(t)$ merljiva funkcija sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H i $g = g(t)$ integrabilna funkcija sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H_1 pri čemu je za svako $t \in [a,b]$ $\| f(t) \| \leqslant \| g(t) \|_1$ tada je i $f = f(t)$, $t \in [a,b]$ integrabilna funkcija.

Primetimo, na kraju, da sve napred rečeno važi za funkcije sa vrednostima u proizvoljnom B a n a h o v o m prostoru B (skalarni proizvod nije nigde korišćen, već samo norma indukovana ovim skalarnim proizvodom) .

Neka je $f(t)$ merljiva integrabilna funkcija sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H. Jednostavno je videti da je tada za svako $u \in H$, $(\, f(t),\, u\,)$ skalarna merljiva i integrabilna funkcija i da važi jednakost

$$\left(\int_a^b f(t)\,dt,\ u \right) = \int_a^b (f(t),u)\,dt \tag{7}$$

Neka je H separabilan Hilbertov prostor i $B(H)$ skup linearnih ograničenih operatora koji vrše preslikavanje prostora H u samog sebe. Za elemente $A \in B(H)$ uzimamo $\|A\|$ kao normu linearnog ograničenog operatora

$$\|A\| = \sup_{u \in H} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$$

Neka je za svako $t \in [a,b]$, $A(t)$ linearan ograničen operator koji vrši preslikavanje Hilbertovog prostora H u samog sebe. $A(t)$ - nazivamo o p e r a t o r n o m f u n k c i j o m i posmatramo je kao funkciju sa vrednostima u Banahovom prostoru $B(H)$ i, jasno,

$$\int_a^b A(t)\,dt \tag{8}$$

posmatramo kao integral funkcije sa vrednostima u Banahovom prostoru $B(H)$. On ima navedene osobine 1.,...,6. Integral (8) je linearan ograničen operator sa normom

$$\| \int_a^b A(t)\, dt \| \leqslant \int_a^b \|A(t)\|\, dt$$

Neka je H separabilan Hilbertov prostor i $A(t)$ merljiva integrabilna operatorna funkcija sa vrednostima u $B(H)$. Za proizvoljno $u \in H$, $A(t)u$ je merljiva integrabilna funkcija sa vrednostima u H i

$$\int_a^b A(t)\, dt\; u = \int_a^b A(t)u\, dt \qquad (9)$$

Za proizvoljan ograničen linearan operator $A_o \in B(H)$, $A_oA(t)$ i $A(t)A_o$ su merljive integrabilne operatorne funkcije sa vrednostima u $B(H)$ i

$$A_o\int_a^b A(t)\, dt = \int_a^b A_oA(t)\, dt, \quad \int_a^b A(t)\, dt\; A_o = \int_a^b A(t)A_o\, dt \quad (10)$$

Jednakost (9) sledi iz definicije integrala, a jednakosti (10) su posledica jednakosti (7) i (9).

Neka je $f(t)$ funkcija definisana na odsečku $[a,b]$ realne prave sa vrednostima u proizvoljnom Banahovom prostoru B. Ona se naziva d i f e r e n c i j a b i l n o m u tački $t_o \in (a,b)$ ako postoji element $f'(t_o) \in B$ definisan jednakošću

$$f'(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o}$$

gde graničnu vrednost posmatramo u smislu jake konvergencije u prostoru B t.j. u smislu konvergencije operatora po normi. Element $f'(t_o) \in B$ nazivamo i z v o d o m funkcije $f(t)$ u tački $t=t_o$.

Jednostavno je dokazati sledeća tvrdjenja:

1. Ako je $f(t) = u \in B$ t.j. $f(t)$ je konstantni element iz B, prvi izvod je $f'(t) = 0$.

2. Ako su $f_1(t)$ i $f_2(t)$ diferencijabilne funkcije, tada je

$$[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)]' = \alpha_1 f_1'(t) + \alpha_2 f_2'(t)$$

3. Ako je $f(t)$ diferencijabilna funkcija sa vrednostima u Banahovom prostoru B i $\varphi(t)$ diferencijabilna realna funkcija tada je:

$$(\varphi(t)f(t))' = \varphi'(t)f(t) + \varphi(t)f'(t)$$

4. Ako je $f(t)$ diferencijabilna funnkcija sa vrednostima u SEPARABILNOM Hilbertovom prostoru H i $A(t)$ diferencijabilna operatorna funkcija sa vrednostima u $B(H)$, tada je $A(t)f(t)$ difeencijabilna funkcija sa vrednostima u H i

$$(A(t)f(t))' = A'(t)f(t) + A(t)f'(t)$$

TEOREMA 1. Neka je $f(t)$ merljiva integrabilna funkcija definisana na odsečku $[a,b]$ realne prave sa vrednostima u SEPARABILNOM Hilbertovom prostoru H i neka je

$$F(t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

Tada je

$$\frac{dF(t)}{dt} = F'(t) = f(t) \quad \text{za skoro svako } t \in (a,b).$$

DOKAZ. Uočimo da je

$$\left\| \frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} - f(t) \right\| = \frac{1}{\Delta t} \left\| \int_t^{t+\Delta t} [f(s)-f(t)]\, ds \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \| f(s)-f(t) \|\, ds$$

S obzirom na separabilnost Hilbertovog prostora H, za svako $\varepsilon > 0$ postoji element $e \in H$ takav da je

$$\| f(t)-e \| < \varepsilon$$

Imamo dalje da je

$$\left\| \frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} - f(t) \right\| \leq \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \| f(s)-e \|\, ds + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \| f(t)-e \|\, ds$$

i odavde

$$\left\| \frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} - f(t) \right\| \leq \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \|f(s)-e\| \, ds + \varepsilon \qquad (11)$$

Za merljivu integrabilnu funkciju $f(s)$, $\|f(s)-e\|$ je realna merljiva integrabilna funkcija na konačnom intervalu, pa je na osnovu poznate teorije Lebegovog integrala za realne funkcije

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \|f(s)-f(t)\| \, ds = \|f(t)-e\| \text{ za skoro svako } t \in (a,b)$$

Iz jednakosti (11) sada sledi:

$$\overline{\lim_{\Delta t \to 0}} \left\| \frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} - f(t) \right\| \leq \|f(t)-e\| + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

S obzirom na proizvoljnost $\varepsilon > 0$, odavde jednostavno sledi

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t} - f(t) \right\| = 0$$

t.j. $F'(t) = f(t)$ za skoro svako $t \in [a,b]$.

TEOREMA 2. Neka je $b(t)$ diferencijabilna funkcija sa vrednostima u SEPARABILNOM Hilbertovom prostoru H, neka je za svako $u \in H$, $(b(t),u)$ apsolutno neprekidna na intervalu $[a,b]$ i neka je

$$\frac{db(t)}{dt} = 0 \text{ za skoro svako } t \in [a,b].$$

Tada je $b(t) = u_0 \in H$ t.j. $b(t)$ je jednaka konstantnom vektoru iz H na intervalu $[a,b]$.

DOKAZ. Jednostavno je videti da je za diferencijabilnu funkciju $b(t)$ i svako $u \in H$, $(b(t),u)$ diferencijabilna realna funkcija i

$$\left(\frac{db(t)}{dt}, u \right) = \frac{d\,(b(t), u)}{dt}$$

Odavde sledi da je za apsolutno neprekidnu funkciju $(b(t),u)$ izvod

$$\frac{d(b(t),u)}{dt} = 0 \quad \text{za skoro svako} \quad t \in [a,b]$$

Odavde na osnovu poznate teorije Lebegovog integrala realnih funkcija, sledi

$$(b(t),u) = c(u)$$

gde je $c(u)$ konstanta (ne zavisi od t).
Neka je $(e_k)_1^\infty$ ortonormirana baza separabilnog Hilbertovog prostora H. Tada je

$$(b(t),e_k) = c_k, \quad k=1,2,\ldots$$

i

$$b(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, e_k = u_o$$

t.j. $b(t)$ je konstantni vektor $u_o \in H$ na intervalu $[a,b]$.

Funkciju $F(t)$, takvu da je za skoro svako t

$$F'(t) = f(t)$$

nazivamo primitivnom funkcijom za funkciju $f(t)$. Neka je $f(t)$ merljiva integrabina funkcija. Na osnovu dokazanog

$$\int_a^t f(s)\, ds$$

je primitivna funkcija za funkciju $f(t)$. Neka je $F(t)$ (neka druga) primitivna funkcija za funkciju $f(t)$, takva da je $(F(t),u)$ za svako $u \in H$ apsolutno neprekidna funkcija. Na osnovu dokazanog primitivne funkcije

$$F(t) \quad i \quad \int_a^t f(s)\, ds$$

se razlikuju za konstantni element $u_o \in H$ t.j.

$$F(t) = \int_a^t f(s)\, ds + u_o$$

odakle sledi

$$u_0 = F(a)$$

i odavde uopštena Njutn-Lajbnicova formula

$$\int_a^t f(s)\,ds = F(t)-F(a)$$

Napred dokazane teoreme važe i mogu se jednostavno dokazati za operatorne funkcije $A(t)$ za koje je $A(t)$ linearan ograničen operator u SEPARABILNOM Hilbertovom prostoru. Za nas je interesantna Njutn-Lajbnicova formula. Neka je $A(t)$ merljiva integrabilna operatorna funkcija na konačnom intervalu $[a,b]$ i

$$U(t) = \int_a^t A(s)\,ds$$

Operatorna funkcija je diferencijabilna i

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t) \quad \text{za skoro svako} \quad t \in [a,b].$$

Dokaz ovog tvrdjenja je identičan dokazu TEOREME 1. Egzistencija linearnog operatora A takvog da je

$$\| A(t)-A \| < \varepsilon$$

za proizvoljno malo ε sledi iz pretpostavke o merljivosti $A(t)$. Funkciju $U(t)$ takvu da je

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t) \quad \text{za skoro svako} \quad t$$

nazivamo primitivnom funkcijom za funkciju $A(t)$. Neka je $A(t)$ merljiva integrabilna operatorna funkcija na intervalu $[a,b]$. Integral

$$\int_a^t A(s)\,ds$$

je primitivna funkcija za funkciju $A(t)$. Neka je $U(t)$ neka druga primitivna funkcija za funkciju $A(t)$ za koju je $(U(t)u,v)$ apsolutno neprekidna funkcija za svako $u,v \in H$. Koristeći Njutn-Lajbnicovu formulu za funkcije sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H jednostavo se dobija Njutn-Lajbnicova formula za operatorne funkcije

$$\int_a^t A(s)\, ds = U(t)-U(a)$$

3. SLUČAJNI PROCESI KAO FUNKCIJE SA VREDNOSTIMA U HILBERTOVOM PROSTORU $L^2(\Omega,\mathfrak{A},P,H)$

Za pisanje ovog dela su korišćene knjige navedene u literaturi pod brojevima [4],[5],[7],[21],[22],[23]. Glavno mesto zauzimaju definicije merljivosti i integrabilnosti slučajnog procesa.

Neka je $\xi = \xi(t)$, $a \leq t \leq b$ slučajni proces sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H t.j. za svako $t \in [a,b]$, $\xi(t) = \xi(\omega,t)$ je merljivo preslikavanje iz prostora verovatnoće $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ u merljiv prostor $(H,\mathfrak{B})$ gde je $\mathfrak{B}$ σ-algebra Borelovih skupova Hilbertovog prostora H i neka je

$$E\,\|\xi(t)\|^2 < \infty,\quad a \leq t \leq b.$$

Ovakav slučajni proces možemo posmatrati kao funkciju definisanu na merljivom prostoru $([a,b],\mathfrak{B}_{[a,b]})$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega,\mathfrak{A},P,H)$. Podsetimo se da smo sa $L^2(\Omega,\mathfrak{A},P,H)$ označili Hilbertov prostor slučajnih promenljivih η, $E\|\eta\|^2 < \infty$ sa skalarnim proizvodom $\langle\eta_1,\eta_2\rangle = E(\eta_1,\eta_2)$ i normom $|||\eta|||^2 = E\,\|\eta\|^2$.

Slučajni proces $\xi = \xi(t)$, $a \leq t \leq b$ je *m e r l j i v* ako je on merljiv u smislu opšte definicije, kao funkcija definisana na merljivom prostoru $([a,b],\mathfrak{B}_{[a,b]})$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega,\mathfrak{A},P,H)$ t.j. slučajni proces $\xi = \xi(t)$, $a \leq t \leq b$ je merljiv ako postoji niz prostih funkcija $\xi_n = \xi_n(t)$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega,\mathfrak{A},P,H)$ koji skoro svuda konvergira slučajnom procesu $\xi(t)$ t.j. za skoro svako t

$$E\,\|\,\xi_n(t)-\xi(t)\,\|^2 \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty$$

Prosta funkcija

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{\Delta_k}(t)\ \eta_k$$

$$(\ \eta_k \in L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H),\ \Delta_k = \{\ t \in [a,b]:\ \xi(t) = \eta_k\ \},$$
$$\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset \quad \text{za} \quad i \neq j,\ \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k = [a,b]\ )$$

sa vrednostima u $L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$ je i n t e g r a b i l n a i njen integral je definisan jednakošću

$$\int_a^b \xi(t)\ dt = \sum_{k=1}^{n} \eta_k\ m(\Delta_k) \tag{12}$$

Za slučajni proces $\xi = \xi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H kažemo da je i n t e g r a b i l a n ako je on integrabilan kao funkcija definisana na merljivom prostoru $([a,b],\mathcal{B}_{[a,b]})$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$. Drugim rečima, slučajni proces $\xi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ je integrabilan ako postoji niz $\{\xi_n\}_1^\infty$ prostih funkcija sa vrednostima u $L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$ koji skoro svuda konvergira ka slučajnom procesu $\xi(t)$ i

$$\int_a^b |||\ \xi_n(t)-\xi_m(t)\ |||\ dt \to 0 \quad \text{kad} \quad n,m \to \infty \tag{13}$$

Odavde sledi da je niz slučajnih promenljivih

$$\int_a^b \xi_n(t)\ dt \in L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$$

konvergentan u srednjem kvadratnom (u smislu jake konvergencije u $L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$) i definišemo i n t e g r a l

$$\int_a^b \xi(t)\ dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \xi_n(t)\ dt \tag{14}$$

Za proizvoljno $\Delta \in \mathcal{B}_{[a,b]}$ definišemo integral

$$\int_\Delta \xi(t)\ dt = \int_a^b \chi_\Delta(t)\ \xi(t)\ dt \tag{15}$$

O osobinama ovako definisanog integrala već smo govorili u prethodnom odeljku. Napomenimo samo da je merljiv slučajni proces $\xi(t)$, $a \leq t \leq b$ integrabilan ako i samo ako je integrabilan realni slučajni proces $|||\xi(t)|||$, $a \leq t \leq b$ t.j. ako i samo ako je

$$\int_a^b |||\xi(t)||| \, dt < \infty$$

Jednostavno je videti da je merljiv slučajni proces na konačnom intervalu $[a,b]$ za koji je

$$\int_a^b E \, \|\xi(t)\|^2 \, dt < \infty$$

integrabilan.

Jasno je da je za integrabilan slučajni proces $\xi(t)$, $a \leq t \leq b$

$$\int_a^b \xi(t) \, dt$$

slučajna promenljiva sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Za svako $u \in H$,

$$(u, \int_a^b \xi(t) \, dt)$$

je skalarna slučajna promenljiva i sa verovatnoćom jedan

$$(u, \int_a^b \xi(t) \, dt) = \int_a^b (u, \xi(t)) \, dt \qquad (16)$$

Zaista, za integrabilan slučajni proces $\xi(t)$, $a \leq t \leq b$ postoji niz prostih funkcija $\{ \xi_n \}_1^\infty$ sa vrednostima u $L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$ koji skoro svuda konvergira ka slučajnom procesu $\xi(t)$ i

$$\int_a^b \xi(t) \, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \xi_n(t) \, dt$$

Iz ove konvergencije u srednjem kvadratnom niza slučajnih promenljivih $\int_a^b \xi_n(t) \, dt$, sledi konvergencija u srednjem kvadratnom niza skalarnih slučajnih promenljivih

$$\lim_{n\to\infty} (u, \int_a^b \xi_n(t) \, dt) = (u, \int_a^b \xi(t) \, dt) \qquad (17)$$

Za proste funkcije $\xi_n(t)$, $t \in [a,b]$ jednostavno je videti da je sa verovatnoćom jedan

$$(u, \int_a^b \xi_n(t) \, dt) = \int_a^b (u, \xi_n(t)) \, dt \qquad (18)$$

Dalje, za integrabilan slučajni proces $\xi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, $(u,\xi(t))$ je integrabilan skalarni slučajni proces, $(u,\xi_n(t))$ je niz prostih funkcija koji skoro svuda konvergira skalarnom slučajnom procesu $(u,\xi(t))$ i

$$\int_a^b (u,\xi(t))\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (u,\xi_n(t))\,dt \qquad (19)$$

u srednjem kvadratnom.
Iz jednakosti (17), (18) i (19) sledi da je skoro izvesno

$$\left(u, \int_a^b \xi(t)\,dt \right) = \int_a^b (u,\xi(t))\,dt$$

jer isti niz slučajnih promenljivih (18) ne može konvergirati u srednjem kvadratnom dvema različitim graničnim vrednostima.
Koristeći jednakost (16) jednostavno se dokazuje da je za linearan ograničen operator A koji vrši preslikavanje Hilbertovog prostora H u sebe samog skoro izvesno

$$A \int_a^b \xi(t)\,dt = \int_a^b A\,\xi(t)\,dt \qquad (20)$$

4. KORELACIONA FUNKCIJA. SLUČAJNI PROCES WIENERA.

U ovom delu su definisani korelaciona funkcija i slučajni proces Wienera kao što je to uradjeno u [5] i [21].

Za slučajni proces $\xi = \xi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H, $E\,\|\xi(t)\|^2 < \infty$ i fiksirano $s,t \in [a,b]$ srednja vrednost

$$E\,[\,(u,\xi(s))-E(u,\xi(s))\,]\,\overline{[\,(v,\xi(t))-E(v,\xi(t))\,]}\;, \quad u,v \in H$$

je bilinearan neprekidan funkcional na Hilbertovom prostoru H i može se predstaviti u obliku

$$E\,[\,(u,\xi(s))-E(u,\xi(s))\,]\,\overline{[\,(v,\xi(t))-E(v,\xi(t))\,]} = (\,B(s,t)u,\,v\,)$$

gde je $B(s,t)$ linearan ograničen operator koji vrši preslikavanje iz Hilbertovog prostora H u isti taj Hilbertov prostor. Ovako definisanu operatornu funkciju $B(s,t)$, $a \leq s,t \leq b$ nazivamo *k o r e l a c i o n o m   f u n k c i j o m* slučajnog procesa $\xi = \xi(t)$, $a \leq t \leq b$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru. I uopšte, za slučajni proces $\xi = \xi(t)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H, operatornu funkciju $B(s,t)$, $a \leq s,t \leq b$, definisanu jednakošću

$$E \, [\, (u,\xi(s))-E(u,\xi(s)) \,] \, \overline{[\, (v,\xi(t))-E\,(v,\xi(t)) \,]} \, , \quad u,v \in H$$

nazivamo *k o r e l a c i o n o m* funkcijom slučajnog procesa $\xi = \xi(t)$.

Slučajni proces $w = w(t)$, $0 \leq t \leq T$, $w(0) = 0$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H sa nezavisnim priraštajima ($w(t_2)-w(t_1)$ i $w(s_2)-w(s_1)$ su nezavisne slučajne promenljive za $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$) takvim da je $w(t+\tau)-w(t)$ za svako $t \in [0,T]$, $\tau > 0$ Gausovska slučajna promenljiva sa srednjom vrednošću nula i korelacionim operatorom τI (I - - identični operator u Hilbertovom prostoru H) nazivamo standardnim *p r o c e s o m   W i e n e r a* . Očigledno je za svako $t \in [0,T]$ srednja vrednost

$$E\, w(t) = 0$$

što je ispunjeno ako i samo ako je za svako $u \in H$

$$E\,(u,w(t)) = 0.$$

Jednostavno se dobija da je korelaciona funkcija Wienerovog procesa $w = w(t)$, $0 \leq t \leq T$

$$B_w(s,t) = \min\,\{\, s,t \,\}\, I \qquad (21)$$

Za proizvoljno $u \in H$, $\|u\| = 1$, skalarni slučajni proces $(u,w(t))$, $0 \leq t \leq T$ je Wienerov proces u R_1. Neka je $(e_i)_1^\infty$ ortonormirana baza separabilnog Hilbertovog prostora H. Tada su

$w_k(t) = (e_k, w(t))$ uzajamno nekorelacioni a samim tim i nezavisni (jer su Gausovski) Wienerovi procesi u R_1 i važi

$$w(\omega,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k \; w_k(\omega,t) \tag{22}$$

gde konvergenciju reda posmatramo u smislu jake konvergencije u Hilbertovom prostoru H. Za proizvoljno $u \in H$, skalarni slučajni proces $(u,w(t))$, $0 \leqslant t \leqslant T$ je slučajni proces sa nekorelacionim (a samim tim i nezavisnim) priraštajima u R_1 pri čemu je

$$E \, |(u,w(t))|^2 = \|u\|^2 \, t \tag{23}$$

GLAVA III

EKVIVALENTNI SLUČAJNI PROCESI

1. POJAM EKVIVALENTNOSTI. SPEKTRALNI TIP SLUČAJNOG PROCESA.

Osnovne definicije u ovom delu su uvedene kao što je to učinjeno u [19], bez ikakvih izmena.

Neka je $\eta = \eta(t)$, $a \leq t \leq b$ slučajni proces sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H i neka je

$$E\,|(u,\eta(t))|^2 < \infty$$

za svako $t \in [a,b]$ i svaki element $u \in H$. Označimo sa $H_t^{\circ}(\eta)$ linearni vektorski prostor skalarnih slučajnih promenljivih oblika

$$\sum_{k=1}^{n}(u_k,\eta(t_k)),\ u_k \in H,\ t_k \leq t,\ k=1,2,\ldots,n$$

i sa $H_t(\eta) = \overline{H_t^{\circ}(\eta)}$ zatvaranje ovog linearnog prostora u srednjem kvadratnom. Drugim rečima, $H_t(\eta)$ je linearno zatvaranje nad skalarnim slučajnim promenljivim

$$(u,\eta(s)),\ u \in H,\ s \leq t\ .$$

$H_t(\eta)$ posmatraamo kao potprostor Hilbertovog prostora skalarnih slučajnih promenljivih ξ, $E\,\|\xi\|^2 < \infty$ sa skalarnim proizvodom

$$(\xi_1,\xi_2) = E\,\xi_1\bar{\xi}_2$$

i normom

$$\|\xi\|^2 = E\,|\xi|^2$$

Definišimo prostor

$$H(\eta) = \overline{\bigcup_{a \leq t \leq b} H_t(\eta)}$$

Ako su svi skalarni slučajni procesi $(u,\eta(t))$, $u \in H$ neprekidni sa leve strane u srednjem kvadratnom, $H(\eta)$ je separabilan Hilbertov prostor, a monotono rastuća familija potprostora $H_t(\eta)$, $a \leq t \leq b$ je neprekidna sa leve strane t.j.

$$H_s(\eta) \to H_t(\eta) \quad \text{kad} \quad s \to t-0$$

Neka je $\xi = \xi(t)$, $a \leq t \leq b$ drugi slučajni proces sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Uočimo preslikavanje:

$$A:\ (u,\eta(t)) \to (u,\xi(t)),\ u \in H,\ a \leq t \leq b \qquad (1)$$

Za slučajne procese $\xi = \xi(t)$ i $\eta = \eta(t)$ kažemo da su e k v i v a l e n t n i na intervalu $[a,b]$ ako se preslikavanje (1) može produžiti do linearnog ograničenog operatora A iz Hilbertovog prostora $H(\eta)$ u Hilbertov prostor $H(\xi)$ koji ima inverzan ograničen operator A^{-1} i za koji je $I-A^*A$ operator Hilberta-Šmita. Ovako definisana ekvivalentnost slučajnih procesa je relacija ekvivalencije u skupu slučajnih procesa $\xi(t)$, $a \leq t \leq b$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H, $E|(u,\xi(t))|^2 < \infty$. Tvrdjenje sledi iz jednakosti $A = (A^*A)^{1/2}$ gde je X - izometričan operator. Na osnovu teoreme o faktorizaciji, za ekvivalentne slučajne procese $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$, $a \leq t \leq b$, familije potprostora $H_t(\xi)$, $a \leq t \leq b$, i $H_t(\eta)$, $a \leq t \leq b$ su izometrične t.j. postoji izometričan operator X koji vrši preslikavanje iz Hilbertovog prostora $H(\eta)$ u Hilbertov prostor $H(\xi)$ takav da je

$$X\,H_t(\eta) = H_t(\xi)\ .$$

Neka je za linearan operator A, $I-A^*A$ operator Hilberta-Šmita. Tada je A ograničen operator što je ispunjeno ako i samo ako je A^*A ograničen operator. Operator A^*A je pozitivan pa je:

$$\delta = \sup_{\|u\|=1} ((I-A^*A)u, u) < 1 \qquad (2)$$

odakle sledi

$$(u,u) - (A^*A\, u, u) \leq \delta\, (u,u)$$

i

$$(A\, u, A\, u) \geq (1-\delta)\, (u,u) \qquad (3)$$

Iz nejednakosti (2) jednostavno sledi da najveća sopstvena vrednost potpuno neprekidnog samokonjugovanog operatora $I - A^*A$ nije veća od jedinice. Najveća sopstvena vrednost je manja od jedinice ako i samo ako je $\delta < 1$ i tada iz nejednakosti (3) sledi da operator A ima inverzan ograničen operator. Ako je jedan najveća sopstvena vrednost operatora $I - A^*A$, nula je sopstvena vrednost operatora A^*A odakle sledi da operator A nema inverzan operator. Ovim je u potpunosti dokazano sledeće tvrdjenje.

L E M A 1. Neka je za linearan ograničen operator A, $I - A^*A$ operator Hilberta-Šmita. Linearan ograničen operator A ima inverzan ograničen operator ako i samo ako je najveća sopstvena vrednost potpuno neprekidnog samokonjugovanog operatora $I - A^*A$ manja od jedinice t.j. ako je

$$\delta = \sup_{\|u\|=1} ((I-A^*A)\, u, u) < 1$$

odnosno

$$((I - A^*A)\, u, u) < (u,u) \quad \text{za svako } u \in H,\ u \neq 0.$$

Odavde imamo da su slučajni procesi $\xi = \xi(t)$ i $\eta = \eta(t)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H ekvivalentni na intervalu $[a,b]$ ako i samo ako se preslikavanje (1) može produžiti do linearnog ograničenog operatora A za koji je $I-A^*A$ operator Hilberta-Šmita čija je najveća sopstvena vrednost manja od jedinice.

Neka je $\xi = \xi(t)$, $a \leq t \leq b$ slučajni proces sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H i neka je za svako $u \in H$ i svako $t \in H$

$$E\,|(u,\xi(t))|^2 < \infty .$$

Neka je $H_t(\xi)$ linearna zatvorenost nad slučajnim promenljivim

$$(u,\xi(s)),\ u \in H,\ s \leq t$$

i

$$H(\xi) = \bigcup_{a \leq t \leq b} H_t(\xi)$$

Za prostor $H(\xi)$ pretpostavljamo da je separabilan, a za monotono rastuću familiju potprostora $H_t(\xi)$, $a \leq t \leq b$ da jeneprekidna sa leve strane. Ovo je, na primer, zadovoljeno ako su za svako $u \in H$ skalarni slučajni procesi $(u,\xi(t))$ neprekidni sa leve strane u srednjem kvadratnom. Neka je P_t operator ortogonalnog projektovanja na potprostor $H_t(\xi)$. S p e k t r a l n i t i p slučajnog procesa $\xi(t)$, $a \leq t \leq b$ definišemo kao spektralni tip samokonjugovanog operatora

$$F = \int_a^b t\, dP_t$$

Kao što je poznato, slučajni procesi $\xi(t)$ i $\eta(t)$ na intervalu $[a,b]$ su istog spektralnog tipa ako i samo ako su familije potprostora $H_t(\xi)$, $a \leq t \leq b$ i $H_t(\eta)$, $a \leq t \leq b$ izometrične. Ekvivalentni slučajni procesi su istog spektralnog tipa.

2. SLUČAJNI PROCESI SA VREDNOSTIMA U SEPARABILNOM HILBERTOVOM PROSTORU EKVIVALENTNI WIENEROVOM SLUČAJNOM PROCESU

U ovom delu su izneti neki stavovi iz [20] potrebni za dalje izlaganje.

Neka je $w = w(t)$, $0 \leq t \leq T$ Wienerov proces sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Znamo da je srednja vrednost

$$E(u,w(t)) = 0, \quad u \in H, \quad 0 \leq t \leq T$$

i

$$E\,(u,w(s))\,(v,w(t)) = (B_w(s,t)\,u,\ v)$$

gde je korelaciona funkcija $B_w(s,t) = \min\,(s,t)\ I$.

Neka je $H_t(w)$ linearno zatvaranje nad slučajnim promenljivim $(u,w(s))$, $u \in H$, $s \leq t$ i

$$H(w) = \overline{\bigcup_{0\leq t\leq T} H_t(w)} \ .$$

Označimo sa $L^2(H)$ skup merljivih funkcija $f(t)$ definisanih na intervalu $[0,T]$, sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H, takvih da je

$$\int_0^T \|f(t)\|^2\, dt < \infty \ .$$

U $L^2(H)$ uvedimo skalarni proizvod

$$\langle f_1,f_2 \rangle = \int_0^T (f_1(t),\ f_2(t))\, dt$$

i normu indukovanu ovim skalarnim proizvodom

$$|||\, f\, |||^2 = \int_0^T \|\ f(t)\ \|^2\, dt$$

Može se dokazati, kao što je to uradjeno za $L^2(\Omega,\mathfrak{A},P,H)$ da je $L^2(H)$ kompletan i samim tim Hilbertov prostor. Funkcije

$$f = f(t) \in L^2(H)$$

su integrabilne i linearni omotač nad funkcijama

$$\chi_t(s)\ u,\ 0 \leq t \leq T,\ u \in H; \qquad \chi_t(s) = \begin{cases} 1 & s \in [0,t] \\ 0 & s \notin [0,t] \end{cases}$$

je svuda gust u $L^2(H)$. Neka je $L_t^2(H)$ potprostor funkcija $f(t) \in L^2(H)$, takvih da je $f(s) = 0$ za $s > t$. Uočimo preslikavanje:

$$\chi:\ (u,\ w(t)) \to \chi_t(s)\ u\ .$$

Ovo preslikavanje se može produžiti u izometričan operator χ iz Hilbertovog prostora $H(w)$ u Hilbertov prostor $L^2(H)$ pri čemu je:

$$\chi\ H_t(w) = L_t^2(H)$$

t.j. familije potprostora $H_t(w)$, $0 \leq t \leq T$ i $L_t^2(H)$, $0 \leq t \leq T$ su izometrične.

Neka je $\xi = \xi(t)$, $0 \leq t \leq T$ slučajni proces sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Slučajni proces $\xi = \xi(t)$,

$$E\ (u,\xi(s))\ (v,\xi(t)) = (\ B_\xi(s,t)u,\ v\ )$$

je ekvivallentan Wienerevom procesu u H ako se preslikavanje

$$A:\quad (u,\ w(t)) \to (u,\ \xi(t)),\quad u \in H,\quad 0 \leq t \leq T$$

može produžiti do linearnog operatora A za koji je $I - A^*A$ operator Hilberta-šmita sa najvećom sopstvenom vrednošću manjom od jedinice. Uočimo preslikavanje

$$B:\ X_t(s)\ u\ \to\ (u,\ \xi(t))\ .$$

Imamo da je $A = B\ X$ i $I - A^*A = X^1\ (I - B^*B)\ X$ odakle sledi da je slučajni proces $\xi = \xi(t)$ ekvivalentan slučajnom procesu Wienera $w = w(t)$ na intervalu $[0,T]$ ako isamo ako se preslikavanje B može produžiti do linearnog ograničenog operatora B za koji je $I - B^*B$ operator Hilberta-šmita u funkcionalnom prostoru $L^2(H)$ sa najvećom sopstvenom vrednošću manjom od jedinice. Kao što je poznato, (videti [20]) linearni operator $I - B^*B$ u funkcionalnom prostoru $L^2(H)$ je operator Hilberta-šmita ako i samo ako se može predstaviti u obliku:

$$(\ I - B^*B\ )f\ (t) = \int_0^T K(s,t)\ f(s)\ ds \qquad (4)$$

gde je $K(s,t)$ merljiva operatorna funkcija sa vrednostima u Hilbertovom prostoru operatora Hilberta-šmita definisanih u Hilbertovom prostoru H koja zadovoljava

$$\int_0^T \int_0^T |K(s,t)|^2\ ds\ dt < \infty \qquad (5)$$

$|K(s,t)|$ je apsolutna norma operatora Hilberta-šmita $K(s,t)$ t.j.

$$|K(s,t)|^2 = Sp\ [\ K(s,t)^*\ K(s,t)\ ] = \sum_{i=1}^{\infty} \|\ K(s,t)e_i\|^2$$

($(e_i)_i$ je ortonormirana baza separabilnog Hilbertovog prostora H) Operator $I - B^*B$ je operator Hilberta-šmita ako i samo ako je za funkcije $f,g \in L^2(H)$

$$(f,g) - (Bf,Bg) = \int_0^T \int_0^T (\, K(s,t)f(s),\ g(t)\,)\, ds\, dt \qquad (6)$$

pri čemu je ispunjena nejednakost (5). Jednakost (6) je ispunjena ako i samo ako je ispunjena za neki potpun sistem funkcija u $L^2(H)$, na primer, za sistem funkcija

$$\chi_t(s)\, u, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad u \in H .$$

Za $f(s) = \chi_{t_1}(s)\, u$, $g(t) = \chi_{t_2}(t)\, v$, iz jednakosti (6) sledi:

$$(\, B_w(t_1,t_2)u - B_\xi(t_1,t_2)u,\ v\,) = \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} (K(s,t)u,\ v)\, ds\, dt$$

ili u operatornom obliku:

$$B_w(t_1,t_2) - B_\xi(t_1,t_2) = \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} K(s,t)\, ds\, dt \qquad (7)$$

Ovim je u potpunosti dokazano sledeće tvrdjenje.

LEMA 2. Slučajni proces $\xi = \xi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom H je ekvivalentan Wienerovom procesu $w = w(t)$ sa vrednistima u H na intervalu $[0,T]$ ako i samo ako se razlika operatornih korelacionih funkcija može predstaviti u obliku

$$B_w(t_1,t_2) - B_\xi(t_1,t_2) = \int_0^{t_2}\int_0^{t_1} K(s,t)\, ds\, dt$$

čemu je

$$\int_0^T \int_0^T |K(s,t)|^2\, ds\, dt < \infty$$

$|K(s,t)|$ - norma Hilberta-šmita i

$$\sup_{\|b\|=1} \int_0^T \int_0^T (\, K(s,t)b(s),\ b(t)\,)\, ds\, dt = \delta < 1 \qquad (8)$$

Nejednakost (8) označava da je najveća sopstvena vrednost operatora $I - B^*B$ u funkcionalnom prostoru $L^2(H)$ manja od jedinice što je ispunjeno ako i samo ako operator B ima inverzan ograničen operator. S obzirom na osobine samokonjugovanog potpuno neprekidnog operatora $I - B^{*}B$ ovaj uslov se može predstaviti u obliku

$$\int_0^T \int_0^T (K(s,t)b(s), b(t))\, ds\, dt < \int_0^T \|b(s)\|^2\, ds \qquad (8')$$

ili u obliku

$$\int_0^T \int_0^T (K(s,t)b(s), b(t))\, ds\, dt \neq \int_0^T \|b(s)\|^2\, ds \qquad (8'')$$

za proizvoljnu funkciju $b = b(s) \in L^2(H)$, $\int_0^T \|b(s)\|^2\, ds \neq 0$. Napomenimo još da integral (7) posmatramo kao integral funkcije sa vrednostima u Hilbertovom prostoru $S_2(H)$. Elementi filbertovog prostora $S_2(H)$ su operatori Hilberta-Šmita u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Skalarni proizvod elemenata $\varphi, \psi \in S_2(H)$ je definisan jednakošću

$$\{ \varphi, \psi \} = Sp\ \psi^{*} \varphi = \sum_k (\varphi e_k, \psi e_k) = \sum_k \sum_i (\varphi e_k, e_i)(e_i, \psi e_k)$$

Merljiva operatorna funkcija $K(s,t)$ koja zadovoljava uslov (5) je integrabilna odakle sledi egzistencija integrala (7).

3. S T O H A S T I Č K I P R O C E S I T O

Ovaj deo je u potpunosti originalan. Posmatra se ekvivalentnost stohastičkog procesa Ito u separabilnom Hilbertovom prostoru i procesa Wienera u odnosu na koji je on zadat kao što je to uradjeno u [20] za realne slučajne procese.

Neka je $w = w(t)$ na konačnom intervalu $[0,T]$ slučajni proces Wienera sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H i $a(s)$ merljiv integrabilan slučajni proces sa vrednostima u istom Hilbertovom prostoru. Slučajni proces

$$\xi(t) = \int_0^t a(s)\, ds + w(t) \qquad (9)$$

sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H nazivamo slučajnim procesom Ito u odnosu na Wienerov proces $w = w(t)$.

Neka je $a(s)$ merljiv slučajni proces sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H i neka je

$$\int_0^T E\|a(s)\|^2 \, ds < \infty \qquad (10)$$

Iz uslova (10) sledi integrabilnost slučajnog procesa $\overset{\xi}{a}(t)$ na konačnom intervalu $[0,T]$. Neka je $\xi(t)$, $0 \leq t \leq T$ slučajni proces Ito u odnosu na Wienerov proces $w(t)$, $0 \leq t \leq T$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H. Označimo redom korelacione funkcije slučajnih procesa $w(t)$ i $\xi(t)$, $0 \leq t \leq T$ sa $B_w(s,t)$ i $B_\xi(s,t)$:

$$E\,(u,\ w(s))\ (v,\ w(t)) = (\ (u,w(s)),\ (v,w(t)\ ) = (\ B_w(s,t)u,\ v\ )$$

$$E\,(u,\ \xi(s))\ (v,\ \xi(t)) = (\ (u,\xi(s)),\ (v,\xi(t)\ ) = (\ B_\xi(s,t)u,\ v\ )$$

za $u,v \in H$ i $s,t \in [0,T]$.

Istaknimo ovde da su skalarni proizvod i norma u Hilbertovom prostoru H i Hilbertovom prostoru skalarnih slučajnih promenljivih ξ, $E|\xi|^2 < \infty$ isto označeni. No zabune neće biti. Pri posmatranju skalarnog proizvoda i norme elemenata f i g treba voditi računa o tome kom prostoru oni pripadaju. Ako je $f,g \in H$, tada su skalarni proizvod (f,g) i norma $\|f\|$ definisani u datom Hilbertovom prostoru. Ako su f i g skalarne slučajne promenljive, tada je

$$(f,g) = E\, f\, \bar{g} \qquad i \qquad \|f\|^2 = E\,|f|^2$$

Za proizvoljnu slučajnu promenljivu ξ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H, $\xi(\omega) \in H$ za svako $\omega \in \Omega$ i

$$(u,\xi) = (\ u,\ \xi(\omega)\ )$$

je skalarni proizvod u Hilbertovom prostoru H.

Iz jednakosti (9) imamo da je za proizvoljne elemente $u,v \in H$:

$$
\begin{aligned}
(u,\xi(s)) &= \int_0^s (u,a(x))\,dx + (u,w(s)) \\
(v,\xi(t)) &= \int_0^t (v,a(y))\,dy + (v,w(t))
\end{aligned}
\tag{11}
$$

odakle sledi da je

$$
\begin{aligned}
(\,(u,\xi(s)),\ (v,\xi(t))\,) = {} & (\,\int_0^s (u,a(x))\,dx,\ \int_0^t (v,a(y))\,dy\,) + \\
& + (\,\int_0^s (u,a(x))\,dx,\ (v,w(t))\,) \\
& + (\,(u,w(s)),\ \int_0^t (v,a(y))\,dy\,) \\
& + (\,(u,w(s)),\ (v,w(t))\,)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

i

$$
\begin{aligned}
(\,B_w(s,t)u - B_\xi(s,t)u,\ v\,) = {} & - \int_0^t \int_0^s (\,(u,a(x)),\ (v,a(y))\,)\,dx\,dy \\
& - \int_0^s (\,(u,a(x)),\ (v,w(t))\,)\,dx \\
& - \int_0^t (\,(u,w(s)),\ (v,a(y))\,)\,dy
\end{aligned}
\tag{12'}
$$

RAZMOTRIMO PRVI SABIRAK JEDNAKOSTI (12'):

$$
- \int_0^t \int_0^s (\,(u,a(x)),\ (v,a(y))\,)\,dx\,dy
$$

Za fiksirano $x,y \in [0,T]$, označimo sa

$$
\Phi_{xy}(u,v) = -\,(\,(u,a(x)),\ (v,a(y))\,) \tag{13}
$$

Jednostavno je videti da je:

$$
\Phi_{xy}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2,\ v) = \alpha_1 \Phi_{xy}(u_1,v) + \alpha_2 \Phi_{xy}(u_2,v)
$$

$$
\Phi_{xy}(u,\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \bar{\beta}_1 \Phi_{xy}(u,v_1) + \bar{\beta}_2 \Phi_{xy}(u,v_2)
$$

Iz jednakosti (13) imamo da je

$$
\begin{aligned}
|\Phi_{xy}(u,v)| &\leq \|(u,a(x))\|\ \|(v,a(y))\| = \\
&= \{\,E|(u,a(x))|^2\,\}^{1/2}\ \{\,E|(v,a(y))|^2\,\}^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$\leq \{ E \|u\|^2 \|a(x)\|^2 \}^{1/2} \{ E \|v\|^2 \|a(y)\|^2 \}^{1/2}$$

$$\leq \{ E \|a(x)\|^2 \}^{1/2} \{ E \|a(y)\|^2 \}^{1/2} \|u\| \|v\|$$

Odavde, na osnovu uslova (10) sledi da je $\Phi_{xy}(u,v)$ za skoro svako $x,y \in [0,T]$ bilinearan funkcional i

$$\Phi_{xy}(u,v) = (B_a(x,y)u,\ v) \tag{14}$$

gde je $B_a(x,y)$ linearan ograničen operator u separabilnom Hilbertovom prostoru H sa normom

$$\| B_a(x,y) \| \leq \{ E \|a(x)\|^2 \}^{1/2} \{ E \|a(y)\|^2 \}^{1/2} .$$

Operator $B_a(x,y)$ je sa konačnom apsolutnom normom. Zaista, neka je $\{e_k\}_1^\infty$ ortonormirana baza u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Tada je:

$$|B_a(x,y)|^2 = \sum_{k,j=1}^{\infty} |(B_a(x,y)e_k, e_j)|^2 =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{\infty} |(\ (e_k, a(x)),\ (e_j, a(y))\ )|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k,j=1}^{\infty} \|(e_k, a(x))\|^2 \ \|(e_j, a(y))\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \|(e_k, a(x))\|^2 \ \sum_{j=1}^{\infty} \|(e_j, a(y))\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E|(e_k, a(x))|^2 \ \sum_{j=1}^{\infty} E|(e_j, a(y))|^2$$

$$= E\sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, a(x))|^2 \ \ E\sum_{j=1}^{\infty} |(e_j, a(y))|^2$$

$$= E \|a(x)\|^2 \ \ E \|a(y)\|^2 \ < \infty$$

Iz dobijene nejednakosti sledi:

$$\int_0^T \int_0^T |B_a(x,y)|^2 \, dx\, dy \leq \int_0^T \int_0^T E\|a(x)\|^2 \, E\|a(y)\|^2 \, dx\, dy =$$

$$= \{ \int_0^T E\|a(x)\|^2 \, dx \}^2$$

što zajedno sa uslovom (10) daje:

$$\int_0^T \int_0^T |B_a(x,y)|^2 \, dx\, dy \ < \infty \tag{15}$$

Ovim je dokazano da je prvi sabirak u zbiru (12'):

$$
\begin{aligned}
- \int_0^t \int_0^T \big((u,a(x)),\ (v,a(y)) \big)\, dx\, dy &= \\
&= \int_0^t \int_0^T (B_T(x,y)u,\ v)\, dx\, dy
\end{aligned}
\tag{16}
$$

pri čemu je $B_T(x,y)$ operator Hilberta-šmita sa apsolutnom normom $|B_T(x,y)|$ koja zadovoljava nejednakost (15).

RAZMOTRIMO SADA DRUGI SABIRAK U ZBIRU (12'):

$$
\begin{aligned}
- \int_0^T \big((u,a(x)),\ (v,w(t)) \big)\, dx &= \\
&= \int_0^T \big(-(u,a(x)),\ (v,w(t)) \big)\, dx \\
&= \int_0^T \big(\check{P}_t(-(u,a(x))),\ (v,w(t)) \big)\, dx
\end{aligned}
\tag{17}
$$

gde smo sa $\check{P}_t$ označili operator ortogonalnog projektovanja na linearno zatvaranje nad slučajnim promenljivim

$$(v,w(y)),\quad 0 \leqslant y \leqslant t.$$

Skalarni slučajni proces $(v,w(y)),\ 0 \leqslant y \leqslant T$ je sa ortogonalnim priraštajima i $F_v(y) = E|(v,w(y))|^2 = \|v\|^2 y$.

$$\check{P}_t(-(u,a(x))) = \int_0^t c(x,y,u,v)\, d(v,w(y)) \tag{18}$$

pri čemu je:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t |c(x,y,u,v)|^2\, dF_v(y) &= \int_0^t |c(x,y,u,v)|^2\, \|v\|^2\, dy = \\
&= \| P_t(-(u,a(x)))\|^2 \leqslant \|(u,a(x))\|^2 = \\
&= E\,|(u,a(x))|^2 \leqslant \|u\|^2\, E\, \|a(x)\|^2 < \infty
\end{aligned}
\tag{18'}
$$

za skoro svako $x \in [0,T]$.

Iz jednakosti (17) i (18) sledi:

$$
\begin{aligned}
-\int_0^T \big((u,a(x)),\ (v,w(t)) \big)\, dx &= \\
&= \int_0^T \Big(\int_0^t c(x,y,u,v)\, d(v,w(y)),\ \int_0^t d(v,w(y)) \Big)\, dx =
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^s \int_0^t c(x,y,u,v)\|v\|^2 \, dy \, dx = \int_0^t \int_0^s \Phi_{xy}(u,v) \, dx \, dy \tag{17'}$$

pri čemu smo uveli oznaku:

$$\Phi_{xy}(u,v) = c(x,y,u,v)\|v\|^2 \tag{19}$$

Imamo da je za svako $s,t \in [0,T]$:

$$\int_0^t \int_0^s \Phi_{xy}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^s (\ (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, a(x)),\ (v, w(t))\ ) \, dx =$$

$$= -\alpha_1 \int_0^s ((u_1, a(x)),\ (v, w(t))) \, dx - \alpha_2 \int_0^s ((u_2, a(x),\ (v, w(t))) \, dx$$

$$= \alpha_1 \int_0^t \int_0^s \Phi_{xy}(u_1, v) \, dx \, dy + \alpha_2 \int_0^t \int_0^s \Phi_{xy}(u_2, v) \, dx \, dy$$

$$= \int_0^t \int_0^s [\ \alpha_1 \Phi_{xy}(u_1, v) + \alpha_2 \Phi_{xy}(u_2, v)\ ] \, dx \, dy$$

Odavde sledi da je za skoro svako $x,y \in [0,T]$

$$\Phi_{xy}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 \Phi_{xy}(u_1, v) + \alpha_2 \Phi_{xy}(u_2, v) \tag{20}$$

Dalje je za svako $s,t \in [0,T]$:

$$\int_0^t \int_0^s \Phi_{xy}(u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) \, dx \, dy =$$

$$= -\int_0^s ((u, a(x)),\ (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2, w(t))) \, dx =$$

$$= -\int_0^s ((u, a(x)),\ \beta_1 (v_1, w(t)) + \beta_2 (v_2, w(t))) \, dx$$

$$= -\bar{\beta}_1 \int_0^s ((u, a(x)),\ (v_1, w(t))) \, dx - \bar{\beta}_2 \int_0^s ((u, a(x)),\ (v_2, w(t))) \, dx$$

$$= \bar{\beta}_1 \int_0^t \int_0^s \Phi_{xy}(u, v_1) \, dx \, dy + \bar{\beta}_2 \int_0^t \int_0^s \Phi_{xy}(u, v_2) \, dx \, dy$$

$$= \int_0^t \int_0^s [\ \bar{\beta}_1 \Phi_{xy}(u, v_1) + \bar{\beta}_2 \Phi_{xy}(u, v_2)\ ] \, dx \, dy$$

Odavde sledi da je za skoro svako $x,y \in [0,T]$

$$\Phi_{xy}(u,\ \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \bar{\beta}_1\ \Phi_{xy}(u, v_1) + \bar{\beta}_2\ \Phi_{xy}(u, v_2) \tag{20'}$$

Neka je $\{e_k\}_1^\infty$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora H. Uočimo da je

$$\int_0^t \sum_{k=1}^\infty |\Phi_{xy}(u,e_k)|^2\, dy = \sum_{k=1}^\infty \int_0^t |\Phi_{xy}(u,e_k)|^2 = \sum_{k=1}^\infty \int_0^t |c(x,y,u,e_k)|^2\, dy$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \| P_t^{\infty k} (-(u,a(x))) \|^2 = \| P_t (-(u,a(x))) \|^2 \leq \| (u,a(x)) \|^2$$

$$= E\, |(u,a(x))|^2 \leq \|u\|^2\, E\, \|a(x)\|^2 < \infty$$

za svako $t \in [0,T]$, svako $u \in H$ i skoro svako $x \in [0,T]$. ($P_t^{\infty k}$ je operator ortogonalnog projektovanja na $H_t^{\infty k}(w)$ i P_t je operator ortogonalnog projektovanja na $H_t(w) = \bigoplus_{k=1}^\infty H_t^{\infty k}(w)$)
Odavde jednostavno sledi da je za skoro svako $x,y \in [0,T]$

$$\sum_{k=1}^\infty |\Phi_{xy}(u,e_k)|^2 = N(x,y,u) < \infty \tag{21}$$

pri čemu $N(x,y,u)$ ne zavisi od izbora baze $\{e_k\}_1^\infty$ što zajedno sa jednakošću (20') znači da je $\overline{\Phi_{xy}(u,v)} = \Psi(v)$ linearan ograničen funkcional promenljive $v \in H$. Zaista, za proizvoljno $v \in H$

$$|\overline{\Phi_{xy}(u, v/\|v\|)}| \leq N(x,y,u)$$

odakle neposredno sledi

$$|\overline{\Phi_{xy}(u,v)}| \leq N(x,y,u)\, \|v\|$$

Na osnovu teoreme Risa

$$\overline{\Phi_{xy}(u,v)} = (v,\ C(x,y)u)$$

i odavde

$$\Phi_{xy}(u,v) = (C(x,y)u,\ v) \tag{22}$$

Iz jednakosti (20) jednostavno sledi da je $C(x,y)$ linearan operator. Operator $C(x,y)$ je sa konačnom apsolutnom normom. Zaista,

$$\int_0^t \sum_{k,j=1}^\infty |(C(x,y)e_k,\ e_j)|^2\, dy =$$

$$= \int_0^t \sum_{k,j=1}^{\infty} |\Phi_{xy}(e_k,e_j)|^2 \, dy$$

$$= \sum_{k,j=1}^{\infty} \int_0^t |c(x,y,e_k,e_j)|^2 \, dy$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \| P_t^{*j} (-(e_k,a(x))) \|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \| P_t(-(e_k,a(x))) \|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \| (e_k,a(x)) \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} E \, |(e_k,a(x))|^2 =$$

$$= E \sum_{k=1}^{\infty} |(e_k,a(x))|^2 = E \, \|a(x)\|^2 < \infty$$

za svako $t \in [0,T]$, pa je

$$\int_0^T \sum_{k,j=1}^{\infty} |(C(x,y)e_k, \; e_j)|^2 \, dy \leq E \, \|a(x)\|^2$$

Odavde sledi da je $C(x,y)$ za skoro svako $x,y \in [0,T]$ operator sa konačnom apsolutnom normom

$$|C(x,y)|^2 = \sum_{k,j=1}^{\infty} |(C(x,y)e_k, \; e_j)|^2 < \infty$$

pri čemu je na osnovu uslova (10)

$$\int_0^T \int_0^T |C(x,y)|^2 \, dx \, dy < \infty \tag{23}$$

Ovim je u potpunosti dokazana jednakost

$$- \int_0^{\infty} ((u,a(x)), \; (v,w(t))) \, dx = \int_0^t \int_0^{\infty} (C(x,y)u, \; v) \, dx \, dy \tag{24}$$

gde je $C(x,y)$ za skoro svako $x,y \in [0,T]$ operator Hillberta-Šmita u separabilnom Hilbertovom prostoru H sa apsolutnom normom $|C(x,y)|$ koja zadovoljava nejednakost (23).

RAZMOTRIMO TREĆI SABIRAK JEDNAKOSTI (12')

$$- \int_0^t ((u,w(s)), \; (v,a(y))) \, dy =$$

$$= \int_0^t \overline{(-(v,a(y)), \; (u,w(s)))} \, dy$$

$$= \int_0^t \left(\overline{P_*^u(-(v,a(y)))}, \; \overline{(u,w(s))} \right) dy$$

gde smo sa P_*^u označili operator ortogonalnog projektovanja na linearno zatvaranje nad slučajnim promenljivim

$$(u,w(x)), \quad 0 \leqslant x \leqslant s$$

Kao što je objašnjeno:

$$P_*^u(-(v,a(y))) = \int_0^\infty c(y,x,v,u) \; d(u,w(x))$$

pri čemu je

$$\int_0^\infty |c(y,x,v,u)|^2 \; \|u\|^2 \; dx < \infty$$

pa imamo da je

$$- \int_0^t \left((u,w(s)), \; (v,a(y)) \right) dy = \int_0^t \overline{\int_0^\infty c(y,x,v,u) \; \|u\|^2 \; dx \; dy} =$$

$$= \int_0^t \overline{\int_0^\infty \Phi_{xy}(v,u) \; dx \; dy} = \int_0^t \overline{\int_0^\infty (C(y,x)v, \; u) \; dx \; dy}$$

Odavde se konačno dobija:

$$- \int_0^t \left((u,w(s)), \; (v,a(y)) \right) dy = \int_0^t \int_0^\infty (C^*(y,x)u, \; v) \; dx \; dy \qquad (25)$$

pri čemu je operator $C^*(y,x)$ sa konačnom apsolutnom normom $|C^*(y,x)| = |C(y,x)|$ koja zadovoljava

$$\int_0^T \int_0^T |C^*(y,x)|^2 \; dx \; dy < \infty \qquad (26)$$

Iz jednakosti (12'), (16), (24) i (25) sledi jednakost:

$$(B_\omega(s,t)u - B_*(s,t)u, \; v) =$$

$$= \int_0^t \int_0^\infty ([B_*(x,y) + C(x,y) + C^*(y,x)] \; u, \; v) \; dx \; dy$$

Neka je

$$K(x,y) = B_*(x,y) + C(x,y) + C^*(y,x) \qquad (27)$$

Koristeći nejednakosti (15), (23) i (26) jednostavno je videti da je $K(x,y)$ operator Hilberta-Šmita sa apsolutnom normom $|K(x,y)|$ takvom da je

$$\int_0^T \int_0^T |K(x,y)|^2 \, dx \, dy < \infty \qquad (28)$$

Ovim je u potpunosti dokazano da se razlika korelacionih funkcija zadatog Wienerovog procesa $w(t)$, $0 \leq t \leq T$ i procesa Ito u odnosu na dati Wienerov proces može predstaviti u obliku

$$B_w(s,t) - B_\xi(s,t) = \int_0^t \int_0^\infty K(x,y) \, dx \, dy \qquad (29)$$

pri čemu je $K(x,y)$ operator Hilberta-Šmita sa apsolutnom normom $|K(x,y)|$ koja zadovoljava nejednakost (28). Ovo, pak, na osnovu poznatih teorema, znači da se operator B koji vrši preslikavanje iz prostora $H(w)$ u prostor $H(\xi)$

$$B\colon (u, w(x)) \to (u, \xi(x)), \quad 0 \leq x \leq T$$

može produžiti u lineran ograničen operator B za koji je $I - B^*B$ operator Hilberta-Šmita. Pod uslovima da operator B ima inverzan ograničen operator, slučajni proces Ito je ekvivalentan zadatom slučajnom procesu Wienera i oni su istog spektralnog tipa. Linearni ograničeni operator B ima inverzan ograničen operator ako i samo ako operator Hilberta-Šmita $I - B^*B$ nema sopstvenu vrednost jedan a ovo je ispunjeno ako i samo ako je

$$\int_0^T \int_0^T (K(x,y)b(x), b(y)) \, dx \, dy \neq \int_0^T \|b(x)\|^2 \, dx \qquad (30)$$

za proizvoljnu merljivu funkciju $b = b(x)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H:

$$\int_0^T \|b(x)\|^2 \, dx < \infty, \quad \int_0^T \|b(x)\|^2 \, dx \neq 0$$

Neka je $b = b(x)$ merljiva funkcija sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H: $\int_0^T \|b(x)\|^2 \, dx < \infty$ t.j. neka je $b \in L^2(H)$. Tada je:

$$\int_0^T \int_0^T (K(x,y)b(x), b(y)) \, dx \, dy = \int_0^T \int_0^T (B_w(x,y)b(x), b(y)) \, dx \, dy +$$

$$(31) \qquad + \int_0^T \int_0^T (C(x,y)b(x),\ b(y))\, dx\, dy$$

$$+ \int_0^T \int_0^T (C^*(y,x)b(x),\ b(y))\, dx\, dy$$

Na osnovu jednakosti (13) i (14) imamo da je

$$\int_0^T \int_0^T (B_-(x,y)b(x),\ b(y))\, dx\, dy =$$

$$= - \int_0^T \int_0^T (\ (b(x),a(x)),\ (b(y),a(y))\ )\, dx\, dy$$

$$= - (\ \int_0^T (b(x),a(x))\, dx,\ \int_0^T (b(y),a(y))\, dy\ )$$

i odavde

$$\int_0^T \int_0^T (B_-(x,y)b(x),\ b(y))\, dx\, dy = - \| \int_0^T (b(x),a(x))\, dx \|^2 \qquad (32)$$

Razmotrimo

$$\int_0^T \int_0^T (C(x,y)b(x),\ b(y))\, dx\, dy$$

Za proizvoljnu funkciju $b = b(y) \in L^2(H)$ i proizvoljno $y \in [0,T]$ imamo da je

$$b(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(y) e_k$$

gde je $\{e_k\}_1^{\infty}$ ortonormirana baza u separabilnom Hilbertovom prostoru H, $\mu_k(y) = (b(y),\ e_k)$ i $\|b(y)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k(y)|^2$. Uzimajući ovo u obzir imamo da je

$$\int_0^T \int_0^T (C(x,y)b(x),\ b(y))\, dx\, dy = \int_0^T \int_0^T (C(x,y)b(x), \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(y) e_k)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^T \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu_k(y)}\ (C(x,y)b(x),e_k)\, dx\, dy$$

Koristeći jednakosti (19) i (22) imamo dalje da je

$$\int_0^T \int_0^T (C(x,y)b(x),b(y))\, dx\, dy = \int_0^T \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu_k(y)}\ \Phi_{xy}(b(x),e_k)\, dx\, dy =$$

$$\int_0^T \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu_k(y)}\ c(x,y,b(x),e_k)\, dx\, dy =$$

$$\int_0^T \Big(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu_k(y)}\, c(x,y,b(x),e_k)\, dy \Big)\, dx =$$

$$\int_0^T \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T c(x,y,b(x),e_k)\, d(e_k,w(y)), \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \mu_k(y)\, d(e_k,w(y)) \Big)\, dx =$$

$$\int_0^T \Big(\sum_{k=1}^{\infty} P_k(-(b(x),a(x))\,), \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \mu_k(y)\, d(e_k,w(y)) \Big)\, dx =$$

$$\int_0^T \Big(P\,(-(b(x),a(x))), \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(y)\, d(e_k,w(y)) \Big)\, dx =$$

$$\int_0^T \Big(-(b(x),a(x)), \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(y)\, d(e_k,w(y)) \Big)\, dx =$$

$$\Big(-\int_0^T (b(x),a(x))\, dx, \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(y)\, d(e_k,w(y)) \Big)$$

gde smo sa P_k označili operator ortogonalnog projektovanja na $H(\,(e_k,w(y))\,)$ i sa P operator ortogonalnog projektovanja na $H(w)$. Uvedimo oznaku

$$\eta(b) = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(y)\, d(e_k,w(y)) \in H(w)$$

$$\|\eta(b)\| = E\,|\eta(b)|^2 = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k(y)|^2\, dy = \int_0^T \|b(y)\|^2\, dy$$

Tada je

$$\int_0^T \int_0^T (C(x,y)b(x), b(y))\, dx\, dy = -\Big(\int_0^T (b(x),a(x))\, dx, \eta(b)\Big) \quad (33)$$

Uočimo još da je

$$\int_0^T \int_0^T (C^*(y,x)b(x), b(y))\, dx\, dy = \int_0^T \int_0^T (b(x), C(y,x)b(y))\, dx\, dy$$

$$= \overline{\int_0^T \int_0^T (C(y,x)b(y), b(x))\, dx\, dy}$$

i odavde na osnovu jednakosti (33)

$$\int_0^T \int_0^T (C^*(y,x)b(x), b(y))\, dx\, dy = -\Big(\eta(b), \int_0^T (b(x),a(x))dx\Big) \quad (34)$$

Iz jednakosti (31), (32), (33), i (34) sledi da je

$$\int_0^T \int_0^T (K(x,y)b(x), b(y))\, dx\, dy = -\Big\| \int_0^T (b(x),a(x))\, dx \Big\|^2$$

$$- \left(\int_0^T (b(x),a(x))\, dx,\ \eta(b) \right)$$

$$- \left(\eta(b),\ \int_0^T (b(x),a(x))\, dx \right)$$

i dalje

$$\int_0^T \int_0^T (K(x,y)b(x),\ b(y))\, dx\, dy =$$

$$= \| \eta(b) \|^2 - \| \int_0^T (b(x),a(x))\, dx + \eta(b) \|^2 \qquad (35)$$

Pre nego što predjemo na diskusiju napisane jednakosti uočimo sledeće. Pre nego što predjemo na diskusiju napisane jednakosti uočimo sledeće. Za operator B definisan jednakostima

$$B\,(u,w(s)) = (u,\xi(s)), \quad u \in H, \quad s \in [0,T]$$

dokazano je da je $I - B^*B$ operator Hilberta-Šmita odakle sledi da je B linearan ograničen operator. Uočimo operator D definisan na sledeći način

$$D\,(u,w(t)) = \int_0^T (u,a(s))\, ds = (u, \int_0^T a(s)\, ds), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

Jednostavno je videti da se D može produžiti u linearan ograničen operator $\bar{D}$ koji vrši preslikavanje iz Hilbertovog prostora $H(w)$ u Hilbertov prostor $H(a)$ za dati Wienerov proces $w(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ i dati slučajni proces $a(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ sa vrednostima u Hilbertovom prostoru H.Neka je $\{e_k\}_1^\infty$ ortonormirana baza separabilnog Hilbertovog prostora H. Operator $\bar{D}$ je jednoznačno odredjen jednakostima

$$\bar{D}\,(e_k,w(t)) = \int_0^T (e_k,a(s))\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (37)$$

Uočimo operator D_1 koji vrši preslikavanje iz $H(w)$ u $H(a)$ na sledeći način. Za proizvoljnu funkciju $b = b(x) \in L^2(H)$, $\mu_k(x) = (b(x),e_k)$ i

$$\eta(b) = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x)\, d(e_k,w(x))$$

$$D_1\eta(b) = \int_0^T (b(x),a(x))\, dx$$

Jednostavno je videti da je operator D_1 linearan i ograničen. Za $b_j(x) = \chi_t(x)e_j$

$$\eta(b_j) = \int_0^T d(e_j,w(x)) = (e_j,w(t))$$

$$\int_0^T (b_j(x),a(x))\,dx = \int_0^T (\chi_t(x)e_j,a(x)) = \int_0^t (e_j,a(x))\,dx$$

i

$$D_1\eta(b) = \int_0^t (e_j,a(x))\,dx \tag{38}$$

Iz neprekidnosti operatora D i D_1, i jednakosti (37) i (38) sledi da je $D = D_1$ i

$$D\,\eta(b) = \int_0^T (b(x),a(x))\,dx \tag{39}$$

Ako je slučajni proces $a(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ takav da operator D nema sopstvenu vrednost -1 iz jednakosti (35) jednostavno sledi da je za $b \in L^2(H)$, $b \neq 0$

$$\int_0^T\int_0^T (K(x,y)b(x),\,b(y))\,dx\,dy \neq \|\eta(b)\|^2$$

i

$$\int_0^T\int_0^T (K(x,y)b(x),\,b(y))\,dx\,dy \neq \int_0^T \|b(x)\|^2\,dx$$

Ovo znači da operator Hilberta-Šmita $I - B^*B$ nema sopstvenu vrednost 1, operator B ima inverzan ograničen operator i stohastički proces Ito

$$\xi(t) = \int_0^t a(s)\,ds + w(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

je ekvivalentan Wienerovom procesu $w(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

G L A V A IV

N E K I P O S E B N I S L U Č A J E V I S T O H A S T I Č K O G P R O C E S A I T O

1. STOHASTIČKI INTEGRAL. EKSPONENCIJALNA OPERATORNA FUNKCIJA.

Stohastički integral i eksponencijalna operatorna funkcija su definisani na standardan način.

Neka je $w = w(t)$ REALNI slučajni proces Wienera na konačnom intervalu $[0,T]$ i $dw(t)$ njemu odgovarajuća ortogonalna stohastička mera. Označimo sa $w(\Delta)$ meru proizvoljnog merljivog skupa $\Delta \subseteq [0,T]$. Za prostu funkciju

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{\Delta_k}(t)\, u_k \tag{1}$$

$$(\Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset \quad \text{za } k \neq j, \quad \bigcup_{k=1}^{n} \Delta_k = [0,T], \; u_k \in H, \; k=1,2,\dots,n)$$

sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H definišemo integral

$$I(f) = \int_0^T f(t)\, dw(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k\, w(\Delta_k) \tag{2}$$

Jednostavno je videti da je ovako definisan stohastički integral proste funkcije $f(t)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H dat jednakošću (1) slučajna promenljiva sa vrednostima u H pri čemu je:

1. $\int_0^T [\, \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \,]\, dw(t) = \alpha_1 \int_0^T f_1(t)\, dw(t) + \alpha_2 \int_0^T f_2(t)\, dw(t)$

2. $E\left(\int_0^T f_1(t)dw(t),\ \int_0^T f_2(t)dw(t)\right) = \int_0^T (f_1(t),\ f_2(t))\ dt$

3. $E \| \int_0^T f(t)dw(t) \|^2 = \int_0^T \| f(t) \|^2\ dt < \infty$

gde je $m(\Delta_k)$ realna Borelova mera merljivog skupa $\Delta_k \subseteq [0,T]$. Iz ove poslednje osobine sledi da je integral $I(f)$ proste funkcije $f = f(t)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H slučajna promenljiva sa vrednostima u H za koju je

$$E \| I(f) \|^2 < \infty$$

t.j. $I(f) \in L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$.

Neka je $f(t)$ proizvoljna merljiva funkcija sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H za koju je

$$\int_0^T \| f(t) \|^2\ dt < \infty \qquad (3)$$

Za ovakvu funkciju $f = f(t)$ postoji niz $f_n = f_n(t)$ prostih funkcija takav da

$$\int_0^T \| f_n(t)-f(t) \|^2\ dt \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty \qquad (4)$$

Pri tome, takodje

$$\int_0^T \| f_n(t)-f_m(t) \|^2\ dt \to 0 \quad \text{kad} \quad m,n \to \infty \qquad (5)$$

Odgovarajući niz stohastičkih integrala

$$I(f_n) = \int_0^T f_n(t)\ dw(t)$$

zadovoljava

$$E \|I(f_n)-I(f_m)\|^2 = \int_0^T \| f_n(t)-f_m(t) \|^2\ dt \to 0 \text{ kad } m,n \to \infty \quad (6)$$

t.j. on je fundamentalan u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$ odakle sledi egzistencija njegove granične vrednosti u smislu jake konvergencije u prostoru $L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$ (u srednjem kvadratnom). Ovu graničnu vrednost nazivamo s t o h a s t i č k i m   i n t e g r a l o m date funkcije

$$I(f) = \int_0^T f(t)\, dw(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^T f_n(t)\, dw(t) \qquad (7)$$

Vrednost integrala ne zavisi od izbora niza $\{f_n\}_1$ prostih funkcija. Zaista, neka su $\{f_n\}_1^\infty$ i $\{g_1\}_1^\infty$ dva niza prostih funkcija takvih da

$$\int_0^T \| f_n(t)-f(t) \|^2\, dt \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty$$

i

$$\int_0^T \| g_m(t)-f(t) \|^2\, dt \to 0 \quad \text{kad} \quad m \to \infty$$

Tada

$$\int_0^T \| f_n(t)-g_m(t) \|^2\, dt \to 0 \quad \text{kad} \quad m,n \to \infty$$

i stoga

$$E \| \int_0^T f_n(t)dw(t) - \int_0^T g_m(t)dw(t) \|^2 = \int_0^T \| f_n(t)-g_m(t) \|^2 \to 0 ,$$

kad $m,n \to \infty$. Odavde jednostavno sledi tvrdjenje.
Dakle, za proizvoljnu merljivu funkciju $f = f(t)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H koja zadovoljava uslov (3) postoji stohastički integral $I(f) \in L^2(\Omega,\mathfrak{U},P,H)$ definisan jednakošću (7) pri čemu je:

1. $\int_0^T[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)]dw(t) = \alpha_1\int_0^T f_1(t)dw(t) + \alpha_2\int_0^T f_2(t)dw(t)$

2. $E\left(\int_0^T f_1(t)dw(t), \int_0^T f_2(t)dw(t) \right) = \int_0^T (f_1(t), f_2(t))\, dt$

3. $E \|I(f)\|^2 = \int_0^T \|f(t)\|^2\, dt < \infty$

Za prostu funkciju $f = f(t)$ datu jednakošću (1) i njen stohastički integral dat jednakošću (2) jednostavno je videti da je

$$(u, \int_0^T f(t)\, dw(t)) = \int_0^T (u, f(t))\, dw(t) \qquad (8)$$

Neka je $f = f(t)$ proizvoljna merljiva funkcija za koju je ispunjen uslov (3). Tada postoji niz $\{f_n\}_1^\infty$ prostih funkcija koje ispunjavaju uslov (4) i

$$I(f) = \int_0^T f(t)\, dw(t)$$

je granična vrednost u srednjem kvadratnom niza slučajnih promenljivih

$$I(f_n) = \int_0^T f_n(t)\, dw(t)$$

Niz skalarnih slučajnih promenljivih

$$(u,\ I(f_n)) = (u,\ \int_0^T f_n(t)\, dw(t)) = \int_0^T (u,\ f_n(t))\, dw(t) \qquad (9)$$

konvergira u srednjem kvadratnom ka slučajnoj promenljivoj

$$(u,\ I(f)) = (u,\ \int_0^T f(t)\, dw(t))$$

a s druge strane, iz jednakosti (9) sledi da on konvergira u srednjem kvadratnom ka slučajnoj promenljivoj

$$\int_0^T (u,\ f(t))\, dw(t).$$

Odavde sledi da je skoro izvesno

$$(u,\ \int_0^T f(t)\, dw(t)) = \int_0^T (u,\ f(t))\, dw(t) \qquad (10)$$

za svaku merljivu funkciju $f = f(t)$ za koju je ispunjen uslov (3). Za proizvoljan merljiv skup $\Delta \subseteq [0,T]$ definišemo

$$\int_\Delta f(t)\, dw(t) = \int_0^T \chi_\Delta(t)\, f(t)\, dw(t) \qquad (11)$$

Za funkciju $f(t)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H stohastički integral možemo definisati i nešto drugačije. Za deo po deo konstantnu funkciju

$$g(t) = u_k; \quad t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}; \quad k=1,\dots,n \quad u_k \in H \qquad (12)$$

$$(\ 0=t_1 \leqslant t_2 \leqslant \dots \leqslant t_{n+1}=T\ )$$

definišemo stohastički integral

$$I(g) = \int_0^T g(t)\, dw(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k\ (\ w(t_{k+1}) - w(t_k)\ ) \qquad (13)$$

Za merljivu funkciju $f = f(t)$ sa vrednostima u H za koju je

$$\int_0^T \|f(t)\|^2\, dt < \infty$$

postoji niz $g = g_n(t)$ deo po deo konstantnih funkcija za koji

$$\int_0^T \| g_n(t) - f(t) \|^2 \, dt \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty \tag{14}$$

Odavde sledi da i

$$\int_0^T \| g_n(t) - g_m(t) \|^2 \, dt \to 0 \quad \text{kad} \quad m,n \to \infty \tag{15}$$

Niz integrala $I(g_n) \in L^2(\Omega,\mathfrak{A},P,H)$ je fundamentalan jer

$$E \| I(g_n) - I(g_m) \|^2 = \int_0^T \| g_n(t) - g_m(t) \|^2 \, dt \to 0 \quad \text{kad} \quad m,n \to \infty$$

Stoga postoji granična vrednost u srednjem kvadratnom niza $I(g_n)$ koju i uzimamo za vrednost stohastičkog integrala

$$I(f) = \int_0^T f(t) \, dw(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^T g_n(t) \, dw(t) \tag{16}$$

Ovako definisan stohastički integral za funkciju $f(t)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H se poklapa sa ranije definisanim stohastičkim integralom i navedene osobine ostaju da važe.

Neka je sada $w = w(t)$ slučajni proces WIENERA SA VREDNOSTIMA U SEPARABILNOM HILBERTOVOM PROSTORU H. Označimo, kao i do sada, sa $S_2(H)$ Hilbertov prostor operatora Hilberta-Šmita koji vrše preslikavanje Hilbertovog prostora H u samog sebe. Za deo po deo konstantnu funkciju sa vrednostia u $S_2(H)$

$$B(t) = B_j \text{ za } t_j < t \leq t_{j+1}, \; j=0,1,\dots,n \quad B_j \in S_2(H) \tag{17}$$

$$(0=t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1}=T)$$

definišemo s t o h a s t i č k i   i n t e g r a l

$$J(B) = \int_0^T B(t) \, dw(t) = \sum_{j=1}^n B_j (w(t_{j+1}) - w(t_j)) \tag{18}$$

Jednostavno je videti da ovako definisan stohastički integral za funkcije oblika (17) ima sledeće osobine:

1. $\int_0^T (\alpha_1 B_1(t) + \alpha_2 B_2(t)) dw(t) = \alpha_1 \int_0^T B_1(t) dw(t) + \alpha_2 \int_0^T B_2(t) dw(t)$

2. $A \int_0^T B(t)\, dw(t) = \int_0^T A\, B(t)\, dw(t)$ za linearan ograničen operator A koji vrši preslikavanje Hilbertovog prostora H u sebe samog.

3. $\int_0^T B(t)\, dw(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T B(t)e_k\, d(e_k, w(t))$

4. $E\left(\int_0^T B_1(t)dw(t), \int_0^T B_2(t)dw(t)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T (B_1(t)e_k, B_2(t)e_k)\, dt$

$$= \int_0^T (B_1(t), B_2(t))\, dt$$

5. $E \|\int_0^T B(t)\, dw(t)\|^2 = \int_0^T |B(t)|^2\, dt < \infty$

   gde smo sa $|B(t)|$ označili apsolutnu normu operatora Hilberta-šmita $B(t)$.

Napomenimo da je stohastički integral $J(B)$ definisan jednakošću (18) za deo po deo konstantnu funkciju (17) slučajna promenljiva sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H za koju je $E\|J(B)\|^2 < \infty$. Neka je $B(t)$ proizvoljna merljiva funkcija sa vrednostima u $S_2(H)$ i

$$\int_0^T |B(t)|^2\, dt < \infty \qquad (19)$$

gde je $|B(t)|$ apsolutna norma operatora Hilberta-šmita $B(t)$. Iz opšte teorije mere i integrala za funkcije sa vrednostima u Hilbertovom prostoru , za operatornu funkciju $B(t)$ postoji niz deo po deo konstantnih funkcija $B_n = B_n(t)$ sa vrednostima u $S_2(H)$ takav da

$$\int_0^T |B_n(t)-B(t)|^2\, dt \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty \qquad (20)$$

Tada i

$$\int_0^T |B_n(t)-B_m(t)|^2\, dt \to 0 \quad \text{kad} \quad m,n \to \infty$$

Niz integrala

$$J(B_n) = \int_0^T B_n(t)\, dw(t)$$

je fundamentalan u $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, P, H)$ jer

$$E \| J(B_n)-J(B_m) \|^2 = \int_0^T | B_n(t)-B_m(t) |^2\, dt \to 0 \quad \text{kad} \quad m,n \to \infty$$

Stoga postoji granična vrednost $J(B) \in L^2(\Omega,\mathfrak{A},P,H)$ u srednjem kvadratnom, niza slučajnih promenljivih $J(B_n) \in L^2(\Omega,\mathfrak{A},P,H)$ koju i nazivamo **stohasičkim integralom** za datu operatornu funkciju $B = B(t)$, $t \in [0,T]$

$$J(B) = \int_0^T B(t)\,dw(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^T B_n(t)\,dw(t) \qquad (21)$$

Jednostavno je videti da navedene osobine stohastičkog integrala za deo po deo konstantne funkcije ostaju da važe i za proizvoljne merljive operatorne funkcije sa vrednostima u Hilbertovom prostoru $S_2(H)$ koje zadovoljavaju uslov (19).

Na kraju ovog dela definišimo još takozvanu **operatornu eksponencijalnu funkciju**

$$e^{At} = \exp(At) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \qquad (22)$$

za linearan ograničen operator A. Red (22) konvergira po normi za sve konačne realne vrednosti t, e^{At} je linearan ograničen operator i važi nejednakost

$$\| e^{At} \| \leq e^{\|A\|\,|t|} \qquad (23)$$

Operatori e^{At} su definisani za svaku realnu vrednost t i važi

$$e^{At}\, e^{As} = e^{A(t+s)}, \quad -\infty < s,t < \infty$$

U opštem slučaju $e^{A+B} \neq e^A e^B$, no za komutativne operatore A i B važi jednakost $e^{A+B} = e^A e^B$.

Za $t=0$, $e^{At} = I$. Linearan ograničen operator e^{At} ima inverzan ograničen operator e^{-At}. Red (22) možemo diferencirati član po član, pa je

$$\frac{de^{At}}{dt} = A\,e^{At} = e^{At} A \qquad (24)$$

jer je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^n A^n}{n!} \right) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n$$

Jednostavno je videti da je

$$(e^{At})^{*} = e^{A^{*}t}$$

Ako je A operator Hilberta-šmita, $e^{At} - I$ je operator Hilberta-šmita sa apsolutnom normom

$$| e^{At} - I | \leqslant e^{|A||t|} - 1$$

2. JEDAN POSEBAN SLUčAJ STOHASTIčKOG PROCESA ITO.

I ovo je originalan deo rada. Obradjen je jedan poseban slučaj stohastičkog procesa Ito. Za postavljanje uslova pod kojima je on ekvivalentan zadatom procesu Wienera korišćeni su radovi [9] i [10] koji se odnose na realne slučajne procese.

Neka je $w = w(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ slučajni proces Wieneera sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H, A operator Hilberta-šmita u H i $\xi(t)$ slučajni proces koji zadovoljava stohastičku jednačinu

$$\xi(t) = \int_{0}^{t} A\, \xi(s)\, ds + w(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{25}$$

Uočimo operatornu funkciju $e^{-(s-x)A}$ i operator Hilberta-šmita

$$V(x,s) = e^{-(s-x)A} - I \tag{26}$$

Iz ove jednakosti i jednakosti

$$\frac{d\, e^{-(s-x)A}}{dx} = A\, e^{-(s-x)A}$$

sledi da je

$$\frac{d\, V(x,s)}{dx} = A\, (V(x,s) + I) \tag{27}$$

pri čemu je $V(s,s) = 0$. Odavde imamo da je

$$\int_s^t \frac{d\,V(x,s)}{dx}\,dx = \int_s^t A\,(\,V(x,s) + I\,)\,dx$$

i dalje

$$V(t,s) = \int_s^t A\,V(x,s)\,dx + \int_s^t A\,dx \qquad (28)$$

Slučajni proces $\xi(t)$ se može predstaviti u obliku

$$\xi(t) = \int_0^t V(t,s)\,dw(s) + w(t) \qquad (29)$$

Zaista, iz jednakosti (28) sledi

$$\int_0^t V(t,s)\,dw(s) + w(t) = \int_0^t \Big[\int_s^t A\,V(x,s)\,dx + \int_s^t A\,dx\Big]\,dw(s) + w(t)$$

$$= \int_0^t \int_s^t A\,V(x,s)\,dx\,dw(s) + \int_0^t \int_s^t A\,dx\,dw(s) + w(t)$$

$$= \int_0^t A \int_0^x V(x,s)\,dw(s)\,dx + \int_0^t \int_0^x A\,dw(s)\,dx + w(t)$$

$$= \int_0^t A \int_0^x V(x,s)\,dw(s)\,dx + \int_0^t A\,w(x)\,dx + w(t)$$

$$= \int_0^t A\,\Big[\int_0^x V(x,s)\,dw(s) + w(x)\Big]\,dx + w(t)$$

Uzimajući u obzir osobine stohastičkog integrala jednakost (29) se može napisati u obliku

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t V(t,s)e_k\,d(e_k,w(s)) + w(t) \qquad (30)$$

Za proizvoljno $u \in H$ iz ove jednakosti sledi

$$(u,\xi(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (u,\;V(t,s)e_k)\,d(e_k,w(s)) + (u,w(t)) \qquad (31)$$

Uzimajući u obzir da je

$$(u,w(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (u,e_k)\,d(e_k,w(s))$$

iz jednakosti (31) dalje sledi

$$(u,\xi(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (u,\ e^{-(s-t)A}\, e_k)\ d(e_k, w(s)) \tag{32}$$

i odavde

$$(u,\xi(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (e^{-(s-t)A^*}u,\ e_k)\ d(e_k, w(s)) \tag{33}$$

Iz ove jednakosti sledi da je za svako $u \in H$ i svako $t \in [0,T]$

$$E\ |(u,\xi(t))|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t |(e^{-(s-t)}u,\ e_k)|^2\ ds$$

i odavde

$$E\ |(u,\xi(t))|^2 = \int_0^t \| e^{-(s-t)A^*} u \|^2\ ds \leqslant \int_0^t e^{2|s-t|\|A\|}\ \|u\|^2\ ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t e^{2T\|A\|}\ \|u\|^2\ ds \leqslant e^{2T\|A\|}\ \|u\|^2\ T$$

i konačno

$$E\ |(u,\xi(t))|^2 < \infty \tag{34}$$

za svako $u \in H$ i svako $t \in [0,T]$.

Iz jednakosti (33) još jednostavno sledi

$$H_t(\xi) \subseteq H_t(w) \tag{35}$$

Iz jednakosti (25) sledi obrnuta relacija. Zaista,

$$(u,\xi(t)) = \int_0^t (u,\ A\ \xi(s)\ )\ ds + (u, w(t))$$

i odavde

$$(u,\xi(t)) = \int_0^t (A^*u,\ \xi(s))\ ds + (u, w(t))$$

odakle sledi

$$H_t(w) \subseteq H_t(\xi) \tag{36}$$

Relacije (35) i (36) znače da je

$$H_t(\xi) = H_t(w) \tag{37}$$

čime je u potpunosti dokazano sledeće tvrdjenje.

TEOREMA 1. Neka je $w = w(t)$ slučajni proces Wienera sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H, A operator Hilberta-šmita u H i $\xi(t)$ slučajni proces koji zadovoljava stohastičku integralnu jednačinu

$$\xi(t) = \int_0^t A\, \xi(s)\, ds + w(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

Slučajni procesi $w = w(t)$ i $\xi = \xi(t)$ su na konačnom intervalu $[0,T]$ istog spektralnog tipa. Slučajni proces Wienera $w = w(t)$ je inovacioni proces za slučajni proces $\xi = \xi(t)$.

Razmotrimo ponovo slučajni proces $\xi(t)$ koji zadovoljava jednačinu

$$\xi(t) = \int_0^t A\, \xi(s)\, ds + w(t) \tag{38}$$

gde je $w(t)$ slučajni proces Wienera sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H, A operator Hilberta-šmita u H i $|A|$ njegova apsolutna norma. Kao što smo rekli,

$$\xi(t) = \int_0^t V(t,s)\, dw(s) + w(t) \tag{39}$$

$$A\, \xi(t) = A \int_0^t V(t,s)\, dw(s) + A\, w(t)$$

$$A\, \xi(t) = \int_0^t A\, V(t,s)\, dw(s) + \int_0^t A\, dw(s)$$

$$\begin{aligned} A\, \xi(t) &= \int_0^t A\, e^{-(s-t)A}\, dw(s) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t A\, e^{-(s-t)A}\, e_k\, d(e_k, w(s)) \end{aligned} \tag{39'}$$

i odavde

$$E\,\|A\,\xi(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \|A\,e^{-(s-t)A}\,e_k\|^2\,ds =$$

$$= \int_0^t |A\,e^{-(s-t)A}|^2\,ds \leqslant \int_0^t |A|^2\,\|e^{-(s-t)A}\|^2\,ds \leqslant$$

$$\leqslant |A|^2 \int_0^t e^{2|s-t|\|A\|}\,ds \leqslant |A|^2\,e^{2T\|A\|}\,T$$

odakle posebno sledi

$$\int_0^T E\,\|A\,\xi(t)\|^2\,dt \leqslant |A|^2\,e^{2T\|A\|}\,T^2$$

i odavde

$$\int_0^T E\,\|A\,\xi(t)\|^2\,dt < \infty \tag{40}$$

Označimo sa

$$a'(s) = A\,\xi(s)$$

Iz jednačine (38) sledi da je

$$\xi(t) = \int_0^t a'(s)\,ds + w(t) \tag{41}$$

pri čemu je, na osnovu jednakosti (39) i nejednakosti (40), $a'(s)$ merljiv integrabilan slučajni proces. Ovo pak znači da je $\xi(t)$ stohastički proces Ito za koji je, na osnovu nejednakosti (40), ispunjeno

$$\int_0^T E\,\|a'(s)\|^2\,ds < \infty \tag{42}$$

Na osnovu izvodjenja u prethodnoj glavi razlika korelacionih funkcija datog Wienerovog procesa i slučajnog procesa $\xi(t)$ se može predstaviti u obliku

$$B_w(s,t) - B_\xi(s,t) = \int_0^t \int_0^\infty K(x,y)\,dx\,dy \tag{43}$$

pri čemu je $K(x,y)$ operator Hilberta-Šmita sa apsolutnom normom $|K(x,y)|$ koja zadovoljava

$$\int_0^T \int_0^T |K(x,y)|^2 \, dx \, dy < \infty \tag{44}$$

Za proizvoljnu funkciju $b = b(x) \in L^2(H)$ imamo da je

$$\int_0^T \int_0^T (K(x,y)b(x),\ b(y))\, dx\, dy = \\ = \|\eta(b)\|^2 - \| \int_0^T (b(x),\ A\ \xi(x))\, dx + \eta(b)\ \|^2 \tag{45}$$

gde je

$$\eta(b) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T (b(y),e_k)\ d(e_k,w(y)) \tag{46}$$

$\{e_k\}_1^\infty$ - ortonormirana baza separabilnog Hilbertovog prostora H i

$$E\ \|\eta(b)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T |(b(y),e_k)|^2\, dy = \int_0^T \|b(y)\|^2\, dy \tag{47}$$

Hoćemo da dokažemo da je za svaku funkciju $b = b(y) \in L^2(H)$, $b \neq 0$

$$\int_0^T \int_0^T (K(x,y)b(x),\ b(y))\, dx\, dy \neq \int_0^T \|b(y)\|^2\, dy \tag{48}$$

Pretpostavimo suprotno. Ovo na osnovu jednakosti (45) znači da postoji funkcija $b = b(x) \in L^2(H)$, $b \neq 0$ koja zadovoljava

$$\int_0^T (b(x),\ A\ \xi(x))\, dx + \eta(b) = 0 \tag{49}$$

Iz jednakosti (39') imamo da je

$$(b(x),\ A\ \xi(x)) = (b(x),\ \int_0^x A\ V(x,y)\ dw(y) + \int_0^x A\ dw(y)\ )$$

$$= (b(x),\ \int_0^x A\ e^{-(y-x)A}\ dw(y)\ )$$

$$= (b(x),\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x A\ e^{-(y-x)A}\ e_k\ d(e_k,w(y))\ )$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (b(x),\ A\ e^{-(y-x)A}\ e_k)\ d(e_k,w(y))$$

i odavde konačno

$$(b(x),\ A\ \xi(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (e^{-(y-x)A^*}A^*b(x),\ e_k)\ d(e_k,w(y)) \quad (50)$$

i

$$\int_0^T (b(x),\ A\ \xi(x))\ dx = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (e^{-(y-x)A^*}A^*b(x),\ e_k)\ d(e_k,w(y))dx \quad (51)$$

odakle sledi

$$\int_0^T (b(x),\ A\ \xi(x))\ dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \int_y^T (e^{-(y-x)A^*}A^*b(x),\ e_k)\ dx\ d(e_k,w(y)) \quad (52)$$

Iz jednakosti (46), (49) i (52) sledi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T [\int_y^T (e^{-(y-x)A^*}A^*b(x),\ e_k)\ dx + (b(y),e_k)]\ d(e_k,w(y)) = 0$$

odakle imamo da je za svako k i skoro svako $y \in [0,T]$

$$\int_y^T (e^{-(y-x)A^*}A^*b(x),\ e_k)\ dx + (b(y),e_k) = 0$$

t.j.

$$(\int_y^T e^{-(y-x)A^*}A^*b(x)\ dx,\ e_k) + (b(y),e_k) = 0 \quad (54)$$

Odavde se jednostavno dobija da je za skoro svako $y \in [0,T]$

$$\int_y^T e^{-(y-x)A^*}A^*b(x)\ dx + b(y) = 0 \quad (55)$$

Kako je $e^{-(y-x)A^*} = e^{-yA^*}\ e^{xA^*}$, prethodnu jednakost možemo napisati u obliku

$$e^{-yA^*}\int_y^T e^{xA^*}A^*b(x)\ dx + b(y) = 0 \quad (56)$$

Iz ove jednakosti sledi da je $b(y)$ diferencijabilna i

$$-A^* e^{-yA^*}\int_y^T e^{xA^*}A^*b(x)\,dx - e^{-yA^*}e^{yA^*}A^*b(y) + b'(y) = 0$$

Ako ponovo iskoristimo jednakost (56) dobijamo

$$A^*b(y) - A^*b(y) + b'(y) = 0$$

i odavde konačno

$$b'(y) = 0 \quad \text{za skoro svako } y \tag{57}$$

Iz jednakosti (55) sledi apsolutna neprekidnost $(b(y),u)$ za svako $u \in H$, pa na osnovu poznate teoreme, iz jednakosti (57) sledi da je $b(y)$ jednako konstantnom vektoru $u_o \in H$

$$b(y) = u_o \in H, \quad y \in [0,T] \tag{58}$$

Razmotrimo ponovo jednakost (56).

$$e^{-yA^*}\int_y^T e^{xA^*}A^*u_o\,dx + u_o = 0 \tag{59}$$

za skoro svako y. Kako je

$$e^{xA^*}A^* = \frac{d\,(e^{xA^*})}{dx} \qquad e^{xA^*}A^*u_o = \frac{d\,(e^{xA^*}u_o)}{dx}$$

biće na osnovu Njutn-Lajbnicove formule

$$\int_y^T e^{xA^*}A^*u_o\,dx = e^{xA^*}u_o\Big|_y^T = e^{TA^*}u_o - e^{yA^*}u_o \tag{60}$$

Jednakost (59) se može napisati u obliku

$$e^{-yA^*}(\,e^{TA^*}u_o - e^{yA^*}u_o\,) + u_o = 0 \tag{61}$$

odakle sledi da je za skoro svako y

$$e^{(T-y)A^*}\,u_o = 0 \tag{62}$$

Linearan ograničen operator $e^{(T-y)A^*}$ ima inverzan ograničen operator pa iz jednakosti (62) sledi

$$u_0 = 0$$

i odavde

$$b(y) = 0 \quad \text{za skoro svako} \quad y.$$

Dakle, jednakost (49) je moguća samo za funkciju $b \in L^2(H)$

$$b = 0 \tag{63}$$

t.j.

$$\int_0^T \int_0^T (K(x,y)b(x),\ b(y))\, dx\, dy \neq \int_0^T \|b(x)\|^2\, dx \tag{64}$$

za svaku funkciju $b = b(x) \in L^2(H)$, $b \neq 0$.
Dokazane jednakost (43) i nejednakosti (44) i (64) znače da se operator B definisan jednakostima

$$B(u,w(t)) = (u,\xi(t)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,\ u \in H$$

može produžiti u linearan ograničen operator iz Hilbertovog prostora $H(w)$ u Hilbertov prostor $H(\xi)$ za koji je $I - B^*B$ operator Hilberta-Šmita sa najvećom sopstvenom vrednošću manjom od jedinice t.j. B se može produžiti u linearan ograničen operator koji ima inverzan ograničen operator i $I - B^*B$ je operator Hilberta-Šmita. Formulišimo dobijene rezultate u obliku teoreme.

TEOREMA 2. Neka je $w = w(t)$ slučajni proces Wienera sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H i $\xi = \xi(t)$ slučajni proces koji zadovoljava stohastičku integralnu jednačinu

$$\xi(t) = \int_0^t A\, \xi(s)\, ds + w(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

gde je A operator Hilberta-Šmita u Hilbertovom prostoru H. Slučajni procesi $\xi = \xi(t)$ i $w = w(t)$ su ekvivalentni na konačnom intervalu $[0,T]$.

3. EVOLUCIONE FAMILIJE OPERATORA.

Osnovna literatura za pianje ovog dela su [5] i [22] i on predstavlja osnovu za razmatranje još jednog stohastičkog procesa Ito u sledećem delu.

Neka je H separabilan Hilbertov prostor i $A(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ merljiva integrabilna operatorna funkcija sa vrednostima u Banahovom prostoru linearnih ograničenih operatora u H. Neka je $R(t,s)$ operatorna funkcija koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d\,R(t,s)}{dt} = A(t)\,R(t,s) \tag{65}$$

sa početnim uslovom $R(s,s) = I$ ili ekvivalentno ovome $R(t,s)$ zadovoljava integralnu jednačinu

$$R(t,s) = I + \int_s^t A(x)\,R(x,s)\,dx \tag{66}$$

Neka je $U(t)$ jednoparametarska familija operatora koji zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d\,U(t)}{dt} = A(t)\,U(t) \tag{67}$$

sa početnim uslovom $U(0) = I$ ili ekvivalentno ovome $U(t)$ zadovoljava integralnu jednačinu

$$U(t) = I + \int_0^t A(x)\,U(x)\,dx \tag{68}$$

$U(t)$ se može predstaviti u obliku

$$U(t) = I + \int_0^t A(t_1)\, dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_n} \dots \int_0^{t_2} A(t_n)\dots A(t_1)\, dt_1 \dots dt_n \tag{69}$$

$U(t)$ je linearan ograničen operator sa normom

$$\| U(t) \| \leq \exp \int_0^t \| A(x) \| \, dx \tag{70}$$

Linearan ograničen operator $U(t)$ ima inverzan ograničen operator $U^{-1}(t)$ koji zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d\, U^{-1}(t)}{dt} = - U^{-1}(t) A(t) \tag{71}$$

sa početnim uslovom $U^{-1}(0) = I$.
Jednostavno je videti da je

$$\frac{d\, U^{*}(t)}{dt} = U^{*}(t) A^{*}(t), \quad U^{*}(t) = I \tag{72}$$

$$\frac{d\, (\, U^{-1}(t)\,)^{*}}{dt} = - A^{*}(t) (\, U^{-1}(t)\,)^{*}, \quad (\, U^{-1}(0)\,)^{*} = I \tag{73}$$

Operator $R(t,s)$ se može predstaviti u obliku

$$R(t,s) = U(t)\, U^{-1}(s) \tag{74}$$

odakle sledi niz osobina evolucione familije operatora $R(t,s)$:

$$R(t,t) = I, \quad R(t,s) R(s,\tau) = R(t,\tau), \quad R(t,s) = R^{-1}(s,t)$$

Operator $R(t,s)$ se može predstaviti u obliku

$$R(t,s) = I + \int_s^t A(t_1)\, dt_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_s^t \int_s^{t_n} \dots \int_s^{t_2} A(t_n)\dots A(t_1)\, dt_1 \dots dt_n \tag{75}$$

$R(t,s)$ je linearan ograničen operator sa normom

$$\|R(t,s)\| \leq \exp \int_{s}^{t} \|A(x)\| \, dx \tag{76}$$

Neka je $A(t)$ za svako t operator Hilberta-šmita i neka je $A(t)$ integrabilna kao slučajni proces sa vrednostima u Hilbertovom prostoru operatora Hilberta-šmita $S_2(H)$. Tada je $R(t,s) - I$ operator Hilberta-šmita sa apsolutnom normom

$$| R(t,s) - I | \leq \exp \int_{s}^{t} |A(x)| \, dx - 1$$

gde smo sa $|A(x)|$ označili apsolutnu normu operatora Hilberta-šmita $A(x)$.

4. JOŠ JEDAN STOHASTIČKI PROCES ITO.

I ovo je originalan deo rada. Razmotren je još jedan poseban slučaj stohastičkog procesa Ito koji predstavlja uopštenje slučajnog procesa obradjenog u delu 2. ove glave. Kao i tada, za za postavljnje uslova ekvivalentnosti korišćeni su radovi [9] i [10] koji se odnose na realne slučajne procese.

Neka je $w = w(t)$ slučajni proces Winera sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Neka je $A(s)$ merljiva operatorna funkcija za koju je

$$\int_{0}^{T} |A(s)|^2 \, ds < \infty \tag{77}$$

gde smo sa $|A(s)|$ označili apsolutnu normu operatora Hilberta-šmita $A(s)$ koji vrši preslikavanje Hilbertovog prostora H u sebe samog. Neka je $\xi(t)$, $0 \leq t \leq T$ slučajni proces koji zadovoljava integralnu jednačinu

$$\xi(t) = \int_{0}^{t} A(s) \, \xi(s) \, ds + w(t) \tag{78}$$

Neka je $R(t,s)$ evoluciona familija linearnih ograničenih operatora u separabilnom Hilbertovom prostoru H koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu (65). Neka je

$$V(x,s) = R(x,s) - I \tag{79}$$

Kao što smo rekli, $V(x,s)$ je operator Hilberta-šmita, pa imamo da se evoluciona familija operatora $R(x,s)$ može predstaviti u obliku

$$R(x,s) = V(x,s) + I \tag{80}$$

gde je $V(x,s)$ operator Hilberta-šmita. Koristeći jednakost (65) dobijamo da je

$$\frac{d\,V(x,s)}{dx} = A(x)\ (\ V(x,s) + I\ ) \tag{81}$$

i odavde

$$\int_s^t \frac{d\,V(x,s)}{dx}\, dx = \int_s^t A(x)\ (\ V(x,s) + I\ )\ dx$$

pa je

$$V(t,s) = \int_s^t A(x)\ (\ V(x,s) + I\ )\ dx \tag{82}$$

Slučajni proces $\xi(t)$ se može predstaviti u obliku

$$\xi(t) = \int_0^t V(t,s)\ dw(s) + w(t) \tag{83}$$

Zaista, iz jednakosti (82) sledi

$$\int_0^t V(t,s)\ dw(s) + w(t) =$$

$$= \int_0^t \int_s^t A(x)\ (\ V(x,s) + I\ )\ dx\ dw(s) + w(t)$$

$$= \int_0^t \int_s^t A(x)V(x,s)\ dx\ dw(s) + \int_0^t \int_s^t A(x)\ dx\ dw(s) + w(t)$$

$$= \int_0^t A(x) \int_0^x V(x,s)\ dw(s)\ dx + \int_0^t \int_0^x A(x)\ dw(s)\ dx + w(t)$$

$$= \int_0^t A(x) \int_0^x V(x,s)\, dw(s)\, dx + \int_0^t A(x)\, w(t)\, dx + w(t)$$

$$= \int_0^t A(x) [\int_0^x V(x,s)\, dw(s) + w(t)]\, dx + w(t)$$

Uzimajući u obzir osobine stohastičkog integrala, jednakost (83) se može napisati u obliku

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t V(t,s)e_k\, d(e_k, w(s)) + w(t) \qquad (84)$$

Za proizvoljno $u \in H$ iz ove jednakosti sledi

$$(u,\xi(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (\, u,\ V(t,s)e_k\,)\, d(e_k, w(s)) + (u, w(t)) \qquad (85)$$

Uzimajući u obzir da je

$$(u, w(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (u, e_k)\, d(e_k, w(s))$$

iz jednakosti (85) sledi

$$(u,\xi(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (\, u,\ R(t,s)e_k\,)\, d(e_k, w(s)) \qquad (86)$$

i odavde

$$(u,\xi(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t (\, R^*(t,s)u,\ e_k\,)\, d(e_k, w(s)) \qquad (87)$$

Iz ove jednakosti sledi da je za svako $u \in H$ i svako $t \in [0,T]$

$$E|(u,\xi(t))|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t |(\, R^*(t,s)u, e_k\,)|^2\, ds$$

i odavde

$$E|(u,\xi(t))|^2 = \int_0^t \|R^*(t,s)\|^2\, ds \leq \exp(2\int_0^T \|A(x)\|\, dx\,)\, \|u\|^2\, T$$

Konačno imamo da je

$$E|(u,\xi(t))|^2 < \infty, \quad u \in H, \quad t \in [0,T] \tag{88}$$

Iz jednakosti (87) još jednostavno sledi

$$H_t(\xi) \subseteq H_t(w) \tag{89}$$

Razmotrimo ponovo datu integralnu jednačinu (78). Imamo da je

$$(u,\xi(t)) = \int_0^t (\, u, \, A(s)\xi(s) \,)\, ds + (u,w(t)) \tag{90}$$

što se može napisati u obliku

$$(u,\xi(t)) = \int_0^t (\, A^*(s)u, \, \xi(s) \,)\, ds + (u,w(t)) \tag{91}$$

Odavde sledi

$$H_t(w) \subseteq H_t(\xi) \tag{92}$$

Relacije (89) i (92) znače da je

$$H_t(\xi) = H_t(w) \tag{93}$$

čime je u potpunosti dokazano sledeće tvrdjenje.

TEOREMA 3. Neka je $w = w(t)$ slučajni proces Wienera sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H i $A(s)$ merljiva operatorna funkcija na intervalu $[0,T]$ koja zadovoljava

$$\int_0^T |A(s)|^2 \, ds < \infty$$

gde smo sa $|A(s)|$ označili apsolutnu normu operatora Hilberta-Šmita $A(s)$ u Hilbertovom prostoru H. Neka je $\xi(t)$ slučajni proces sa vrednostima u H koji zadovoljava stohastičku integralnu jednačinu

$$\xi(t) = \int_0^t A(s)\xi(s)\, ds + w(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

Slučajni procesi $\xi = \xi(t)$ i $w = w(t)$ su istog spektralnog tipa na konačnom intervalu $[0,T]$. Slučajni proces Wienera je inovacioni proces za slučajni proces $\xi(t)$.

Razmotrimo ponovo slučajni proces $\xi(t)$ koji zadovoljava jednačinu

$$\xi(t) = \int_0^t A(s)\xi(s)\, ds + w(t) \tag{94}$$

na intervalu $[0,T]$, gde je $w(t)$ slučajni proces Wienera sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H, $A(s)$ merljiva operatorna funkcija takva da je za svako $s \in [0,T]$ $A(s)$ operator Hilberta-šmita u Hilbertovom prostoru H sa apsolutnom normom $|A(s)|$ koja zadovoljava

$$\int_0^T |A(s)|^2\, ds < \infty \tag{95}$$

Iz učinjenih pretpostavki jednostavno sledi da je $A(s)$ integrabilna operatorna funkcija na intervalu $[0,T]$. Kao što smo rekli

$$\xi(t) = \int_0^t V(t,s)\, dw(s) + w(t) \tag{96}$$

Odavde slede jednakosti

$$\begin{aligned} A(t)\,\xi(t) &= A(t) \int_0^t V(t,s)\, dw(s) + A(t)\, w(t) \\ &= \int_0^t A(t)\, V(t,s)\, dw(s) + \int_0^t A(t)\, dw(s) \\ &= \int_0^t A(t)\, R(t,s)\, dw(s) \end{aligned}$$

i konačno

$$A(t)\,\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t A(t)\, R(t,s)\, e_k\, d(e_k, w(s)) \tag{97}$$

Iz jednakosti koju smo zadnju dobili sledi

$$E \| A(t)\xi(t) \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \| A(t)R(t,s)e_k \|^2 \, ds =$$

$$= \int_0^t | A(t)R(t,s) |^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t |A(t)|^2 \, \|R(t,s)\|^2 \, ds$$

$$\leqslant |A(t)|^2 \exp\left(2\int_0^T \|A(x)\| \, dx \right) T$$

i odavde

$$\int_0^T E\|A(t)\xi(t)\|^2 \, dt \leqslant \exp\left(2\int_0^T \|A(x)\| \, dx \right) T \int_0^T |A(t)|^2 \, dt$$

odakle na osnovu zadatog uslova (95) sledi

$$\int_0^T E\|A(t)\xi(t)\|^2 \, dt < \infty \tag{98}$$

Označimo sa

$$a(s) = A(s)\xi(s)$$

Iz jednakosti (94) sledi da je

$$\xi(t) = \int_0^t a(s) \, ds + w(t) \tag{99}$$

gde je $a(s)$ integrabilan slučajni proces. Ovo pak znači da je $\xi(t)$ stohastički proces Ito za koji je, na osnovu jednakosti (98), ispunjeno

$$\int_0^T E\|a(s)\|^2 \, ds < \infty \tag{100}$$

Na osnovu izvodjenja u prethodnoj glavi, razlika korelacionih funkcija datog Wienerovog procesa i slučajnog procesa $\xi(t)$ se može predstaviti u obliku

$$B_w(s,t) - B_\xi(s,t) = \int_0^t \int_0^s K(x,y) \, dx \, dy \tag{101}$$

pri čemu je $K(x,y)$ operator Hilberta-Šmita sa apsolutnom normom

$|K(x,y)|$ koja zadovoljava

$$\int_0^T \int_0^T |K(x,y)|^2 \, dx \, dy < \infty \tag{102}$$

Za proizvoljnu funkciju $b = b(x) \in L^2(H)$ imamo da je

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^T (K(x,y)b(x), b(y)) \, dx \, dy = \\ &= \| \eta(b) \|^2 - \| \int_0^T (b(x), A(x)\xi(x)) \, dx + \eta(b) \|^2 \end{aligned} \tag{103}$$

gde je

$$\eta(b) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T (b(y), e_k) \, d(e_k, w(y)) \tag{104}$$

$\{e_k\}_1^{\infty}$ ortonormirana baza separabilnog Hilbertovog prostora H i

$$E \| \eta(b) \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T |(b(y), e_k)|^2 \, dy = \int_0^T \|b(y)\|^2 \, dy \tag{105}$$

Hoćemo da dokažemo da je za svaku funkciju $b = b(x) \in L^2(H)$, $b \neq 0$

$$\int_0^T \int_0^T (K(x,y)b(x), b(y)) \, dx \, dy \neq \int_0^T \|b(y)\|^2 \, dy \tag{106}$$

Pretpostavimo suprotno. Ovo na osnovu jednakosti (103) znači da postoji funkcija $b = b(x) \in L^2(H)$, $b \neq 0$ koja zadovoljava

$$\int_0^T (b(x), A(x)\xi(x)) \, dx + \eta(b) = 0 \tag{107}$$

Iz jednakosti (97) sledi da je

$$\begin{aligned} (b(x), A(x)\xi(x)) &= (b(x), \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x A(x)R(x,y)e_k \, d(e_k, w(y)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (b(x), A(x)R(x,y)e_k) \, d(e_k, w(y)) \end{aligned}$$

i odavde

$$(b(x), A(x)\xi(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (R^*(x,y)A^*(x)b(x), e_k) \, d(e_k, w(y))$$

Dalje je

$$\int_0^T (b(x),\ A(x)\xi(x))\ dx =$$

$$= \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x (R^*(x,y)A^*(x)b(x),\ e_k)\ d(e_k,w(y))\ dx \tag{109}$$

i

$$\int_0^T (b(x),\ A(x)\xi(x))\ dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \int_y^T (R^*(x,y)A^*(x)b(x),\ e_k)\ dx\ d(e_k,w(y)) \tag{110}$$

Iz jednakosti (104), (107) i (110) sledi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T [\int_y^T (R^*(x,y)A^*(x)b(x),\ e_k)\ dx + (b(y),e_k)]\ d(e_k,w(y)) = 0 \tag{111}$$

Odavde imamo da je za svako k i skoro svako $y \in [0,T]$

$$\int_0^T (R^*(x,y)A^*(x)b(x),\ e_k)\ dx + (b(y),e_k) = 0$$

t.j.

$$(\int_y^T R^*(x,y)A^*(x)b(x)\ dx,\ e_k) + (b(y),e_k) = 0 \tag{112}$$

Odavde se jednostavno dobija da je za skoro svako $y \in [0,T]$

$$\int_y^T R^*(x,y)A^*(x)b(x)\ dx + b(y) = 0 \tag{113}$$

Kako je $R(x,y) = U(x)U^{-1}(y)$, $R^*(x,y) = (U^{-1}(y))^*\ U^*(x)$ i $(U^{-1}(y))^*$ linearan ograničen operator, jednakost (113) se može napisati u obliku

$$(U^{-1}(y))^* \int_y^T U^*(x)A^*(x)b(x)\ dx + b(y) = 0 \tag{114}$$

Iz ove jednakosti sledi da je $b(y)$ diferencijabilna funkcija i

$$\frac{d\ (U^{-1}(y))^*}{dy} \int_y^T U^*(x)A^*(x)b(x)\ dx -$$

$$- (U^{-1}(y))^* U^*(y)A^*(y)b(y) + \frac{d\,b(y)}{dy} = 0 \tag{115}$$

S obzirom na jednakost (84) odavde sledi

$$- A^*(y)\ (U^{-1}(y))^* \int_y^T U^*(x)A^*(x)b(x)\,dx - A^*(y)b(y) + \frac{d\,b(y)}{dy} = 0 \tag{116}$$

Ako ponovo iskoristimo jednakost (114) dobijamo

$$- A^*(y)(-b(y)) - A^*(y)b(y) + \frac{d\,b(y)}{dy} = 0$$

i odavde

$$\frac{d\,b(y)}{dy} = 0 \quad \text{za skoro svako } y \tag{117}$$

za funkciju $b(y)$ sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H za koju je, na osnovu jednakosti (113), $(b(y),u)$ apsolutno neprekidna funkcija za svako $u \in H$. Na osnovu poznate teoreme, iz jednakosti (117) sledi da je $b(y)$ jednako konstantnom vektoru $u_o \in H$

$$b(y) = u_o \in H \qquad y \in [0,T] \tag{118}$$

Razmotrimo ponovo jednakost (114).

$$(U^{-1}(y))^* \int_y^T U^*(x)A^*(x)u_o\,dx + u_o = 0 \tag{119}$$

i odavde, na osnovu Njutn-Lajbnicove formule

$$(U^{-1}(y))^* \left(U^*(T)u_o - U^*(y)u_o \right) = 0$$

što posle sredjivanja daje

$$(U^{-1}(y))^* U^*(T)\ u_o = 0 \tag{120}$$

t.j.

$$R^*(t,s)\ u_o = 0 \tag{121}$$

za linearan ograničen operator $R^*(T,y)$ koji ima inverzan ograničen operator odakle sledi

$$u_0 = 0, \quad b(y) = 0, \quad \int_0^T \|b(y)\|^2 dy = 0 \qquad (122)$$

Dakle, jednakost (107) je moguća samo za funkciju $b \in L^2(H)$, $b = 0$ t.j.

$$\int_0^T \int_0^T (K(x,y)b(x), b(y)) dx\, dy \neq \int_0^T \|b(x)\|^2 dx \qquad (123)$$

za svaku funkciju $b = b(x) \in L^2(H)$, $b \neq 0$.
Dokazane jednakost (101) i nejednakosti (102) i (123) znače da se operator B definisan jednakostima

$$B(u,w(t)) = (u,\xi(t)), \qquad 0 \leq t \leq T, \quad u \in H$$

može produžiti u linearan ograničen operator iz Hilbertovog prostora $H(w)$ u Hilbertov prostor $H(\xi)$ za koji je $I - B^*B$ operator Hilberta-Šmita sa najvećom sopstvenom vrednošću manjom od jedinice t.j. B se može produžiti u linearan ograničen operator koji ima inverzan ograničen operator i $I - B^*B$ je operator Hilberta-Šmita. Formulišimo dobijene rezultate u obliku teoreme.

TEOREMA 4. Neka je $w = w(t)$ slučajni proces Wienera sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H, $A(s)$ merljiva operatorna funkcija takva da je za svako $s \in [0,T]$ $A(s)$ operator Hilberta-Šmita u Hilbertovom prostoru H sa apsolutnom normom $|A(s)|$ koja zadovoljava

$$\int_0^T |A(s)|^2 ds < \infty$$

i $\xi = \xi(t)$ slučajni proces u H koji zadovoljava stohastičku integralnu jednačinu

$$\xi(t) = \int_0^t A(s)\xi(s)\,ds + w(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

Slučajni procesi $\xi = \xi(t)$ i $w = w(t)$ su ekvivalentni na konačnom intervalu $[0,T]$.

5. NEKA ZAKLJUČNA RAZMATRANJA.

Neka je, kao do sada, $\xi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ slučajni proces sa vrednostima u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Za separabilan Hilbertov prostor H uzmimo prostor nizova l_2 sa elementima $x = (x_k)_1^\infty$, $y = (y_k)_1^\infty$, skalarnim proizvodom

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, y_k$$

i normom

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$$

Neka je $(e_k)_1^\infty$ uobičajena ortonormirana baza u l_2: $e_k = (x_j^k)_1^\infty$

$$x_j^k = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

Uzimajući u obzir ovu ortonormiranu bazu u l_2 i teoreme dokazane u prve dve glave jednostavno je videti da je

$$\xi(t) = (\ \xi_k(t)\ )_1^\infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

slučajni proces sa vrednostima u l_2 ako i samo ako su

$$\xi_k(t) = (\xi(t), e_k), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1,2,\ldots$$

realni slučajni procesi.

Za merljiv integrabilan slučajni proces

$$\xi(t) = (\ \xi_k(t)\ )_1^\infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

sa vrednostima u l_2 "koordinate"

$$\xi_k(t) = (\xi(t), e_k), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1,2,\ldots$$

su merljivi integrabilni realni slučajni procesi i

$$\int_0^T \xi(t)\, dt = (\int_0^T \xi_k(t)\, dt)_1^{\infty}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

Stohastički proces Ito razmotren u trećoj glavi zadat jednakošću

$$\xi(t) = \int_0^t a(s)\, ds + w(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \int_0^T E\|a(s)\|^2\, ds < \infty$$

se svodi na niz jednakosti

$$\xi_k(t) = \int_0^t a_k(s)\, ds + w_k(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

pri čemu su $w_k(t)$, $k = 1,2,\ldots$ uzajamno ortogonalni realni Wienerovi procesi i

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T E|a_k(s)|^2\, ds < \infty$$

Stohastički proces Ito razmotren u prethodnom odeljku koji zadovoljava stohastičku integralnu jednačinu

$$\xi(t) = \int_0^t A(s)\xi(s)\, ds + w(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \int_0^T |A(s)|^2\, ds < \infty$$

se svodi na sistem integralnih jednačina

$$\xi_k(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t A_{kj}(s)\xi_j(s)\, ds + w_k(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

gde je $\{ A_{kj}(s) \}$ matrica kojom je predstavljen linearan ograničen operator $A(s)$ u Hilbertovom prostoru H i

$$\sum_{k,j=1}^{\infty} \int_0^T |A_{kj}(s)|^2\, ds < \infty$$

Slučajni procesi sa vrednostima u l_2 ne predstavljaju samo primer slučajnog procesa u separabilnom Hilbertovom prostoru. Više od toga. Proizvoljan separabilan Hilbertov prostor H je izometričan sa l_2, pa se proizvoljan slučajni proces se vrednostima u H može posmatrati kao slučajni proces sa vrednostima u l_2. U ovom radu to nije uradjeno tako. Način na koji je to uradjeno ima svoju težinu i značaj. Omogućava uopštenje na slučajne procese sa vrednostima u proizvoljnom neseparabilnom Hilbertovom prostoru.

I u separabilnom Hilbertovom prostoru H su moguća dalja uopštenja. Interesantno bi bilo posmatrati slučajni proces koji zadovoljava opštiju stohastičku integralnu jednačinu

$$\xi(t) = \int_0^t a(s, \xi(s))\, ds + w(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

i dokazati da su slučajni procesi $\xi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ i Wienerov proces $w(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ istog spektralnog tipa u smislu da se poklapaju σ-algebre $\mathfrak{U}_t(\xi)$ i $\mathfrak{U}_t(w)$ koje su generisane respektivno skupovima slučajnih promenljivih

$$\xi(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant t \qquad \text{i} \qquad w(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant t$$

Zatim potražiti uslove koje treba da zadovoljava funkcija $a(s,t)$ da bi slučajni proces $\xi(t)$ bio ekvivalentan Wienerovom procesu $w(t)$ na konačnom intervalu $[0,T]$.

Sa istraživanjem se može krenuti i na drugi način. Može se posmatrati slučajni proces koji zadovoljava stohastičku integralnu jednačinu

$$\xi(t) = \int_0^t A(s)\xi(s)\, ds + Bw(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

(B - operator Hilberta-Šmita), zatim

$$\xi(t) = \int_0^t A(s)\xi(s)\, ds + \int_0^t B(s)\, dw(s), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

i na kraju

$$\xi(t) = \int_0^t a(s, \xi(s))\, ds + \int_0^t B(s)\, dw(s)$$

($B(s)$ - operator Hilberta-Šmita).

L I T E R A T U R A

[1] Н.И. АХИЕЗЕР И.М. ГЛАЗМАН
ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ
"НАУКА", МОСКВА 1966.

[2] S. ALJANČIĆ
UVOD U REALNU I FUNKCIONALNU ANALIZU
"GRADJEVINSKA KNJIGA", BEOGRAD 1968.

[3] Н. БУРБАКИ
ИНТЕГРИРОВАНИЕ - МЕРЫ, ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕР
"НАУКА", МОСКВА 1967.

[4] Н. ДАНФОРД Д.Ж. ШВАРЦ
ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ - ОБЩАЯ ТЕОРИЯ
МОСКВА 1962.

[5] Ю.Л. ДАЛЕЦКИЙ С.В. ФОМИН
МЕРЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
"НАУКА", МОСКВА 1983.

[6] И.И. ГИХМАН А.В. СКОРОХОД
ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ - ТОМ I
"НАУКА", МОСКВА 1971.

[7] И.И. ГИХМАН А.В. СКОРОХОД
ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ - ТОМ II
"НАУКА", МОСКВА 1975.

[8] И.В. ГИРСАНОВ
О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩУ АБСОЛЮТНО - НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАМЕНЫ МЕРЫ,
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ, ТОМ V,
ВЫПУСК 3, 1960.

[9] М.П. ЕРШОВ
О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ПРОЦЕССОВ ИТО

[10] М.П. ЕРШОВ
ОБ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ МЕР ОТВЕЧАЮЩИХ ПРОЦЕССАМ ДИФФУЗИОНОГО ТИПА

[11] Z. IVKOVIĆ
UVOD U TEORIJU VEROVATNOĆE, SLUČAJNE PROCESE I MATEMATIČKU STATISTIKU
GRADJEVINSKA KNJIGA, BEOGRAD 1972.

[12] А.Н. КОЛМОГОРОВ С.В. ФОМИН
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА
"НАУКА", МОСКВА 1972.

[13] Л.В. КАНТОРОВИЧ Г.П. АКИЛОВ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ,
"НАУКА", МОСКВА 1977.

[14] Ж. НЕВЁ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
"МИР", МОСКВА 1969.

[15] А.И. ПЛЕСНЕР
СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ
"НАУКА", МОСКВА 1965.

[16] Ю.В. ПРОХОРОВ Ю.А. РОЗАНОВ
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
"НАУКА", МОСКВА 1973.

[17] Ф. РИСС Б. СЕКЕФАЛЬВИ - НАДЬ
ЛЕКЦИИ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ
"МИР", МОСКВА 1979.

[18] Ю.А. РОЗАНОВ
СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ
"НАУКА", МОСКВА 1971.

[19] Ю.А. РОЗАНОВ
ГАУССОВСКИЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
"НАУКА", МОСКВА 1968.

[20] Ю.А. РОЗАНОВ
ТЕОРИЯ ОБНАВЛЯЮЩИХ ПРОЦЕССОВ
"НАУКА", МОСКВА 1974.

[21] Ю.А. РОЗАНОВ
МАРКОВСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ
"НАУКА", МОСКВА 1981.

[22] А.Т. ТАЛДЫКИН
ЭЛЕМЕНТЫ ПРИКЛАДНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА
"ВЫСШАЯ ШКОЛА", МОСКВА 1982.

[23] П.Л. ХЕННЕКЕН А. ТОРТРА
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
"НАУКА", МОСКВА 1974.