UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Ivana Vučinac

TEORIJA GRUPA I RUBIKOVA KOCKA

master rad

Beograd, 2020.

Mentor:

Prof. dr Zoran Petrović, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

Prof. dr Aleksandar Lipkovski, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Marko Radovanović, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: ________________________

SADRŽAJ

UVOD

Rubikova kocka, poznata i kao magična kocka, jeste najpopularnija zagonetka svih vremena. Ova 3D kombinacijska slagalica, jednostavna je i komplikovana u isti mah.

Još 1974. godine, mađarski profesor arhitekture Erne Rubik napravio je trodimenzionalnu kocku koja se sastojala iz nekoliko redova kockica koje se slobodno okreću u različitim pravcima. Iako postoji verovanje da je Rubik kocku izmeo kako bi pomogao svojim studentima da razumeju kako funkionišu 3D predmeti, profesorov izum zapravo predstavlja njegov pokušaj da reši jedan strukturalni problem: *kako napraviti kocku koja se sastoji iz pokretljivih delova, a da se ta ista kocka ne raspadne?*

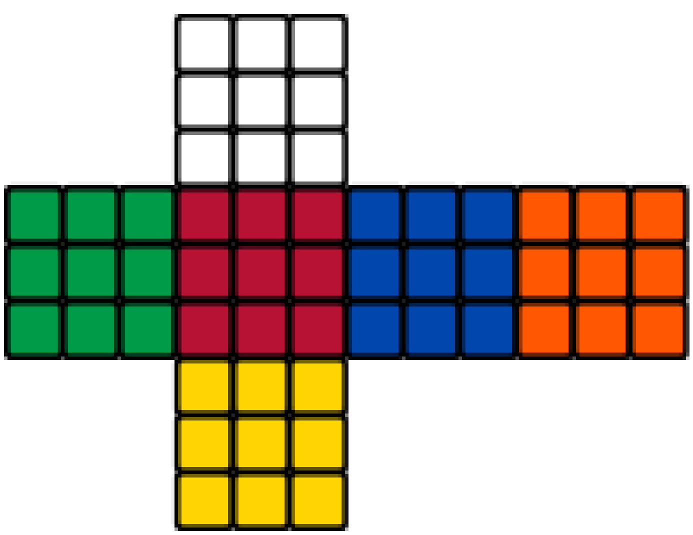
Rubikova kocka je mehanička igračka, sastavljena od 26 manjih plastičnih kocaka koje se vrte oko središnjeg jezgra. Svaka od šest stranica koje čine kocku u rešenom obliku je različite boje. Rubik nije bio svestan da je napravio slagalicu sve dok nije okrenuo kockice i shvatio da ne zna kako da kocki vrati prvobitan izgled.

Slika 1:Rubikova kocka 3x3

1.ISTORIJA RUBIKOVE KOCKE

Erno Rubik, pronalazač i profesor arhitekture, rođen je u Mađarskoj, u toku Drugog svetskog rata. Sredinom 1970-tih, radio je u Odeljenju za dizajn enterijera na Akademiji primenjenih umetnosti i zanata u Budimpešti. Nije nameravao da napravi igračku-slagalicu već da istražuje strukturalni dizajn i da stvori model koji bi mu pomogao da svojim studentima objasni trodimenzionalnu geometriju, i kako bi poboljšali svoje vizualizacijske veštine. Dobio je inspiraciju od oblih, glatkih kamenčića sa obale Dunava koji su mu dale rešenje kako napraviti cilindrične oblike i osovine u kocki. Tako je osmislio i 1974. godine patentirao kocku koja se sastoji od 26 malih kocki i u okviru koje je unutrašnji složeni mehanizam koji čvrsto drži sve kockice na okupu i zahvaljujući kojem nivoi kocke mogu da se pomeraju – horizontalno i vertikalno. Prvobitno je bila napravljena od drveta.

U početnom stanju, svaka strana kocke je u određenoj boji – crvenoj, beloj, plavoj, zelenoj, žutoj i narandžastoj, i svaka strana ima devet kvadratića. Specijalni unutrašnji mehanizam dozvoljava da se svaka strana okreće nezavisno od druge. Kad se kockice i boje ispremeštaju, nastaje zagonetka – kako sve vratiti u prvobitno stanje i postaviti boje na svoje mesto.
U trenutno prodavanim modelima, bela je nasuprot žute, plava je nasuprot zelene, i narandžasta je nasuprot crvene, a crvena, bela i plava su raspoređene u smeru kretanja kazaljke na satu.



Slika 2: Boje Rubikove kocke

Na ranije proizvodenim kockama, pozicija boja je varirala od kocke do kocke. Interni mehanizam omogućava svakom licu da se okreće samostalno, te se na taj način mešaju boje. Kako bi se slagalica složila, svako lice se mora vratiti da se sastoji od jedne boje. Sada se proizvode slične slagalice sa različitim brojem strana, dimenzija, i nalepnica, ali nisu sve Rubikove.

Samom Rubiku bilo je potrebno mesec dana da reši sopstvenu enigmu. Otkrio je da nije lako poravnati sve slojeve i vratiti kocku na početak i zaključio da do kraja života ne bi mogao da dođe do konačnog rešenja ako bi samo nasumično pomerao slojeve. Krenuo je da radi na rešenju i, najpre, postavio kockice u obliku krsta oko centralne kockice na jednoj strani, a zatim i otkrio uzastopne poteze kojima može da postavi kockice u istoj boji, na više različitih delova kocke. Analiza je dovela do rešenja i patent je bio spreman za predstavljanje.

Za svoju kocku je 1975. godine dobio mađarski patent HU170062, ali nije tražio međunarodni patent. Prva test serija Rubikove kocke je napravljena 1977. godine, kada su se i pojavile u radnjama Budimpešte. Kada se Tibor Laci, mađarski emigrant, biznismen i ljubitelj matematike oduševio novom, inventivnom igračkom, posredovao je u plasiranju kocke na zapadno tržište i predstavljanju kocke na Sajmu igračaka u Zapadnoj Nemačkoj. Tom Kremer, stručnjak za igračke procenio je potencijale kocke, anticipirao globalni uspeh i inicirao potpisivanje ugovora s nemačkom kompanijom Ideal Toy Com. Tri godine kasnije kocka je predstavljena na sajmovima igračaka u Zapadnim metropolama – Londonu, Njujorku, Parizu i Nirnbergu. 1980. godine Rubik je dobio nagradu za najbolju slagalicu godine u Nemačkoj.

Ideal je želeo barem prepoznatljivo ime za zaštitni znak. Mađarska kocka koja je prvobitno nazvana magična, promenila je naziv i dobila ime po svom tvorcu 1980. godine. Naravno, tada je Rubik došao u centar pažnje.

Nakon njenog međunarodnog debija, napredak kocke prema policama prodavnica igračaka na zapadu je nakratko zaustavljen, tako da bi se na zapadu mogla proizvoditi sigurno i sa ambalažnim specifikacijama. Proizvedena je lakša kocka, i Ideal je odlučio da je preimenuje.

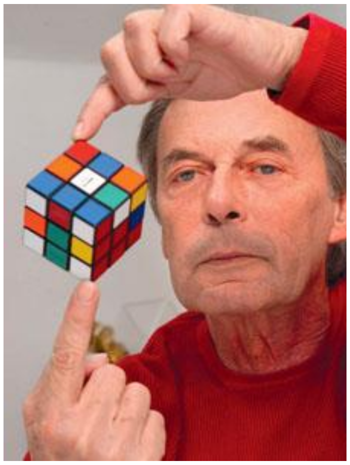
Razmatrani su "Gordijski čvor" i "Zlato Inka", ali kompanija se konačno odlučila za ime "Rubikova kocka", i prva serija je izvezena iz Mađarske u maju iste godine.

Slika 3: Pakovanje Rubikove kocke, godine 1980- Ideal Toy Corp., Proivedeno u Mađarskoj

Rubikova kocka je već početkom osamdesetih postala veoma popularna, a do kraja ove decenije stekla je kultni status. Bila je prva bestseler igračka koja dolazi iz neke od komunističkih zemalja, a Erno Rubik se obogatio i postao prvi autentični milioner u Istočnoj Evropi. Nastavio je da istražuje i kreira pametne geometrijske igračke, ali sve su ostale u senci slavne kocke.

2. O IZUMITELjU RUBIKOVE KOCKE

Erno Rubik je mađarski pronalazač, vajar i profesor arhitekture. Rođen je 13. jula 1944. godine u Budimpešti, Mađarska. Njegov otac je bio avio-inženjer u fabrici u Estergomu, a majka je pesnikinja. Godine 1967. je diplomirao na Tehničkom univerzitetu u Budimpešti. Od 1971. do 1975. godine radio je kao arhitekta. Oženio se 1977. godine arhitektom interijera Agnes i 1978. godine dobija kćerku Anu. Erno Rubik je postao urednik magazina za igre i puzle, nakon čega je godine 1983. osnovao vlastiti "Rubik Studio" koji se bavi dizajnom nameštaja, igrica i mnogih drugih varijacija na temu Rubikove kocke. Godine 1987. dobija zvanje profesora, a 1990. sa Janošem Ginstlerom je osnovao Mađarsku akademiju za inženjerstvo i bio njen predsednik do 1996. Osnovao je "International Rubik Foundation", fondaciju koja pomaže i podržava u radu nadarene inženjere i studente industrijskog dizajna u Mađarskoj.



Erno Rubik

3. MATEMATIKA U RUBIKOVOJ KOCKI

U jednoj varijaciji poznate kineske izreke, beskonačnost je "kocka bez strana". Broj permutacija koje je moguće izvesti sa najprodavanijom igračkom na svetu je ogroman, gotovo se može reći da je beskonačan. Međutim, jednostavnim kombinatornim računom se može odrediti tačan broj mogućnosti.

Originalna Rubikova kocka dimenzija 3×3×3 ima osam ugaonih kockica i dvanaest ivičnih kockica. Postoji 8! načina da se rasporede kocke na uglovima. Od toga, sedam se može postaviti sa tri obojene ivice proizvoljno, dok orijentacija osme zavisi od prethodnih sedam, što daje 3^7 mogućnosti. Ivice je moguće rasporediti na $\frac{12!}{2}$ načina, pošto neparna permutacija uglova povlači za sobom neparnu permutaciju ivica. Jedanaest ivica je moguće rasporediti nezavisno, dok položaj dvanaeste ivice zavisi od rasporeda prethodnih jedenaest, pa postoji 2^{11} različitih mogućnosti. Broj različitih položaja je tačno 43 252 003 274 489 856 000. Ako bismo na jednom mestu postavili onoliko Rubikovih kocki koliko ima mogućih permutacija, površinu planete Zemlje bismo pokrili 275 puta.

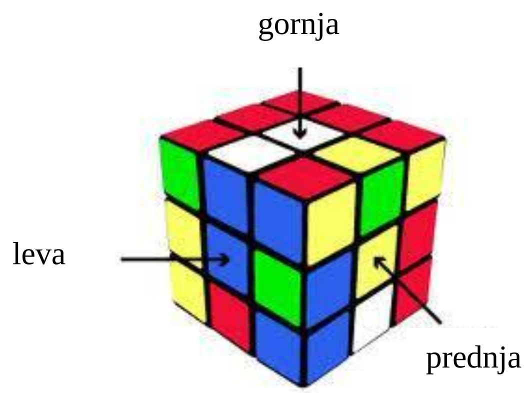
Od osamdesetih godina prošlog veka matematičari i informatičari pokušavaju utvrditi minimalnu količinu poteza koji su potrebni za rešenje kocke. Godine 2010. tim istraživača koji rade za Google dokazao je da je moguće kocku rešiti u samo 20 poteza.

3.1. Oznake i notacija

Rubikova kocka se sastoji od 27 minijaturnih kockica, od kojih su 26 vidljivih, a kockica koja je u središtu zapravo ni ne postoji. Kako bi se lakše proučavala, notacija Rubikove kocke se neće vezati za boje, već će se koristiti imena i slova. Na kocki se nalazi 8 ugaonih kockica koje imaju 3 vidljive strane, 12 ivičnih kockica koje imaju dve vidljive strane te 6 središnjih kockica koje imaju jednu vidljivu stranu.

Uobičajena je notacija koja je potekla od Davida Singmastera, pa se prema njemu naziva Singmasterova notacija.

On pretpostavlja da se na početku odabralo koja strana će biti gore, napred i desno te da se to neće menjati (to se postiže tako da se zapamte boje središta prednje, gornje i desne strane) (Slika 4). Notacija za 6 strana Rubikove kocke glasi: desna strana (r), leva strana (l), gornja strana (u), donja strana (d), prednja strana (f), zadnja strana (b) (notacija strana je preuzeta iz engleskog jezika).



Slika 4: Notacija strana Rubikove kocke

Ugaone kockice se označavaju tako da se nabroje vidljive strane u smeru kazaljke na satu. Tako na primer, kockica koja se nalazi u gornjem, desnom, prednjem uglu se označava sa urf (ili rfu ili fur). Kada nije važno koja je strana prva navedena govori se o neorijentisanim kockicama. No, kad se govori o orijentisanim kockicama, važno je koja je strana prva navedena. Tada su orijentisane ivične kockice urf, rfu, fur različite. Na isti način se imenuju ivične i središnje kockice. Tako se na primer, središnja kockica na desnoj strani oznacava sa $\bar{r}$ jer je to jedina vidljiva strana te središnje kockice.

Takođe, postoje prostori u kojima kockice "žive". Označeni su na isti način kao i kockice. Ako je Rubikova kocka u početnom položaju tj. ako je rešena, svaka kockica se nalazi u prostoru kockice istog naziva (urf kockica se nalazi u urf prostoru). Ako se rotira strana kocke, kockice menjaju svoj položaj, a prostori se ne miču. Samo središnje kockice uvek ostaju u istom prostoru.

Osnovni potez na Rubikovoj kocki je rotacija jedne strane za pravi ugao u smeru kretanja kazaljke na satu. Singmasterova notacija za 6 osnovnih poteza glasi:

-F (eng. Front): rotacija prednje strane (Slika 5.1)

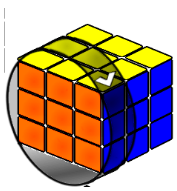
-B (eng. Back): rotacija zadnjestrane (Slika 5.2)

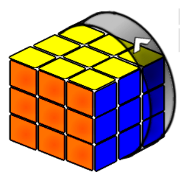
-U (eng. Up): rotacija gornje strane (Slika 5.3.)

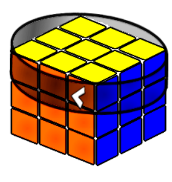
-D (eng. Down): rotacija donje strane (Slika 5.4.)

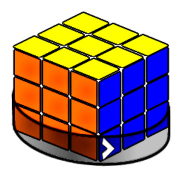
-L (eng. Left): rotacija leve strane (Slika 5.5.)

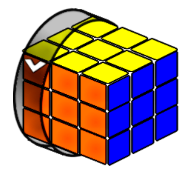
-R (eng. Right): rotacija desne strane (Slika 5.6.)

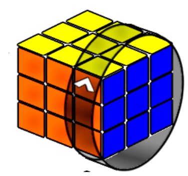

Slika 5.1.


Slika 5.2.


Slika 5.3.

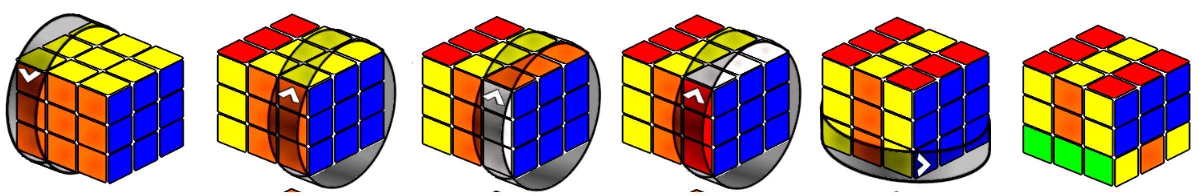

Slika 5.4.


Slika 5.5.


Slika 5.6.

Sled osnovnih poteza čini potez.

Na primer, $LRRRD$ znači redom okrenuti levu, triput zaredom desnu i jednom donju stranu kocke za pravi ugao u smeru kretanja kazaljke na satu.



U prethodnom primeru moglo se napisati i R^3, a ako rotaciju vršimo u smeru suprotnom od smera kretanja kazaljke na satu, onda je R^{-1}. Sve te rotacije pripadaju grupi Rubikove kocke.

Takođe, ako se izvede okret jedne strane za pravi ugao pa se zatim izvede u suprotnom smeru, to je isto kao i „ništa ne raditi" ($XX^{-1} = X^{-1}X = I$).

Iz svega navedenog sledi da se uzastopnim okretanjem jedne strane razlikuju samo 4 poteza: X^0; X^1; X^2; X^3, gdje je X bilo koji od mogućih 6 osnovnih poteza.

Primer 3.1. $R^9 = R^{1+4+4} = R^1R^4R^4 = RII = R$ (okrenuti desnu stranu devet puta je isto kao okrenuti desnu stranu jedanput).

Zbog toga, za okretanje jedne strane kocke, za potpun opis svih mogućih situacija dovoljno je posmatrati cikličnu grupu reda 4: C_4 = {Id, X, X^2, X^3}, gde je X neki od elemenata R, L...

Na temelju činjenica da osnovni potezi ne menjaju prostore središnjih kockica te da ivične kockice mogu doći samo na mesto ivičnih kockica, a ugaone na mesto ugaonih, mogu se proučavati moguće konfiguracije Rubikove kocke.

Konfiguracija je neka „pozicija” kockica. Konfiguraciju u kojoj su sve kockice „na svom mestu” sa odgovarajućim orijentacijama zovemo početna konfiguracija. Smatramo da su dva poteza jednaka ako dovode do iste konfiguracije. Iako su, teoretski gledano, sve ove konfiguracije moguće, nisu sve valjane! Samo uz pomoć valjanih konfiguracija se može izvršiti skup poteza koji omogućuju vraćanje Rubikove kocke u početni položaj, tj. moguće je "rešiti" Rubikovu kocku.

3.2. Grupa i podgrupe Rubikove kocke

3.2.1. Grupa Rubikove kocke

Pre daljeg razmatranja Rubikove kocke, definisaćemo šta je to grupa.

Definicija 3.1. Neka je G neprazni skup. Svako preslikavanje $* : G \times G \to G$ Dekartovog proizvoda skupa G sa samim sobom u skup G zove se **binarna operacija** na skupu G.

Definicija 3.2. Grupa je algebarska struktura koje se sastoji od nepraznog skupa G i binarne operacije $*$ za koje važi:

1. Asocijativnost: $\forall$a, b, c $\in G$ (a $*$ b) $*$ c = a $*$ (b $*$ c).

2. Neutralni element: $\exists$e $\in G$, $\forall$a $\in G$ a $*$ e = e $*$ a = a
(neutralni element je jedinstven, te se ponekad označava i s 1).

3. Inverzni element: $\forall$a$\in G$, $\exists$a$'$ $\in G$ a $*$ a$'$ = a$'$ $*$ a = e.

Prema tome, grupa je par $(G, *)$.

Definicija 3.3. Grupa $(G, *)$ je **komutativna** ili **Abelova** ako $\forall$a, b $\in G$ važi a $*$ b = b $*$ a.

Definicija 3.4. Grupa se naziva **konačnom** ukoliko je skup G konačan.

Definicija 3.5. Broj elemenata neke konačne grupe G se označava s $|G|$ ili red(G) i zove se **red** grupe G.

Tada, skup svih mogućih poteza na Rubikovoj kocki se može označiti s G. Ako dva poteza daju isti rezultat smatraju se istim (npr. okret leve strane je isto kao i okret leve strane u suprotnom smeru tri puta).

U kontekstu Rubikove kocke, red elementa grupe G označava red poteza na kocki tačnije, označava broj koliko je puta dovoljno ponoviti neki potez da bi se izgled kocke vratio u početno stanje (u stanje pre prvog uzastopnog izvršavanja tog poteza).

Binarna operacija $*$ se može definisati na sledeći način: ako su X i Y dva poteza, tada $X * Y$ označava potez gde se prvo izvršio potez X pa zatim potez Y. Par $(G, *)$ čini grupu.
Treba proveriti sva svojstva kako bi se pokazalo da je skup $(G, *)$ grupa:

1. Asocijativnost: u ovom slučaju radi se operacija koja je kompozicija funkcija, a kompozicija funkcija je uvek asocijativna.
2. Neutralni element: potez koji ništa ne menja na kocki.
3. Inverzni element: svaki potez se može izvesti unatrag i time ga poništiti (nakon svakog poteza nekim potezom iz skupa se može vratiti kocka u početno stanje).

No, grupa Rubikove kocke $(G, *)$ nije Abelova, ne zadovoljava svojstvo komutativnosti.
To se lagano može primetiti na kocki: kocka različito izgleda nakon DR, nego nakon RD. Nekomutativnost grupe Rubikove kocke je vrlo važno svojstvo. Kad bi svaka dva poteza komutirala rešavanje kocke bi bilo trivijalno. Trebalo bi se samo prebrojati koliko puta su izvedeni potezi na pojedinim stranama i svaku stranu okrenuti do sledećeg sadržalaca od 4, jer je 4 red grupe čiji se elementi sastoje od kombinacija jednog od osnovnih poteza.

Na primer, ako je 3 puta izveden osnovni potez R i 2 puta osnovni potez D, da vredi komutativnost, kocka bi se vratila u svoj početni položaj ako se izvede 1 puta osnovni potez R i 2 puta osnovni potez D.

Red grupe Rubikove kocke je broj koji označava koliko ima različitih konfiguracija kocke koje se mogu dobiti primenom osnovnih poteza, a taj broj približno $4{,}3 \times 10^{19}$.
Binarna operacija $*$ često se izostavlja, pa se tako umesto $g * h$ može pisati samo gh. Stoga, grupa $(G, *)$ se može zapisati samo sa G i označava grupu na kojoj je definisana navedena binarna operacija.

3.2.2. Podgrupe

Da bi se bolje razumela grupa Rubikove kocke čiji je red ogroman, treba krenuti od jednostavnije situacije: razmatranja njenih podgrupa. Zbog preglednosti i manjeg broja slučajeva pogodnije su za objašnjenje i ilustriranje različitih pojmova.

Definicija 3.6. Neka je $(G, *)$ grupa. Neprazni podskup $H \subseteq G$ je **podgrupa** od G ako je H u odnosu na operaciju $*$ takođe grupa.

Primer 3.2. Već spomenuti četvoročlani skup $C_4 = \{Id , X^1, X^2 , X^3\}$, gde je X jedan od mogućih 6 osnovnih poteza (R, L, U, D, F, B) je podgrupa grupe Rubikove kocke. To su najjednostavnije podgrupe. Njihov red iznosi 4 jer broj elemenata u skupu je 4.
Grupa C_4 ima i jedno dodatno svojstvo: nije bitan redosled izvođenja poteza (isti je rezultat nakon okreta jedne strane za 90° , pa za 180° ili obrnuto), tj. vredi svojstvo komutativnosti.

Za rešavanje Rubikove kocke veliku ulogu imaju koseti koje se definišu na sledeći način:
Definicija 3.7. Neka je H podgrupa grupe G, tada za $g \in G$ važi:
- $gH = \{gh : h \in H\}$ je levi koset podgrupe H u grupi G;
- $Hg = \{hg : h \in H\}$ je desni koset podgrupe H u grupi G.

Skup svih levih koseta podgrupe H u G označavaćemo sa G/H, a svih desnih koseta sa H/G.

Primer 3.3. Neka je $G = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i $H = \{0, 2, 4\}$.

Tada je $[G : H] = |G| / |H| = 6/3 = 2$.

Dakle, postoje 2 klase levih koseta podgrupe H u grupi G, i to su $\{0, 2, 4\}$ i $\{1, 3, 5\}$

3.3. Generatori

Definicija 3.8. Neka je $S \subset G$. Sa $< S >$ označavamo najmanju podgrupu od G koja sadrži S.

Definicija 3.9. Neka je $S \subset G$ podskup grupe G. S generiše G (S je skup generatora od G) ako $G = < S >$, tj. svaki element grupe G se može zapisati kao konačan proizvod elemenata iz S i njihovih inverza (inverzi nisu nužni ako se radi o konačnoj grupi).

Primer 3.4. Svaki element grupe G se može zapisati kao konačan sled osnovnih poteza Rubikove kocke, stoga je $G = < D, U, L, R, F, B >$.

Definicija 3.10. Grupa G je **ciklična** ako je generisana jednim jedinim elementom, tj. ako postoji $g \in G$ sa svojstvom da je $G = < g >$. Element g se zove **generator** grupe G.

Primer 3.5.
Ako je $G = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ onda bi jedna ciklična podgrupa bila i $< 2 > = \{0, 2, 4\}$.

Primer 3.6. Grupa C_4 je ciklična grupa. Njen generator je osnovni potez X. Sledeća propozicija je veoma korisna za Rubikovu kocku jer govori da je umesto svojstava svih mogućih 5×10^{20} poteza, dovoljno razumeti svojstva 6 osnovnih poteza Rubikove kocke.

Propozicija 3.1. Neka je $S \subseteq G$ podskup konačne grupe G. Neka su zadovoljena sledeća dva uslova:
1. Svaki element iz S i inverz svakog elementa iz S zadovoljavaju svojstvo P.
2. Ako $g \in G$ i $h \in G$ zadovoljavaju svojstvo P, tada i gh zadovoljava svojstvo P.

Tada, svaki element iz $< S >$ zadovoljava svojstvo P.

Primer 3.7.
Ako je H podgrupa generisana sa L a K podgrupa generisana sa R, onda je HK podrgrupa i ima 16 elemenata, uz to je i komutativna. Svake dve rotacije suprotnih strana generišu komutativnu podgrupu.
$HK = \{Id, L, L^2, L^3, R, LR, L^2R, L^3R, R^2, LR^2, L^2R^2, L^3R^2, R^3, LR^3, L^2R^3, L^3R^3\}$
i pritom važi

$$HK \cong H \times K \cong Z_4 \times Z_4$$

• $H =< R^2\ U^2\ >$ je ciklična podgrupa: ta se grupa sastoji od svih poteza koji se mogu dobiti izvođenjem okreta prvo desne pa gornje strane za 180° u smeru kazaljke na satu. Ponavljajući $R^2\ U^2$ 6 puta zaredom, kocka se vraća u svoj početni položaj, tj. element $R^2\ U^2$ je reda 6

• Neka je $H =< L >$ i $K =< R^2 >$, i u ovom slučaju je HK komutativna podgrupa ali ima 8 elemenata. Za ovu podgrupu važi $HK \cong H \times K \cong Z_4 \times Z_2$

U tabeli su prikazani generatori nekih podgrupa i redovi tih podgrupa:

Generator podgrupe	Red podgrupe	Faktorizacija reda podgrupe
U	4	2^2
U, RR	14400	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
U, R	73483200	$2^6 \cdot 3^8 \cdot 5^2$
$RRLL, UUDD, FFBB$	8	2^3
RL, UD, FB	6144	$2^{11} \cdot 3$
FF, RR	12	$2 \cdot 3^2$
FF, RR, LL	96	$2^5 \cdot 3$
FF, BB, RR, LL, UU	663552	$2^{13} \cdot 3^4$
$LLUU$	6	$2 \cdot 3$
$LLUU, RRUU$	48	$2^4 \cdot 3$
$LLUU, FFUU, RRUU$	82944	$2^{10} \cdot 3^4$

Potez	Efekat
$(R^2U^2)^3$	Permutuje $(uf, ub)(fr, br)$
$(R^{-1}D^2RB^{-1}U^2B)^2$	Promene orijentaciju ufr i bld
$(RUR^{-1}U^{-1})^3$	Permutuje $(ufr, dfr)(ubr, ubl)$
$F^2L^2U^2(F^2L^2)^3U^2L^2F^2$	Permutuje $(uf, ub)(ur, ul)$
$(D^2R^2D^2(F^2R^2)^2U)^2$	Permutuje $(ufl, ubr)(dfr, dbl)$
$RDR^{-1}URD^{-1}R^{-1}U^{-1}$	Ugaoni tricikl(brd, urb, ulb)
$({M_R}^2U{M_R}^2U^2)^2$	Permutuje $(ufl, ubr)(ufr, ubl)$
$(M_RU)^4$	Promene orijentaciju ub, ul, df, db
$(M_RU)^3\mathrm{U}({M_R}^{-1}U)^3\mathrm{U}$	Promene orijentaciju uf, ub
${M_R}^2U^{-1}{M_R}^{-1}U^2M_RU^{-1}{M_R}^2$	Ivični tricikl (uf, ul, ur) tj. $uf \to ul \to ur$

$M_R -$ označava okret srednjeg dela koji je paralelan s desnom stranom u smeru kazaljke na satu za 90°

3.4. Simetrična grupa

Pre nego li se počnu proučavati konfiguracije kockica Rubikove kocke, prvo treba krenuti od konfiguracija bilo kojih n objekata. Neka su dati objekti označeni sa $1, 2, \ldots, n$. Tada postoji bijekcija σ : $\{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ koja svakom objektu $1, 2, \ldots, n$ pridružuje tačno jedan objekat iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Funkcija σ definiše razmeštaj (permutacije) datih n objekata. Stoga, umesto proučavanja skupa svih mogućih razmeštaja, može se proučavati bijekcija $\{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$. Skup svih bijektivnih preslikavanja nekog konačnog skupa na sebe je grupa.

Definicija 3.11. Simetrična grupa reda $\boldsymbol{n}$ je skup bijekcija (permutacija) sa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u $\{1, 2, \ldots, n\}$ na kojem je definisana binarna operacija kompozicije i označava se sa S_n. Simetrična grupa S_n je grupa svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Dokaz da je S_n grupa je trivijalan: kompozicija bijekcija je opet bijekcija, svaka bijekcija ima inverz koji je bijekcija, te je identitet bijekcija. Elemente simetrične grupe i način kako ih zapisati najbolje je prikazati na primeru Rubikove kocke gde se želi opisati kako i gde se pomera svaka kockica i svaka strana kockice kad se izvede neki osnovni potez.

Definicija 3.12. Ciklus ili ciklična permutacija $(i_1 i_2 \ldots i_k)$ je element $\tau \in S_n$ definisan sa $\tau(i_1) = i_2$, $\tau(i_2) = i_3$, … , $\tau(i_{k-1}) = i_k$, $\tau(i_k) = i_1$ i $\tau(j) = j$ ako je $j \neq i_r$, za sve r. Dužina ciklusa je k, a **supp** (nosač) τ označava skup brojeva $(i_1 i_2 \ldots i_k)$ koji se pojavljuju u ciklusu. Ciklus dužine k se zove **k-ciklus**.

Primer 3.8. Neka je $n = 9$ i permutacija $\sigma \in S_9$ zadata sa :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 3 & 8 & 2 & 7 & 1 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{tj } 1 \mapsto 4 \mapsto 8 \mapsto 6 \mapsto 7 \mapsto 1$$

(14867) označava permutaciju skupa $\{1,2, \ldots ,9\}$ u kojoj se 1 slika u 4, 4 u 8, 8 u 6, 6 u 7, a 7 u 1 dok se ostali elementi slikaju sami u sebe. Ovakva permutacija naziva se ciklus dužine 5.

Primer 3.9.

Neka je $= \{\pi\epsilon S_4 : \pi(4) = 4\}$, sledi da je $H \cong S_3$ i da je $H \leq S_4 = G$.

Neutralni element u grupi H je e, jer je $e(4) = 4$

Neka su π_1 i π_2 takve permutacije da je $\pi_1 (4) = 4 = \pi_2(4)$,

tada je $(\pi_1 \circ \pi_2)(4) = \pi_1 \left(\pi_2(4)\right) = \pi_1 (4) = 4$ što ispunjava uslov zatvorenosti.

Pošto je $\pi_1 (4) = 4$ sledi da postoji i inverni element tj. $\pi_1{}^{-1}(4) = 4$

Iz Langranžove teoreme dobijamo da je broj različitih levih koseta podgrupe H u grupi G $[G:H] = \frac{|G|}{|H|} = \frac{4!}{3!} = 4$ i $G/H = \{H, g_1H, g_2H, g_3H\}$

Uzmimo za primer transpoziciju (14) koja ne pripada grupi H, pošto $4 \mapsto 1$.

I neka je $H = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\} \leq S_4$

Zadata grupa ispunjava početnu definisanost pošto u ciklusima ne postoji element 4, i „prolaženjem" kroz cikluse element 4 ostaje nepromenjen.

Zatim, pokazaćemo kako izgledaju levi koseti date grupe.

$(14)H = \{(14), (124), (134), (14)(23), (1234), (1324)\}$

$(14)(1) = (14),\ (14)(12) = (124),\quad (14)(13) = (134),\quad (14)(23) = (14)(23),$

$(14)(123) = (1234),\quad (14)(132) = (1324)$

Analogno, dobijamo i:

$(24)H = \{(24), (142), (24)(13), (234), (1423), (1342)\}$

$(34)H = \{(34), (34)(12), (143), (243), (1243), (1432)\}$

Sledeći stav koji želimo proveriti je $aH = bH$ akko $a^{-1}b \in H$

Uzmimo transpoziciju (24) koji takođe ne pripada grupi H i transpoziciju (14)

$(24)H = (14)H$ akko $(24)^{-1}(14) \in H$

$(24)^{-1}(14) = (24)(14) = (24)(41) = (241) = (124) \notin$ H

Iz ovoga smo zaključili da levi koseti nisu jednaki i iz toga sledi da su levi koseti disjunktni skupovi.

I poslednje za ovaj primer želimo da saznamo da li je H normalna podgrupa od G.

Znamo, H je normalna podgrupa od G akko $\forall g \in G: gH = Hg$.

$H(14) = \{(14), (142), (143), (23)(14), (1423), (1432)\}$ i

$(14)H = \{(14), (124), (134), (14), (23), (1234), (1324)\}$

Pošto levi koset i desni koset nisu jednaki iz toga sledi da H nije normalna podgrupa od G.

Definicija 3.13. Dva ciklusa su **disjunktna** ako je presek njihovih nosača prazan skup, tj. ako nemaju zajedničkih elemenata (supp σ ∩ supp τ = ∅).

Lema 3.1. Ako su σ, τ ∈ S_n dva disjunktna ciklusa, onda je στ = τ σ.

Dokaz. Neka je $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pošto je σ i τ disjunktni ciklusi, postoje dve mogućnosti:

• $i \notin$ supp σ i $i \notin$ supp τ . U tom slučaju, σ(i) = i i τ (i) = i, stoga (σ ∘ τ)(i) = σ (i) = i i (τ ∘ σ)(i) = τ (i) = i

• Inače, i je element tačno jednog nosača ciklusa σ ili τ . Bez smanjenja opštosti, pretpostavimo da je $i \notin$ supp σ i $i \in$ supp τ . Tada, σ(i) = i, stoga (τ ∘ σ)(i) = (τ(σ(i)) = τ (i). S druge strane, (σ ∘ τ)(i) = σ(τ (i)). Pošto je τ (i) ∈ supp τ i supp σ ∩ supp τ = ∅, τ (i) ∉ supp σ. Dakle, σ(τ (i)) = τ (i). Stoga ponovno važi (στ)(i) = (τσ)(i). Dakle, ∀i (στ)(i) = (τσ)(i) = i, što pokazuje da važi στ = τ σ.

Primedba 3.1. Svaki ciklus τ ∈ S_n se može prikazati kao proizvod disjunktnih ciklusa.

Primer 3.7.

Kada se rastvori kocka, leva strana Rubikove kocke izgleda ovako:

	u	u	u	
b	l	l	l	f
b	l	l	l	f
b	l	l	l	f
	d	d	d	

Ako se rotira leva strana za pravi ugao, tj. izvede se osnovni potez L, tada leva strana izgleda:

	b	b	b	
d	l	l	l	u
d	l	l	l	u
d	l	l	l	u
	f	f	f	

Dakle L$(luf) = lfd$: ugaona kockica luf premestila se u prostor lfd, tj. na mesto gde je pre bila ugaona kockica lfd.

To vredi i za ostale ugaone kockice: $L(lfd) = ldb$, $L(ldb) = lbu$, $L(lbu) = luf$.

Slično se mogu opisati i rubne kockice: $L(lf) = ld$, $L(ld) = lb$, $L(lb) = lu$.

Kraće se piše: $L = (luf\ lfd\ ldb\ lbu)\ (lf\ ld\ lb\ lu)$

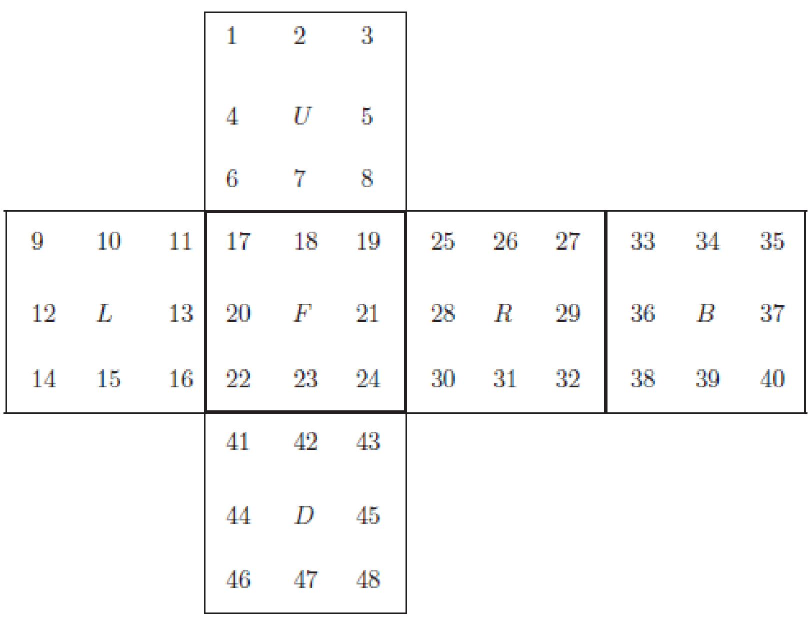
Pritom, $(luf\ lfd\ ldb\ lbu)$ i $(lf\ ld\ lb\ lu)$ jesu ciklusi ili ciklične permutacije koje su ujedno i dva disjunktna ciklusa.

Primer 3.10. Potez $FFLL$ se može zapisati kao permutacija :

$FFLL = (df\ uf)\ (dl\ ul)\ (bl\ lf\ fr)\ (dbl\ luf\ frd)$

Primer 3.11. Neka je C grupa rubikove kocke, tj. $C = < R, L, U, D, F, B > \leq S_{48}$

Pošto u Rubikovoj kocki postoje 54 strana kockica od toga 6 su fiksirana, pa ostane 48 pokretnih strana kockica. U ovom primeru Rubikovu kocku ćemo posmatrati kao na slici.



Uz pomoć toga ćemo lako pokazati da je red grupe $< R^2U^2 >$ jednak 6.

Prvo ćemo ispisati kako se premeštaju dati brojevi okretanjem desne strane kocke i okretanjem leve strane kocke.

$R = (25, 27, 32, 30\ )(26, 29, 31, 28)(3, 38, 43, 19)(5, 36, 45, 21)(8, 33, 48, 24)$

$R^2 = (25,32)(27, 30)(26, 31)(29, 28)(3, 43)(38, 19)(5, 45)(36, 21)(8, 48)(33, 24)$

$U = (1, 3, 8, 6)(2, 5, 7, 4)(9, 33, 25, 17)(10, 34, 26, 18)(11, 35, 27, 19)$

$U^2 = (1,8\ )(3, 6)(2, 7)(5, 4)(9, 25)(33, 17)(10, 26)(34, 18)(11, 27)(35, 19)$

Okretanjem desne strane za 180 stepeni a zatim leve strane za 180 stepeni dobijemo sledeće cikluse:

$R^2U^2 = (1, 8, 48)(2, 7)(3, 43, 6)(4, 5, 45)(9, 25, 32)(10, 26, 31)(11, 27, 30)(17, 33, 24)$
$(18, 34)(19, 38, 35)(21,36)(28, 29)$

Red $R^2U^2 = NZS(3, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 2, 2) = 6$

3.4.1. Parnost

Ciklus dužine 2 se zove transpozicija.

Propozicija 3.2. Svaka permutacija u S_n se može zapisati kao konačan proizvod transpozicija.

Primer 3.12. Osnovni potez L se može prikazati kao proizvod 6 transpozicija:

$L = (luf\ lfd\ ldb\ lbu)\ (lf\ ld\ lb\ lu) = (luf\ \ lfd)(\ lfd\ \ ldb)(\ ldb\ \ lbu)(\ lf\ ld)(\ ld\ lb)(\ lb\ lu)$

Parnost ciklusa dužine n je određen brojem transpozicija od kojih je sastavljen. Ako je n paran, potreban je neparan broj transpozicija, pa je permutacija neparna. Ako je n neparan, potreban je paran broj transpozicija, pa je permutacija parna.

Važna činjenica o parnosti grupe Rubikove kocke koja ima veliku ulogu prilikom rešavanja kocke glasi:

Teorema 3.1. Svaki element grupe Rubikove kocke zadaje parnu permutaciju na skupu svih kockica.

Dokaz.

Na primer, permutacija osnovnog poteza F glasi:

$F = (fl\ fu\ fr\ fd)(flu\ fur\ frd\ fdl) = (fl\ fu)(fu\ fr)(fr\ fd)(flu\ fur)\ (fur\ frd)(frd\ fdl).$

Pošto se svaki ciklus dužine 4 može zapisati kao tri 2-ciklusa, za osnovni potez dobije se šest 2-ciklusa, pa je parnost svakog osnovnog poteza paran. Pošto je svaki element grupe Rubikove kocke proizvod osnovnih poteza, a svaki od njih je parna permutacija, onda je i svaki element te grupe parna permutacija. □

Budući da je svaka permutacija Rubikove kocke parna, ne postoji potez koji će promeniti položaj samo jednom paru kockica. To znači, ako se dve kockice ne nalaze u svom početnom položaju, onda mora postojati još kockica koje se ne nalaze u svom početnom položaju.

3.5. Homomorfizam grupa

Definicija 3.14. Neka su $(G, *)$ i $(H, \#)$ grupe. Homomorfizam grupe G u grupu H je preslikavanje $\varphi : G \rightarrow H$ za koje važi $\varphi(a * b) = \varphi(a) \# \varphi(b)$, za sve $a, b \in G$.

Homomorfizam je preslikavanje među algebarskim strukturama koje se može jednostavno prikazati na Rubikovoj kocki.

Primer 3.13.

- Može se definisati preslikavanje $\varphi_{\text{ugao}} : G \rightarrow S_8$ na sledeći način: svaki potez iz G preuređuje ugaone kockice te je na takav način definisana permutacija 8 neorijentiranih ugaonih kockica. Znači, svaki $M \in G$ definiše neku permutaciju $\sigma \in S_8$. Neka je $\varphi_{\text{ugao}}(M) = \sigma$, tj. $\varphi_{\text{ugao}}(M)$ je element od S_8 koji opisuje šta M radi s neorijentisanim ugaonim kockicama. Na primer, iz prethodnog primera može se videti da se L sastoji od dva disjunktna ciklusa $(lfu\ lfd\ ldb\ lbu)$ i $(lu\ lf\ ld\ lb)$.
  Stoga, $\varphi_{\text{ugao}}(L) = (lfu\ lfd\ ldb\ lbu)$
- Slično se može definisati homomorfizam $\varphi_{\text{ivica}} : G \rightarrow S_{12}$ tako da je $\varphi_{\text{ivica}}(M)$ element od S_{12} koji opisuje šta M radi sa neorijentisanim ivičnim kockicama. Na primer, $\varphi_{\text{ivica}}(L) = (lu\ lf\ ld\ lb)$. Konačno, može se definisati homomorfizam kocke $\varphi_{\text{kocka}} : G \rightarrow S_{20}$ koja opisuje permutacije svih 20 neorijentisanih ivičnih i ugaonih kockica. Na primer, $\varphi_{\text{kocka}}(L) = (lfu\ lfd\ ldb\ lbu)(lu\ lf\ ld\ lb)$

Definicija 3.15. Jezgro $Ker(\varphi)$ homomorfizma φ grupe G u grupu H je skup svih elemenata iz G koje φ preslikava u neutralni element 1_{H} grupe H, tj. $Ker(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = 1_{\mathrm{H}}\}$.

Primer 3.14. Jezgro homomorfizma $\varphi_{\mathrm{kocka}} : G \to S_{20}$ se sastoji od svih poteza na Rubikovoj kocki koji ne menjaju položaj niti jedne kockice, tj. $Ker(\varphi_{\mathrm{kocka}})$ se sastoji od svih poteza koji deluju na orijentaciju, a ne na položaj kockica. Taj skup je vrlo važan jer ako se sve kockice nalaze na pravom položaju, ali nemaju pravilnu orijentaciju, treba samo naći prave poteze iz tog skupa koji će uticati samo na orijentaciju kockica.

Na temelju definisanih pojmova: parnost permutacija i homomorfizam grupa može se opisati još jedan pojam vezan za grupu Rubikove kocke, a to je grupa svih parnih permutacija (eng. alternating group). Taj pojam će biti važan prilikom dokazivanja valjanosti konfiguracija Rubikove kocke. Proizvod parne i neparne permutacije je neparna permutacija. Proizvod dveju parnih ili dveju neparnih permutacija je parna permutacija. Inverz parne permutacije je paran, a inverz neparne je neparna permutacija. Stoga, može se definisati podgrupa od S_n koja se sastoji od svih parnih permutacija. Ta grupa se zove alternirajuća grupa i označava se sa A_n.

Primer 3.15. Neka je $M \in G$ jedan od osnovnih poteza: D, U, L, R, F, B. Tada, $\varphi_{\mathrm{kocka}}(M)$ je proizvod 2 4-ciklusa. Pošto je svaki 4-ciklus neparan, proizvod 2 4-ciklusa je paran. Stoga, preslikavanje $\varphi_{\mathrm{kocka}}(M)$ je parno. Pošto svi osnovni potezi generišu skup G, to znači da je preslikavanje za sve M iz grupe G $\varphi_{\mathrm{kocka}}(M)$ parno, tj. $\varphi_{\mathrm{kocka}}(M) \in A_{20}$.
Stoga, $\varphi_{\mathrm{kocka}}(M) = \varphi_{\mathrm{ugao}}(M)\, \varphi_{\mathrm{ivica}}(M)$, pa ili su $\varphi_{\mathrm{ugao}}(M)$ i $\varphi_{\mathrm{ivica}}(M)$ parni, ili su oba neparni, tj. $\varphi_{\mathrm{ugao}}(M)$ i $\varphi_{\mathrm{ivica}}(M)$ imaju isti predznak što je vrlo važna činjenica za dokazivanje koja je konfiguracija Rubikove kocke valjana.

3.6. Dejstvo grupe

Dejstvo grupe je još jedan u nizu matematičkih pojmova koji se na jednostavan način može razumeti uz pomoć Rubikove kocke.

Definicija 3.16. (Desno) delovanje grupe $(G, *)$ na neprazni skup X je preslikavanje $X \times G \rightarrow X$ koje zadovoljava sledeća svojstva:

1. $\forall g_1, g_2 \in G, x \in X, \quad (x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 * g_2)$
2. $x \cdot e = x \quad \forall x \in X$ (e je neutralni element grupe G).

Primer 3.16. Neka je G grupa Rubikove kocke i C jedna konfiguracija Rubikove kocke. Tada važi:

1. Nakon što se primeni potez M_1, dobije se nova konfiguracija Rubikove kocke $C \cdot M_1$. Nakon primene poteza M_2, konfiguracija postaje $(C \cdot M_1) \cdot M_2$. Znači, na početnu konfiguraciju primenjen je potez $M_1 M_2$. Drugi način pisanja nove konfiguracije je $C \cdot (M_1 M_2)$. Stoga je $(C \cdot M_1) \cdot M_2 = C \cdot (M_1 M_2)$, za sve konfiguracije C i poteze $M_1 M_2 \in G$.
2. Ako se ne primeni niti jedan potez (neutralni element $e \in G$), tada se konfiguracija ne menja, tj. $C \cdot e = C$.

Znači, elementi grupe Rubikove kocke (elementi su potezi na Rubikovoj kocki) deluju na elemente nekog skupa (skup konfiguracija Rubikove kocke).

Primedba 3.2. Ako postoji delovanje grupe G na skup X, onda se kaže „G deluje na X".

Primer 3.17. Grupa G deluje na skup svih konfiguracija Rubikove kocke (skup sadrži i konfiguracije koji nisu valjane).

Definicija 3.17. Neka G deluje na skup X. Orbita od $x \in X$ je skup $\{x \cdot g : g \in G\}$.

Primer 3.18. G deluje na skup svih konfiguracija Rubikove kocke. Orbita početne konfiguracije je skup svih valjanih konfiguracija Rubikove kocke.

3.7. Konfiguracije Rubikove kocke

Rubikova kocka je "jednostavna" slagalica iza koje stoji "ozbiljna" matematika. No, glavni cilj ove slagalice je iz bilo koje konfiguracije, skupom poteza se vratiti u početni položaj, tj. u položaj gde je svaka strana kocke u jednoj boji. Konfiguracije Rubikove kocke određene su sa 4 podatka:

• položaj ivičnih kockica
• položaj ugaonih kockica
• orijentacija ivičnih kockica
• orijentacija ugaonih kockica.

Prvi podatak se može opisati kao preslikavanje σ ∈ S_8 koje premešta ugaone kockice iz svog početnog položaja u neki novi položaj. Drugi podatak se može opisati kao preslikavanje τ ∈ S_{12} koje premešta ivične kockice u novi položaj. Za treći i četvrti podatak važna je samo pravilna notacija. Osnovna ideja je zapamtiti notaciju početne orijentacije i zapisati na koji se način notacija nove orijentacije razlikuje od notacije početne orijentacije.

Notacija orijentacija ugaonih kockica se može opisati na sledeći način: Svaka ugaona kockica ima 3 moguće orijentacije koje se mogu numerisati brojevima 0, 1 i 2.

Neka se Rubikova kocka nalazi u početnom položaju i neka jedna strana svakog ugaonog prostora sadrži broj kao što sledi (*Slika 3.1.*):

1 se nalazi na u strani ufl prostora

2 se nalazi na u strani urf prostora

3 se nalazi na u strani ubr prostora

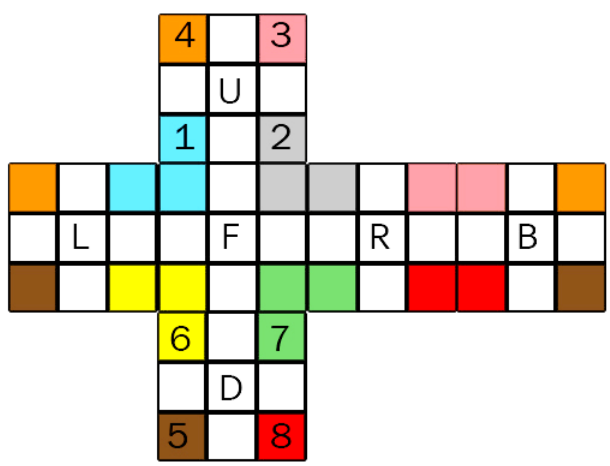
4 se nalazi na u strani ulb prostora

5 se nalazi na d strani dbl prostora

6 se nalazi na d strani dlf prostora

7 se nalazi na d strani dfr prostora

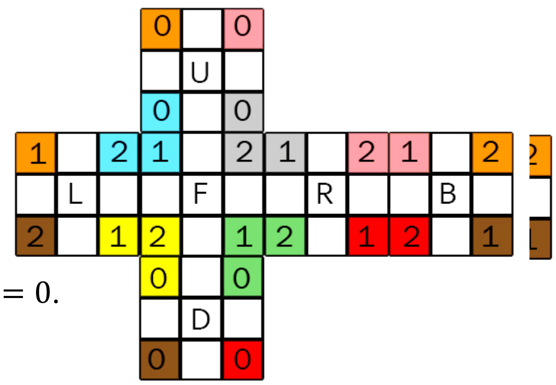
8 se nalazi na d strani drb prostora



Slika 3.1. Numeracija strana ugaonih kockica

Znači, svaki ugaoni prostor ima numerisanu jednu stranu. Stoga, svakoj ugaonoj kockici jedna strana leži na numerisanoj strani ugaonog prostora. Ta strana neka je označena sa 0. Sledeće dve strane, gledajući u smeru kretanja kazaljke na satu, neka su označene sa 1 i 2. (*Slika 3.2.*) Tada se na svakoj strani ugaonih kockica nalazi broj. Ako se Rubikova kocka nalazi u bilo kojoj konfiguraciji, orijentacija ugaonih kockica se opisuje na sledeći način: za svaki i između 1 i 8, treba naći stranu ugaonog prostora koja je označena sa i, pritom x_i označava broj koji se nalazi na strani ugaone kockice koja „živi" na toj strani ugaonog prostora. Stoga, orijentacija ugaonih kockica se označava sa uređenom 8-orkom $x = (x_1, \dots, x_8)$. Budući da ugaona kockica koja je triput zaokrenuta ima istu orijentaciju kao i ugaona kockica koja je nula puta zaokrenuta, x_i se može promatrati kao element skupa celih brojeva modula 3 (element iz $\mathbb{Z}_3$), tj. x je uređena 8-orka elemenata iz $\mathbb{Z}_3$.

Primer 3.19. Treba naći x nakon što se primeni osnovni potez L na kocku koja se nalazi u početnom položaju. Kad se izvrši osnovni potez L, ugaone kockice na desnoj strani ostanu netaknute pa je $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_7 = 0$, $x_8 = 0$. Dok su $x_1 = 2$, $x_4 = 1$, $x_5 = 2$, $x_6 = 1$ tj. $x = (2, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0)$

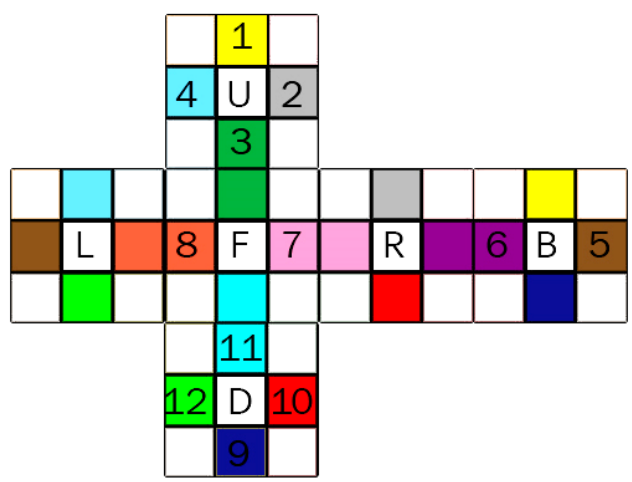


Slika 3.2. Numeracija ugaonih kockica

Na isti način se može opisati orijentacija ivičnih kockica.

Ivični prostori neka budu označeni na sledeći način(Slika 3.3):

1 se nalazi na u strani ub prostora
2 se nalazi na u strani ur prostora
3 se nalazi na u strani uf prostora
4 se nalazi na u strani ul prostora
5 se nalazi na b strani lb prostora
6 se nalazi na b strani rb prostora
7 se nalazi na f strani rf prostora
8 se nalazi na f strani lf prostora
9 se nalazi na d strani db prostora
10 se nalazi na d strani dr prostora
11 se nalazi na d strani df prostora
12 se nalazi na d strani dl prostora

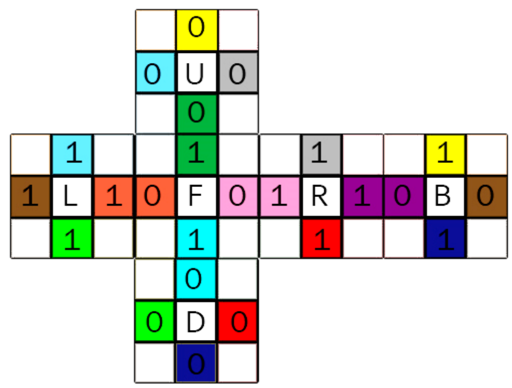


Slika 3.3. Numeracija strana ivičnih kockica

Svaka ivična kockica ima stranu koja leži na numerisanoj strani ivičnog prostora. Ta strana označena je sa 0, a druga strana ivične kockice označena sa 1 (*Slika 3.4.*). Stoga, y_i je broj koji se nalazi na strani ivične kockice koja se nalazi na strani ivičnog prostora numerisanog sa i.
To definiše $y \in \mathbb{Z}_2{}^{12}$.

Primer 3.20. Treba naći y nakon što se primeni osnovni potez F na kocku koja se nalazi u početnom položaju.
Kada se izvrši osnovni potez F, ivične kockice na zadnjoj strani ostanu netaknute pa je $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_4 = 0$, $y_5 = 0$, $y_6 = 0$, $y_9 = 0$, $y_{10} = 0$, $y_{12} = 0$. Dok je uf, rf, df, lf prostor promenjen, tj $y_3 = 1$, $y_7 = 1$, $y_8 = 1$, $y_{11} = 1$. Stoga je $y = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0)$

Dakle, bilo koja konfiguracija Rubikove kocke se može opisati sa $\sigma \in S_8$, $\tau \in S_{12}$, $x \in \mathbb{Z}_3^8$ i $y \in \mathbb{Z}_2^{12}$. Označavaćemo konfiguracije kao uređene četvorke (σ, τ, x, y).



Slika 3.4.Numeracija ivičnih kockica

3.8. Direktan i poludirektan proizvod

Definicija 3.18. Neka su $(G_1,*_1)$, $(G_2,*_2), \dots,$ $(G_n,*_n)$ grupe. Definišemo direktan proizvod $(P,*)$ ovih grupa sa:

- $P := G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$;
- $(g_1, g_2, \dots, g_n) * (g_1', g_2', \dots, g_n') := (g_1 *_1 g_1', g_2 *_2 g_2', \dots, g_n *_n g_n')$.

Teorema 3.2. Neka je G grupa, i neka su H i N podgrupe grupe G.
Ako su ispunjeni sledeći uslovi:

- $N \cdot H = G$
- $N \cap H = \{e\}$, gde je e neutralni element grupe G
- $(\forall x \in N)(\forall y \in H)$ važi $xy = yx$

Tada je $G \cong N \times H$ i homomorfizam je zadat sa : $f: N \times H \to G$, $f(x, y) := x \cdot y$

Teorema 3.3. Neka je G grupa, i neka su H i N podgrupe grupe G.
Grupa G je unutrašnji poludirektan proizvod grupa N i H ako je :

- $N \cdot H = G$
- $N \cap H = \{e\}$, gde je e neutralni element grupe G
- N normalna podgrupa grupe G

Tada postoji bijekcija između G i $N \times H$ zadata sa $(x, y) := x \cdot y$, ali nije homomorfizam.
Ako se promeni operacija u $N \times H$ na sledeći način: $(n, h) * (n_1, h_1) := (nhn_1h^{-1}, hh_1)$ onda je bijekcija izomorfizam.

Dokaz:

Bijekcija:
f je "na" jer je $G = N \cdot H = \{h \cdot n : h \in H, n \in N\}$
f je "1-1": pretpostavimo da je $f(n, h) = f(\mathrm{n}_1, \mathrm{h}_1)$

$$(n_1)^{-1}/ \quad nh = \mathrm{n}_1\mathrm{h}_1$$

$$(n_1)^{-1}nh = (n_1)^{-1}n_1\mathrm{h}_1$$

$$(n_1)^{-1}nh = \mathrm{h}_1 \quad /h^{-1}$$

$$(n_1)^{-1}nhh^{-1} = \mathrm{h}_1h^{-1}$$

$$N \ni (n_1)^{-1}n = \mathrm{h}_1h^{-1} \in H$$

$$(n_1)^{-1}n = \mathrm{h}_1h^{-1} \in N \cap H = \{e\}$$

$$n_1 = n, \qquad \mathrm{h}_1 = h$$

$$\text{tj. } (n, \mathrm{h}) = (n_1, \mathrm{h}_1)$$

Homomorfizam: Treba dokazati $f\big((n, h)(n_1, h_1)\big) = f(n, h)f(n_1, h_1)$

Prvo ćemo ispisati kako izgleda leva strana:
$f\big((n, h)(n_1, h_1)\big) = f(nhn_1h^{-1}, hh_1) = nhn_1h^{-1}hh_1 = nhn_1h_1$
Pošto je i desna strana: $f(n, h)f(n_1, h_1) = nhn_1h_1$ sledi da je funkcija homomorfizam.
Lako zaključujemo da je $N \times H$ grupa nad datom operacijom jer važi asocijativnost, neutralni element grupe je (e, e) a inverzan element je $(h^{-1}n^{-1}h, h^{-1})$.

Primer 3.21. Diedarske grupe D_n predstavljaju tipičan primer poludirektnih proizvoda Diedarska grupa je grupa simetrija pravilnog n-tougla. Ta grupa sadrži $2n$ elemenata.

$D_n = < \sigma, \rho \mid \sigma^2 = \varepsilon, \rho^n = \varepsilon, \sigma\rho = \rho^{\,n-1}\sigma >$
gde je $\sigma -$ refleksija, $\rho -$rotacija oko centra za ugao $\frac{2\pi}{n}$.
Neka je $A = < \sigma >$ i $B = < \rho >$. Kako je $[D_n : B] = 2$, sledi B normalna podgrupa grupe D_n. Po samoj definiciji diedarskih grupa važi $D_n = AB$, a očito je $A \cap B = \{\varepsilon\}$. Što znači da je D_n poludirektan proizvod grupa A i B. Kao spoljašnji poludirektni proizvod D_n se realizuje kao poludirektni proizvod grupa $\mathbb{Z}_2$ i $\mathbb{Z}_n$(imajući u vidu da je $A \cong \mathbb{Z}_2$ i B $\cong \mathbb{Z}_n$).

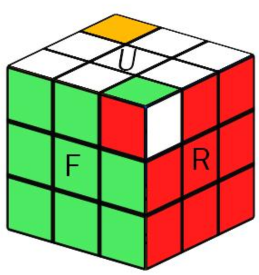
Primer 3.22. Neka je $f_{a,b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana sa $f_{a,b}(x) = ax + b$ gde su a i b realni brojevi i $a \neq 0$. Neka je $A = \left\{f_{a,b}\colon a \in \mathbb{R}^{\times}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}\right\}$, $T = \{f_{1,b}\colon \mathrm{b} \in \mathbb{R}\}$, $L = \left\{f_{a,0}\colon a \in \mathbb{R}^{\times}\right\}$ gde su $\mathbb{R}^{\times} := (\mathbb{R} \setminus \{0\},\cdot)$, $\mathbb{R} := (\mathbb{R}, +)$ grupe . Tada je A poludirektan proizvod grupa T i L, gde T predstavlja podgrupu translacija, a L podgrupu linearnih preslikavanja.
Kada se izvrši kompozicija zadate funkcije dobija se sledeće : $(f_{a,b} \circ f_{c,d})(x) = f_{ac,ad+b}$
Na osnovu definicija lako je pokazati da su T i L podgrupe grupe A, zatim da je T normalna podgrupa grupe A, i ostale uslove za poludirektan proizvod kao što je $TL = A$ i $T \cap L = \{f_{1,0}\}$, gde je $f_{1,0}$ neutralni element grupe A.
Primer 3.23. Dokazati da je grupa S_3 poludirektan proizvod grupa C_3 i C_2.

Neka je $p = (3\ 1\ 2)$ i $q = (2\ 1\ 3)$, $A = < p >$, $B = < q >$.
Tada je A ciklična grupa reda 3, B ciklična grupa reda 2, A je normalna podgrupa grupe S_3 , $A \cap B = < 1 >$ i $AB = S_3$.

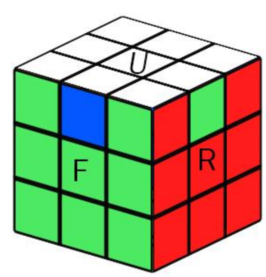
Primer 3.24. S_n je poludirektan proizvod grupa A_n i C_2.

Neka je $H = < (1\ 2) >$. Tada $A_n \lhd S_n$, $A_n \cap H = < 1 >$ $A_n H = S_n$ i
H je ciklična grupa reda 2.

Teorema 3.4. Neka je G_o podgrupa grupe G koju čine potezi koji ne menjaju položaj kockica već samo njihovu orijentaciju (*Slika 3.5.*). Neka je G_p podgrupa od G koju čine potezi kod kojih se ne menja orijentacija već samo položaj kockica (*Slika 3.6.*). Tada je grupa Rubikove kocke(G) poludirektan proizvod podgrupa G_o i G_p.



Slika 3.5.



Slika 3.6.

Dokaz. Da bismo pokazali da je G_o normalna podgrupa grupe G , dovoljno je za svako $h \in G_o$ proveriti $RhR^{-1} \in G_o$, $LhL^{-1} \in G_o$, $DhD^{-1} \in G_o$, $UhU^{-1} \in G_o$, $FhF^{-1} \in G_o$, $BhB^{-1} \in G_o$. Objasnićemo za $UhU^{-1} \in G_o$, ostalo je analogno.

Ako $t = UhU^{-1}$ permutuje položaj nekih kockica, treba pokazati da i h permutuje te kockice.

1) Ako t permutuje "donje" kockice onda i $h = U^{-1}tU$ permutuje te iste kockice, jer ih U ne pomera. Kontradikcija sa $h \epsilon G_o$.

2) Ako je t potez koji „slika” neku „gornju” kockicu u neku drugu, na primer $fru \to bru$ onda h zameni $l \to fur$. Na sličan način dobijemo kontradikciju sa $h \epsilon G_o$ i u drugim slučajevima.
Očigledno je da je $G_o \cap G_p$ trivijalna podgrupa.

Ostaje da proverimo da je $G = G_p \cdot G_o$.

$\Leftarrow$: Zbog **teorema 3.3** znamo da proizvod dve podgrupe je podskup grupe tj. $G_p \cdot G_o \subset$ G.

$\Rightarrow$: Neka je $g \in G$ i neka je e neutralni element grupe G. Za dokazivanje $G \subset G_p \cdot G_o$ posmatrajmo 4 slučajeva:

1) Neka je g element koji ne menja orijentaciju i položaj kockica, tada je g zapravo neutralni element grupe G i $e \epsilon G_p \cdot G_o$.
2) Neka je g element koji menja orijentaciju ali ne i položaj kockica,tada $g \epsilon G_o$, pošto $e \epsilon G_p$, $g = e \cdot g \epsilon G_p \cdot G_0$.
3) Neka je g element koji menja položaj ali ne i orijentaciju kockica,tada $g \epsilon G_p$,pošto $e \epsilon G_o$ i $g = g \cdot e \epsilon G_p \cdot G_0$.
4) Neka je g element koji menja orijentaciju i položaj kockica tada postoji $g_p \epsilon G_p$ koji permutuje kockice na isti način kao element g ali ne menja orijentaciju. Tada je ${g_p}^{-1}g$ element koji ne pomera kockice samo orijentaciju tj. ${g_p}^{-1}g \epsilon G_o$ što znači da je
$$ {g_p}^{-1}g = g_o $$
$$ g = g_p \cdot g_o $$
$$ g \epsilon G_p \cdot G_0 $$
$\square$

Pokažimo da je $G_o \cong {\mathbb{Z}_3}^7 \times {\mathbb{Z}_2}^{11}$ pri čemu ćemo ${\mathbb{Z}_3}^7$ identifikovati sa podgrupom koju čine osmorke elementa iz $\mathbb{Z}_3$ čiji zbir je jednak nuli. Analogno za ${\mathbb{Z}_2}^{11}$. Koncentrišimo se na ivice. Recimo, kockice na pozicijama fu, ru. Potez koji promeni orijentaciju te dve ivične kockice može da se iskoristi na razne načine. Na primer, ako želimo da promenimo orijentacije kockicama fu i lu, onda je dovoljno da kockicu zarotiramo pomoću U, izvršimo potez h i onda uradimo U^{-1}. Tako smo promenili te kockice. Pomoću više takvih poteza možemo da izvršimo sve moguće promene. Taj potez odgovara nekom nizu koji ima dve jedinice i sve ostalo nule. To zavisi od toga kako obeležimo kockice, ali neka je recimo to niz $(0, 1, 1, 0, \ldots, 0)$. Ako se izvrši transformacija $U^{-1}hU$, gde je h taj potez, ta transformacija odgovara nekoj drugoj dvanaestorci (11 elemenata dvanaestorke su proizvoljni, a onda poslednji se bira tako da je zbir 0). Pošto je jedna od kockica ista, to je recimo element $(0, 0, 1, 1, 0, \ldots, 0)$. Neka druga konjugacija može dovesti do elementa $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, \ldots, 0)$. Tako možemo da dobijemo sve elemente iz naše podgrupe izomorfne $\mathbb{Z}_2^{12}$ koji imaju tačno dve jedinice. Čak je dovoljno da dobijemo samo one kod kojih su jedinice susedni.

Pokažimo da se tako mogu dobiti sve dvanaestorke. Na primer, da bismo dobili element $(1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$, primetimo da je on zbir sledećih elemenata:

$$ (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) $$
$$ (0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) $$
$$ (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) $$
$$ (0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) $$
$$ (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) $$
$$ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0) $$
$$ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1) $$

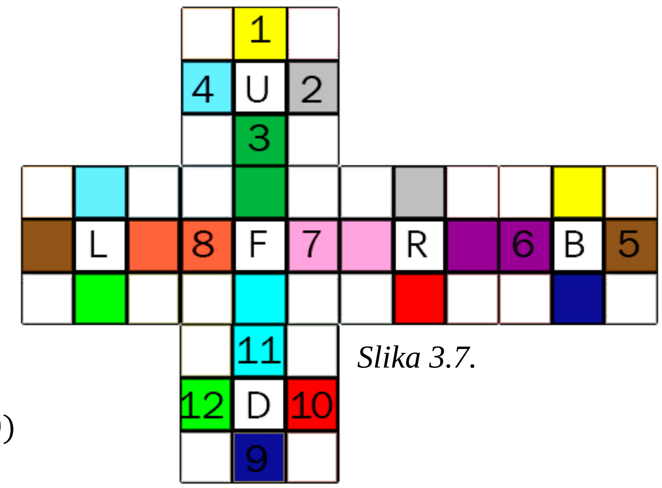
Dakle, svi elementi se dobiju od tih koji imaju samo dve jedinice. A oni se mogu dobiti pomoću tog osnovnog poteza - pomoću konjugacija. Na taj način dobijamo celu podgrupu koja je izomorfna sa $\mathbb{Z}_2^{11}$. Slično važi i za „preturanje” ugaonih kockica. Ovde posmatramo osmorke 0, 1, 2, čiji je zbir 0. To je podgrupa od $\mathbb{Z}_3^{8}$ koja je izomorfna $\mathbb{Z}_3^{7}$.

Kako se „preturanje” ugaonih kockica vrši nezavisno od „preturanja” ivica, G_o možemo predstaviti kao proizvod te dve grupe tj. $G_o \cong \mathbb{Z}_3^{7} \times \mathbb{Z}_2^{11}$.

Dok je podgrupa G_p poludirektan proizvod grupa $A_8 \times A_{12}$ i $\mathbb{Z}_2$, gde je $A_8 \times A_{12}$ normalna podgrupa grupe G_p.

Dokaz za A_{12}

Obeležimo ivice na sledeći način(*Slika 3.7.*):



Slika 3.7.

Neka je $H = {M_R}^2 U^{-1} {M_R}^{-1} U^2 M_R U^{-1} {M_R}^2$ potez, gde M_R -označava okret srednjeg dela koji je paralelan s desnom stranom u smeru kazaljke na satu za 90° . Primenom poteza H dobijamo permutovanje sledećih ivičnih kockica $uf \rightarrow ul \rightarrow ur$ tj. tricikl (342).

Na osnovu poteza H, dobijamo sledeće tricikle:

Donja strana: $(11\ 10\ 9), (10\ 9\ 12), (9\ 12\ 11), (12\ 11\ 10)$

Prednja strana: $(11\ 8\ 3), (8\ 3\ 7), (3\ 7\ 11), (7\ 11\ 8)$

Zadnja strana: $(9\ 6\ 1), (6\ 1\ 5), (\ 5\ 9\ 6), (1\ 5\ 9)$

Gornja strana: $(123), (234), (341), (412)$

Znamo da svaki tricikl možemo predstaviti pomoću tricikala oblika (12∗), $* \in \{a, b, c\}$
$(abc) = (12a)(12a)(12c)(12a)(12b)(12b)(12a)(12b)$.
Pa je samo potrebno pokazati da su svi tricikl oblika (12∗) za $* \in \{3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ u G_p.

(123) već imamo

$(124) = (412)$

$(127) = (837)(123)(837)^{-1}$

$(128) = (837)^{-1}(123)(837)$

$(1\ 2\ 11) = (3\ 7\ 11)^{-1}(123)(3\ 7\ 11)$

$(1\ 2\ 10) = (11\ 10\ 9)(1\ 2\ 11)(11\ 10\ 9)^{-1}$

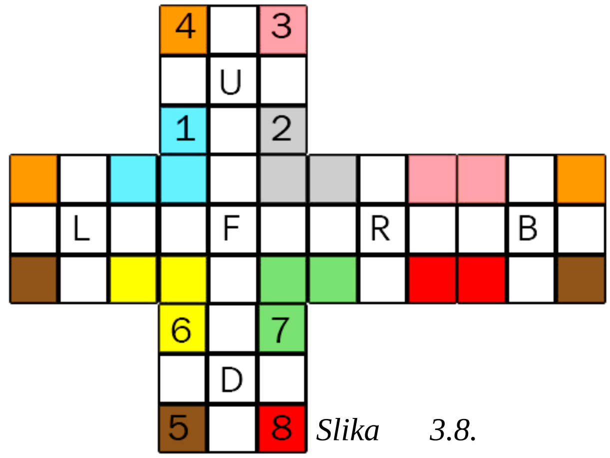
$(129) = (11\ 10\ 9)^{-1}(1\ 2\ 11)(11\ 10\ 9)$

$(1\ 2\ 12) = (12\ 11\ 10)^{-1}(1\ 2\ 11)(12\ 11\ 10)$

$(126) = (596)(129)(596)^{-1}$

$(125) = (596)^{-1}(129)(596)$

Dokaz za A_8



Slika 3.8.

Obeležimo ugaone kockice na sledeći način(*Slika 3.8.*):

Neka je $K = RDR^{-1}URD^{-1}R^{-1}U^{-1}$potez.
Primenom poteza K dobijamo permutovanje sledećih ugaonih kockica $brd \to urb \to ulb$ tj. tricikl (834).

Na osnovu poteza K, dobijamo sledeće tricikle:

Donja strana: $(567), (678), (785), (856)$

Prednja strana: $(612), (127), (276), (761)$

Zadnja strana: $(458), (583), (834), (345)$

Gornja strana: $(143), (432), (321), (214)$

Na sličan način pokazaćemo da tricikl oblika $(12\ *)$ za $* \in \{3,4,5,6,7,8\}$ generišu celu podgrupu od G_p koja se odnosi samo na ugaone kockice.

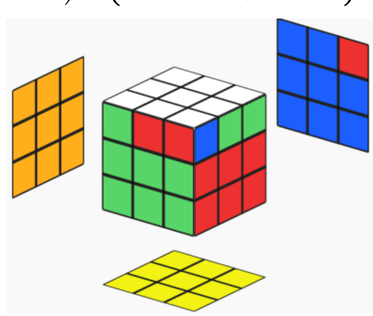
$(125) = (567)(127)(567)^{-1}(126) = (612)$ $\quad$ $(123) = (345)(125)(345)^{-1}$

(127) imamo na prednjoj strani $\quad$ $(124) = (345)(123)(345)^{-1}$

$(128) = (785)^{-1}(125)(785)$

Podgrupa $A_8 \times A_{12}$ je podgrupa od G_p koju čine parnu permutaciju uglova i parnu permutaciju ivica. Zna se da permutacija ivica i uglova moraju biti iste parnosti i označimo sa S element podgrupe G_p (Na primer: $R\,U2\,R'\,U'\,R\,U2\,L'\,U\,R'\,U'\,L$ (*Slika 3.9.*)) koji zameni 2 ivične i 2 ugaone kockice. U ovom slučaju grupa S permutuje kockice $(uf, ur)(fur, urb)$. On generiše grupu reda 2. Svaki element iz G_p ili je u podgrupi $A_8 \times A_{12}$ ili je proizvod nekog elementa iz podgrupe $A_8 \times A_{12}$ i S. Stoga je G_p poludirektan proizvod grupa $A_8 \times A_{12}$ i S.

Dakle, grupa Rubikove kocke(G) je poludirektan proizvod podgrupa G_o i G_p,
tj. poludirektan proizvod $\left(\mathbb{Z}_3^7 \times \mathbb{Z}_2^{11}\right) \rtimes \left(\left(\mathrm{A}_8 \times \mathrm{A}_{12}\right) \rtimes \mathbb{Z}_2\right)$.



Slika 3.9.

4. PRETHODNI POKUŠAJI

U martu 1970. godine, Larry Nichols je izumeo 2×2×2 "Slagalicu sa rotirajućim delovima u grupama" i podneo kanadsku prijavu patenta za to. Nicholsova kocka je držana zajedno pomoću magneta. Nicholsu je odobren U.S. Patent 3.655.201, 11. aprila 1972. godine, dve godine pre nego što je Rubik izumeo svoju kocku. Nichols je svoj patent dodelio svom poslodavcu Moleculon Research Corp., koji je tužio Ideal 1982. godine. 1984. godine, Ideal je izgubio zbog povrede patenta, nakon čega su uložili žalbu. 1986. godine, apelacioni sud je potvrdio presudu da je Rubikova 2×2×2 džepna kocka narušila Nicholsov patent, ali je ukinuo presudu za Rubikovu 3×3×3 kocku.

9. aprila 1970. godine, Frank Fox je patentirao "Spherical 3×3×3". Svoj UK patent (1344259) je dobio 16. januara 1974. godine.

Čak i dok je prijava Rubikovog patenta bila u obradi, Terutoshi Ishigi, samouki inženjer i vlasnik železare u blizini Tokija, podneo je prijavu za japanski patent gotovo identičnog mehanizma, koji je i dobio 1976. godine (Japanski patent izdanje JP55-008192). Do 1999. godine, kada je izvršena izmena japanskog zakona o patentima, ured za japanske patente je odobravao one koji su bili neobelodanjeni u Japanu, bez potrebe da budu novitet u svetu. Stoga, u to vreme Ishigijev patent je uopšteno prihvaćen kao nezavisan novi izum. Rubik je prijavio još neke patente 1980. godine, uključujući i drugi mađarski patent 28. oktobra. U Sjedinjenim Američkim Državama, Rubik je dobio U.S. 4.378.116, 29. marta 1983, za svoju kocku. Ovaj patent je istekao 2000. godine.

5. MEHANIKA

Mere standardne Rubikove kocke su 5,7 cm na svakoj strani. Slagalica se sastoji od dvadeset šest jedinstvenih minijaturnih kocki, takođe zvanih "kockice". Svaka od njih sadrži skriveno unutrašnje proširenje koje se kači za ostale kockice, što im omogućuje kretanje na različitim mestima. Međutim, centar kocke svakog od šest lica je samo jedna kockica fasade; svih šest su pričvršćene za jezgro mehanizma. One pružaju strukturu za ostale delove da bi stajali i rotirali se.

Dakle, postoji dvadeset delova: jedan jezgreni deo koji drži šest centara kvadrata na mestu, ali im dopušta i da se rotiraju, i dvadeset manjih plastičnih delova koji se uklapaju u formu sklopljene slagalice. Svaki od šest centralnih delova okreće se na šrafu (zatvaraču) koji se drži pomoću centralnog dela, "3-D krst". Opruga između svake glave šrafa i odgovarajućeg dela pritišće deo unutra, tako da kolektivno, čitav sklop ostaje kompletan, ali se i dalje lako može manipulisati. Šraf se može stegnuti ili opustiti da bi se promenio "osećaj" kocke. Novije službene kocke Rubikovog brenda imaju zakovice umesto šrafa tako da se ne mogu podešavati.

Kocka se može rastaviti bez mnogo poteškoća, obično okretanjem gornjeg sloja za 45°, a zatim povlačenjem jedne ivice kocke od druga dva sloja. Prema tome ovo je jednostavan način kako "složiti" kocku tako što je rastavite na delove, a zatim je sastavite u složeno stanje.

Postoji šest centralnih delova koji pokazuju po jedno obojeno lice, dvanaest rubnih delova koji pokazuju po dva obojena lica, i osam ugaonih delova koji pokazuju tri obojena lica. Svaki deo pokazuje jedinstvenu kombinaciju boja, ali sve kombinacije nisu prisutne (na primer, ukoliko su crvena i narandžasta na suprotnim stranama rešene kocke, ne postoji rubni deo sa dve narandžaste i crvene strane). Položaj ovih kockica u odnosu jednih na druge se može menjati okrećući spoljašnju trećinu kocke za 90°, 180° ili 270°, ali položaj obojenih strana u odnosu jednih na druge u stanju završene slagalice se ne može menjati: to je fiksno od relativne pozicije centra kocke. Međutim, postoje i kocke sa alternativnim rasporedom boja; na primer, sa žutom nasuprot zelenoj, plavoj nasuprot beloj, i crvena i narandžasta ostaju nasuprot jedna drugoj.

Douglas Hofstadter, u julu 1982. objavio je članak u *Scientific American*, gde je istakao da kocke mogu biti obojene na takav način da se naglase uglovi i rubovi, umesto lica koja se inače uzimaju za standard kod bojenja; ali ni jedno od ovih alternativnih bojenja nikad nije postalo popularno.

Slika 5: Delimično rastavljena Rubikova kocka

6. REŠENJA I TRIKOVI

Dvadesetak godina su se razvijale tehnike za uspešno i brzo slaganje kocke, rađeni matematički proračuni i analizirane metode kako ovladati šarenim kvadratićima. Prvobitno rešenje bilo je rešenje Erna Rubika, ali se do njega došlo sporo, i mnogi koje je kocka zaintrigirala počeli su da istražuju mogućnosti i načine kako je složiti – za što kraće vreme i sa što manje poteza.

Najbolja metoda za rešavanje Rubikove kocke je po etapama, takozvana sukcesivna metoda. Kocka se rešava u nekoliko koraka, ali sam postupak traje nešto duže. Postoji nekoliko sukcesivnih metoda. Dejvid Singmaster je bio jedan od prvih koji je objavio metodu rešavanja kocke „nivo po nivo". Kasnije je ova metoda usavršena i razvijena je metoda koja podrazumeva da se prva dva sloja kocke rešavaju simultano, što je značajno umanjilo vreme potrebno da se dođe do konačnog rešenja. A Džesika Fridrih je dodala još dva trika – orijentaciju poslednjeg nivoa i permutaciju poslednjeg nivoa. Nova, usavršena metoda nazvana po njoj – Fridrihova metoda – i danas je najrasprostranjenija i najpopularnija metoda u brzom rešavanju Rubikove kocke. Metod, dakle, teče ovako – ukrštanje, prva dva sloja, orijentacija i permutacija.

Postoje i druge rasprostranjene metode. Do razvoja teorija rešenja kocke tokom višedecenijskog proučavanja dolazilo se uz pomoć permutacija i algoritama, a sama kocka je poslužila i u proučavanju određenih matematičkih teorija.

Neke od njih su:

- Petrus metoda - koju je izumeo Lars Petrus, kod koje se prvo rešava 2×2×2 blok, potom se proširuje na 2×2×3 blok.
- ZZ metoda - koja je jedna od najmodernijih, njen izumitelj je Zbigniew Zborowski. Ova tehnika je razvijena na osnovu ergonomije i brzog okretanja kocke.

Među poznatijima su i: Roux metoda, Metoda prvo uglovi, Fish metoda.

Za uspešno savlađivanje početničke metode za rešavanje Rubikove kocke 3×3 potrebno je:

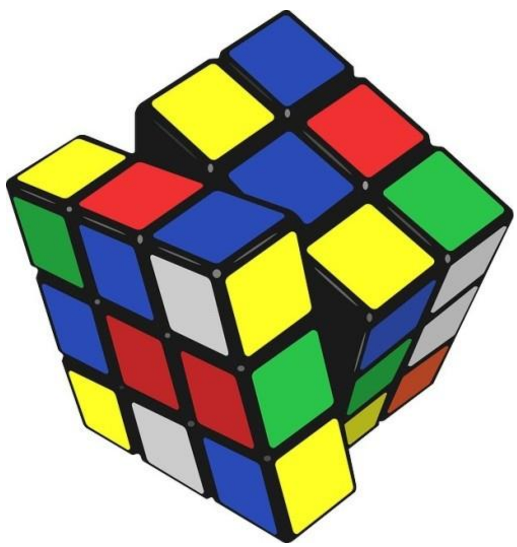
–Solidna Rubikova kocka

– Papir i olovka

– Strpljenje i upornost.

Brzo slaganje kocke podrazumeva i dobru tehniku prstiju i određen način na koji držite kocku. U disciplini speedcubing mnoge finese su usavršene do sitnih detalja, a stručnjaci koji su proučili Rubikovu kocku do idealne postavke boja dolaze nakon 24-28 pokreta.

Na zvaničnom sajtu Rubikove kocke nalazi se uputstvo za njeno rešavanje, zasnovano na popularnim metodama. Tu su i brojni načini poigravanja kockom, razne varijacije na temu.



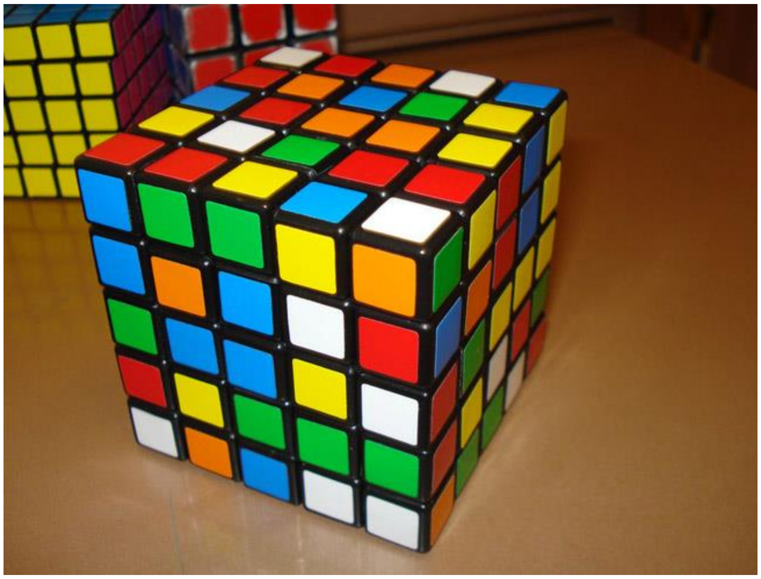
Slika 6: Rubikova kocka koju treba rešiti

7. IMITACIJE

Iskoristivši početne nedostatke kocke, pojavile su se mnoge imitacije i varijacije, od kojih je mnogo možda prekršilo jedan ili više patenata.

Grčki izumitelj Panagiotis Verdes je 2003. godine patentirao metodu kreiranja kocke između 5×5×5, pa do 11×11×11, iako je on tvrdio da je prvobitno mislio o ovoj ideji oko 1985. godine. Do 19. juna 2008. godine, modeli 5×5×5, 6×6×6, i 7×7×7 su u proizvodnji njegove linije "V-kocki". V-kocka se takođe proizvodi u dimenzijama 2×2×2, 3×3×3 i 4×4×4.

Danas, patenti su istekli, tako da mnoge kineske kompanije proizvode kopije, u nekim slučajevima sa poboljšanjima, dizajna Rubika i V-kocke. Najpopularnije su kompanije Bao Daqingo i DaYano (doslovno Velika guska), koje proizvode modele GuHong (doslovno Usamljena labudova guska), ZhanChi (doslovno Širenje krila) i sada PanShi (doslovno Čvrsti kamen), među ostalim. Speedcuberi daju prednost ovim ispred originalnih kocki zbog svoje lakoće pri okretanju.



Slika 7: Rubikova kocka 5×5×5

8. ZAŠTITNI ZNAKOVI

Prema Rubik's Brand Ltd., profesor Erno Rubik drži "autorska prava" za Rubikovu kocku, te im je dao prava na licencu i izvršenje. Međutim autorska prava se ne odnose na ideje, pronalaske ili fizičke objekte, tako da se ova prava pretpostavlja se odnose na uputstva i dijagrame koje je napisao Erno Rubik dok je proizvodio svoje uzorke.

Rubik's Brand Ltd. takođe poseduje registraciju zaštitnog znaka za reč Rubik i Rubikova, te za 2D i 3D vizualizacije slagalice i tvrde da je potrebna dozvola za korišćenje te reči i reprodukcije slika. Ova tvrdnja, međutim, nije podpomognuta zakonom o zaštitnim znakovima, koji samo zabranjuje upotrebu koja bi mogla dovesti potrošača da veruje da je takva upotreba potvrđena od strane nosioca zaštitnog znaka.

Rubikova kocka se uspešno branila protiv nemačkog proizvođača igračaka, koji je želeo sebi priuštiti zaštitni znak Evropske unije. Međutim, sud EU nije dozvolio drugim proizvođačima igračaka da proizvode drugačije oblikovane slagalice koje se rotiraju na sličan način.

9. VARIJACIJE RUBIKOVE KOCKE

Od same pojave Rubikove 3×3×3 kocke do danas pojavile su se brojne varijacije koje su u osnovi slične Rubikovoj kocki:

-Rubik 360 je konstruisana 2009. godine. Sastoji se od 3 prozirne sfere u kojima se nalazi 6 šarenih kuglica. Cilj je da se šarene kuglice iz unutrašnje sfere kroz središnju sferu, koja ima samo dve rupice, premeste u utore iste boje na spoljašnjoj sferi, pritom da su utor i kuglica iste boje. Rubik 360 nije moguće rastaviti pa složiti u željeni položaj te ima samo jedno rešenje.

Slika 8: Rubik 360

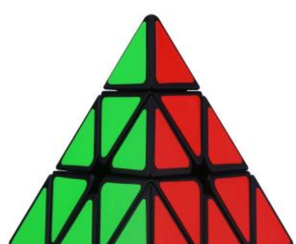
-Sudokocka je varijacija Rubikove 3×3×3 kocke. Sve strane kocke su iste boje i sadrže brojeve od 1 do 9. Slaganje ove kocke teže je od Rubikove kocke jer svaki broj mora biti na tačno odgovarajućoj poziciji, a centralni broj mora takođe biti u odgovarajućoj orijentaciji. Kod Sudokocke postoji više od jednog rešenja.

Slika 9: Sudokocka

-Square One je varijacija originalne Rubikove kocke koja zakretanjem daje telo koje nema oblik kocke. Sastoji se od triju slojeva. Gornji i donji sloj podeljeni su kao pita u 8 delova: 4 ivična koja oblikom podsećaju na zmaja i 4 rubna dela u obliku trougla. Srednji sloj podeljen je u 2 dela duž neke linije jednog od preostala dva sloja. Svaki se sloj može slobodno zakretati.

Slika 10: Square one

-Pyraminx je slagalica u obliku tetraedra. Svaka je strana obojena različitom bojom, te je podeljena na 9 trouglova koji su razdeljeni u 3 sloja: prvi sloj sadrži jedan trougao, drugi sloj sadrži tri trougla, a treći sloj sadrži 5 trouglova. Cilj slagalice je vratiti strane tetraedra u originalni položaj.



Slika 11: Pyraminx

10. TAKMIČENJA I REKORDERI

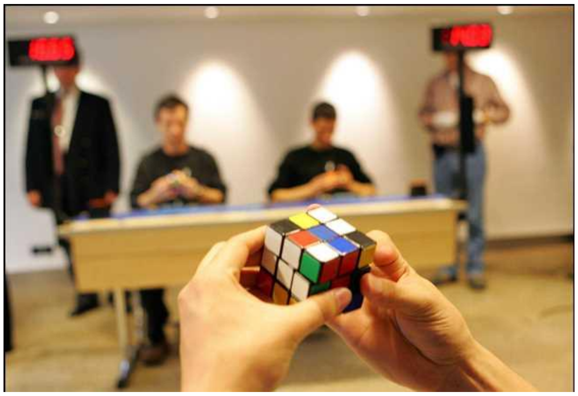
U slaganju Rubikove kocke održavaju se mnogobrojna takmičenja, a cilj je složiti Rubikovu kocku u što kraćem vremenu. Od 2003. godine sve je veći broj nacionalnih i međunarodnih prvenstava u brzom slaganju kocke, a čak ih je 33 održano 2006. godine. Svetsko udruženje Rubikove kocke organizuje takmičenja u slaganju Rubikove kocke jednom rukom ili nogom. Takođe, organizuju se takmičenja gde se Rubikova kocka slaže ispod vode u „jednom dahu" ili pak vezanih očiju (takmičar promatra kocku, planira način kako složiti kocku, a zatim na temelju zapamćenih koraka vezanih očiju slaže kocku). Prvo takmičenje održano je 13. Marta 1981. godine u Munchenu, a organizovala ga je Ginisova knjiga svetskih rekorda. Pobednik tog takmičenja bio je Nemac Jury Froeschl kojem je bilo potrebno 38 sekundi da složi kocku. Prvo svetsko takmičenje održano je 5. Juna 1982. godine u Budimpešti. Kocka je bila izmešana kompjuterski. Učestvovalo je 19 takmičara. Od 2003. godine pobednik takmičenja se odreduje u dve kategorije. U prvoj kategoriji uzima se prosečno vreme najboljih tri od pet pokušaja, a u drugoj najbolje vreme jednog pokušaja.

Na Prvom svetskom prvenstvu u brzom rešavanju Rubikove kocke, 1982. godine, pobedio je šesnaestogodišnji Min Taj, Vijetnamac iz Los Anđelesa, koji je složio kocku za 22,95 sekundi. A Udruženje ljubitelja Rubikove kocke nastavilo je i da organizuje takmičenja i da proučava kocku i načine rešavanja popularne enigme.

Iako je Rubikova kocka dostigla vrhunac svoje popularnosti tokom 1980-tih, ona je još uvek veoma poznata i koristi se. Mnogi speedcuberi i dalje treniraju slaganje ove i drugih čudnih slagalica, te se takmiče za najbrže vreme u različitim kategorijama. Od 2003. godine, World Cube Association, međunarodno upravno telo Rubikove kocke, organizuje takmičenja i vrši evidenciju svetskih rekorda.

2016. godine, dvadesetogodišnji Mats Valk iz Holandije uspeo je da obori rekord od 4,90 sekundi koji je postavio 14-godišnji Lukas Eter prethodne godine i složi kocku za 4,74 sekunde tokom vikenda na takmičenju "Jawa Timur Open" u Indoneziji.

Najnoviji rekord u slaganju Rubikove kocke postavio je Kinez Yusheng Du 2018. godine koji je složio Rubikovu kocku za 3,47 sekundi i tako postavio novi svetski rekord. Rekord je postavio na takmičenju „Wuhu Open 2018." u Kini. Mladić je takvom brzinom složio kocku da ostali učesnici nisu odmah ni primetili šta se događa.



Slika 12: Takmičenje u slaganju Rubikove kocke

2010. godine, 134 učenika osnovne škole "Dr. Challoner's" u Amershamu u Engleskoj su oborili svetski Ginisov rekord za najveći broj ljudi koji su složili Rubikovu kocku u 12 minuta. Prethodni rekord je ostvaren 2008. godine u SAD-u kada je učestvovalo 96 ljudi.

Čak se i naučnici takmiče ko će izraditi najboljeg robota koji će najbrže složiti Rubikovu kocku. Robota Rubya su osmislili studenti australijskog Univerziteta Swinburne. Ruby uz pomoć sofisticiranog softvera rešava kompleksne algoritme i pronalazi brzinsko rešenje za Rubikovu kocku. Pre nego li počne slagati kocku, on skenira početni položaj kocke kako bi „znao" koji rezultat treba dobiti. Super pametnom i brzom androidu su bile potrebne 10,18 sekunde da složi kocku. Prethodni rekord je postavio robot Cubinator kojemu su bile potrebne 18,2 sekunde. Robot Ruby No, iako se smatralo da roboti nisu brži od čoveka u slaganju kocke, ipak je napredna tehnologija pobedila. 2011. godine, robot Cuberstormer II je složio Rubikovu kocku za neverovatnih 5,35 sekundi. Cuberstormer II koristi kameru mobilnog telefona koji memoriše slike delova kocke, te potom bluetoothom šalje upute dvema „rukama" koje okreću kocku velikom brzinom u početni položaj. Najbrži robot koji je rešio Rubikovu kocku je „Sub1 Reloaded" sa vremenom od 0,637 sekundi, koju je sagradio Albert Beer (Nemačka) u Minhenu 2016. godine.

11. RUBIKOVA KREATIVNOST

Rubik je svoju kocku smatrao umetničkim delom, mobilnom skulpturom koja simboliše ljudske kontraste – zbunjujuće probleme, i trijumfalnu inteligenciju, jednostavnost i složenost, statiku i dinamiku, red i haos. Čim se pojavila, Rubikova kocka je sve zbunila, nadahnula i inspirisala. Pojavili su se umetnički pokreti (Rubikov kubizam), muzika i filmovi sa Rubikovom kockom kao glavnim motivom, stvoren je i crtani film – Rubik- neverovatna kocka. Nastali, su, naravno, i fan-klubovi ljubitelja kocke, mnoge knjige na temu „Kako složiti kocku i ne blamirati se uzaludnim pokušajima“ i, konačno, i nova alternativna sportska disciplina – speedcubing (brzo rešavanje kocke). Smatra se da je Rubikova kocka najpoznatija igračka na svetu. U medicinskom rečniku mogu se naći pojmovi „Rubikov zglob” i „Kockin palac” koji označavaju bolesti koje nastaju opsesivnim rešavanjem Rubikove kocke, a od 1980. godine u Americi postoji grupa lečenih „kockara” nazvana „Cubaholics” koja pomaže ljudima koji su zavisni o rešavanju Rubikove kocke.

Nova verzija kocke

Predstavljena je i nova, usavršena verzija Rubikove kocke. Zahvaljujući silikonskim lubrikantima kocka se brže okreće i mehanizam je dugotrajniji. Umesto nalepnica u boji koje su se stavljale na svaki kvadratić, kocka je sada čitava od plastike. I znatno je lakša od svojih ranijih verzija.

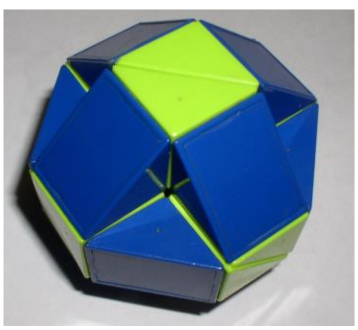
Google igrica

Obeležavajući 40. rođendan Rubikove kocke, Google je podsetio na draži njenog rešavanja tako što je na svoju naslovnu stranu postavio igricu – animaciju. U njoj se pojavljuje potpuno obojena kocka u kojoj je moguće rotirati redove i kolone horizontalno i vertikalno i pravilno se igrati svim nivoima kocke – u virtuelnoj dimenziji.

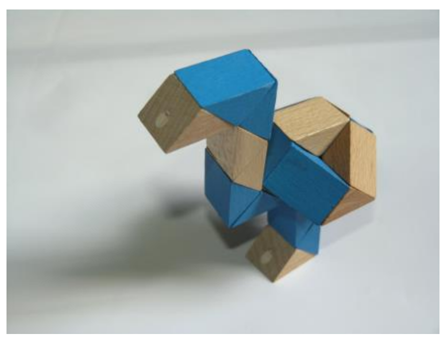
Rubikova zmija

Rubikova zmija je igračka sa četrdeset i četiri dela forme klina, a oblika prizme, preciznije pravougle jednakokrake trouglaste prizme. Klinovi su povezani zavrtanjima sa oprugama na takav način da se mogu uvrtati, ali ne i odvojiti. Spada u logičke izume novijeg doba. Zmija se sastoji od dvadeset i četiri prizme poređane u red i koje imaju naizmenične položaje (jedna je okrenuta ka gore, a jedna ka dole). Svaki klin se može naći u četiri položaja, čije se matematičke koordinate razlikuju za 90°. Sem položaja, prizme su obično naizmenično obojene, i to bojama kao što su bela, zelena, crvena, žuta, plava, znatna, ljubičasta. Okretanjem i uvrtanjem Rubikove zmije mogu se dobiti oblici kao što su prava linija, lopta (zapravo nejedinstven konkavni rombikuboktaedar), pas, patka, pravougaonik, zmija, mačka, ptica, kobra, noj, zamak i na hiljade drugih maštovitih oblika i figura.

Zmiju kao igračku osmislio je Erne Rubik u drugoj polovini dvadesetog veka. Proizvod nije međunarodno patentiran, već samo u Mađarskoj, tako da preduzeća širom sveta, najčešće iz NR Kine, proizvode igračke nazvane okretnim zmijama. Koraci koje je potrebno preduzeti da bi se oblikovala zmija mogu se opisati na više načina.



Slika 13: Osnovni loptasti oblik



Slika 14: Pticolika Rubikova zmija

Slika 15: *Tri brda*

Slika 16: Domaća mačka

Matematički gledano, najveći broj različitih oblika Rubikove zmije bio bi 4^{23} = 70 368 744 177 664 ($\approx 7\times10^{13}$). Kao osnova se uzima četiri, što je broj različitih položaja svake prizme. Ona se stepenuje brojem 23, jer toliko je klinova. Međutim, stvarni broj mogućih kombinacija značajno je niži, jer veliki broj konfiguracija nije fizički moguć. Naime, mnogi slučajevi uključivali bi istovremeno postojanje dve prizme na istom mestu. Piter Ejlet je putem iscrpnog kompjuterskog proračuna iz septembra 2011. došao do zaključka da postoji 13 535 886 319 159 ($\approx 10^{13}$) izvodljivih kombinacija koje isključuju sudaranje prizmi ili tesne spojeve. Broj je približno duplo manji, oko 6 770 518 220 623 ($\approx 7 \cdot 10^{12}$), ukoliko se isključe takozvane slike u ogledalu (koje se definišu kao isti redosled okretaja, samo na drugu stranu).

Rubik se obogatio zahvaljujuci svom patentu, ali je i nastavio da istražuje i kreira razne inovativne igračke. Tokom osamdesetih nastale su i slagalice Rubikova magija, njen nastavak – Master magija i Rubikova zmija. Sve one bave se geometrijskim oblicima i bojama, orijentacijom i prostornim slaganjem. I sve promovišu nauku, obrazovanje, inovativnost.

ZAKLjUČAK

Kad vidite Rubikovu kocku nesređenu jasno je, bez nekog predznanja, šta treba raditi da bi svaka boja bila na svom mestu. Ali rešenje je praktično nemoguće bez instrukcija, a duboko bavljenje analizom rešenja je, zaista, netrivijalna matematika. Rubikova kocka danas ima kultni status pametne igračke oko koje su mozgali mnogi i koja je podstakla i nove patente i uticala na intelektualni razvoj i radoznalost – i dece i odraslih širom sveta.

Ova igračka koja intrigira, nervira, inspiriše i stimuliše najpre je iznervirala svog autora, a potom i milione drugih ljudi. A Erno Rubik je, na tu temu, rekao: „Ako ste radoznali, naći ćete zagonetke oko sebe. Ako ste odlučni, rešićete ih.“

Stručnjaci procenjuju da je od 1980. godine prodato preko 350 miliona Rubikovih kocki. Procene su da se svaka sedma osoba na svetu bar jednom u životu poigrala sa ovom zagonetnom slagalicom. Tim povodom je u Nju Džersiju, u SAD-u, otvorena izložba na kojoj su predstavljene razne verzije kocke, kao što je kocka od zlata i dragog kamenja, vredna 2,5 miliona dolara.

Genijalnost Rubikove kocke je upravo u činjenici da vam nikakva objašnjenja nisu potrebna. Ukoliko je poklonite nekom ko nikada nije čuo za nju, instrinktivno će početi da je slaže. Međutim, rešavanje ove zagonetke je gotovo nemoguće bez pomoći nekoga ko je to već ranije uradio. Možda upravo zbog toga ova kocka uspeva da opčini milione ljudi.

Tokom izrade master rada veliku pomoć, podršku i korisne savete kao i sugestije pružio mi je mentor Zoran Petrović kojim se ovim putem neizmerno zahvaljujem. Takođe, najveću zahvalnost dugujem mojoj porodici koja je bila uz mene i podržavala me, ne samo u toku pisanja rada već sve vreme mog školovanja.

LITERATURA

[1] F. M. Bruckler•, Grupa Rubikove kocke, Poucak, 36(2008)

[2] D. Butkovic, Predavanja iz linearne algebre, 2006.

[3] J. Chen, Group Theory and the Rubik's Cube, http://www.math.harvard.edu/ jjchen/docs/Group Theory and the Rubik's Cube.pdf

[4] T. Davis, Group Theory via Rubik's Cube, 2006.

[5] A. Horvatek, Rubikova kocka 2008.

[6] W. D. Joyner, Mathematics of the Rubik's cube, http://www.permutationpuzzles.org/rubik/webnotes/rubik.pdf

[7] W. D. Joyner, Adventures in Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine, and Other Mathematical Toys, The Johns Hopkins University Press, 2002.

[8] D. Kunkle & C. Cooperman, Twenty-Six Moves Su ce for Rubik's Cube, Pro-ceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC '07), ACM Press, 2007.

[9] J.Trajber, Rubikova kocka – Priručnik za slaganje, 1982.

[10] I. Dolinka, Predavanje iz teorije grupa, 2018.

[11] L. Daniels, Group Theory and the Rubik’s Cube, 2014.

[12] Z. Petrović, Algebra 1, Predavanje za školsku 2014/15. godinu.

[13] Wikipedia, Rubik’s Cube group, https://en.wikipedia.org/wiki/Rubik%27s_Cube_group