Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

PRAMENOVI KONIKA

- Master rad -

Mentor:
dr Srđan Vukmirović, vanredni profesor

Članovi komisije:
dr Mirjana Đorić, redovni profesor
dr Tijana Šukilović, docent

Student:
Jelena Vidaković Mukić

Beograd, jul 2020.

Sadržaj

Uvod

Geometrijski objekti su određeni izvesnim brojem drugih objekata. Ako neki od tih definišućih objekata izostavimo, dobijamo pramen. Na primer, prava je određena sa dve tačke. Zato, skup svih pravih kroz jednu tačku nazivamo pramen pravih. Krug je određen sa tri tačke, pa je skup svih krugova kroz dve date tačke pramen krugova. U radu ćemo pokazati da je konika, tj. kriva drugog reda, zadata ne samo sa pet tačaka, nego sa pet elemenata koji mogu biti tačke ili tangente u tim tačkama. Zato je pramen konika skup svih konika koje su zadate sa neka četiri od tih pet elemenata.

Pramenovi konika su važan objekat algebarske geometrije. Uz pomoć njih mnoge geometrijske činjenice se mogu bolje razumeti, a neke teoreme lakše dokazati. U ovom master radu se bavimo sintetičkom i analitičkom definicijom pramena konika.

Sve pojmove ćemo ilustrovati u paketu GeoGebra, u kom su izrađene ilustracije, a odgovarajući apleti su sastavni deo ovog master rada. Spisak linkova koji vode ka apletima se nalazi na kraju rada, a apleti su objavljeni na GeoGebra kanalu ([5]).

Tokom rada ćemo podrazumevati osnovno znanje iz oblasti geometrije i homogenih koordinata koja se proučavaju u okviru redovnih kurseva na osnovnim studijama Matematičkog fakulteta, Univerziteta u Beogradu ([8]).

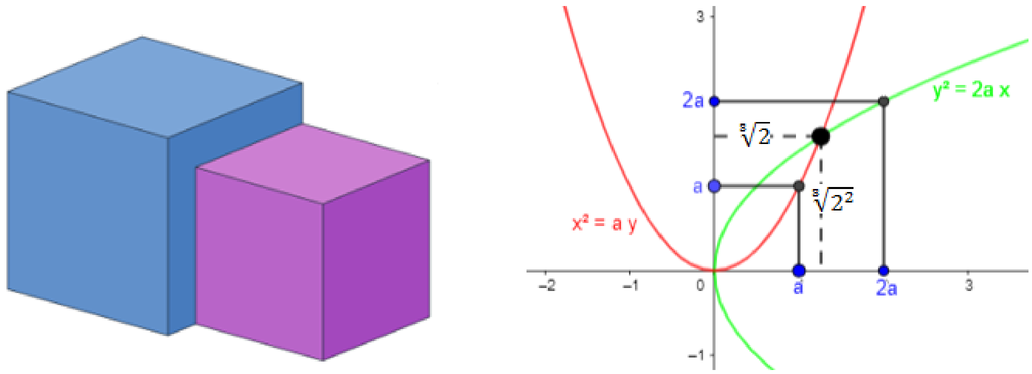
Sadržaj rada je sledeći.

Na samom početku rada je dat uvodni primer i zanimljive legende o njegovom nastanku, kako bismo motivisali čitaoca da sa interesovanjem pristupi temi. Definisane su konike koje delimo na regularne ili singularne, a kroz slike je objašnjeno kako nastaju. Dat je oblik jednačine (projektivne) krive drugog reda koji se koristi u radu, na koju ćemo se često pozivati. U drugom poglavlju ćemo pramenove konika sintetički da definišemo i da uočimo razlike među pet vrsta pramenova konika. Zato su u ovom poglavlju prikazane slike čiji je zadatak da uvedu osnovnu zamisao pojmova. Kasnije će ove slike biti sve preciznije, da bi na kraju dobili čitavu ravan ispunjenu konikama. U trećem delu navodimo značajnu teoremu koja nam omogućava da svih pet vrsta pramenova konika jedinstveno analitički definišemo. Zatim sledi opis singularnih konika u svih pet vrsta pramenova koje se nalazi u četvrtom poglavlju. Pokazaćemo da se Paskalova teorema može dokazati pristupom koji koristi pramenove konika. Posebna pažnja će biti posvećena pramenovima krugova koji se nalaze u petom poglavlju.

U poslednjem delu rada, u Poglavlju 6, ćemo navesti primere svih pet vrsta za koje je ispitano sve do tada rađeno. Navedeni zadaci su važni da bi čitaoc mogao da prepozna razlike između različitih vrsta pramena konika. Cilj zadataka, koji će biti navedeni, je da se za konkretne tačke, tangente i konike nađe jednačina pramena, te da se u pramenu prepoznaju krugovi, parabole, hiperbole i elipse, kao i singularne konike.

1. Osnovni pojmovi

Prikazaćemo uvodni primer koji će nas uvesti u pojmove koje treba da definišemo.



Slika 1: Problem udvostručavanja kocke (aplet [1])

Problem udvostručavanja kocke, koji nazivamo još i *Delski problem udvostručavanja kocke*, glasi ovako: konstruisati ivicu kocke čija je zapremina dvostruko veća od zapremine kocke poznate ivice (vidi Sliku 1, levo).

Postoje dve legende o nastanku problema. U jednoj su stanovnici grčkog ostrva Dele morali da se oslobode proročanstva da bi se rešili opake kuge. Proročanstvo je zahtevalo da podignu novi oltar koji će biti dva puta veće zapremine od starog oltara i da će se tako zaustaviti širenje bolesti. Nažalost, oltar je bio u obliku kocke, pa problem nisu mogli da reše koristeći samo lenjir i šestar. Suočeni sa problemom, Deli odlaze kod Platona[1] da ga pitaju šta je bog mislio kada je poslao takvo proročanstvo. Na to je Platon odgovorio da bogu nije do dvostuko većeg oltara, već da posrami Grke za nepoštovanje prema matematici i geometriji.

Drugi grčki mit kaže da je za kralja bio izgrađen grob u obliku kocke stranica „samo" sto stopa, ali da se to nije svidelo jednom od drevnih tragičnih pesnika koji je rekao da je načinjeno premalo kraljevsko prebivalište i da treba da se sagradi duplo veći grob.

Dakle, posmatraćemo kocku stranice $a = 1$. Treba pronaći ili konstruisati ivicu dužine $\sqrt[3]{2}$ da bi se rešio ovaj problem. Nažalost, lenjir i šestar nisu dovoljni za konstruisanje kubnog korena iz dva, kao što je 1837. godine pokazao Pijer Laurent Vancel[2].

Međutim, grčki geometri su otkrili kako da konstruišu $\sqrt[3]{2}$ koristeći dve parabole.
Pretpostavimo da su

[1] Platon (427 p.n.e. - 347 p.n.e.) - grčki filozof iz Atene koji se smatra jednim od najuticajnijih ličnosti u istoriji zapadne civilizacije. Osnovao je Akademiju, prvu instituciju takve vrste.
[2] Pierre Laurent Wantzel (1814 - 1848) - francuski matematičar, rođen i preminuo u Parizu. Dokazao je da se problem udvostručavanja kocke i trisekcija ugla ne mogu rešiti koristeći samo lenjir i šestar.

$$p_1:\ y^2 = 2ax\ ,\ \ p_2:\ ay = x^2 \tag{1}$$

dve parabole. Jasno, (1) je sistem dve kvadratne jednačine sa dve promenljive x i y. Rešenja sistema su

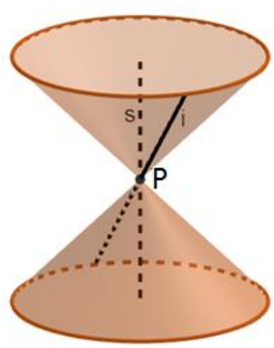
$$(x,y) = (0,0),\ \ (x,y) = (\sqrt[3]{2}\, a, \sqrt[3]{4}\, a).$$

Prvo rešenje nam nije toliko značajno, dok drugo rešenje, za $a = 1$, daje $x = \sqrt[3]{2}$ što je upravo ono što tražimo. Kada bi umeli da, na neki način, konstruišemo parabolu, problem udvostručavanja kocke bi mogli da rešimo, ali to nije moguće uraditi lenjirom i šestarom (vidi Sliku 1, desno).

Ekvivalentan problem je naći presečne tačke dve konike. Određivanje tih presečnih tačaka je čest problem u računarskoj geometriji. Idealno je ako se presek dve konike može svesti na preseke pravih linija, tj. singularnih konika koje pripadaju odgovarajućem pramenu. Postavlja se pitanje kako izgledaju različite konfiguracije dve konike i koliko ima presečnih tačaka? Odgovore ćemo pronaći u ovom radu.

1.1 Definicija konike

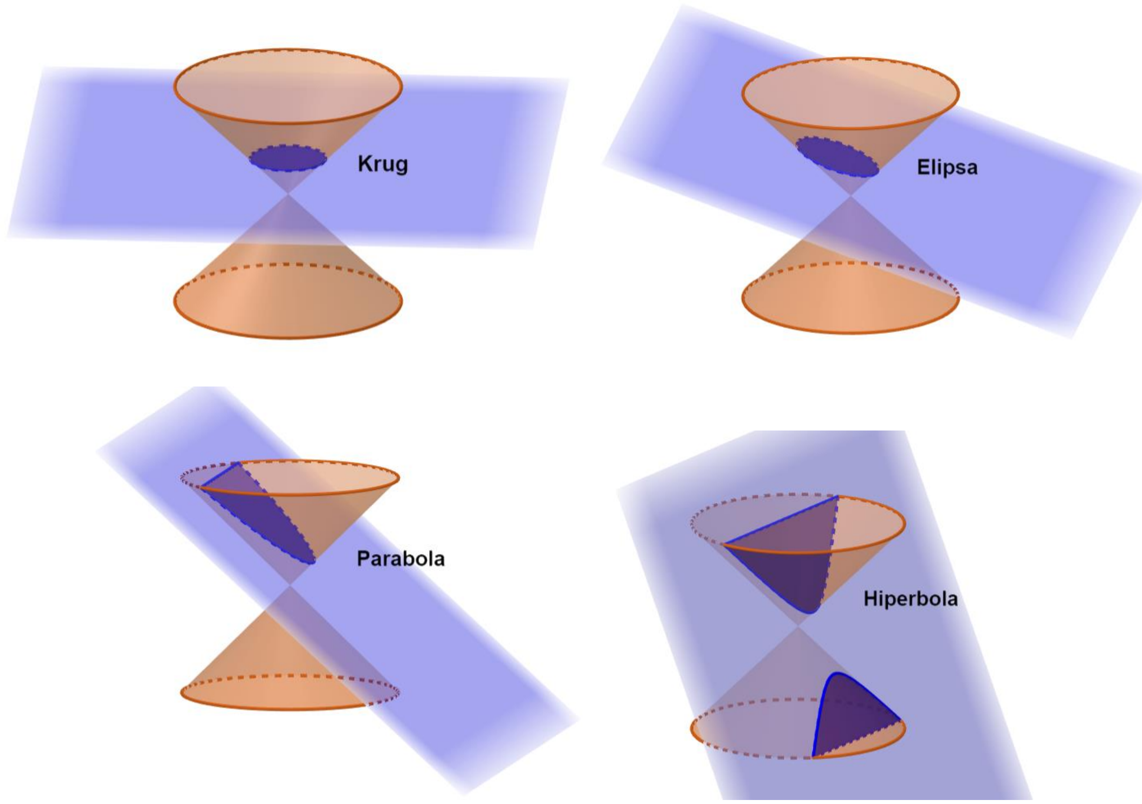
Neka su date prave u prostoru i i s čiji se presek nalazi u tački P. Površ koja se dobija rotacijom prave i oko ose s naziva se *kružni konus* sa temenom P. Rotiranu pravu i (u raznim položajima) nazivamo *izvodnica* konusa, a pravu s *osa konusa*.



Slika 2: Kružni konus (aplet [2])

Konusni presek je presek konusa sa proizvoljnom ravni α. Ako ravan α ne sadrži teme konusa, tada preseci sa konusom, s obzitom na položaj ravni α, mogu biti krug, elipsa, parabola ili hiperbola. To su *nedegenerisani (regularni)* preseci i nazivamo ih *konike*.

U naredne četiri slike su preseci prikazani tamno plavom bojom.



Slika 3: Konusni preseci (aplet [3])

Ukoliko ravan α sadrži teme konusa, konusni presek su par pravih, jedna prava (dvostruka) ili tačka. Takav konusni presek naziva se *degenerisani (singularni)* konusni presek. U radu ćemo ih nazvati *singularne konike*.

Apolonije iz Pergama[3], koga su zvali „*Veliki geometar*", je u svojem delu „*Konika*" u 8 knjiga temeljno opisao konusne preseke. Sačuvane su prve četiri knjige na grčkom, tri u arapskom prevodu, dok je osma izgubljena. U tom kontekstu, prvi je za konike upotrebio nazive elipsa i hiperbola (naziv parabola dolazi od Arhimeda[4]) i ustanovio da se sve tri vrste mogu dobiti presecima konusa i ravni.

Konike su veoma značajne za mnoge oblasti. Na primer, u astronomiji, nebeska tela se kreću putanjama koje su zapravo konike. U optici se koriste pri konstrukciji sočiva i ogledala. Često se primenjuju u paleontologiji za razumevanje izgleda određenih organizama, kao i u mehanici i mnogim drugim oblastima.

[3] Apolonije iz Pergama (Turska) (262.p.n.e. - 190.p.n.e.) - grčki matematičar i astronom.
[4] Arhimed (287.p.n.e. - 212.p.n.e.) - grčki matematičar, fizičar i astronom iz Sirakuze na Siciliji.

U analitičkoj geometriji, konika se može definisati kao ravanska algebarska kriva drugog reda. Opšta jednačina krive drugog reda dve promenljive x i y u afinoj ravni $\mathbb{R}^2$ koja će se koristiti u ovom radu je

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \tag{2}$$

gde su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ i barem jedan od brojeva a, b i c različit od nule.

Homogene koordinate tačke $M(x,y)$ afine ravni $\mathbb{R}^2$ su ma koja trojka $(x_1 : x_2 : x_3)$ takva da važi

$$x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3},\ x_3 \neq 0,$$

gde ćemo par koordinata tačke M nazivati afine koordinate.
Napomenimo da x_1, x_2 i x_3 mogu biti kompleksni brojevi, pa se u celom radu podrazumeva da radimo u kompleksnoj projektivnoj ravni, $P^2(\mathbb{C})$.

Nakon uvođenja veze između afinih i homogenih koordinata, dobijamo projektivnu definiciju krive drugog reda.

Definicija 1. Projektivna kriva drugog reda je skup projektivnih tačaka čije homogene koordinate zadovoljavaju jednačinu

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_3 + 2ex_2x_3 + fx_3^2 = 0, \tag{3}$$

gde su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ i barem jedan od brojeva a, b i c različit od nule.

Primetimo da jednačinu (3) možemo da posmatramo i u matričnom obliku na sledeći način

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

ekvivalentnu sa

$$x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}x = 0.$$

Simetričnu matricu $\boldsymbol{A} \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ iz prethodne formule zovemo *matricom krive drugog reda*.

Kažemo da je konika regularna ako je definisana regularnom matricom $\boldsymbol{A}$ za koju važi da je $det\ \boldsymbol{A} \neq 0$, a singularna u slučaju kada je definisana singularnom matricom $\boldsymbol{A}$ za koju važi da je $det\ \boldsymbol{A} = 0$.

Teorema 1. *Svaka projektivna kriva drugog reda se projektivnim preslikavanjem može preslikati na tačno jednu krivu od sledećih:*

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (*nula kriva, tj. prazan skup*)
2. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ *(ovalna kriva)*
3. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ *(tačka)*
4. $x_1^2 - x_2^2 = 0$ *(par pravih)*
5. $x_1^2 = 0$ *(dvostruka prava)*

Dokaz:
Svaka simetrična matrica $\boldsymbol{A}$ se može dijagonalizovati ortogonalnom matricom ([11]). Neka je M ortogonalna matrica (važi $M^{-1} = M^{T}$). Sledi da je

$$M^{T}\boldsymbol{A}M = M^{-1}\boldsymbol{A}M = diag\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

gde su λ_i, $i \in \{1,2,3\}$ sopstvene vrednosti matrice $\boldsymbol{A}$ koje mogu biti nula, ali ne smeju sve biti nula. To zapravo znači da se kriva, data jednačinom (3), čija je matrica M^{-1} , projektivnim preslikavanjem preslikava na krivu

$$0 = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2. \tag{4}$$

Kako je $\lambda_i = sgn\ (\lambda_i) \cdot |\lambda_i|$, imamo

$$0 = sgn(\lambda_1)\ (\sqrt{|\lambda_1|}x_1')^2 + sgn(\lambda_2)\ (\sqrt{|\lambda_2|}x_2')^2 + sgn(\lambda_3)\ (\sqrt{|\lambda_3|}x_3')^2.$$

Dakle, projektivnim preslikavanjem

$$x_i'' = \begin{cases} \sqrt{|\lambda_i|}, & \lambda_i \neq 0 \\ x_i', & \lambda_i = 0 \end{cases}$$

se dobije tačno jedna od krivih iz tvrđenja teoreme.

Napomena: da bi dobili isti zapis jednačine, sopstvene vrednosti možemo urediti tako da prvo idu pozitivne, pa negativne, pa nula. Da bi pozitivnih vrednosti bilo više od negativnih, po potrebi treba množiti jednačinu (4) sa -1. □

Uočavamo da su prve dve krive iz Teoreme 1 regularne jer je determinanta njihove matrice različita od nule, a ostale tri singularne jer je determinanta jednaka nuli.

1.2 Određenost konike

Teoremu o pet tačaka, čiji dokaz ćemo navesti, treba imati u vidu kroz ceo rad. Ona će nam zbog dualnosti dati uopštenje za pet elemenata koji su u opštem položaju. Nakon ove teoreme lako možemo geometrijski da zamislimo pramenove konika.

Za n tačaka ravni kažemo da su u opštem položaju ako nikoje tri tačke nisu kolinearne.

Teorema 2. (**Teorema o pet tačaka**)
Pet tačaka projektivne ravni u opštem položaju određuju jedinstvenu koniku.

Dokaz:
Neka su $B_1,\dots,B_5 \in P^2(\mathbb{R})$ tačke projektivne ravni među kojima nikoje tri nisu kolinearne i kriva

$$g(x_1,x_3,x_3) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1x_3 + 2ex_2x_3 + fx_3^2 = 0. \quad (5)$$

Za $u \neq 0$, jednačine g i ug određuju istu krivu, tj. koeficijenti (a,b,c,d,e,f) i (ua, ub, uc, ud, ue, uf) i samo oni, određuju istu krivu. Dakle, krive drugog reda u realnoj projektivnoj ravni $P^2(\mathbb{R})$ odgovaraju tačkama $(a : b : c : d : e : f) \in P^5(\mathbb{R})$.

Uslov da B_i pripada jednačini (5), tj. $g(B_i) = 0$, za i $\in \{1,2,3,4,5\}$, daje linearnu jednačinu po a, b, c, d, e i f. Dakle, $g(B_1) = 0, \dots, g(B_5) = 0$ je sistem 5 homogenih linearnih jednačina po 6 nepoznatih a, b, c, d, e i f. Rešenje tog sistema su konike koje sadrže tačke $B_1,\dots,B_5$. Rešenje uvek postoji (jer je sistem homogen) i ono je presek pet hiperravni.

Treba još da pokažemo da je rešenje koje se dobije jedinstveno. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje dva rešenja, tj. dve različite konike $g_1 = 0$ i $g_2 = 0$ koja sadrže tačke $B_1,\dots,B_5$. Tada je i $h = \lambda g_1 + \mu g_2 = 0$, za $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ rešenje (jer je presek hiperravni linearan skup). Za svaku tačku $P \in P^5(\mathbb{R})$ postoje λ i μ tako da je $(\lambda g_1 + \mu g_2)(P) = 0$. Zaista, ako je $g_2(P) = 0$, tada je $\lambda = 0$ i $\mu = 1$. Ako je $g_2(P) \neq 0$, tada uzimamo $\lambda = -\frac{g_2(P)}{g_1(P)}$ i $\mu = 1$.

Neka je tačka P takva da su B_1, B_2 i P kolinearne. Tada je $h(B_1) = h(B_2) = h(P) = 0$, pa je $h(X) = 0$ za svako $X \in B_1B_2$. Sledi da konika određena sa $h = 0$ sadrži pravu B_1B_2, pa je

$$h = h_1h_2$$

gde su h_1 i h_2 linearne jednačine i $h_1 = 0$ je prava B_1B_2. Dakle, $h = 0$ je unija dve prave, ali $h = h_1h_2 = 0$ sadrži $B_1,\dots,B_5$, pa sledi da su neke tri od tačaka $B_1,\dots,B_5$ kolinearne. Dobili smo kontradikicju sa pretpostavkom da su tačke u opštem položaju. Dakle, konika kroz pet tačaka u opštem položaju je jedinstvena. □

Dakle, u realnoj projektivnoj ravni $P^2(\mathbb{R})$, konika je jedinstveno definisana sa 5 tačaka tako da nikoje tri nisu kolinearne. Štaviše, uslov da je prava t tangentna na koniku u tački B (u radu koristimo naziv *tačka-tangenta* (B,t)), zapisujemo sa $\lambda t = \boldsymbol{A}B$, za $\lambda \in \mathbb{R}$, gde je $\boldsymbol{A}$ matrica jednačine (3). Taj uslov nam daje dve linearno nezavisne jednačine, pa nije teško videti da se dokaz teoreme o pet tačaka može prilagoditi i na slučaj kada imamo jednu ili više tangenti, tako da je konika jednoznačno određena sa

- 5 tačaka,
- 4 tačke i 1 tangentom,

- 3 tačke i 2 tangente,
- 2 tačke i 3 tangente,
- 1 tačka i 4 tangente,
- 5 tangenti,

pri čemu pretpostavljamo da su objekti koji je zadaju u opštem položaju.

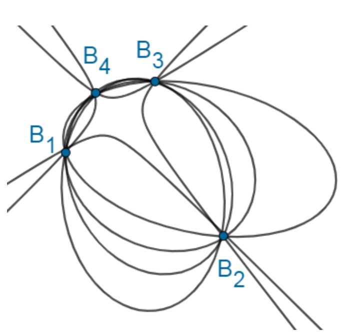
Primetimo da je uslov da su zadati tangenta i tačka dodira krive i te tangente ključan jer, na primer, četiri tačke u opštem položaju i tangenta koja ne sadrži ni jednu od njih određuju ni jednu, jednu ili dve krive.

2. Sintetička definicija pramena konika

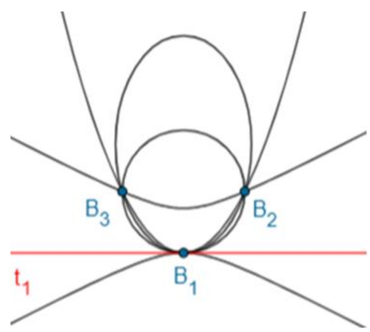
U prethodnom poglavlju smo videli da je konika jedinstveno definisana sa pet elemenata gde pod tim elementima podrazumevamo tačke krive ili tangente na krivu u tim tačkama. Postavlja se sledeće pitanje: šta se dešava ako uklonimo jednu tačku ili pravu? Doći ćemo do zaključka da, sa geometrijske tačke gledišta, pramen konika predstavljaju sve krive drugog reda koje imaju četiri zajednička elementa, a da se izborom petog elemeta dobijaju konkretne konike tog pramena.

Postoji pet vrsta pramenova konika koje delimo na osnovu elemenata koji su zajednički za dve konike. Postoji: pramen konika prve, druge, treće, četvrte i pete vrste. U daljem tekstu ih opisujemo.

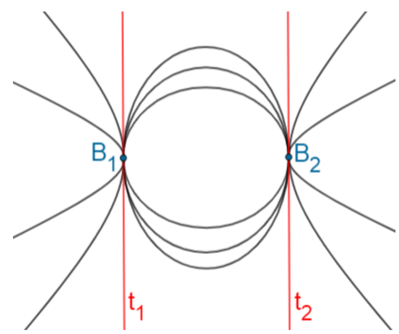
Definicija 2. Familija svih regularnih konika kroz temena četvorotemenika[5] $B_1B_2B_3B_4$ naziva se *pramen konika prve vrste*. Tačke B_i, gde $i \in \{1,2,3,4\}$, zovemo *bazne tačke pramen*a.



Slika 4: Pramen konika prve vrste (aplet [4])



Slika 5: Pramen konika druge vrste (aplet [5])



Slika 6: Pramen konika treće vrste (aplet [6])

Koliko konika ima u ovom pramenu? Ako izaberemo proizvolju tačku P_1 koja nije kolinearna ni sa koje dve bazne tačke, onda na osnovu Teoreme 2 znamo da postoji jedinstvena konika kroz $B_1,\ldots, B_4$ i P_1. Ako izaberemo tačku P_2 različitu od $B_1,\ldots, B_4$ i P_1, koja nije kolinearna ni sa koje dve bazne tačke, tada dobijamo drugu koniku. Proizvoljnim biranjem tačaka P_i nastaje pramen konika prve vrste. Dakle, izgleda kao da u pramenu ima onoliko konika koliko ima tačaka u ravni (osim onih tačaka koje su kolinearne sa baznim). Međutim, to nije slučaj. Ako ubacimo homogene koordinate četiri bazne tačke u jednačinu (3), dobijamo sistem od četiri linearne jednačine sa šest nepoznatih koeficijenata. Rešenje sistema je dvodimenzionalna ravan u $\mathbb{R}^6$ $(6 - 4 = 2)$. Pošto proporcionalne šestorke predstavljaju istu koniku, dvodimenzionalna ravan je

[5] Četvorotemenik - figura projektivne ravni koja se sastoji od četiri tačke u opštem položaju i šest pravih određenih tim tačkama koje nazivamo *ivice četvorotemenika* . Analogno se definiše trotemenik, petotemenik, šestotemenik…

ustvari projektivna prava u projektivnom prostoru $P^5(\mathbb{R})$. Stoga, u pramenu postoji onoliko konika koliko ima tačaka na projektivnoj pravoj, tj. beskonačno dalekoj pravoj.

Definicija 3. Pretpostavimo da je $B_1B_2B_3$ trotemenik i da je t_1 prava koja prolazi kroz B_1 tako da ne sadrži tačke B_2 niti B_3. Tada se familija regularnih konika kroz (B_1, t_1), B_2, B_3 naziva *pramen konika druge vrste*.

Intuitivno, pramen druge vrste možemo da posmatramo kao pramen prve vrste na sledeći način: kada jedna tačka pramena prve vrste kroz B_1, ... , B_4, recimo B_4, teži ka B_1, tada prava B_1B_4 postaje tangenta t_1 u B_1, tj. dve tačke B_1 i B_4 postaju tačka-tangenta (B_1, t_1). Kažemo da u takvoj tački imamo *dodir prvog reda*. Dakle, u pramenu konika druge vrste u B_1 imamo dodir prvog reda (vidi Sliku 5).

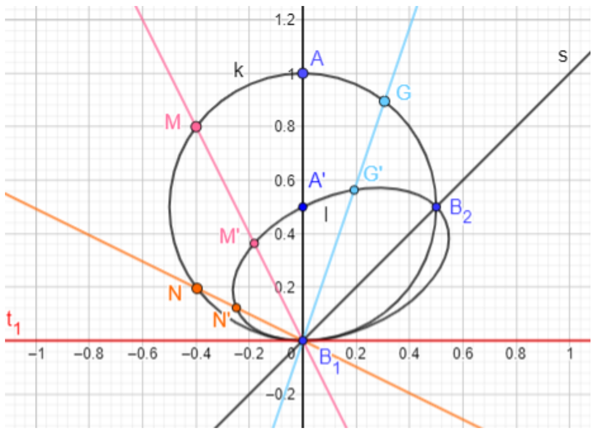
Kako smo prešli iz prve u drugu vrstu pramena, tako prelazimo i u preostale vrste pramenova konika. Ako na primer, B_4 teži ka B_1, a B_3 ka B_2, dobijamo sledeće:

Definicija 4. Pretpostavimo da su B_1 i B_2 dve različite tačke, a t_1 i t_2 dve prave takve da $B_1 \in t_1$, $B_2 \in t_2$ i da se t_i , $i \in \{1,2\}$, ne podudaraju sa pravom B_1B_2. Familija regularnih konika kroz B_1 i B_2 koje dodiruju t_1 u B_1 i t_2 u B_2 se zove *pramen konika treće vrste*.

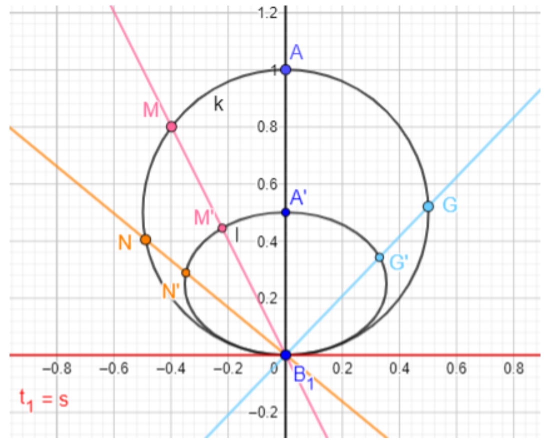
Vidimo da je u ovom slučaju pramen određen sa dva para tački-tangenti (B_1, t_1) i (B_2, t_2). U tim tačkama imamo dodir prvog reda (vidi Sliku 6).

Da bismo definisali četvrtu i petu vrstu pramenova konika, moramo prvo da se prisetimo šta je homologija, a šta su osa i centar preslikavanja g. Prava s je osa projektivnog preslikavanja g ako je svaka tačka prave s fiksna, a C centar od g ako je svaka prava kroz C fiksna. Projektivno preslikavanje određeno osom s, centrom C i parom odgovarajućih tačaka je *homologija*.

Definicija 5.
Dve konike k i l koje se seku u tački B_1 i u toj tački imaju zajedničku tangentu t_1, *oskuliraju* jedna drugu u B_1 ako postoji homologija g sa osom $s = B_1B_2$ i centrom B_1, gde je B_2 druga presečna tačka konika k i l, tako da važi $g(k) = l$.
Slično, dve konike k i l koje se seku u B_1 i u toj tački imaju tangentu t_1, *hiperoskuliraju* jedna drugu u B_1 ako postoji homologija g sa osom t_1 i centrom B_1 tako da je $g(k) = l$. (Ovde se osa s iz prvog slučaja poklapa sa tangentom t_1).



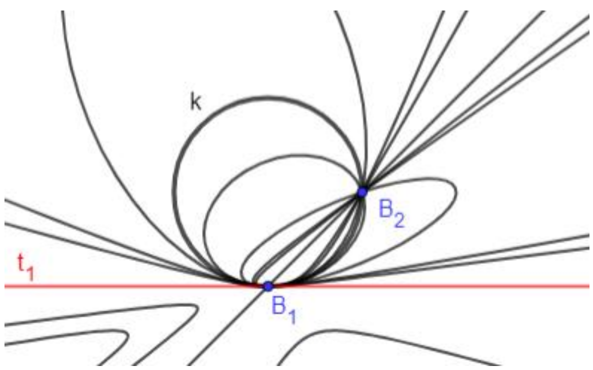
Slika 7: Oskulirajuće konike k i l
(aplet [7])



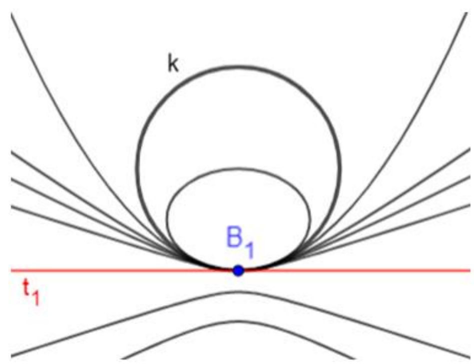
Slika 8: Hiperoskulirajuće konike k i l
(aplet [8])

Definicija 6. Familija regularnih konika koja oskulira datu koniku k u tački B_1 i prolazi kroz tačku B_2 naziva se *pramen konika četvrte vrste*. Familija regularnih konika koja hiperoskulira datu koniku k u tački B_1 se zove *pramen konika pete vrste*.

Kažemo još da se pramen četvrte vrste naziva *pramen oskulirajućih konika*, a pramen pete vrste *pramen hiperoskulirajućih konika*.



Slika 9: Pramen konika četvrte vrste
(aplet [7])



Slika 10: Pramen konika pete vrste
(aplet [8])

Pramenovi konika su ovde prikazani u realnoj projektivnoj ravni $P^2(\mathbb{R})$. Levo je pramen četvrte vrste sa baznim tačkama B_1 i B_2, tangentom t_1, gde je (B_1,t_1) tačka-tangenta. Pramen se sastoji od konika koje oskuliraju koniku k u B_1. Kažemo da u B_1 imamo *dodir drugog reda* jer ka toj tački teže dve tačke, na primer B_3 i B_4. Tri tačke su postale jedna tačka i tangenta u njoj. Desno je pramen pete vrste koji se sastoji od konika koje hiperoskuliraju k u B_1. Kažemo da u pramenu pete vrste, u tački B_1 imamo *dodir trećeg reda* jer ka njoj teže još tri tačke. Četiri tačke su postale jedna tačka i tangenta u njoj. Primetimo, da kada u pramenu četvrte vrste, B_2 teži ka B_1 dobijamo pramen pete vrste.

Ako se dve konike, koje definišu pramen, seku u nekoj tački, tada sve konike u pramenu prolaze kroz tu tačku. Ako dve konike u pramenu imaju istu tačku-tangentu, onda sve konike tog pramena zadovoljavaju uslove te tačke-tangente. Drugim rečima, ako su dve konike tangentne jedna na drugu u tački, tada su sve konike u pramenu tangentne jedna na drugu u toj tački.

3. Analitička definicija pramena konika

Analitički pristup nam omogućava da prethodno definisane pramenove konika proširimo na singularne konike u projektivnoj ravni $P^2(\mathbb{R})$, koje ćemo detaljnije da opišemo u četvrtom poglavlju.

Navedimo prvo teoremu koja će nam dati analitičku definiciju pramenova konika.

Teorema 3. *Bilo koji pramen konika određen je linearnim kombinacijama jednačina ma koje dve konike tog pramena.*

Dokaz:
Pokazaćemo prvo da ako imamo dve konike koje pripadaju nekom pramenu i konika koja je zadata linearnim kombinacijama njihovih jednačina pripada tom pramenu. Pretpostavimo da imamo dve konike k i l date simetričnim matricama $\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{L} \in \mathrm{M}_{3x3}(\mathbb{R})$, koje prolaze kroz 4 bazne tačke $B_1,\ldots,B_4$. Pokazaćemo da svaka treća konika, koja je dobijena kao linearna kombinacija, takođe prolazi kroz bazne tačke. Neka je $\boldsymbol{M} = \lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L}$, za $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, matrica konike dobijene linearnom kombinacijom konika k i l. Pošto $B_1 \in k$ i $B_1 \in l$, znamo da je, redom

$$B_1^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{K}\, B_1 = 0,$$
$$B_1^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{L}\, B_1 = 0.$$

Množenjem prve jednačine sa λ, a druge sa μ i sabiranjem dobijene dve jednačine, sledi

$$B_1^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{M}\, B_1 = B_1^{\mathrm{T}}\, (\lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L})\, B_1 = 0.$$

Dakle, B_1 pripada konici koja je data matricom $\boldsymbol{M}$. Analogno za preostale tri bazne tačke. Dakle, sve bazne tačke pripadaju konici koja je linearna kombinacija k i l, pa imamo dokaz teoreme za pramen konika prve vrste.

Ako je (B,t) tačka-tangenta za dve konike k,l, tada važi

$$t = \boldsymbol{K}\, B,$$
$$t = \boldsymbol{L}\, B.$$

Množenjem prve jednačine sa λ, druge sa μ i sabiranjem dobijene dve, sledi

$$(\lambda + \mu)\, t = (\lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L})\, B = \boldsymbol{M}\, B.$$

Ovo zapravo znači da svaka konika koju dobijemo kao linearnu kombinaciju dveju konika će takođe imati tangentu t u tački B. Dakle, B je tačka-tangenta u odnosu na koniku zadatu matricom $\boldsymbol{M}$, uz napomenu da je $(\lambda + \mu)$ broj koji ne utiče na tangentu t.

Pošto su druga i treća vrsta pramenova zadati tačkom-tangentom, ovim smo dokazali tvrđenje i za te dve vrste pramenova. Preostaje da dokažemo tvrđenje za četvrtu i petu vrstu pramenova.

Može se pokazati da dve krive oskuliraju (hiperoskuliraju) u tački B ako imaju jednaka prva dva (prva tri) izvoda u tački B. Kako je izvod linearan, to važi i za njihovu linearnu kombinaciju, čime je tvrđenje dokazano.

Obrnuto, neka konike k, l i m pripadaju nekom tipu pramena određenom sa neka četiri elementa. Pretpostavimo da konika m sadrži neku tačku P koja je u opštem položaju sa ta četiri elementa. Tada slično kao u dokazu Teoreme 2 možemo odrediti λ i μ tako da $(\lambda k + \mu l)(P) = 0$. Kako konika određena jednačinom $\lambda k + \mu l = 0$, a takođe i konika m, sadrže tačku P i zadovoljavaju data četiri elementa, po Teoremi 2 imamo da je $m = \lambda k + \mu l$. Dakle, svaka konika pramena je linearna kombinacija dve konike pramena. □

Napomena:
Linearnim kombinacijama dve simetrične matrice dobijaju se različite, opet simetrične matrice. Ako je pramen konika zadat dvema konikama kao osnovama, onda bilo koje dve konike te familije mogu da posluže kao osnovne. Dakle, pramen konika je određen dvema linearno nezavisnim simetričnim matricama $\boldsymbol{K}$ *i* $\boldsymbol{L}$. Isti pramen određuju bilo koje dve linearne kombinacije ovih matrica. Naravno, ako su te dve matrice linerano nezavisne. Uslov je lako izraziti algebarski: ako je skup matrica $\{\boldsymbol{K},\boldsymbol{L}\}$ linearno nezavisan, onda će skup $\{\lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L}, \lambda'\boldsymbol{K} + \mu'\boldsymbol{L}\}$ takođe biti linearno nezavisan ako i samo ako je $\lambda\mu' - \lambda'\mu \neq 0$.

Zbog prethodne teoreme, algebarska definicija pramenova konika koja sledi, obuhvata svih 5 tipova pramenova koje smo ranije definisali.

Definicija 7. Familija regularnih ili singularnih konika, koje zadovoljavaju linearnu kombinaciju dve različite konike k i l, naziva se *pramen konika*.

Primetimo, da sada možemo da koristimo i singularne konike kao osnovne, tj. možemo regularne konike pramena dobiti linearnom kombinacijom dveju singularnih konika tog pramena.

Navešćemo dva jednostavna primera, a u šestom poglavlju se mogu videti detaljnije opisani zadaci.

Primer 1.

Naći ćemo koniku p kroz tačku $P(-\frac{1}{2},2)$ u pramenu konika zadatog sa dve jednačine

$$k : 2y^2 - 3x - 5 = 0,$$
$$l : 5x^2 - 2y^2 + 3x = 0.$$

Na osnovu Teoreme 3, jednačine svih pramenova konika su date sa

$$\lambda\,(2y^2 - 3x - 5) + \mu\,(5x^2 - 2y^2 + 3x) = 0\,, \qquad (\lambda,\mu) \neq (0,0). \tag{6}$$

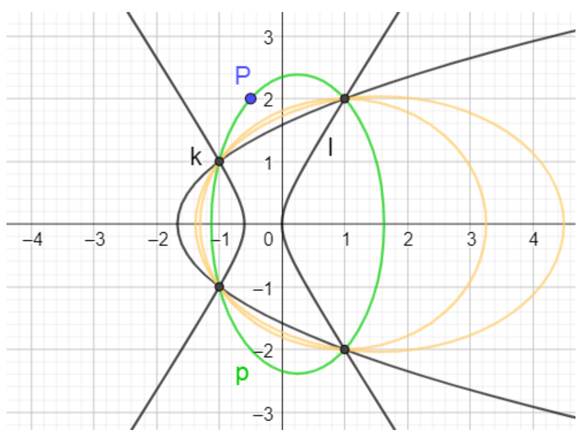
Ako kriva iz pramena prolazi kroz tačku P, onda možemo odrediti odnos $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ tako da jednačina (6) bude ispunjena. Dakle, umesto x i y ubacujemo koordinate tačke P i dobijamo

$$6\lambda - 11\mu = 0 \quad \text{akko} \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{11}{6}.$$

Konačno, zamenom $\lambda = 11$ i $\mu = 6$ u (6) dobijamo da je konika p kroz tačku P data jednačinom

$$p : 6x^2 + 2y^2 - 3x - 11 = 0.$$

Na sledećoj slici su crnom bojom prkazane konike k i l, plavom tačka P, a zelenom konika p koju smo dobili kao rezultat. Takođe, žutom bojom su dodate još neke konike koje se nalaze u zadatom pramenu. Uočavamo da je u pitanju pramen prve vrste.



Slika 11: Konika kroz tačku (aplet [9])

Primer 2.

Proverimo da li konika p: $2x^2 + y^2 - 5 = 0$ pripada pramenu $2x^2 + y^2 - 10 + \lambda(3x^2 - 5y^2 - 15) = 0$. Jednačina pramena može da se zapiše u obliku

$$(2 + 3\lambda)x^2 + (1 - 5\lambda)y^2 - (10 + 15\lambda) = 0.$$

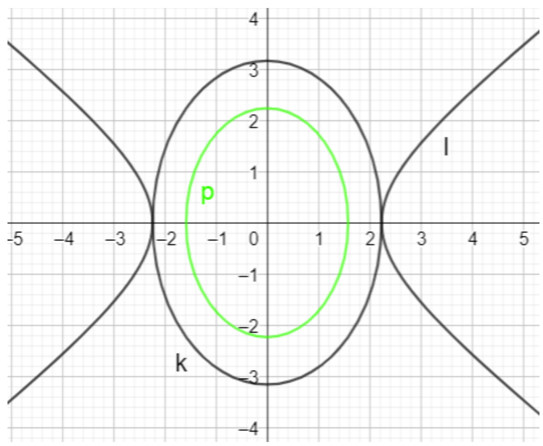
Data konika pripada pramenu ako postoji λ tako da važi

$$\frac{2+3\lambda}{2}=\frac{1-5\lambda}{1}=\frac{-(10+15\lambda)}{-5}$$

iz čega sređivanjem dobijamo

$$\frac{2+3\lambda}{2}=1-5\lambda=2+3\lambda$$

i zaključujemo da ovaj sistem očigledno nema rešenje. Dakle, konika *p* ne pripada datom pramenu. Pramen koji je dat je zapravo pramen treće vrste. Sa slike se lako uočava da konika *p* ne pripada datom pramenu.



Slika 12: Konika koja nije u pramenu (aplet [10])

4. Singularne konike u pramenu

Pokazaćemo da u svakom pramenu konika postoje singularne konike. One mogu da budu par pravih ili dvostruka prava. U ovom poglavlju ćemo razmotriti svih pet vrsta pramenova konika i za svaki naći singularne konike.

Neka su $\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{L}$ matrice neke dve konike u pramenu. Kako je konika singularna ako je njena matrica singularna, za $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ imamo

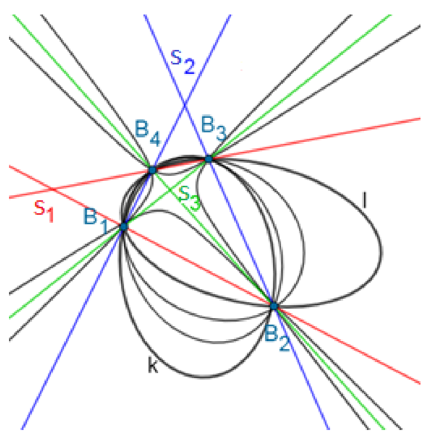
$$det\,(\lambda \boldsymbol{K} + \mu \boldsymbol{L}) = 0. \tag{7}$$

Ovaj uslov nam daje homogen polinom po λ i μ trećeg stepena. Dakle, polinom ima tri rešenja, pa u pramenu postoji najviše tri singularne konike. Napomenimo da u trivijalnom slučaju, tj. za $(\lambda,\mu) = (0,0)$, imamo nula matricu, ali ona ne može biti matrica neke konike. Dakle, singularne konike ćemo da podelimo u tri slučaja na osnovu broja korena jednačine (7). Pretpostavimo da su k i l regularne konike.

4.1 Singularne konike pramena prve vrste

U prvom slučaju ćemo razmotriti kada jednačina (7) ima tri različita korena. Svaki od ova tri korena je višestrukosti jedan. Zato u pramenu imamo tri različite singularne konike. Neka su to konike s_1, s_2 i s_3. One su parovi pravih $B_1B_2 \cup B_3B_4$, $B_1B_3 \cup B_2B_4$, $B_1B_4 \cup B_2B_3$, određenih sa četiri bazne tačke B_1, B_2, B_3 i B_4. Pa je ovo pramen konika prve vrste.

Na sledećoj slici je prikazan neki pramen konika prve vrste, kao i tri singularne konike u istim bojama parova pravih od kojih se sastoje. U šestom poglavlju u zadatku 1 je prikazan konkretan primer pramena prve vrste za kojeg su određene jednačine singularnih konika.



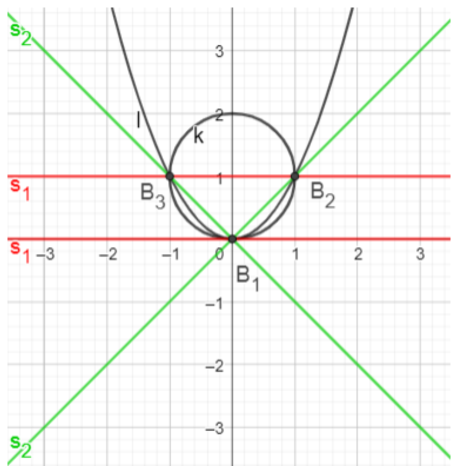
Slika 13: Pramen konika prve vrste sa singularnim konikama s_1, s_2 i s_3 (aplet[11])

4.2 Singularne konike pramena druge i treće vrste

Ako kubni oblik (7) ima dve različite nule višestrukosti jedan i dva, tada u pramenu imamo tačno dve singularne konike s_1 i s_2. Razmotrimo slučaj kada singularnoj konici s_1 odgovara dvostruko rešenje, a konici s_2 jednostruko. Tada s_1 može da bude par pravih ili dvostruka prava, dok je s_2 uvek par različitih pravih.

U slučaju kada je s_1 par pravih, imamo pramen konika druge vrste u kom sve konike prolaze kroz tri različite tačke. Od ove tri tačke, jedna je tačka-tangenta i ona je višestrukosti dva jer se u njoj seku svake dve konike i svake dve imaju zajedničku tangentu. U našem slučaju, to je tačka B_1 i u njoj imamo dodir prvog reda.

Na sledećoj slici možemo da vidimo konike k i l, kao i dve singularne konike s_1 i s_2.



Slika 14: Pramen konika druge vrste sa singularnim konikama s_1 i s_2
(aplet [12])

Sada ćemo da navedemo jedan primer singularnih konika u pramenu druge vrste. U šestom poglavlju u delu Zadatka 2 će biti određene singularne konike za još jedan pramen druge vrste, a u ostalim zadacima će biti određene singularne konike za još četiri vrste pramena konika.

Primer 3.

Neka su dati krug i parabola jednačinama

$$k: \; x^2 + y^2 - 2y = 0,$$

$$l: \; x^2 - y = 0,$$

u afinim koordinatama.

U homogenim koordinatama, jednačine konika su oblika

$$k: \; x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 = 0,$$

$$l:\ x_1^2 - x_2x_3 = 0.$$

Matrice konika k i l su, redom

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

čije su determinante $det\ \boldsymbol{K} = -1 \neq 0$, $det\ \boldsymbol{L} = -\frac{1}{4} \neq 0$. Determinante su različite od nule, pa su matrice regularne, tj. k i l su regularne konike. Provera regularnosti matrica potvrđuje pretpostavljeno, tj. da su date konike krug i parabola regularne. Sada imamo da je linearna kombinacija $\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{L}$, za $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ sledeća

$$\lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \lambda+\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda - \frac{1}{2}\mu \\ 0 & -\lambda - \frac{1}{2}\mu & 0 \end{bmatrix},$$

pa je $det\ (\lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L}) = -\ 2(\lambda + \mu)\ (2\lambda + \mu)^2$. Da bi našli singularne konike pramena, pitamo se za koje λ i μ će ova determinanta biti jednaka nuli? Dakle, konika je singularna kada je $\mu = -\lambda$ ili $\mu = -2\lambda$.

Za $\mu = -\lambda$ imamo

$$\lambda(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\frac{1}{2}\lambda \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda & 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Anuliranjem determinante matrice dobijamo singularnu koniku $x_2^2 - x_2x_3 = 0$ koja je par pravih. Kada dobijenu jednačinu napišemo u afinim koordinatama, dobijamo singularnu koniku s_1: $y^2 - y = 0$. Primetimo da su te prave paralelne u afinoj ravni, ali se u projektivnoj ravni one seku.

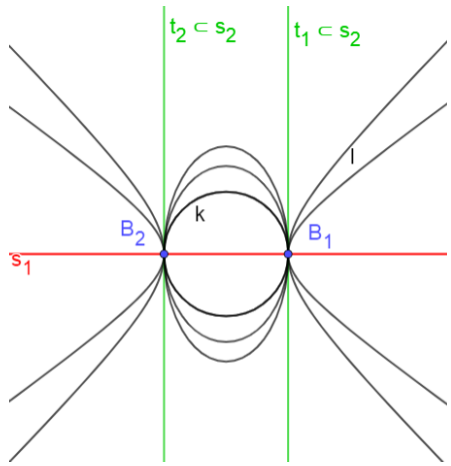
Za $\mu = -2\lambda$ imamo

$$\lambda(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{L}) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iz čega anuliranjem determinante dobijene matrice imamo $-x_1^2 + x_2^2 = 0$. U afinim koordinatama, jednačina singularne konike je s_2: $-x^2 + y^2 = 0$ i to je isto par pravih (vidi Sliku 14).

Sada ćemo razmotriti slučaj kada je singularna konika s_1 dvostruka prava, dok je s_2 unija tangenti t_1 i t_2. U ovom slučaju sve konike prolaze kroz tačke B_1 i B_2 koje su višestrukosti dva. U tim tačkama imamo dodir prvog reda. Dakle, ovo je pramen konika treće vrste. Konike u ovom pramenu dodiruju jedna drugu u B_1 i B_2.

Na sledećoj slici su prikazane neke konike u pramenu treće vrste, kao i singularne konike s_1 i s_2 (Zadatak 3).



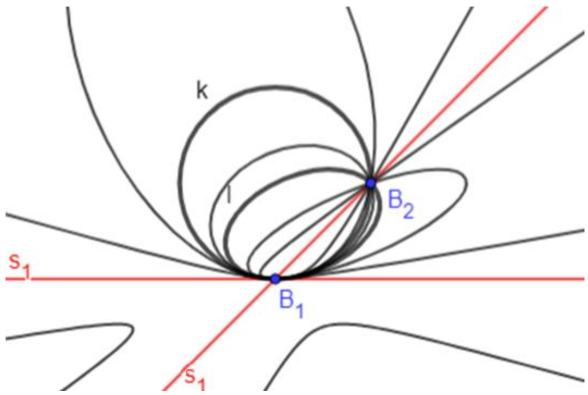
Slika 15: Pramen konika treće vrste i singularne konike s_1 i s_2 (aplet [13])

4.3 Singularne konike pramena četvrte i pete vrste

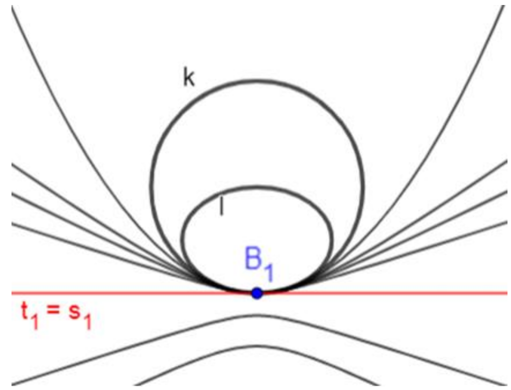
U trećem slučaju posmatramo koren višestrukosti tri koji se dobija iz jednačine (7), pa u pramenu postoji samo jedna singularna konika s_1. Ako se s_1 sastoji od para pravih onda je to pramen konika četvrte vrste, a ako je ona dvostruka prava, onda je pramen pete vrste.

Posmatrajmo prvo kada je singularna konika par pravih. Ona se sastoji od prave B_1B_2 i tangente u tački-tangenti (B_1, t_1). Svake dve konike u pramenu se dodiruju u B_2 i tački B_1 u kojoj imamo dodir drugog reda. Dakle, svake dve konike u pramenu četvrte vrste oskuliraju jedna drugu. Vidi Sliku 16 (Zadatak 4).

Kada je singularna konika dvostruka prava, ona je tangenta u tački B_1 u kojoj imamo dodir trećeg reda. Ona je tangentna na sve konike u pramenu. Dakle, svake dve konike u pramenu pete vrste se seku u tački B_1 i hiperoskuliraju ka B_1. Vidi Sliku 17 (Zadatak 5).



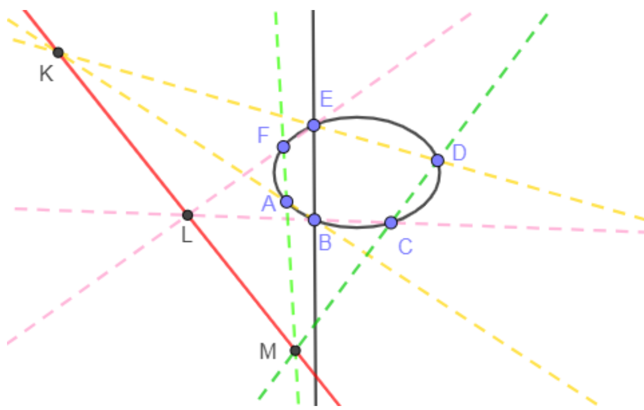
Slika 16: Pramen konika četvrte vrste i singularna konika *s_1* (aplet [7])



Slika 17: Pramen konika pete vrste i singularna konika *s_1* (aplet [8])

Pramenove konika možemo da iskoristimo za dokaz Paskalove teoreme koju navodimo u nastavku.

Teorema 4. (**Paskalova**[6] **teorema**) *Neka je šestotemenik ABCDEF upisan u koniku. Tada su preseci njegovih naspramnih ivica kolinearne tačke.*



Slika 18: Paskalova teorema (aplet [14])

Dokaz:
U dokazu ćemo ilustrovati slučaj kada se tačke šestotemenika nalaze na elipsi jer su joj ostale ne-nula regularne krive projektivno ekvivalentne.
Neka su preseci parova pravih *AB* ∩ *DE* = *K*, *BC* ∩ *EF* = *L* *i* *CD* ∩ *FA* = *M*. Posmatrajmo dva pramena konika sa baznim tačkama *A*, *B*, *E*, *F*, i *B*, *C*, *D*, *E*. Za osnovne konike pramena

[6] Blez Paskal (Blaise Pascal) (1623 - 1662) - francuski matematičar, fizičar i filozof. Sa 16 godina piše raspravu o konusnim presecim - *Essai sur les coniques*. Iako je veći deo izgubljen, važan deo je sačuvan, poznat pod nazivom *Paskalova teorema*. Sa 19 godina je otpočeo rad na mehaničkom kalkulatoru koji se zvao *Paskalina*. Cena i složenost mašine onemogućili su dalju proizvodnju, kao i činjenica da je samo Paskal mogao da je popravi.

izabraćemo singularne konike, zadate kao par pravih, a njihove jednačine ćemo pisati pomoću proizvoda pravih. Osim ivica šestotemenika, trebaće nam još i prava BE.

Prvi pramen je oblika $AB\ EF + \lambda\ AF\ BE = 0$, a drugi je $BC\ DE + \mu\ CD\ BE = 0$.

Pošto data konika prolazi kroz svih 6 tačaka, ona pripada i jednom i drugom pramenu. Zbog toga važi:

$$AB\ EF + \lambda\ AF\ BE = BC\ DE + \mu\ CD\ BE.$$

Sledi da je

$$AB\ EF - BC\ DE = -\lambda\ AF\ BE + \mu\ CD\ BE = (-\lambda\ AF + \mu\ CD)\ BE.$$

Konika $(-\lambda\ AF + \mu\ CD)\ BE = 0$ je singularna jer je ona proizvod prave BE i jedne prave koja prolazi kroz presek pravih AF i CD, a to je tačka M. Sledi da je i konika $AB\ EF - BC\ DE = 0$ singularna. Ovoj konici pripada tačka K (jer se nalazi na pravama AB i DE) i tačka L (jer se nalazi u preseku EF i BC). Pošto je prava BE deo te singularne konike, a tačke K i L ne pripadaju pravi BE, sledi da se ova konika sastoji od pravih KL i BE.
Dakle, tačka M pripada toj singularnoj konici, ali nije na pravoj BE, pa pripada pravoj KL. □

5. Pramenovi krugova

Svaki krug euklidske ravni sadrži dve fiksne tačke I_1 = (1 : i : 0) i I_2 = (1 : -i : 0) koje nazivamo *kružne tačke*. One pripadaju beskonačno dalekoj pravoj kompleksne projektivne ravni. Krug određuju još tri tačke koje mogu biti realne ili konjugovano kompleksne. Na taj način ma koji pramen krugova možemo da posmatramo kao pramen konika. Navešćemo prvo teoremu o kružnim tačkama.

Teorema 5. *Svaki krug sadrži dve fiksne tačke* I_1 = (1 : i : 0) *i* I_2 = (1 : -i : 0).

Dokaz:
U jednačinu proizvoljnog kruga sa centrom u $O(a,b)$ i poluprečnikom r ćemo ubaciti homogene koordinate (x_1, x_2, x_3) = (1 : ±i : 0),

$$\left(\frac{x_1}{x_3} - a\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3} - b\right)^2 = r^2.$$

Nakon množenja jednačine sa x_3^2, dobijamo

$$(x_1 - ax_3)^2 + (x_2 - bx_3)^2 = r^2\, x_3^2.$$

Zamenom koordinata kružnih tačaka,

$$(1 - 0)^2 + (\pm i - 0)^2 = 0$$

dobijamo tačnu jednačinu, pa zaključujemo da svaki krug sadrži tačke I_1 i I_2 što znači da će se svaka dva kruga seći u te dve tačke. □

Kako je svaki pramen određen sa dve konike, u ovom slučaju su to dva kruga, razlikovaćemo četiri vrste pramena krugova s obzirom na međusobni odnos ta dva kruga.

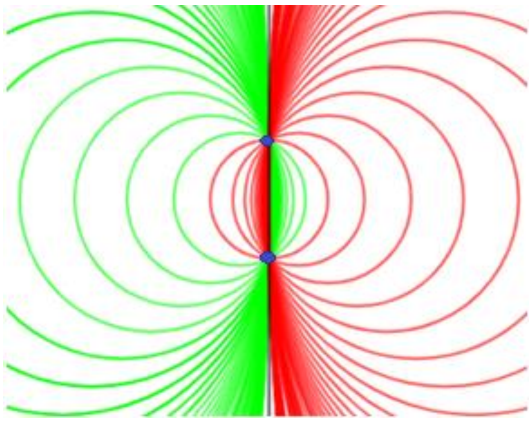
5.1 Eliptički pramen

Ako se svaka dva kruga seku u dve različite realne tačke, taj pramen nazivamo *eliptički pramen*. Neka su, primera radi, date tačke $B_1(0,1)$ = (0 : 1 : 1) i $B_2(0,-1)$ = (0 : -1 : 1). Tada jednačina svih krugova u eliptičkom pramenu ima sledeći oblik

$$x^2 + y^2 - 2\omega x - 1 = 0, \text{ za } \omega \in \mathbb{R}.$$

Svi krugovi tog pramena se seku u dve tačke B_1 i B_2 što smo pretpostavili, a I_1 i I_2 su sadržane u svakom krugu na osnovu Teoreme 5. Dakle, ovaj eliptički pramen krugova je pramen prve vrste čije su bazne tačke $B_1(0,1)$ = (0 : 1 : 1), $B_2(0,-1)$ = (0 : -1 : 1), I_1 = (1 : i : 0) *i* I_2 = (1 : -i : 0).

U pramenu imamo tri singularne konike koje su parovi pravih $I_1I_2 \cup B_1B_2$, $I_1B_1 \cup I_2B_2$ i $I_1B_2 \cup I_2B_1$. U realnoj projektivnoj ravni, od navedenih konika vidimo samo jednu pravu B_1B_2 iz prve singularne konike. Ostale prave su konjugovano kompleksne. Prava B_1B_2 naziva se *osa pramena*. Ona je takođe i radikalna osa[7] i osa simetrije.



Slika 19: Eliptički pramen (aplet [15])

5.2 Hiperbolički pramen

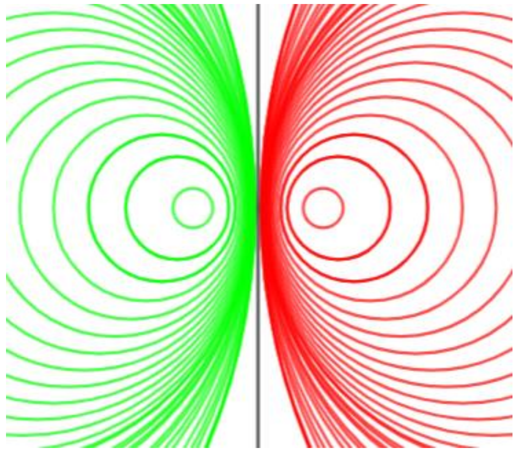
Ako se svaka dva kruga seku u dve konjugovano kompleksne tačke, takav pramen nazivamo *hiperbolički pramen*. Pošto u hiperboličkom pramenu nemamo realne bazne tačke, pretpostavimo, primera radi, da su date kompleksno konjugovane tačke $B_1(0,i) = (0 : i : 1)$ i $B_2(0,-i) = (0 : -i : 1)$. Jednačina krugova je tada

$$x^2 + y^2 - 2\omega x + 1 = 0, \text{ za } \omega \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Dakle, ovaj hiperbolički pramen krugova je pramen prve vrste čije su četiri imaginarne bazne tačke $B_1(0,i) = (0 : i : 1)$, $B_2(0,-i) = (0 : -i : 1)$, $I_1 = (1 : i : 0)$ i $I_2 = (1 : -i : 0)$.

U pramenu imamo tri singularne konike koje su parovi pravih $I_1I_2 \cup B_1B_2$, $I_1B_1 \cup I_2B_2$, $I_1B_2 \cup I_2B_1$. U realnoj projektivnoj ravni vidimo samo pravu B_1B_2. Ona je osa pramena, radikalna osa, a takođe i osa simetrije.

[7] Radikalna osa dva kruga - prava na kojoj sve tačke imaju jednake potencije u odnosu na oba kruga.



Slika 20: Hiperbolički pramen (aplet [16])

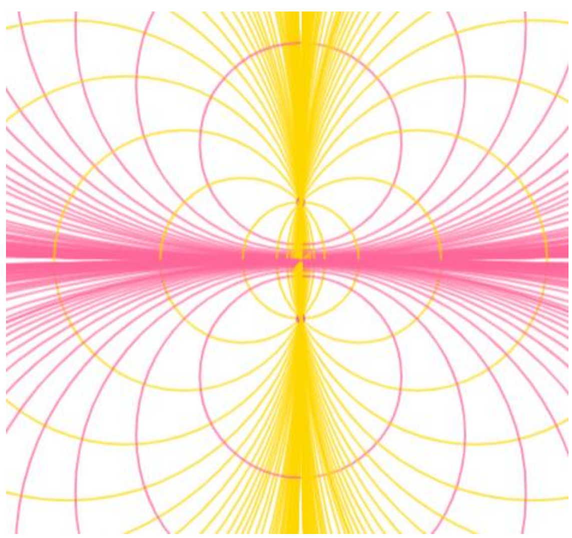
Hiperbolički pramen je familija Apolonijevih krugova ([7]) određenih tačkama B_1 i B_2, tj. krugovi

$$k_m = \{P \mid PB_1 = m\ PB_2\},$$

za $m > 0$ i fiksirane tačke B_1 i B_2.

Odgovarajući eliptički pramen čine svi krugovi koji sadrže B_1 i B_2. Svaki krug eliptičkog pramena je ortogonalan na svaki krug hiperboličkog pramena.

Na sledećoj slici su prikazana dva pramena, eliptički pramen kroz tačke B_1 i B_2, obojen žutom bojom i hiperbolički pramen određen sa B_1 i B_2, obojen roze bojom. Osa eliptičkog pramena je prava $x = 0$, a hiperboličkog prava $y = 0$. Oni formiraju takozvanu *ortogonalnu mrežu* što znači da je svaki krug jednog pramena ortogonalan na svaki krug drugog pramena.



Slika 21. Ortogonalna mreža eliptičkog i hiperboličkog pramena (aplet [17])

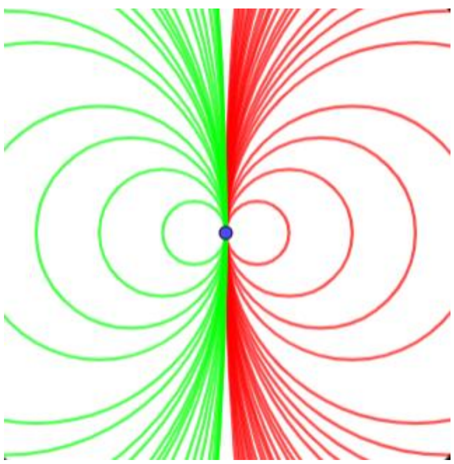
5.3 Parabolički pramen

Ako se svaka dva kruga pramena dodiruju u istoj tački, pramen nazivamo *parabolički pramen.* Svi krugovi u paraboličkom pramenu imaju zajedničku tačku-tangentu (B_1,t_1). Neka je, na primer, $B_1(0,0) = (0 : 0 : 1)$, a t_1 tangenta $x = 0$. Njihova jednačina je oblika

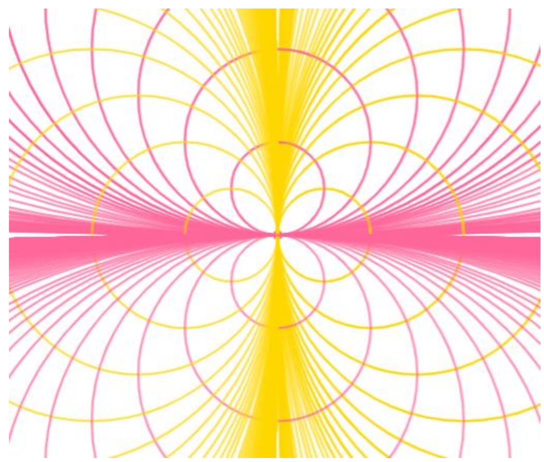
$$x^2 + y^2 - 2\omega x = 0, \text{ za } \omega \in \mathbb{R}.$$

Ovaj parabolički pramen krugova je pramen druge vrste čije su tačke $B_1(0,0) = (0 : 0 : 1)$, $I_1 = (1 : i : 0)$ i $I_2 = (1 : -i : 0)$, a t_1: $x = 0$ tangenta na sve krugove u tački B_1.

Singularne konike u ovom pramenu su dva para pravih $I_1B_1 \cup I_2B_1$ i $I_1I_2 \cup t_1$. U ovom slučaju vidimo samo tangentu t_1 koja je osa pramena, radikalna osa i osa simetrije.



Slika 22: Parabolički pramen (aplet [18])



Slika 23: Ortogonalna mreža dva parabolička pramena (aplet [19])

Na Slici 23 su prikazana dva parabolička pramena. Krugovi pramena žute boje dodiruju pravu $x = 0$ u tački $B_1(0,0) = (0 : 0 : 1)$, a pramena roze boje pravu $y = 0$ u toj tački. Oni formiraju ortogonalnu mrežu jer su svaka dva kruga ova dva pramena među sobom ortogonalna. Dakle, pramen koji je konjugovan u odnosu na parabolički pramen je takođe parabolički.

5.4 Koncentrični krugovi

Krugove čiji su centri isti nazivamo *koncentričnim krugovima*. Neka je centar krugova, na primer, tačka $O(0,0) = (0 : 0 : 1)$. Tada je jednačina krugova data sa

$$x^2 + y^2 = \omega^2, \text{ za } \omega \in \mathbb{R}.$$

Pokazaćemo da su koncentrični krugovi pramen treće vrste, tj. da sadrže dve tačke-tangente. Na osnovu Teoreme 5, znamo da svaki krug sadrži kružne tačke, pa su to dve koje tražimo. Neka su date dve proizvoljne jednačine krugova u homogenim koordinatama

$$k_1 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

$$k_2 : x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 = 0.$$

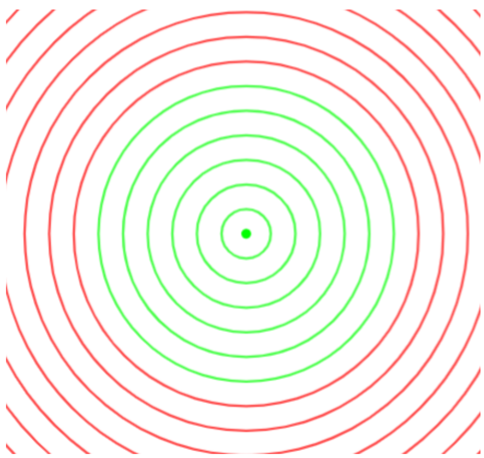
Proverićemo uslov tangentnosti u tački I_1 na oba kruga.

$$t_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = [1 : i : 0] \, ,$$

$$t_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} = [1 : i : 0] \, .$$

Dakle, prava $t_1 = t_2$ je zajednička tangenta oba kruga u tački I_1. Analogno, u I_2 imamo zajedničku tangentu krugova k_1 i k_2. Dakle, koncentrični krugovi su pramen treće vrste.

Singularne konike u ovom pramenu su par pravih $t_1 \cup t_2$ i dvostruka prava I_1I_2. U realnoj projektivnoj ravni ne vidimo ni jednu singularnu koniku jer su one konjugovano kompleksni parovi pravih.



Slika 24: Koncentrični krugovi (aplet [20])

Primetimo da postoji samo jedan krug koji sa datom krivom ima dodir drugog ili trećeg reda (jer je krug određen sa tri tačke). To je takozvani *oskulatorni krug* te krive u toj tački i njegov poluprečnik je inverzan krivini krive u toj tački ([6]).

Zato u četvrtoj i petoj vrsti pramena konika možemo imati samo jedan krug. To je razlog zašto ne postoje pramenovi krugova koji su četvrte i pete vrste.

6. Zadaci

U ovom poglavlju su dati konkretni primeri svih pet pramenova konika. Za svaki su date tačke, tangente i konike k i l. Određen je pramen, zatim parabole (ako ih ima), hiperbole, elipse, krugovi u pramenu kao i singularne konike.

Zadatak 1.

Neka su date tačke $B_1(1,1)$, $B_2(-1,1)$, $B_3(-1,-1)$, $B_4(1,-1)$ i konike

$$k : x^2 + y^2 = 2,$$

$$l : \frac{x^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} - y^2 = 1.$$

1) Proverićemo da li date konike određuju pramen prve vrste.
   Ako zamenimo koordinate zadatih tačaka u konike k i l, dobijamo tačne jednačine, pa vidimo da se one nalaze u preseku obe konike, tj. B_1, B_2, B_3 i B_4 su bazne tačke pramena prve vrste. Na osnovu Teoreme 3, sledi da linearna kombinacija konika k i l daje pramen za proizvoljne $m,n \in \mathbb{R}$. Pritom ćemo koniku l zapisati u sličnom obliku, pa dobijamo
   $$m(x^2 + y^2 - 2) + n(2x^2 - y^2 - 1) = 0.$$
2) Sada ćemo da uvrstimo koordinate tačaka B_i , $i \in \{1,2,3\}$ u jednačinu krive (3) uvedenu u prvom poglavlju i dobiti kako izgleda pramen konika kroz četiri bazne tačke. Dobijamo sistem od četiri jednačine sa šest nepoznatih koeficijenata $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$
   $$a + b + c + d + e + f = 0,$$
   $$a - b + c - d + e + f = 0,$$
   $$a + b + c - d - e + f = 0,$$
   $$a - b + c + d - e + f = 0.$$
   Rešavajući ga, dobijamo jednačinu pramena prve vrste
   $$ax^2 + cy^2 - (a + c) = 0. \qquad (8)$$
   Deljenjm sa $c \neq 0$ dobijamo
   $$\frac{a}{c}x^2 + y^2 - (\frac{a}{c} + 1) = 0,$$
   a smenom $\frac{a}{c} = \omega$, dobijamo ekvivalentnu jednačinu pramena konika prve vrste
   $$\omega x^2 + y^2 - (\omega + 1) = 0.$$
   Primetimo da za $c = 0$ dobijamo singularnu koniku $x^2 - 1 = 0$ koju ćemo razmotriti kasnije.
3) Odredićemo koje konike u pramenu su parabole, koje elipse, a koje hiperbole.

Već vidimo da je data konika l hiperbola. Ako podelimo jednačinu (8) sa $a + c \neq 0$ dobijamo

$$\frac{x^2}{\frac{a+c}{a}} + \frac{y^2}{\frac{a+c}{c}} = 1.$$

Elipse dobijamo u slučaju kada su $\frac{a+c}{a} > 0$ i $\frac{a+c}{c} > 0$, tj. koeficijenti $a \neq c$ oba istog znaka. Hiperbole dobijamo kada su $\frac{a+c}{a}$ i $\frac{a+c}{c}$ suprotnog znaka, tj. kada su $a \neq c$ suprotnog znaka. Odnosno, za $\omega > 0$ imamo elipse, a za $\omega < 0$ hiperbole. Za $\omega = 0$ imamo singularnu koniku koju ćemo u daljem tekstu zadatka da nađemo. Parabole u ovom pramenu konika nemamo.

4) Sada ćemo da nađemo za koje vrednosti u pramenu dobijamo krug.
Jednačinu (8) ćemo zapisati uz pomoć veze sa homogenim koordinatama

$$ax_1^2 + cx_2^2 - (a + c) = 0.$$

Kada uvrstimo koordinate kružnih tačaka (1 : ±i : 0) u dobijenu jednačinu, imamo sistem

$$a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{i}^2 + 0 + 0 = 0,$$

$$a - b\,\mathrm{i} + c\,(-\mathrm{i})^2 + 0 + 0 = 0.$$

Rešavanjem sistema dve jednačine, zaključujemo da u pramenu dobijamo krugove za $a = c$, tj za $\omega = 1$. To je upravo krug k koji je dat u zadatku.

5) Odredićemo singularne konike pramena. U Poglavlju 4.1 je rečeno da se u pramenu prve vrste javljaju samo singularne konike koje su par pravih. Matrice konika k i l ćemo označavati sa $\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{L}$, redom, pa je

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ i } \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tada je $det\ \boldsymbol{K} = -2 \neq 0$, $det\ \boldsymbol{L} = 2 \neq 0$. Determinante matrica su različite od nule što znači da su regularne, pa su k i l su regularne konike. Provera regularnosti matrica potvrđuje pretpostavljeno, tj. da su date konike krug i hiperbola regularne. Sada imamo da je linearna kombinacija $\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{L}$, za $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, data sa

$$\lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \mu & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda - \mu \end{bmatrix}$$

čija je determinanta $det\ (\lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L}) = -(\lambda + 2\mu)\ (\lambda - \mu)\ (2\lambda + \mu)$. Da bi našli singularne konike pramena, pitamo se za koje vrednosti λ i μ će ova determinanta biti jednaka nuli? Dakle, konika je singularna kada je $\mu = -\frac{\lambda}{2}$ ili $\mu = \lambda$ ili $\mu = -2\lambda$.

Za $\mu = -\frac{\lambda}{2}$ imamo

$$\lambda(\boldsymbol{K} - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2}\lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Anuliranjem determinante ove matrice dobijamo singularnu koniku u afinim koordinatama $\frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2} = 0$, tj. s_1: $y^2 - 1 = 0$.

Za $\mu = \lambda$ imamo

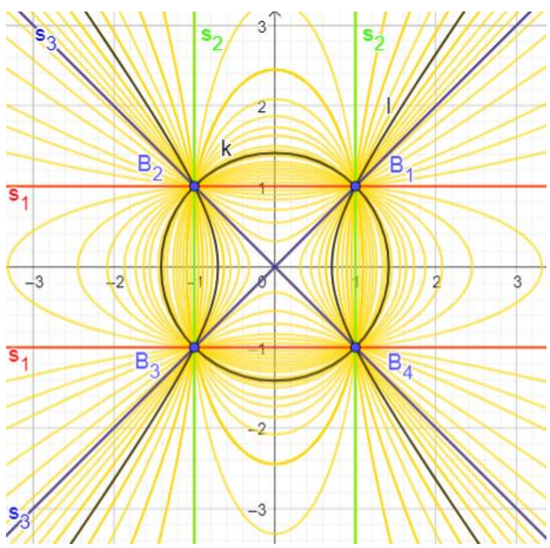
$$\lambda(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}) = \begin{bmatrix} 3\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3\lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Anuliranjem determinante dobijamo singularnu koniku $3x^2 - 3 = 0$, tj. s_2: $x^2 - 1 = 0$. Konačno, za $\mu = -2\lambda$ sledi da je

$$\lambda(\boldsymbol{K} - 2\boldsymbol{L}) = \begin{bmatrix} -3\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pa dobijamo treću singularnu koniku pramena s_3: $x^2 - y^2 = 0$.

Na sledećoj slici se nalaze date konike k i l, tri singularne konike s_1, s_2 i s_3 u bojama parova pravih, kao i još neke konike u pramenu označene žutom bojom.



Slika 25: Konike u pramenu prve vrste (aplet [11])

Zadatak 2.

Neka je data tačka-tangenta (B_1,t_1), gde je B_1(0,0), a t_1: $x = 0$ i dve tačke B_2(1,-1), B_3(1,1), kao i krug k i parabola l

$$k : (x-1)^2 + y^2 = 1,$$

$$l : y^2 = x.$$

1) Na osnovu Teoreme 3, linearna kombinacija k i l daje pramen za proizvoljne $m,n \in \mathbb{R}$

$$m(x^2 + y^2 - 2x) + n(y^2 - x) = 0,$$

gde ćemo za k koristiti jednačinu oblika $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

2) Ako zamenimo koordinate zadatih tačaka B_2 i B_3 u jednačine konika, dobijamo tačne jednačine što znači da tačke pripadaju obema konikama. Proverićemo dodatno da li tačka-tangenta (B_1,t_1) pripada pramenu. Iz uslova tačke-tangente (B_1,t_1) dobijamo dve jednačine. B_1 i t_1 ćemo zapisati uz pomoć veze sa homogenim koordinatama, tj. $B_1(0,0) = (0 : 0 : 1)$, $t_1[1 : 0 : 0]$. Uslov da B_1 bude tačka-tangenta je $\lambda t_1 = \boldsymbol{A}B_1$, gde je $\boldsymbol{A}$ matrica jednačine drugog reda (2), a $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dakle, sledi

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pravilom množenja dveju matrica i pravilom množenja matrice koeficijentom dobijamo

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

što je ekvivalentno sistemu

$$d = \lambda,$$
$$e = 0,$$
$$f = 0.$$

Zaključujemo da je d realan broj različit od nule, pa smo dobili samo dve jednačine. Zamenom koordinata tačaka B_2 i B_3 u jednačinu (2), kao i $e = 0$ i $f = 0$, sledi

$$a - 2b + c + 2d = 0,$$
$$a + 2b + c + 2d = 0.$$

Rešavanjem sistema i ubacivanjem dobijenih vrednosti u jednačinu (2), dobijamo pramen konika druge vrste

$$ax^2 + cy^2 - (a + c)x = 0.$$

Deljenjem sa $c \neq 0$, sledi

$$\frac{a}{c}x^2 + y^2 - (\frac{a}{c} + 1)x = 0.$$

Smenom $\frac{a}{c} = \omega \in \mathbb{R}$, dobijamo još jedan oblik jednačine pramena druge vrste

$$\omega x^2 + y^2 - (\omega + 1)x = 0. \tag{9}$$

Primetimo da za $c = 0$ dobijamo singularnu koniku $x^2 - x = 0$ koju ćemo razmotriti kasnije.

3) Sada ćemo videti za koje vrednosti ω se u pramenu dobija parabola, hiperbola i elipsa. Ako jednačini pramena (9) pridružimo homogene koordinate

$$\omega x_1^2 + x_2^2 - (\omega + 1)x_1x_3 = 0, \tag{10}$$

zamenimo $x_3 = 0$, tj. krivu presečemo sa beskonačno dalekom pravom, dobijamo

$$\omega x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Za $\omega = 0$ imamo $x_2 = 0$, tj. $(x_1 : x_2 : x_3) = (0 : 1 : 0)$, pa je to parabola (to je upravo data konika l).

Za $\omega > 0$ imamo $x_1 = x_2 = 0$, odakle je $(x_1 : x_2 : x_3) = (0 : 0 : 0)$, što znači da nema preseka sa beskonačno dalekom pravom, tj. u tom slučaju u pramenu imamo elipse. Za $\omega < 0$ sledi sa je $-|\omega|x_1^2 + x_2^2 = 0$ akko je $x_2 = x_1 \pm \sqrt{|\omega|}$, tj. $(x_1 : x_1 \pm \sqrt{|\omega|} : 0) = (1 : \pm \sqrt{|\omega|} : 0)$. Dakle, u ovom slučaju dobijamo hiperbole jer imamo presek sa beskonačno dalekom pravom $x_3 = 0$.

4) Naći ćemo za koje vrednosti parametra ω u pramenu dobijamo krug.
Zamenom koordinata kružnih tačaka $(1 : \pm i : 0)$ u jednačinu pramena (10), dobijamo sistem dve jednačine

$$\omega + i^2 - (\omega + i)\cdot 0 = 0,$$
$$\omega + (-i)^2 - (\omega + i)\cdot 0 = 0,$$

odakle sledi da je $\omega = 1$. Dakle, za $\omega = 1$ u pramenu imamo krug, a to je upravo krug k koji je dat u zadatku.

5) Singularne konike u pramenu druge vrste su par pravih, pa ćemo za ovaj primer da ih nađemo. Matrice datih konika k i l su, redom

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tada su njihove determinante $det\, \boldsymbol{K} = -4 \neq 0$, $det\, \boldsymbol{L} = -1 \neq 0$. Dakle, matrice su regularne, tj. k i l su regularne konike. Provera regularnosti matrica potvrđuje pretpostavljeno, tj. da su date konike krug i parabola regularne konike. Sada imamo da je linearna kombinacija $\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{L}$, za $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ data sa

$$\lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -2\lambda - \mu \\ 0 & \lambda + \mu & 0 \\ -2\lambda - \mu & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

čija je determinanta $det\,(\lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L}) = -(\lambda + \mu)(2\lambda + \mu)^2$. Da bi našli singularne konike pramena, moramo naći λ i μ za koje će ova determinanta biti jednaka nuli. Dakle, konika je singularna kada je $\mu = -\lambda$ ili $\mu = -2\lambda$.

Za $\mu = -\lambda$ sledi

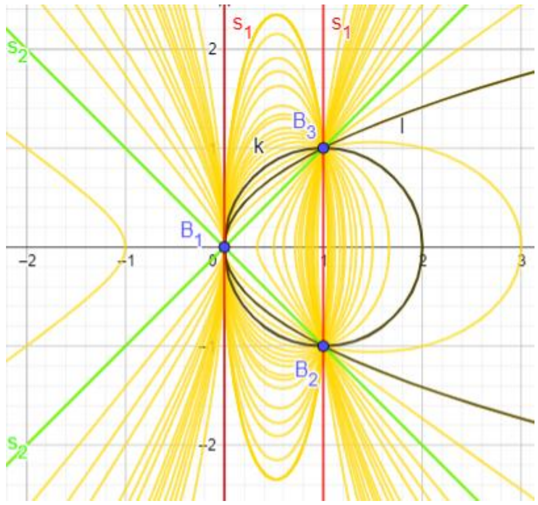
$$\lambda(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{L}) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Anuliranjem determinante dobijamo jednačinu singularne konike u afinim koordinatama s_1: $x^2 - x = 0$.

Za $\mu = -2\lambda$ je

$$\lambda(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pa dobijamo singularnu koniku u afinim koordinatama s_2: $x^2 - y^2 = 0$.



Slika 26: Konike u pramenu druge vrste (aplet [21])

Zadatak 3.

Neka su date dve tačke-tangente (B_1, t_1), (B_2, t_2) , gde su $B_1(1,0)$, t_1: $x = 1$ i $B_2(-1,0)$, t_2: $x = -1$, kao i kolike

$$k: \; x^2 + y^2 = 1,$$
$$l: \; x^2 - y^2 = 1.$$

1) Na osnovu Teoreme 3, znamo da linearna kombinacija konika k i l daje pramen za proizvoljne $m,n \in \mathbb{R}$

$$m(x^2 + y^2 - 1) + n(x^2 - y^2 - 1) = 0.$$

2) Da bismo na drugi način našli jednačinu pramena treće vrste, date tačke i tangente ćemo zapisati uz pomoć veze sa homogenim koordinatama, $B_1(1,0) = (1 : 0 : 1)$, $B_2(-1,0) = (-1 : 0 : 1)$, $t_1[1 : 0 : -1]$ i $t_2[1 : 0 : 1]$. Ako zamenimo koordinate tačaka B_1 i B_2 u jednačine k i l, dobijamo tačne jednačine, što znači da konike sadrže te dve tačke. Uslov da B_1 bude tačka-tangenta je $\lambda t_1 = \boldsymbol{A}B_1$, gde je $\boldsymbol{A}$ matrica jednačine drugog reda, a $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dakle, imamo sledeće

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pravilom množenja dveju matrica i množenja matrice koeficijentom, dobijamo

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ d+f \end{bmatrix}$$

što je ekvivalentno sistemu

$$a + d = \lambda,$$
$$b + e = 0,$$
$$d + f = -\lambda.$$

Analogno, kako je B_2 tačka-tangenta, za $\mu \in \mathbb{R}$, sledi

$$\mu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ekvivalentno sa

$$-a + d = \mu,$$
$$-b + e = 0,$$
$$-d + f = \mu.$$

Dakle, dobili smo sistem od šest jednačina sa osam nepoznatih. Rešavanjem se svode na samo dva nepoznata koeficijenta. Kada ih ubacimo u jednačinu (2), dobijamo

$$ax^2 + by^2 - a = 0. \tag{11}$$

Ako jednačinu podelimo sa $b \neq 0$ i uvedemo smenu $\frac{a}{b} = \omega \in \mathbb{R}$, dobijamo pramen konika

$$\omega x^2 + y^2 - \omega = 0.$$

Dakle, ovo je jednačina pramena konika kroz dve tačke-tangente.

Primetimo da za $b = 0$ dobijamo singularnu koniku $x^2 - 1 = 0$ koju ćemo videti kasnije.

3) Pramen konika treće vrste ne sadrži parabole. Naći ćemo pod kojim uslovom su konike pramena elipse, a kada su hiperbole. Deljenjem jednačine (11) sa $a \neq 0$, dobijamo

$$x^2 + \frac{y^2}{\frac{a}{b}} = 1\ .$$

Ako je $\frac{a}{b} > 0$, zaključujemo da se za $a \neq b$ dobija elipsa kada su oba istog znaka. Hiperbola se dobije za $\frac{a}{b} < 0$, tj. kada su suprotnog znaka. Odnosno, za $\omega > 0$ u pramenu imamo elipse, a za $\omega < 0$ hiperbole. Za $\omega = 0$ imamo singularnu koniku koju ćemo videti u nastavku.

4) Za koje vrednosti ω je konika u pramenu krug? Zamenom koordinata kružnih tačaka u jednačinu pramena $ax_1^2 + bx_2^2 - ax_3^2 = 0$, dobijamo uslov $a = b$. Dakle, za $\omega = 1$ u pramenu konika se pojavljuje krug, a to je upravo k data u zadatku.

5) Singularne konike dobijamo kao i u prethodnim zadacima. Neka su matrice konika k i l

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

čije su determinante *det* $\boldsymbol{K}$ = –1 ≠ 0, *det* $\boldsymbol{L}$ = 1 ≠ 0, što znači da su matrice regularne, tj. k i l su regularne konike. Provera regularnosti matrica potvrđuje pretpostavljeno, tj. da su date konike krug i hiperbola regularne. Linearna kombinacija $\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{L}$, za $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ je

$$\lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \lambda+\mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-\mu \end{bmatrix},$$

pa je *det* $(\lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L}) = -(\lambda+\mu)^2(\lambda-\mu)$. Za $\mu = -\lambda$ ili $\mu = \lambda$ će determinanta biti jednaka nuli. Za $\mu = -\lambda$ je

$$\lambda(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{L}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

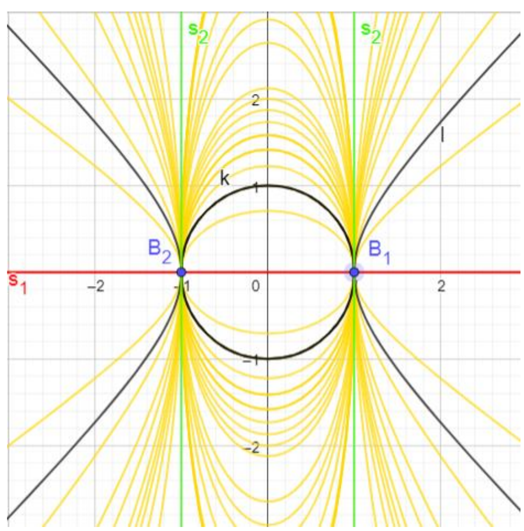
i dobijamo drugu singularnu koniku u afinim koordinatama s_1: $y^2 = 0$ koja je dvostruka prava.

Za $\mu = \lambda$ sledi

$$\lambda(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}) = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

i dobijamo singularnu koniku s_2: $x^2 - 1 = 0$, tj. par pravih.

Na sledećoj slici je prikazan pramen treće vrste sa rezultatima koje smo dobili u zadatku. Uočavamo da se elipse u pramenu nalaze u unutrašnjosti para pravih singularne konike s_2, a hiperbole u spoljašnjosti.



Slika 27: Konike u pramenu treće vrste (aplet [15])

Sada ćemo dati konstrukciju primera pramena oskulirajućih i hiperoskulirajućih konika.

Zadatak 4.

Neka je data tačka-tangenta (B_1, t_1) tako da je $B_1(0,0)$, t_1: $y = 0$ i tačke $B_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $A(0,1)$, a krug k je

$$k : x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Ubacivanjem veze sa homogenim koordinatama u date tačke dobijamo $B_1 = (0 : 0 : 1)$, $t_1 = [0 : 1 : 0]$, $B_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} : \frac{1}{2} : 1) = (1 : 1 : 2)$ i $A(0,1) = (0 : 1 : 1)$. Homologija u pramenu četvrte vrste je određena osom B_1B_2, centom B_1 i pravom AA'. Tačku A' dobijamo na sledeći način uzimajući proizvoljno $a \in \mathbb{R}$

$$A' = A + aB_1 = (0 : 1 : 1) + a(0 : 0 : 1) = (0 : 1 : 1+a).$$

Osa s je prava B_1B_2 koju računamo kao vektorski proizvod tačaka B_1 i B_2

$$\overrightarrow{B_1} \times \overrightarrow{B_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1 : 1 : 0).$$

Neka je $M(x,y) = (x : y : 1)$ proizvoljna tačka na krugu k. U preseku prave AM

$$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = (1-y : x : -x)$$

i ose dobijamo tačku X

$$X = \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{B_1 B_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-y & x & -x \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x : x : 1+x-y).$$

Tačku M' dobijamo u preseku prave CM i $A'X$. Prvo ćemo da nađemo oblik te dve prave, pa ćemo ih vektorski pomnožiti.

$$\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = (-y : x : 0),$$

$$\overrightarrow{A'} \times \overrightarrow{X} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1+a \\ x & x & 1+x-y \end{vmatrix} = (1-ax-y : x+ax : -x).$$

Konačno, slika tačke M je

$$M' = \overrightarrow{CM} \times \overrightarrow{A'X} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -y & x & 0 \\ 1-ax-y & x+ax & -x \end{vmatrix}$$

$$= (-x^2 : -xy : -y(x + ax) - x(1 - a\,x - y))$$

$$=(-x^2 : -xy : -yx - axy - x + ax^2 + xy)$$

$$= (-x^2 : -xy : - axy - x + ax^2).$$

Deljenjem prve dve koordinate trećom, dobijamo oblik

$$M' = \left(\frac{x}{1+a(y-x)} : \frac{y}{1+a(y-x)} : 1\right).$$

Uvešćemo oznake

$$x' = \frac{x}{1+a(y-x)}, \quad y' = \frac{y}{1+a(y-x)},$$

a odavde sledi

$$x = \frac{x'}{1+a(x'-y')}, \quad y = \frac{y'}{1+a(x'-y')}.$$

Sada ćemo dobijene vrednosti da zamenimo u jednačinu kruga k i sređivanjem izraza ćemo dobiti

$$x'^2 - ax'y' + y'^2(1 + a) - y' = 0.$$

Radi praktičnijeg i lepšeg zapisa, u daljem rešavanju nećemo koristiti nepoznate x' i y', već umesto njih x i y. Dakle, dobili smo pramen četvrte vrste

$$x^2 - axy + (1 + a)y^2 - y = 0. \tag{12}$$

Za proizvoljno a dobijamo koniku pramena. Uzmimo na primer $a = 1$, pa sledi da se krug k homologijom slika u elipsu l

$$l : x^2 - xy + 2y^2 - y = 0.$$

1) Pramen konika četvrte vrste ima jednu parabolu, a ostalo su ili hiperbole ili elipse, osim singularne konike koju ćemo naći u nastavku.
2) Ako u jednačinu (12) uvedemo vezu sa homogenim koordinatama,
   $$x_1^2 - ax_1x_2 + (1 + a)x_2^2 - x_1x_2 = 0$$
   i zamenimo koordinate kružnih tačaka I_1 i I_2, dobijamo sistem dve jednačine
   $$1 - a\mathrm{i} + \mathrm{i}^2(a + 1) - 0 = 0,$$
   $$1 + a\mathrm{i} + \mathrm{i}^2(a + 1) - 0 = 0,$$
   iz čega zaključujemo da za $a = 0$ u pramenu imamo krug.

3) Postoji samo jedna singularna konika u ovom slučaju. U Poglavlju 4.3 smo rekli da je to par pravih. Matrice konika k i l su, redom

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ i } \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

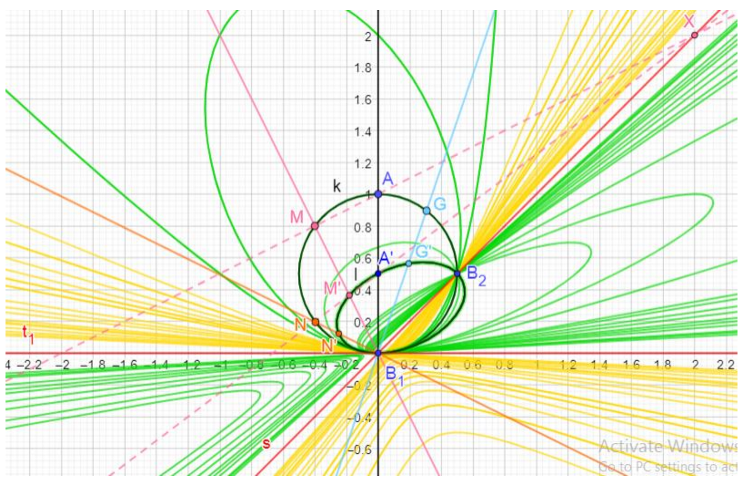
Determinante obe matrice su -1, tj. različite od nule, pa su matrice regularne, tj. k i l su regularne konike, pa smo potvrdili pretpostavljeno, tj. da su date konike krug i elipsa regularne. Sada je za $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, linearna kombinacija $\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{L}$

$$\lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu & -\mu & 0 \\ -\mu & \lambda + 2\mu & -\lambda - \mu \\ 0 & -\lambda - \mu & 0 \end{bmatrix}$$

gde je $det\,(\lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L}) = -(\lambda + \mu)^3$. Konika je singularna za $\mu = -\lambda$, pa je

$$\lambda(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{L}) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Anuliranjem determinante dobijamo singularnu koniku s_1: $xy - y^2 = 0$.



Slika 28: Konike u pramenu četvrte vrste (aplet [7])

Zadatak 5.

Neka je data tačka-tangenta (B_1,t_1), gde je $B_1(0,0)$, t_1: $y = 0$ i tačke $B_2(0,0)$ i $A(0,1)$ kao i krug k

$$k : x^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}.$$

U ovom zadatku ćemo naći pramen pete vrste koristeći postupak koji je analogan postupku za pramen četvrte vrste, s tim što je razlika ta što se tačka B_1 poklapa sa tačkom B_2, tj. osa homologije je tangenta t_1, a ne prava B_1B_2. Slika kruga k će biti nova elipsa l za a = 1, koje naravno može da se bira proizvoljno. Koristeći homogene koordinate, za proizvoljno $a \in \mathbb{R}$ imamo $A' = (0 : 1 : 1{+}a)$ jer je centar ista tačka kao u prethodnom zadataku.

Neka je $M(x,y) = (x : y : 1)$ proizvoljna tačka krug k. Kao u prethodnom zadatku, u preseku prave $AM = (1\text{-}y : x : \text{-}x)$ i ose t_1 dobijamo tačku X

$$X = \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{t_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1\text{-}y & x & \text{-}x \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x : 0 : 1\text{-}y).$$

Tačku M' dobijamo u preseku prave CM i $A'X$. Treba naći te dve prave, pa ih vektorski pomnožiti.

$$\overrightarrow{C} \times \overrightarrow{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = (\text{-}y : x : 0),$$

a $A'X$ je vektorski proizvod

$$\overrightarrow{A'} \times \overrightarrow{X} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1+a \\ x & 0 & 1-y \end{vmatrix} = (1\text{-}y : x+ax : \text{-}x).$$

Dakle, slika tačke M je

$$M' = \overrightarrow{CM} \times \overrightarrow{A'X} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -y & x & 0 \\ 1-y & x+ax & \text{-}x \end{vmatrix}$$
$$= (\text{-}x^2 : \text{-}xy : \text{-}y(x + ax) - x(1 - y))$$
$$= (\text{-}x^2 : \text{-}xy : - axy - x).$$

Deljenjem prve dve koordinate trećom, dobijamo

$$M' = \left(\frac{x}{1+ay} : \frac{y}{1+ay} : 1\right).$$

Uvešćemo oznake

$$x' = \frac{x}{1+ay}, \quad y' = \frac{y}{1+ay},$$

pa sledi

$$x = \frac{x'}{1-ax'}, \quad y = \frac{y'}{1-ax'}.$$

Zamenom dobijenih vrednosti u jednačinu kruga k i sređivanjem izraza dobijamo

$$x'^2 - ax'y' + y'^2(1 + a) - y' = 0.$$

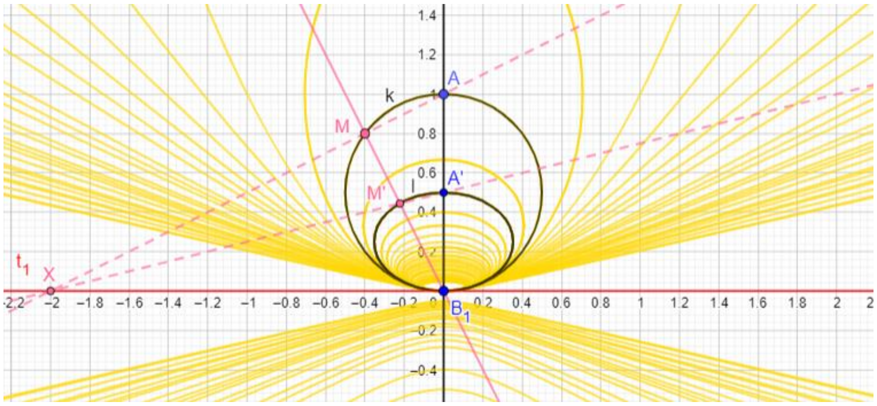
Radi lepšeg zapisa, stavljamo $x' = x$ i $y' = y$ i dobili smo pramen pete vrste za proizvoljno a

$$x^2 + (1 + a)y^2 - y = 0 \tag{13}$$

Na primer, za $a = 1$ imamo da se krug k homologijom slika u elipsu l

$$l : x^2 + 2y^2 - y = 0.$$

1) Odredićemo za koje vrednosti parametra a se u pramenu dobijaju parabole, hiperbole i elipse.
   Koristeći vezu sa homogenim koordinatama u (13), sledi
   $$x_1^2 + (1 + a)x_2^2 - x_2x_3 = 0. \tag{14}$$
   Presek sa beskonačno dalekom pravom $x_3 = 0$ je
   $$x_1^2 + (1 + a)x_2^2 = 0.$$
   Zaključujemo da za $a = -1$ imamo $x_1 = 0$, tj. $(x_1 : x_2 : x_3) = (1 : 0 : 0)$, pa imamo parabolu.
   Za $a > -1$ imamo da je $(x_1 : x_2 : x_3) = (0 : 0 : 0)$ što znači da u tom slučaju konike nemaju presek sa beskonačno dalekom pravim. Dakle, za takvo a u pramenu se javljaju elipse.
   Za $a < -1$ imamo $x_1^2 - |a|x_2^2 = 0$ akko $x_1 = x_2 \pm \sqrt{|a|}$, tj. $(x_2 \pm \sqrt{|a|} : x_2 : 0) = (\pm\sqrt{|a|} : 1 : 0)$.
   Dakle, za takvo a u pramenu imamo hiperbole.
2) Ako u jednačinu (14) zamenimo koordinate kružnih tačaka I_1 i I_2, dobijamo sistem dve jednačine koje se svode na jednu
   $$1 + (1 + a)(-1) - 0 = 0,$$
   pa za $a = 0$ u pramenu imamo krug.
3) Singularna konika pramena pete vrste će biti dvostruka prava (Poglavlje 4.3).
   Matrice $\boldsymbol{K}$ i $\boldsymbol{L}$ su, redom
   $$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
   čije su detrminante različite od nule. Za $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ dobijamo
   $$\lambda\boldsymbol{K} + \mu\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & -\lambda-\mu \\ 0 & -\lambda-\mu & 0 \end{bmatrix}$$
   i $det\ (\lambda\boldsymbol{K} + \lambda\boldsymbol{L}) = -(\lambda + \mu)^3$. Determinanta će biti jednaka nuli za $\mu = -\lambda$. Ubacivajući μ u gornju matricu
   $$\lambda(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{L}) = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   dobijamo jednačinu singularne konike u afinim koordinatama s_1: $y^2 = 0$, tj. $y = 0$.



Slika 29: Konike u pramenu pete vrste (aplet [8])

Zaključak

Proučavanje pramenova konika nam omogućava da mnogo bolje razumemo neke druge geometrijske objekte. Uz pomoć ovog pristupa, na primer, koncentrične krugove možemo da vidimo na drugačiji način, tj. da vidimo da oni nisu tek nabacani krugovi, nego da sadrže neke skrivene tačke koje utiču na njihov međusobni raspored.

U toku izrade master rada, upotreba GeoGebre mi je bila interesantna i jednostavna, a sama GeoGebra se pokazala jako dobrim alatom za crtanje, tj. uopšteno za geometriju. Međutim, ona nije svemoguća. Na primer, za data četiri elementa ne možemo da nađemo njima određenu koniku. Konkretno, ako su date dve tačke-tangente, u apletu ne postoji mogućnost da se nacrtaju konike odgovarajućeg pramena. Bilo bi interesanto da se GeoGebra proširi tako da možemo da dobijemo konike zadate bilo kojom kombinacijom elemenata. Ideja za neki budući rad je da se u GeoGebri naprave funkcije koje određuju bilo koju vrstu pramena konika. Na primer, ako je zadata jedna tačka i prava kroz tu tačku, da postoji funkcija koja nam daje sve konike odgovarajućeg pramena.

Postignut je cilj koji smo želeli, da se kroz primere uoče razlike u pramenovima jer smo za svaku vrstu našli jednačine, regularne i singularne konike i uspešno sve to preneli na aplete GeoGebra paketa. Slike u boji su nam omogućile da lako uočimo krive pramena. Stoga, lako možemo da zamislimo slične primere pramenova konika koji nisu navedeni u radu.

Apleti

[1] Problem udvostručavanja kocke: https://www.geogebra.org/m/eyytjzd6
[2] Kružni konus: https://www.geogebra.org/m/cgjbpds5
[3] Konusni preseci: https://www.geogebra.org/m/mnwaftrw
[4] Pramen konika prve vrste: https://www.geogebra.org/m/askwjr8s
[5] Pramen konika druge vrste: https://www.geogebra.org/m/dtwndjjr
[6] Pramen konika treće vrste: https://www.geogebra.org/m/m2qdmb2e
[7] Pramen konika četvrte vrste: https://www.geogebra.org/m/vgrxq45z
[8] Pramen konika pete vrste: https://www.geogebra.org/m/xbbnf9va
[9] Konika kroz tačku: https://www.geogebra.org/m/pvvmy9ey
[10] Konika koja nije u pramenu: https://www.geogebra.org/m/uacmmvbg
[11] Zadatak 1: https://www.geogebra.org/m/p3q3hfgh
[12] Pramen konika druge vrste sa singularnim konika: https://www.geogebra.org/m/mxexe6qk
[13] Zadatak 3: https://www.geogebra.org/m/qavam7cq
[14] Paskalova teorema: https://www.geogebra.org/m/nhscsmcr
[15] Eliptički pramen: https://www.geogebra.org/m/z7z9enmk
[16] Hiperbolički pramen: https://www.geogebra.org/m/m74pbc9b
[17] Ortogonalna mreža eliptičkog i hiperboličkog pramena: https://www.geogebra.org/m/beszkxan
[18] Parabolički pramen: https://www.geogebra.org/m/zxnnjqgq
[19] Ortogonalna mreža dva parabolička pramena: https://www.geogebra.org/m/jff2gna2
[20] Koncentrični krugovi: https://www.geogebra.org/m/nhsatkeb
[21] Zadatak 2: https://www.geogebra.org/m/us8dkwea

Literatura

[1] A. V. Akopyan, A. A. Zaslavsky, *Geometry of Conics*, Vol. 26 of Mathematical World, (prevod na engleski za American Mathematical Society), Moskva, 2007.

[2] D. Lippman, M. Rasmussen, *Precalculus: An investigation of Functions*, San Francisko, 2018.

[3] G. Glaeser, H. Stachel, B. Odehnal, *The Universe of Conics*, Berlin, 2016.

[4] J. Rađenović, master rad, mentor Z. Lučić, *Nerešivi problemi antičke matematike*, Prirodno-matematički fakultet, Beograd, 2014, http://elibrary.matf.bg.ac.rs/bitstream/handle/123456789/3859/MasterRadJasminaRadjenovic.pdf?sequence=1, pristupljeno 21.5.2020.

[5] J. Vidaković Mukić, Pramenovi konika - GeoGebra kanal, https://www.geogebra.org/u/jelenavm, pristupljeno 2.7.2020.

[6] M. Miličić, *Matematička analiza*, Beograd, 2012.

[7] S. Tomović, master rad, mentor Z. Lučić, *Kružni snopovi i transformacije u euklidskom modelu inverzivnog prostora*, Matematički fakultet, Beograd, 2013, http://elibrary.matf.bg.ac.rs/bitstream/handle/123456789/2570/Tomovic_Sinisa-master_rad.pdf?sequence=1, pristupljeno 10.6.2020.

[8] S. Vukmirović, N. Bokan, *Projektivna geometrija*, Matematički fakultet, Beograd, 2007.

[9] T. Berić, diplomski rad, mentor J. Šiftar, *Konika devet točaka*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2019, https://zir.nsk.hr/islandora/object/pmf%3A7666/datastream/PDF/view, pristupljeno 4.5.2020.

[10] T. Šukilović, *Geometrija 4*; *Krive drugog reda, pol i polara*, Prezentacija sa predavanja na Matematičkom fakultetu, Beograd, 2020, https://docplayer.rs/142792054-Geometrija-i-smer-deo-4-krive-u-ravni.html, pristupljeno 4.4.2020.

[11] Z. Petrić, O. Milinković, *Linearna algebra, skripta*, Beograd, 2018.

Biografija

Jelena Vidaković Mukić je rođena 1995. godine u Subotici. Osnovnu školu „Vladimir Nazor” završila je u Đurđinu 2010. godine kao nosilac Vukove diplome. Iste godine upisuje gimnaziju „Svetozar Marković” u Subotici, opšti smer, koju je završila 2014. godine. Odmah zatim upisuje osnovne akademske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike, koju završava 2019. godine. Iste godine upisuje master akademske studije na Matematičkom fakultetu u Beogradu, modul Teorijska matematika i primene. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija u januaru 2020. godine. Planira da radi u Srbiji u osnovnoj ili srednjoj školi kao profesor matematike.

Beograd, jul 2020.

Jelena Vidaković Mukić