

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Нина Уљаревић

**РОБУСНА ОПТИМИЗАЦИЈА ПОРТФОЛИЈА
КОРИШЋЕЊЕМ УОПШТЕЊА КУЛБАК ЛАЈБЛЕРОВОГ
РАСТОЈАЊА**

мастер рад

Београд, 2020.

Ментор:

др Бојана Милошевић
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Владимир Божин
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Марко Обрадовић
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 29. септембар 2020.

Велико Хвала менторки Бојани за издвојено вријеме и велику подршку!

Садржај

1	Увод	1
2	Стандардни Марковицов модел	3
3	Робусност Марковицовог модела	5
3.1	Основни концепти робусне статистике	5
3.2	Робусност оцијена добијених методом максималне вјеродостојности	7
4	Псеудорастојање	9
4.1	Основне дефиниције	9
4.2	Специјална класа псеудорастојања	11
5	Оцијене добијене методом минималног псеудорастојања	14
5.1	Оцијене параметара произвољне параметарске расподјеле, добијене методом минималног псеудорастојања	14
5.2	Оцијене параметара вишедимензионе нормалне расподјеле добијене методом минималног псеудорастојања	15
6	Утицајне криве	18
6.1	Утицајне криве оцијена $\hat{\mu}$ и $\hat{\Sigma}$	18
6.2	Утицајна крива оцијене \hat{p}^* удијела оптималног портфолија	21
6.3	Асимптотска нормалност	21
7	Асимптотска релативна ефикасност	24
8	Монте Карло симулације	26
8.1	Примјер 1	26
8.2	Примјер 2	28
9	Примјена на финансијске податке	30
10	Мјере перформанси портфолија	35
11	Закључак	37
12	Прилог	38
13	Литература	52
14	Биографија	54

1 Увод

Портфолио је скуп различитих врста финансијских инструмената који служе инвеститору у сврху присвајања добити. Један од значајнијих изазова у менаџменту портфолија је избор удијела финансијских инструмената од којих се састоји. Инвеститори се разликују по степену аверзије према ризику, па ће се приликом избора водити својим ставом према ризику. Једни, са већом аверзијом према ризику ће тежити да формирају што је мање могуће ризичан портфолио, док ће други, толерантнији према ризику бити спремни да поднесу већи ризик уколико сматрају да ће им то бити од користи. Оно што им је заједничко јесте жеља за остваривањем што већег приноса, односно добити. Теорија модерног портфолија, коју је први пут представио Хери М. Марковиц 1952. године у раду [1], налаже да се принос портфолија и ризик који он са собом носи посматрају као двије међусобно зависне величине, те се препоручује да се при формирању портфолија фиксира једна од тих величина па да се на основу ње бира друга, која је најпогоднија инвеститору. Тако, на примјер, инвеститор може да формира портфолио тако што ће за дати ниво ризика изабрати удијеле финансијских инструмената који ће му донијети највећи могући принос. Ово је посебно значајно за инвеститоре са већом аверзијом према ризику који теже да знају степен ризика коме су изложени. Слично, може и да се за дати принос изабере портфолио који носи најмањи могући ризик. Осим тога, Хери је у свом раду изложио идеју о диверсификацији, односно улагању у више различитих финансијских средстава јер се на тај начин смањује ризик, односно вјероватноћа губитка.

У стандардном Марковицовом приступу оптимизацији портфолија најчешће се претпоставља се да случајан вектор приноса финансијских инструмената од којих се портфолио састоји има вишедимензиону нормалну расподелу $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, што се може видјети у [1]. Да би се одредио оптимални портфолио, односно да би се добили оптимални удијели финансијских инструмената од којих се састоји, потребно је знати параметре μ и Σ . У пракси то најчешће није случај, па је потребно оцијенити те параметре на основу узорка, тј. историјских реализованих приноса финансијских инструмената. На овом мјесту може доћи до грешке у оцјењивању која ће посљедишно имати утицај и на оцијене удијела портфолија. Други проблем настаје када реализовани подаци одударају од претпостављене вишедимензионе нормалне расподеле, на примјер када један или више финансијских инструмената има неочекивано високе или ниске приносе. У статистичкој литератури овај други проблем се среће као проблем статистичке робусности. Циљ теорије робусне статистике јесте конструкција статистичких процедура које ће бити стабилне чак и када се доступни реализовани подаци не поклапају сасвим са претпостављеним моделом који је у основи тих процедура. Тако је и код оптимизације портфолија њен циљ да се добију стабилне оцијене удијела финансијских инструмената на које неће много утицати евентуална одступања података од претпостављене расподеле.

Класичне оцијене параметара μ и Σ које се добијају узимањем узорачке средње вриједности и коваријационе матрице, иако најчешће коришћене, не показују завидан ниво стабилности када дође до одступања података од претпостављене расподеле. То ћемо и видјети, прво кроз теоријске резултате а затим и на конкретним примјерима. Са друге стране имаћемо и робусно оцијењене параметре па ћемо их моћи упоредити са оним оцијењеним класичном методом. Од многих робусних метода оцјењивања параметара који се могу видјети у [2], користимо метод минималног псеудорастајања.

У поглављу 2 описан је стандардни Марковицов приступ оптимизацији портфолија. У поглављу 3 приказани су основни концепти на којима се заснива теорија робусне статистике и анализа робусности оцијена добијених класичном методом максималне вјеродостојности. У поглављу 4 је дефинисано псеудорастајање у општем случају, и наведена је специјална класа псеудорастајања, уопштење Кулбак-Лајблеровог растајања, коју ћемо у наставку користити за оцјењивање. Поглавље 5 се бави оцијенама параметара методом минималног псеудорастајања, прво у случају произвољне параметарске расподеле, а затим у случају вишедимензионе нормалне расподеле. У поглављу 6 су изведене утицајне криве за оцијене параметара добијене методом минималног псеудорастајања, а затим и утицајна крива за оцијену удијела оптималног портфолија, на основу које је анализирана робусност такве оцијене. Такође, показано је да су такве оцијене асимптотски нормалне и изведене су њихове асимптотске коваријационе матрице, које су потребне за одређивање ефикасности, што ћемо видјети у поглављу 7. У поглављу 8 вјештачки је направљен сценарио да подаци одступају од претпостављене, конкретне вишедимензионе нормалне расподеле, те су упоређене оцијене параметара методама минималног псеудорастајања и методом максималне вјеродостојности. Притом, посматране су различите вриједности нивоа одступања података и димензија расподеле. У поглављу 9 ћемо имати конкретне финансијске податке, па ћемо оцијенити удијеле у портфолију који садржи све финансијске инструменте, и класичном методом и методама минималног псеудорастајања. Затим ћемо видјети како се крећу очекивани приноси и дисперзије портфолија у зависности од примијењене методе оцјењивања. Такође, анализираћемо утицај сваког податка на оцијене, добијене класичном методом и методом минималног псеудорастајања. Мјере перформанси портфолија који се састоје од финансијских инструмената описаних у 9. поглављу, а чији су удијели оцијењени разним методама, видјећемо у поглављу 10. У поглављу 11 дат је закључак, а у поглављу 12 кодови писани у програмском језику R на основу којих су добијени резултати у поглављима 8, 9 и 10.

2 Стандардни Марковицов модел

Посматрајмо портфолио који се састоји од N финансијских инструмената. Нека су приноси тих инструмената дати случајним вектором $X = (X_1, \dots, X_N)^T$, тако да је X_i случајна величина која одговара приносу i -тог инструмента, $i = 1, \dots, N$. Нека је $p = (p_1, \dots, p_N)^T$ вектор удијела финансијских инструмената у портфолију, тако да p_i представља удио инвеститоровог капитала који је он уложио баш у инструмент i , $i = 1, \dots, N$. Случајна величина $p^T X = p_1 X_1 + \dots + p_N X_N$ представља укупан принос портфолија.

Марковиц, у [1], претпоставља да случајан вектор приноса X има вишедимензиону нормалну расподјелу $\mathcal{N}_N(\mu, \Sigma)$, гдје је $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ вектор који садржи средње вриједности приноса сваког од инструмената у портфолију (μ_i је средња вриједност приноса i -тог инструмента, $i = 1, \dots, N$), а

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

коваријациона матрица приноса инструмената ($\sigma_{i,j} = cov(X_i, X_j) = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))]$). Сада је $R(p) = p^T \mu$ средња вриједност приноса портфолија, а $S(p) = p^T \Sigma p$ дисперзија приноса портфолија.

Марковицов приступ оптимизацији портфолија се своди на рјешавање сљедећег проблема. За дату инвеститорову аверзију према ризику $\lambda > 0$ оптимални удијели инструмената у портфолију су рјешења сљедећег:

$$\operatorname{argmax}_p \left\{ R(p) - \frac{\lambda}{2} S(p) \right\}, \quad (1)$$

уз услов $p^T e_N = 1$, гдје је $e_N = (1, \dots, 1)^T$ вектор од N јединица.

Ријешимо сада овај проблем. Посматрајмо израз:

$$\begin{aligned} F(p_1, \dots, p_N, a) &= p_1 \mu_1 + \dots + p_N \mu_N - \\ &- \frac{\lambda}{2} (p_1^2 \sigma_{11} + \dots + p_N^2 \sigma_{NN} + 2 \cdot \sum_{i \neq j} p_i p_j \sigma_{ij}) + \\ &+ a \cdot (p_1 + \dots + p_N - 1). \end{aligned}$$

Примијетимо да је ово управо расписан израз (1) уз додатни посљедњи сабирак који одговара услову $p^T \cdot e_N = 1$. Нађимо сада вектор p^* који максимизира израз (1), па тако и претходни израз, уз услов $p^T e_N = 1$ диференцирањем функције $F(p_1, \dots, p_N, a)$ по свим p_i , $i = 1, \dots, N$ и по a .

$$\begin{aligned}
F(p_1, \dots, p_N, a)'_{p_1} &= \mu_1 - \lambda \cdot p_1 \sigma_{11} - \lambda \sum_{j \neq 1} p_j \cdot \sigma_{1j} + a = 0 \\
&\vdots \\
F(p_1, \dots, p_N, a)'_{p_i} &= \mu_i - \lambda \cdot p_i \sigma_{ii} - \lambda \sum_{j \neq i} p_j \cdot \sigma_{ij} + a = 0 \\
&\vdots \\
F(p_1, \dots, p_N, a)'_{p_N} &= \mu_N - \lambda \cdot p_N \sigma_{NN} - \lambda \sum_{j \neq N} p_j \cdot \sigma_{Nj} + a = 0 \\
F(p_1, \dots, p_N, a)'_a &= p_1 + \dots + p_N - 1 = 0
\end{aligned}$$

Запишимо првих N једначина матрично:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} - \lambda \cdot \Sigma \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

тј.

$$\mu - \lambda \cdot \Sigma \cdot p + a \cdot e_N = \mathbf{0},$$

па је

$$p = \frac{1}{\lambda} \Sigma^{-1} (\mu + a \cdot e_N). \quad (2)$$

Ако посљедњу једнакост уврстимо у услов $e_N^T p = 1 \iff p^T e_N = 1$ добијамо параметар a :

$$\begin{aligned}
e_N^T \cdot (\Sigma^{-1} \cdot (\mu + a \cdot e_N)) &= \lambda \cdot 1 \\
e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \mu + e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot a \cdot e_N &= \lambda \\
e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot a \cdot e_N &= \lambda - e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu \\
a &= \frac{\lambda - e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu}{e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e_N}
\end{aligned}$$

Коначно, ако уврстимо a у (2) добијамо:

$$p^* = \frac{1}{\lambda} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \left(\mu + \frac{\lambda - e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu}{e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e_N} \cdot e_N \right). \quad (3)$$

Међутим, ако параметри μ и Σ нису познати, оцјењујемо их, па ће опција тежина портфолија бити

$$\hat{p}^* = \frac{1}{\lambda} \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot \left(\hat{\mu} + \frac{\lambda - e_N^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot \hat{\mu}}{e_N^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot e_N} \cdot e_N \right), \quad (4)$$

гдје су $\hat{\mu}$ и $\hat{\Sigma}$ оцијене параметара μ и Σ .

Посматрајмо сада друге изводе функције $F(p_1, \dots, p_N, a)$ по p_i , $i = 1, \dots, N$.

$$\begin{aligned} F(p_1, \dots, p_N, a)''_{p_1} &= -\lambda \cdot \sigma_{11} \\ &\vdots \\ F(p_1, \dots, p_N, a)''_{p_i} &= -\lambda \cdot \sigma_{ii} \\ &\vdots \\ F(p_1, \dots, p_N, a)''_{p_N} &= -\lambda \cdot \sigma_{NN} \end{aligned}$$

Како је $\sigma_{ii} \geq 0$, $i = 1, \dots, N$, то су сви други изводи мањи или једнаки 0 што значи да је p^* заиста тачка максимума израза (1).

Све наведено у овом поглављу се односи на случај када је продаја у кратком року дозвољена, и тада имамо експлицитни израз за оптимизоване удијеле портфолија дат са (3). Ако продаја у кратком року није дозвољена, додаје се и додатни услов да су сви удијели позитивни, тј. $p_i > 0$, $i = 1, \dots, N$ и тада не постоји експлицитни израз за p^* .

Подсјетимо се да смо оптимизацију портфолија спровели за фиксирану инвеститорову аверзију према ризику λ , тако се и рјешења поступка оптимизације, односно добијени удијели p^* односе баш на то конкретно λ . Скуп оптималних портфолија, односно оптималних удијела портфолија p^* за све могуће вриједности параметра λ дефинише ефикасну границу. Другачије речено, ефикасна граница представља скуп оптималних портфолија који нуде највећи могући очекивани принос за одређени ниво ризика.

3 Робусност Марковицовог модела

3.1 Основни концепти робусне статистике

Хубер и Хампел су у својим радовима, [3] и [4] редом, поставили темеље робусне статистике. Робусна статистика, као уопштење класичне теорије, узима у обзир и неслагања доступних података са претпостављеним моделом. Због тога су њени резултати ваљани када доступни подаци одговарају претпостављеном моделу, и што је још важније, ваљани су и када су подаци из неке околине претпостављеног модела. Са друге стране, резултати класичне теорије не подржавају други случај.

Дефинишимо околину претпостављеног модела, односно параметарске

расподјеле F_θ са:

$$\{G_\epsilon | G_\epsilon = (1 - \epsilon) \cdot F_\theta + \epsilon \cdot W\}, \quad (5)$$

гдје је $\epsilon \in [0, 1]$, а W произвољна расподјела. Овај скуп обухвата све оне расподјеле које са вјероватноћом ϵ одступају од F_θ . Нека је δ_{y_t} расподјела која тачку y_t (која може бити и вектор) узима са вјероватноћом 1. Специјално, ако изаберемо да је W баш δ_{y_t} , за произвољну тачку y_t имамо скуп:

$$\{F_\epsilon | F_\epsilon = (1 - \epsilon) \cdot F_\theta + \epsilon \cdot \delta_{y_t}\} \quad (6)$$

расподијела F_ϵ које се са вјероватноћом $1 - \epsilon$ поклапају са F_θ , а са вјероватноћом ϵ са тачком y_t , за $\epsilon \in [0, 1]$.

Робусност оцијене $\hat{\theta}$ непознатог параметра θ се може процијенити посматрањем (асимптотске) стабилности те оцијене у околини претпостављеног модела. Тако робусност оцијене $\hat{\theta}$ непознатог параметра θ претпостављене расподјеле F_θ процјењујемо посматрањем стабилности оцијене $\hat{\theta}$ у околини те расподјеле која је дата изразом (5). Хампел је у раду [6] показао да се највећа пристрасност оцијене $\hat{\theta}$ достиже када је $W = \delta_{y_t}$, за произвољну тачку y_t . Због тога, можемо посматрати стабилност оцијене $\hat{\theta}$ у околини датој изразом (6) без умањења општости.

Ако посматрамо случај када $\epsilon \rightarrow 0$ добијамо тзв. утицајну криву коју је предложио Хампел (у радовима [4] и [5]). Утицајна крива мјери колико ће на оцијену $\hat{\theta}$, коју посматрамо као функцију од расподјеле из које је донијета, утицати када се подаци са бесконачно малом вјероватноћом ϵ разликују од претпостављене расподјеле (односно када узимају вриједност y_t). Стога се утицајна крива дефинише као:

$$IF(y_t, \hat{\theta}, F_\theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\hat{\theta}(F_\epsilon) - \hat{\theta}(F_\theta)}{\epsilon} \right],$$

односно када извод постоји као:

$$IF(y_t, \hat{\theta}, F_\theta) = \left. \frac{\partial \hat{\theta}(F_\epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0}.$$

Хампел је (у [6]) показао да се утицајном кривом може потпуно описати евентуална асимптотска пристрасност оцијене, која би се појавила као посљедица одударања података од претпостављене расподјеле, наводећи да оцијене које имају ограничену утицајну криву имају ограничену и асимптотску пристрасност. Тако је робусна оцијена она оцијена која има ограничену утицајну криву у околини претпостављеног модела, датој са (6), а тиме и у околини датој са (5).

3.2 Робусност оцијена добијених методом максималне вјеродостојности

Претпоставимо да су приноси портфолија нормално расподијељени са N -димензионом нормалном расподјелом $\mathcal{N}_N(\mu, \Sigma)$. Да бисмо одредили удијеле оптималног портфолија p^* на основу једнакости (3) потребно је да знамо параметре μ и Σ из претпостављене вишедимензионе нормалне расподјеле $\mathcal{N}_N(\mu, \Sigma)$. Међутим, у пракси то најчешће није случај, па их због тога оцјењујемо на основу расположивих података.

Средња вриједност μ и коваријациона матрица Σ приноса портфолија се најчешће оцјењују из узорка, методом максималне вјеродостојности. Нека је

$$X_s = \begin{bmatrix} X_{s11} & \cdots & X_{s1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{sT1} & \cdots & X_{sTN} \end{bmatrix}$$

матрица реализација вектора приноса $X = (X_1, \dots, X_N)$ поменутог у поглављу 2. Колона i представља реализацију, тј. узорак обима T случајне величине X_i која одговара приносу i -тог финансијског инструмента. Оцијена $\hat{\mu}$ вектора средњих вриједности приноса методом максималне вјеродостојности је дата са:

$$\hat{\mu}_{MMV} = \frac{1}{T} \cdot e_T^T \cdot X_s,$$

гдје је $e_T^T = (1, \dots, 1)$ вектор који се састоји од T јединица. Такође, оцијена коваријационе матрице $\hat{\Sigma}$ приноса методом максималне вјеродостојности је дата са:

$$\hat{\Sigma}_{MMV} = \frac{1}{T} \cdot (X_s - e_T \cdot \hat{\mu}_{MMV})^T \cdot (X_s - e_T \cdot \hat{\mu}_{MMV}).$$

Како је Хампел показао у [6], одговарајуће утицајне криве ових оцијена су:

$$IF(y_t, \hat{\mu}_{MMV}, F_\theta) = -\mu + y_t \quad (7)$$

и

$$IF(y_t, \hat{\Sigma}_{MMV}, F_\theta) = -\Sigma + (y_t - \mu) \cdot (y_t - \mu)^T \quad (8)$$

Види се да су обје утицајне криве неограничене по y_t , односно да за велике вриједности неких или свих елемената тачке y_t (у овом случају N -димензионог вектора), ове утицајне криве могу постати произвољно велике.

На основу једнакости (4) и на основу Леме 2, наведене у наставку, сада имамо да је

$$\hat{p}^* = \frac{1}{\lambda} \hat{\Sigma}_{MMV}^{-1} \cdot \left(\hat{\mu}_{MMV} + \frac{\lambda - e_N^T \cdot \hat{\Sigma}_{MMV}^{-1} \cdot \hat{\mu}_{MMV}}{e_N^T \cdot \hat{\Sigma}_{MMV}^{-1} \cdot e_N} \cdot e_N \right).$$

Оцијена \hat{p}^* зависи директно од $\hat{\mu}_{MMV}$ и од $\hat{\Sigma}_{MMV}$, што значи да ће и на оцијену удијела портфолија утицати потенцијална пристрасност оцијена $\hat{\mu}_{MMV}$ и $\hat{\Sigma}_{MMV}$. Ово се може видјети из сљедеће теореме, наведене у [10].

Теорема 1. (Асимптотска) *пристрасност оцијене \hat{p}^* удијела оптималног портфолија зависи једино од (асимптотске) пристрасности оцијена $\hat{\mu}$ и $\hat{\Sigma}$.*

Доказ. У доказу ове теореме користи се сљедећа лема (извод сложене функције):

Лема 2 (Извод сложене функције). *Нека је g диференцијабилна функција. Важи сљедеће:*

$$IF(y_t, g(\hat{\theta}), F_\theta) = \frac{\partial g(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \cdot IF(y_t, \hat{\theta}, F_\theta)$$

Доказ.

$$\begin{aligned} IF(y_t, g(\hat{\theta}), F_\theta) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{g(\hat{\theta}(F_\epsilon)) - g(\hat{\theta}(F_\theta))}{\epsilon} \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{g(\hat{\theta}(F_\epsilon)) - g(\hat{\theta}(F_\theta))}{\hat{\theta}(F_\epsilon) - \hat{\theta}(F_\theta)} \cdot \frac{\hat{\theta}(F_\epsilon) - \hat{\theta}(F_\theta)}{\epsilon} \right] \\ &= \frac{\partial g(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \cdot IF(y_t, \hat{\theta}, F_\theta). \end{aligned}$$

□

Нека су $\hat{\mu}$ и $\hat{\Sigma}$ оцијене параметара претпостављеног модела $N(\mu, \Sigma)$ добијене произвољном методом. Тада је оцијена удијела оптималног портфолија \hat{p}^* , на основу једнакости (4), дата са:

$$\hat{p}^* = \frac{1}{\lambda} \hat{\Sigma}^{-1} \cdot \left[\hat{\mu} + \frac{\lambda - e_N^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot \hat{\mu}}{e_N^T \cdot \hat{\Sigma}^{-1} \cdot e_N} \cdot e_N \right].$$

Сада, узимајући у обзир Лему 2, можемо да одредимо утицајну криву $IF(y_t, \hat{p}^*, F_\theta)$ оцијене \hat{p}^* у тачки y_t .

$$\begin{aligned} IF(y_t, \hat{p}^*, F_\theta) &= -\Sigma^{-1} \cdot IF(y_t, \hat{\Sigma}, F_\theta) \cdot \hat{p}^* \\ &+ \frac{1}{\lambda} \Sigma^{-1} \cdot \left[IF(y_t, \hat{\mu}, F_\theta) \right. \\ &+ \frac{[e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot IF(y_t, \hat{\Sigma}, F_\theta) \cdot \mu - e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot IF(y_t, \hat{\mu}, F_\theta)] \cdot e_N}{e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e_N} \\ &\left. - \frac{e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot IF(y_t, \hat{\Sigma}, F_\theta) \cdot \Sigma^{-1} \cdot e_N \cdot (e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu - \lambda) \cdot e_N}{(e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e_N)^2} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

На основу претходног видимо да $IF(y_t, \hat{p}^*, F_\theta)$ зависи директно од $IF(y_t, \hat{\mu}, F_\theta)$ и $IF(y_t, \hat{\Sigma}, F_\theta)$, па ће се због тога пристрасност оцијена $\hat{\mu}$ и $\hat{\Sigma}$ преносити и на \hat{p}^* . \square

Погледајмо сада да ли ће утицајна крива $IF(y_t, \hat{p}^*, F_\theta)$ оцијене \hat{p}^* бити ограничена за произвољно одабрану тачку y_t када су μ и Σ оцијењени методом максималне вјеродостојности. Ако замијенимо једнакости (7) и (8) у једнакост (9) добијамо:

$$\begin{aligned}
IF(y_t, \hat{p}^*, F_\theta) &= -\Sigma^{-1} \cdot (-\Sigma + (y_t - \mu) \cdot (y_t - \mu)^T) \cdot p^* \\
&+ \frac{1}{\lambda} \Sigma^{-1} \cdot \left[-\mu + y_t \right. \\
&+ \frac{(e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (y_t - \mu) \cdot (y_t - \mu)^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu - e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot y_t) \cdot e_N}{e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e_N} \\
&- \frac{[e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot (y_t - \mu) \cdot (y_t - \mu)^T \Sigma^{-1} \cdot e_N - e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e_N] \cdot [e_N^T \Sigma^{-1} \mu - \lambda] \cdot e_N}{(e_N^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e_N)^2} \left. \right].
\end{aligned}$$

Из претходног се види да је утицајна крива оцијене \hat{p}^* неограничена по y_t , што значи да пристрасност оцијене удијела портфолија може постати произвољно велика уколико би дошло до одступања података од претпостављеног модела, па у том случају оцијену \hat{p}^* не можемо сматрати робусном.

4 Псеудорастојање

4.1 Основне дефиниције

Нека је $\mathcal{P} = \{F_\theta | \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d\}$ параметарски скуп расподијела вјероватноћа дефинисаних на истом простору вјероватноћа (Ω, \mathcal{A}, P) . Посматрајмо нешто шири скуп \mathcal{P}^+ , такав да важи $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^+$. Скуп \mathcal{P}^+ може да обухвата све расподијеле облика $F_\epsilon = (1 - \epsilon) \cdot F_\theta + \epsilon \cdot W, \epsilon > 0$, односно околине свих расподијела F_θ , за $\theta \in \Theta$.

Дефиниција 4.1. Пресликавање $\mathcal{D} : \mathcal{P} \times \mathcal{P}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ је псеудорастојање између расподијела вјероватноћа $F_\theta \in \mathcal{P}$ и $Q \in \mathcal{P}^+$ ако је $\mathcal{D}(F_\theta, Q) \geq 0$ за свако $\theta \in \Theta$ и $Q \in \mathcal{P}^+$ и ако на скупу Θ важи да је $\mathcal{D}(F_{\theta_1}, F_{\theta_2}) = 0$ ако и само ако је $\theta_1 = \theta_2$.

Дефиниција 4.2. Псеудорастојање $\mathcal{D} : \mathcal{P} \times \mathcal{P}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ је разложиво ако постоје функције $\mathcal{D}^0 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\mathcal{D}^1 : \mathcal{P}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ и мјерљива пресликавања

$\rho_\theta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, за $\theta \in \Theta$ тако да за свако $\theta \in \Theta$ и за свако $Q \in \mathcal{P}^+$ постоји интеграл $\int \rho_\theta dQ$ и важи да је

$$\mathcal{D}(F_\theta, Q) = \mathcal{D}^0(F_\theta) + \mathcal{D}^1(Q) + \int \rho_\theta dQ.$$

Позната класа псеудорастојања коју је увео Басу у раду [7] се може представити као:

$$\mathcal{D}_\alpha(F_\theta, W) = \int \left\{ (f_\theta(x))^{\alpha+1} - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot (f_\theta(x))^\alpha \cdot w(x) + \frac{1}{\alpha} (w(x))^{\alpha+1} \right\} dx,$$

гдје је $\alpha > 0$. Примијетимо да су ова псеудорастојања разложива у смислу претходне дефиниције, са

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha^0(F_\theta) &= \int (f_\theta(x))^{\alpha+1} dx, \\ \mathcal{D}_\alpha^1(W) &= \frac{1}{\alpha} \int (w(x))^{\alpha+1} dx \text{ и} \\ \rho_{\theta_\alpha} &= - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \int (f_\theta(x))^\alpha dx. \end{aligned}$$

Нека је \mathcal{P}_{emp} скуп свих емпиријских расподијела облика

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i},$$

гдје је X_1, \dots, X_n узорак из расподијеле дефинисане на $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, која не мора да буде из \mathcal{P} .

Дефиниција 4.3. Кажемо да је функционал $\mathcal{T} : \mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}_{emp} \rightarrow \Theta$ оцијена минималног псеудорастојања ако је псеудорастојање $\mathcal{D}(F_\theta, W)$ разложиво на $\mathcal{P} \times \mathcal{P}^+$ и ако параметри $\mathcal{T}(W) \in \Theta$ минимизирају $\mathcal{D}^0(F_\theta) + \int f_\theta dW$ на Θ , тј:

$$\mathcal{T}(W) = \operatorname{arginf}_\theta \left[\mathcal{D}^0(F_\theta) + \int f_\theta dW \right], \text{ за свако } W \in \mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}_{emp}.$$

Специјално, за $W = F_n \in \mathcal{P}_{emp}$ имамо:

$$\mathcal{T}(F_n) = \operatorname{arginf}_\theta \left[\mathcal{D}^0(F_n) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_\theta(X_i) \right].$$

Примијетимо да за сваку оцјену минималног псеудорастојања \mathcal{T} важи да је

$$\mathcal{T}(F_{\theta_0}) = \theta_0, \text{ за свако } \theta_0 \in \Theta.$$

Заиста, из дефиниције минималног псеудорастојања имамо да је

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(F_{\theta_0}) &= \operatorname{arginf}_{f_\theta} \left[\mathcal{D}^0(F_\theta) + \int f_\theta dF_{\theta_0} \right] \\ &= \operatorname{arginf}_{f_\theta} \left[\mathcal{D}^0(F_\theta) + \mathcal{D}^1(F_{\theta_0}) + \int f_\theta dF_{\theta_0} \right] \\ &= \operatorname{arginf}_{f_\theta} \mathcal{D}(F_\theta, F_{\theta_0}) = \theta_0.\end{aligned}$$

4.2 Специјална класа псеудорастојања

Посматрајмо фамилију псеудорастојања реда $\alpha \geq 0$, наведену у [8]:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\alpha(F_\theta, W) &= \frac{1}{1+\alpha} \ln \left(\int f_\theta^\alpha dF_\theta \right) + \frac{1}{\alpha \cdot (1+\alpha)} \ln \left(\int w^\alpha dW \right) \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \ln \left(\int f_\theta^\alpha dW \right),\end{aligned}\tag{10}$$

гдје су $F_\theta \in \mathcal{P}$ и $W \in \mathcal{P}^+$. Да би ово псеудорастојање било коначно, претпоставимо да постоји константа $\beta > 0$ таква да важи

$$\begin{aligned}f_\theta^\beta, w^\beta, \ln f_\theta &\in \mathbb{L}_1(W), \text{ за све } F_\theta \in \mathcal{P} \text{ и } W \in \mathcal{P}^+, \\ \text{гдје је } \mathbb{L}_1(W) &= \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid \int |f| dW < \infty \right\}.\end{aligned}\tag{11}$$

Теорема 3. *Претпоставимо да услов (11) важи за неку константу $\beta > 0$. Тада је за свако $0 < \alpha < \beta$ фамилија (10) фамилија псеудорастојања растављивих у смислу:*

$$\mathcal{R}_\alpha(F_\theta, W) = \mathcal{R}_\alpha^0(F_\theta) + \mathcal{R}_\alpha^1(W) - \frac{1}{\alpha} \ln \left(\int f_\theta^\alpha dW \right),\tag{12}$$

гдје је

$$\mathcal{R}_\alpha^0(F_\theta) = \frac{1}{1+\alpha} \ln \left(\int f_\theta^\alpha dF_\theta \right) \text{ и } \mathcal{R}_\alpha^1(W) = \frac{1}{\alpha \cdot (1+\alpha)} \ln \left(\int w^\alpha dW \right)\tag{13}$$

и када $\alpha \downarrow 0$ важи

$$\mathcal{R}_\alpha(F_\theta, W) \rightarrow \mathcal{R}_0(F_\theta, W) := \int \ln w dW - \int \ln f_\theta dW.\tag{14}$$

Доказ. Под условом (11) изрази $\ln \left(\int w^\alpha dW \right)$, $\ln \left(\int f_\theta^\alpha dW \right)$ и $\int \ln f_\theta dW$ су коначни па су $\mathcal{R}_\alpha(F_\theta, W)$ и $\mathcal{R}_0(F_\theta, W)$ добро дефинисани.

Подсјетимо се, за произвољне вриједности $s, t > 0$ и фиксирани параметре $a, b > 0$ који задовољавају услов

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1,$$

важи неједнакост

$$st \leq \frac{s^a}{a} + \frac{t^b}{b}, \quad (15)$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $s^a = t^b$. Како је \ln растућа функција важи и

$$\ln(st) = \frac{1}{a} \ln s^a + \frac{1}{b} \ln t^b \leq \ln \left(\frac{s^a}{a} + \frac{t^b}{b} \right),$$

при чему једнакост важи, такође, ако и само ако је $s^a = t^b$.

Нека је $\alpha > 0$. Узмимо да је

$$s = \frac{f_\theta^\alpha}{\left(\int f_\theta(x)^{\alpha \cdot a} d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{a}}}, \quad t = \frac{w(x)}{\left(\int w^b d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{b}}},$$

гдје је $a = \frac{1+\alpha}{\alpha}$, $b = 1 + \alpha$. Замијенимо то сада у неједнакост (15) и узмимо интеграл по Лебеговој мјери. Добијамо

$$\begin{aligned} \int \frac{(f_\theta(x))^\alpha}{\left(\int (f_\theta(x))^{1+\alpha} d\lambda(x) \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \cdot \frac{w(x)}{\left(\int (w(x))^{1+\alpha} d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}} d\lambda(x) &\leq \frac{\int (f_\theta(x))^{1+\alpha} d\lambda(x)}{\frac{1+\alpha}{\alpha} \cdot \int (f_\theta(x))^{1+\alpha} d\lambda(x)} \\ &+ \frac{\int (w(x))^{1+\alpha} d\lambda(x)}{(1+\alpha) \cdot \int (w(x))^{1+\alpha} d\lambda(x)} \\ &= \frac{\alpha}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1. \end{aligned}$$

Другачије записано, добили смо да је

$$\int f_\theta(x) \cdot w(x) d\lambda(x) \leq \left(\int (f_\theta(x))^{1+\alpha} d\lambda(x) \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \cdot \left(\int (w(x))^{1+\alpha} d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (16)$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $f_\theta = w$, посматрано у Лебеговој мјери.

Примијетимо да се једнакост (10) може записати на сљедећи начин:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\alpha(F_\theta, W) &= \frac{1}{\alpha} \cdot \left[\ln \left(\left(\int (f_\theta(x))^{1+\alpha} d\lambda(x) \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \cdot \left(\int (w(x))^{1+\alpha} d\lambda(x) \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \ln \int (f_\theta(x))^\alpha \cdot w(x) d\lambda(x) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

На основу неједнакости (16) видимо да је $\mathcal{R}_\alpha(F_\theta, W) \geq 0$ за свако $\theta \in \Theta$, односно $F_\theta \in \mathcal{P}$ и за свако $W \in \mathcal{P}^+$ и да је $\mathcal{R}_\alpha(F_{\theta_1}, F_{\theta_2}) = 0$ ако и само ако је $\theta_1 = \theta_2$, па је по дефиницији $\mathcal{R}_\alpha(F_\theta, W)$ једно псеудорастојање на простору $\mathcal{P} \times \mathcal{P}^+$ за $\alpha > 0$. Једнакост (12) представља само на другачији начин записану једнакост (10), а из прве се јасно види да је ово псеудорастојање и растављиво.

Одредимо сада

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{R}_\alpha(F_\theta, W).$$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{R}_\alpha(F_\theta, W) &= \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\alpha + 1} \ln \left(\int f_\theta^\alpha dF_\theta \right) + \frac{1}{\alpha \cdot (1 + \alpha)} \ln \left(\int w^\alpha dW \right) - \frac{1}{\alpha} \ln (f_\theta^\alpha dW) \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + 1} \left[\ln \left(\int f_\theta^\alpha dF_\theta \right) - \ln \left(\int w^\alpha dW \right) \right] + \\ &+ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left[\ln \left(\int w^\alpha dW \right) - \ln \left(\int f_\theta^\alpha dW \right) \right] = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\int w^\alpha dW}{\int f_\theta^\alpha dW} = \int \ln \frac{w}{f_\theta} dW = \mathcal{R}_0(F_\theta, W), \end{aligned}$$

чиме је теорема доказана. \square

Лема 4. $\mathcal{R}_0(F_\theta, W)$ је Кулбак-Лајблерово растојање за расподијеле W и F_θ .

Доказ. На основу једнакости (14) имамо:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0(F_\theta, W) &= \int \ln w dW - \int \ln f_\theta dW \\ &= \int w(x) \ln w(x) dx - \int w(x) \ln f_\theta(x) dx \\ &= \int w(x) (\ln w(x) - \ln f_\theta(x)) dx \\ &= \int w(x) \ln \frac{w(x)}{f_\theta(x)} dx, \end{aligned}$$

а то је, по дефиницији, Кулбак-Лајблерово растојање између расподијела W и F_θ . \square

5 Оцијене добијене методом минималног псеудорастојања

5.1 Оцијене параметара произвољне параметарске расподјеле, добијене методом минималног псеудорастојања

Претпоставимо да имамо неки узорак X_1, \dots, X_n , гдје је свако X_i вектор чија је димензија једнака димензији расподјеле из које је узорак извучен. То не мора да буде узорак из фамилије расподијела \mathcal{P} , међутим ми хоћемо да нађемо параметар $\theta_0 \in \Theta$ тако да расподјела $F_{\theta_0} \in \mathcal{P}$ најбоље од свих расподијела $F_\theta \in \mathcal{P}, \theta \in \Theta$ описује наш узорак. Нека је F_n емпиријска расподјела која одговара овом узорку.

У складу са дефиницијом из претходног поглавља, посматрајмо фамилију оцијена минималних псеудорастојања, за $0 \leq \alpha \leq \beta$ дату са $\hat{\theta}_n = \mathcal{T}_\alpha(F_n)$, тако да $\mathcal{T}(W) \in \Theta$, за $W \in \mathcal{P} \cup \mathcal{P}^+$, гдје је

$$\mathcal{T}_\alpha(W) = \begin{cases} \operatorname{argin}f_\theta \left[\frac{1}{1+\alpha} \ln \left(\int f_\theta^\alpha dF_\theta \right) + \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \ln \left(\int w^\alpha dW \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\alpha} \ln \left(\int f_\theta^\alpha dW \right) \right], \alpha > 0 \\ \operatorname{argin}f_\theta \left[\int \ln w dW - \int \ln f_\theta dW \right], \alpha = 0 \end{cases}$$

Примијетимо да интеграл $\int w^{\alpha dW}$ и $\int \ln w dW$ не зависе од θ , па важи:

$$\mathcal{T}_\alpha(W) = \begin{cases} \operatorname{argin}f_\theta \left[\frac{1}{1+\alpha} \ln \left(\int f_\theta^\alpha dF_\theta \right) - \frac{1}{\alpha} \ln \left(\int f_\theta^\alpha dW \right) \right], \alpha > 0 \\ \operatorname{argin}f_\theta \left[- \int \ln f_\theta dW \right], \alpha = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Или, еквивалентно:

$$\mathcal{T}_\alpha(W) = \begin{cases} \operatorname{argsup}_\theta \left[-\frac{1}{1+\alpha} \ln \left(\int f_\theta^\alpha dF_\theta \right) + \frac{1}{\alpha} \ln \left(\int f_\theta^\alpha dW \right) \right], \alpha > 0 \\ \operatorname{argsup}_\theta \left[\int \ln f_\theta dW \right], \alpha = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Специјално,

$$\hat{\theta}_n = \mathcal{T}_\alpha(F_n) = \begin{cases} \operatorname{argsup}_\theta \left[-\frac{1}{1+\alpha} \ln \left(\int f_\theta^\alpha dF_\theta \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_\theta^\alpha(X_i) \right) \right], \alpha > 0 \\ \operatorname{argsup}_\theta \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln f_\theta(X_i) \right], \alpha = 0 \end{cases} \quad (20)$$

Нека је

$$C_\alpha(\theta) = \left(\int f_\theta(x)^{1+\alpha} d\lambda(x) \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}.$$

Сада једнакост (20) можемо записати као

$$\hat{\theta}_n = \mathcal{T}_\alpha(F_n) = \begin{cases} \operatorname{argsup}_\theta \frac{1}{\alpha} \left[-\frac{\alpha}{1+\alpha} \ln(C_\alpha(\theta))^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} + \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_\theta^\alpha(X_i) \right) \right], \alpha > 0 \\ \operatorname{argsup}_\theta \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln f_\theta(X_i) \right], \alpha = 0, \end{cases}$$

што је еквивалентно слједећем:

$$\hat{\theta}_n = \mathcal{T}_\alpha(F_n) = \begin{cases} \operatorname{argsup}_\theta [(C_\alpha(\theta))^{-1} (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_\theta^\alpha(X_i))] , \alpha > 0 \\ \operatorname{argsup}_\theta [\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln f_\theta(X_i)] , \alpha = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Примијетимо још да када $\alpha \downarrow 0$ горњи израз у једнакости (20) ће тежити доњем изразу у истој једнакости. Заиста,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1 + \alpha} \ln \left(\int f_\theta^\alpha dF_\theta \right) + \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_\theta^\alpha(X_i) \right) \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln f_\theta(X_i).$$

Такође, примијетимо да је тај доњи израз уједно и оцијена методом максималне вјеродостојности.

5.2 Оцијене параметара вишедимензионе нормалне расподјеле добијене методом минималног псеудо-растојања

Нека је сада \mathcal{P} фамилија вишедимензионих нормалних расподијела $\mathcal{N}_N(\mu, \Sigma)$ са непознатим параметрима μ и Σ . Сада је наш узорак X_1, \dots, X_n скуп од n N -димензионих вектора X_i . Означимо $\theta = (\mu, \Sigma) \in \Theta$. Као и у општем случају, тражимо параметар $\theta_0 = (\mu_0, \Sigma_0) \in \Theta$ тако да расподјела $F_{\theta_0} = \mathcal{N}_N(\mu_0, \Sigma_0)$ најбоље описује наш узорак. За $\alpha > 0$ једнакост (21) можемо записати као

$$\hat{\theta}_n = \operatorname{argsup}_\theta \left[\left(\sqrt{\det \Sigma} \right)^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} \cdot \sum_{i=1}^n -\frac{\alpha}{2} \exp \left((X_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right) \right]. \quad (22)$$

Зaista,

$$\begin{aligned}
C_\alpha(\theta) &= \left(\int f_\theta(x)^{\alpha+1} d\lambda(x) \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \\
&= \left(\int \left(\frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right) \right)^{\alpha+1} d\lambda(x) \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \\
&= \left(\int \frac{1}{(\sqrt{\det(2\pi\Sigma)})^{\alpha+1}} \exp\left(-\frac{\alpha+1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right) d\lambda(x) \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \\
&= \left(\int \frac{1}{\left(\sqrt{\det(2\pi \frac{\alpha+1}{\alpha+1}\Sigma)}\right)^{\alpha+1}} \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \left(\frac{1}{\alpha+1}\Sigma\right)^{-1} (x-\mu)\right) d\lambda(x) \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \\
&= \left(\frac{1}{\left(\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}\right)^\alpha} \int \frac{1}{\sqrt{(\alpha+1)^n \det(2\pi \frac{1}{\alpha+1}\Sigma)}} \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \left(\frac{1}{\alpha+1}\Sigma\right)^{-1} (x-\mu)\right) d\lambda(x) \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \\
&= \left(\frac{1}{\left(\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}\right)^\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\alpha+1)^n}} \cdot 1 \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \\
&= \left(\frac{1}{\left(\sqrt{(2\pi)^n}\right)^\alpha \left(\sqrt{\det \Sigma}\right)^\alpha \sqrt{(\alpha+1)^n}} \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \\
&= c \cdot \left(\sqrt{\det \Sigma}\right)^{-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}}, \text{ гдје је } c \text{ константа.}
\end{aligned}$$

Уврстимо то сада у (21), за $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_n &= \operatorname{argsup}_{\theta} \left[(C_{\alpha}(\theta))^{-1} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_{\theta}^{\alpha}(X_i) \right] \\
&= \operatorname{argsup}_{\theta} \left[\left(c \cdot (\sqrt{\det \Sigma})^{-\frac{\alpha^2}{1+\alpha}} \right)^{-1} \right. \\
&\quad \cdot \left. \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}} \exp \left(-\frac{1}{2} (X_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right) \right)^{\alpha} \right] \\
&= \operatorname{argsup}_{\theta} \left[\frac{(\sqrt{\det \Sigma})^{\frac{\alpha^2}{1+\alpha}}}{c \cdot n \cdot (\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma})^{\alpha}} \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (X_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right) \right] \\
&= \operatorname{argsup}_{\theta} \left[(\sqrt{\det \Sigma})^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (X_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right) \right],
\end{aligned}$$

што је баш једнакост (22).

Диференцирањем једнакости (22) по μ добијамо:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{\det \Sigma})^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (X_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right) \cdot \\
&\cdot \left[-\frac{\alpha}{2} - \dot{\mu}^T \Sigma^{-1} (X_i - \mu) - \frac{\alpha}{2} (X_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (-\dot{\mu}) \right] = 0, \forall \dot{\mu} \\
&\implies \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (X_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right) \cdot \dot{\mu} \cdot \Sigma^{-1} (X_i - \mu) = 0, \forall \dot{\mu},
\end{aligned}$$

гдје је посљедња једнакост извод једнакости (22) у правцу вектора $\dot{\mu}$. Како она важи $\forall \dot{\mu}$ слиједи да је:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (X_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right) \cdot (X_i - \mu) = 0 \\
&\implies \mu = \frac{\sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (X_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right) \cdot X_i}{\sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (X_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right)}.
\end{aligned} \tag{23}$$

На сличан начин, диференцирајући једнакост (22) по Σ , добијамо следећу

једначину.

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} (\det \Sigma)^{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}-1} \det \Sigma \operatorname{tr} \left(\Sigma^{-1} \dot{\Sigma} \right) \cdot \\
& \cdot \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (X_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right) + \\
& + \left(\sqrt{\det \Sigma} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \sum_{i=1}^n \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (X_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right) \cdot \\
& \cdot \left(-\frac{\alpha}{2} (X_i - \mu)^T \Sigma^{-1} \dot{\Sigma} \Sigma^{-1} (X_i - \mu) \right) = 0, \forall \dot{\Sigma}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Нека је

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

матрица димензије $N \times N$ која само на позицији (i, j) има јединицу, а сви остали елементи су нуле. Узмимо да је $\dot{\Sigma} = \Sigma M \Sigma$. Када то уврстимо у израз (24) добијемо следеће:

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \sigma_{ij} \sum_{k=1}^n \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (X_k - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_k - \mu) \right) + \\
& + \sum_{k=1}^n \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (X_k - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_k - \mu) \right) \cdot \left(-\frac{\alpha}{2} (X_{k_i} - \mu_i)^T (X_{k_j} - \mu_j) \right) = 0 \\
& \quad \quad \quad \downarrow \\
\sigma_{ij} & = \frac{(\alpha+1) \sum_{k=1}^n \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (X_k - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_k - \mu) \right) \cdot (X_{k_i} - \mu_i)^T (X_{k_j} - \mu_j)}{\sum_{k=1}^n \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (X_k - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_k - \mu) \right)},
\end{aligned}$$

гдје је σ_{ij} елемент матрице σ који се налази на позицији (i, j) . Како је (i, j) произвољна позиција, овако можемо добити све елементе матрице Σ , па ће да важи:

$$\Sigma = \sum_{k=1}^n \frac{(\alpha+1) \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (X_k - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_k - \mu) \right)}{\sum_{k=1}^n \exp \left(-\frac{\alpha}{2} (X_k - \mu)^T \Sigma^{-1} (X_k - \mu) \right)} (X_k - \mu)^T (X_k - \mu). \tag{25}$$

6 Утицајне криве

6.1 Утицајне криве оцијена $\hat{\mu}$ и $\hat{\Sigma}$

Посматрајмо сада утицајну криву на нешто другачији начин у односу на онај поменут раније, у поглављу 3. Пресликавање \mathcal{T} дефинисано на скупу вјероватносних мијера, са вриједностима у параметарском скупу Θ је статистички функционал који одговара оцијени $\hat{\theta}_n$ параметра θ ако је

$\hat{\theta}_n = \mathcal{T}(P_n)$, гдје је P_n емпиријска мјера која одговара узорку. Сада, утицајну криву пресликавања \mathcal{T} у вероватносној мјери P_θ дефинишемо као

$$IF(x; \mathcal{T}, P_\theta) = \left. \frac{\partial \mathcal{T}(\tilde{P}_{\epsilon x})}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0},$$

гдје је $\tilde{P}_{\epsilon x} = (1 - \epsilon)P_\theta + \epsilon\delta_x$, $\epsilon > 0$, $\delta_x(y) = \mathbf{I}\{y = x\}$.

Статистички функционали $\mu(P)$ и $\Sigma(P)$ који одговарају оцијенама $\hat{\mu}$ и $\hat{\Sigma}$ добијеним методом минималног псеудорастојања су рјешења система

$$\begin{aligned} \int (x - \mu) \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right) dP(x) &= 0 \\ \int \left[(x - \mu)(x - \mu)^T \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right) - \right. & \quad (26) \\ \left. - \frac{1}{\alpha + 1} \Sigma \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right) \right] dP(x) &= 0, \end{aligned}$$

јер за $P = P_n$ добијамо систем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^T (X_i - \mu) \exp\left((X_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(X_i - \mu)\right) &= 0 \\ \sum_{i=1}^T \left[\frac{1}{\alpha + 1} \Sigma - (X_i - \mu)(X_i - \mu)^T \right] \cdot & \\ \cdot \exp\left((X_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(X_i - \mu)\right) &= 0, \end{aligned}$$

чија су рјешења баш $\hat{\mu}$ и $\hat{\Sigma}$, како се може видјети у (23) и (25). Запишемо систем (26) другачије:

$$\begin{aligned} \int \omega_1 \left(\sqrt{(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)} \right) (x - \mu) dP(x) &= 0 \\ \int \left[\frac{\omega_2(\sqrt{(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)})}{(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)} (x - \mu)(x - \mu)^T - \right. & \quad (27) \\ \left. - \omega_3 \left(\sqrt{(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)} \right) \Sigma \right] dP(x) &= 0, \end{aligned}$$

гдје су $\omega_1(t) = \exp(-\frac{\alpha}{2}t^2)$, $\omega_2(t) = \exp(-\frac{\alpha}{2}t^2)t^2$ и $\omega_3(t) = \frac{1}{\alpha+1} \exp(-\frac{\alpha}{2}t^2)$. Примјетимо да су рјешења система (27), за произвољне тежинске функције ω_1 , ω_2 и ω_3 , статистички функционали уопштених М-оцијена (наведених у [16] и [17]) пара (μ, Σ) . Утицајне криве за такве, уопштене М-оцијене од μ и Σ (како се може видјети у [17]) су

$$IF(x; \mu, P_{\mu, \Sigma}) = (x - \mu) \omega_\mu \left(\sqrt{(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)} \right) \quad (28)$$

$$IF(x; \Sigma, P_{\mu, \Sigma}) = (x - \mu)(x - \mu)^T \omega_\eta \left(\sqrt{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)} \right) - \Sigma \omega_\delta \left(\sqrt{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)} \right), \quad (29)$$

гдје су

$$\begin{aligned} \omega_\mu \left(\sqrt{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)} \right) &= \frac{\omega_1(\sqrt{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)})}{E_{P_0}[\omega_1(\|y\|)] + \frac{1}{N} \omega_1'(\|y\|)\|y\|]} \\ \omega_\eta \left(\sqrt{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)} \right) &= \frac{N(N + 2)\omega_2(\sqrt{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)})}{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu) E_{P_0}[N\omega_2(\|y\|)] + \omega_2'(\|y\|)\|y\|]} \\ \omega_\delta \left(\sqrt{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)} \right) &= \frac{N\omega_3(\sqrt{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)})}{E_{P_0}[\omega_2'(\|y\|)\|y\|] - N\omega_3'(\|y\|)\|y\|]} - \\ &\quad - \frac{2\omega_2(\sqrt{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)})}{E_{P_0}[\omega_2'(\|y\|)\|y\|] - N\omega_3'(\|y\|)\|y\|]} + \\ &\quad + \frac{(N + 2)\omega_2(\sqrt{(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)})}{E_{P_0}[N\omega_2(\|y\|)] + \omega_2'(\|y\|)\|y\|]}, \end{aligned}$$

гдје је P_0 вјероватносна мера која одговара N -димензионалној стандардној нормалној расподјели, а y је N -димензионални случајни вектор са том расподјелом.

Када уврстимо наше тежинске функције ω_1 , ω_2 и ω_3 добијамо

$$\begin{aligned} \omega_\mu(t) &= (\sqrt{\alpha + 1})^{N+2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right), \\ \omega_\eta(t) &= (\sqrt{\alpha + 1})^{N+4} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right) \text{ и} \\ \omega_\delta(t) &= (\sqrt{\alpha + 1})^{N+2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t^2\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Сада, добијамо утицајне криве

$$IF(x; \mu, P_{\mu, \Sigma}) = (\sqrt{\alpha + 1})^{N+2} (x - \mu) \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\right) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} IF(x; \Sigma, P_{\mu, \Sigma}) &= (\sqrt{\alpha + 1})^{N+4} \left[(x - \mu)(x - \mu)^T - \frac{1}{\alpha + 1} \Sigma \right] \cdot \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\right) \end{aligned} \quad (32)$$

Видимо да су обје утицајне криве ограничене по x , па су због тога оцијене параметара μ и Σ , добијене методом минималног псеудорастојања, робусне.

6.2 Утицајна крива опције \hat{p}^* удијела оптималног портфолија

На основу Теореме 1, наведене у поглављу 3.2, можемо да закључимо да ће и утицајна крива опције \hat{p}^* бити ограничена, па ће и сама опција бити робусна. Међутим, да бисмо се увјерили изведимо утицајну криву за \hat{p}^* .

На основу једнакости (4) и Леме 2 добијамо

$$\begin{aligned} IF(x; \hat{p}^*, P_{\mu, \Sigma}) &= -\Sigma^{-1} IF(x; \Sigma, P_{\mu, \Sigma}) \hat{p}^* + \frac{1}{\lambda} \Sigma^{-1} \left[IF(x; \mu, P_{\mu, \Sigma}) + \right. \\ &+ \frac{e_N^T \Sigma^{-1} [IF(x; \Sigma, P_{\mu, \Sigma}) \Sigma^{-1} \mu - IF(x; \mu, P_{\mu, \Sigma})] e_N}{e_N^T \Sigma^{-1} e_N} + \quad (33) \\ &\left. + \frac{(e_N^T \Sigma^{-1} IF(x; \Sigma, P_{\mu, \Sigma}) \Sigma^{-1} e_N) (e_N^T \Sigma^{-1} \mu - \lambda) e_N}{(e_N^T \Sigma^{-1} e_N)^2} \right]. \end{aligned}$$

Утицајне криве $IF(x; \mu, P_{\mu, \Sigma})$ и $IF(x; \Sigma, P_{\mu, \Sigma})$ су ограничене по x , како смо видјели у једнакостима (31) и (32), па из израза (33) сlijеди да је и утицајна крива $IF(x; \hat{p}^*, P_{\mu, \Sigma})$ ограничена по x , па је због тога и опција \hat{p}^* робусна.

6.3 Асимптотска нормалност

Оције параметара добијене методом минималног псеудорастојања опште параметарске расподеле су асимптотски нормалне, под неким условима регуларности, што се може видјети у [8]. Због тога ће и наше опције параметара μ и Σ претпостављене N -димензионе нормалне расподеле $\mathcal{N}_N(\mu, \Sigma)$ бити асимптотски нормалне, те им можемо одредити асимптотске матрице коваријација, које ће нам касније бити потребне, када будемо испитивали ефикасност опције.

Одредимо прво асимптотску матрицу коваријације за опцију $\hat{\mu}$. С обзиром да смо раније одредили утицајну криву ове опције, можемо да је искористимо, примјењујући дефиницију

$$V(\mu, P_{\mu, \Sigma}) = E_{P_{\mu, \Sigma}} [IF(X; \mu, P_{\mu, \Sigma}) IF(X; \mu, P_{\mu, \Sigma})^T], \quad (34)$$

дату у [11], гдје је $V(\mu, P_{\mu, \Sigma})$ асимптотска матрица коваријације опције $\hat{\mu}$, $P_{\mu, \Sigma}$ вјероватносна мјера која одговара расподјели $\mathcal{N}_N(\mu, \Sigma)$, а X случајан вектор који има ту расподелу.

Користећи израз (31) добијамо:

$$\begin{aligned}
V(\mu, P_{\mu, \Sigma}) &= E_{P_{\mu, \Sigma}} [(\alpha + 1)^{N+2} (X - \mu)(X - \mu)^T \cdot \\
&\quad \cdot \exp\left(-\frac{\alpha}{2} (X - \mu)^T \Sigma^{-1} (X - \mu)\right)] \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (\alpha + 1)^{N+2} (x - \mu)(x - \mu)^T \exp\left(-\frac{\alpha}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{1}{\det(2\pi\Sigma)} \exp\left(-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\right) dx.
\end{aligned}$$

Примјеном смјене $z = x - \mu$ добијамо:

$$\begin{aligned}
V(\mu, P_{\mu, \Sigma}) &= \int_{\mathbb{R}^N} (\alpha + 1)^{N+2} z z^T \exp\left(-\frac{\alpha}{2} z^T \Sigma^{-1} z\right) \cdot \\
&\quad \cdot \frac{1}{\det(2\pi\Sigma)} \exp\left(-\frac{1}{2} z^T \Sigma^{-1} z\right) dz \\
&= (\alpha + 1)^{N+2} \int_{\mathbb{R}^N} z z^T \frac{1}{\det(2\pi\Sigma)} \exp\left(-\frac{1}{2} z^T \left(\frac{1}{2\alpha + 1} \Sigma\right)^{-1} z\right) dz.
\end{aligned}$$

Намјестимо сада претходну подинтегралну функцију тако да дио без $z z^T$ одговара густини $\mathcal{N}_N(\mathbf{0}, \frac{1}{2\alpha+1}\Sigma)$ расподеле.

$$\begin{aligned}
V(\mu, P_{\mu, \Sigma}) &= (\alpha + 1)^{N+2} \int_{\mathbb{R}^N} z z^T \frac{\sqrt{\frac{1}{(2\alpha+1)^N}}}{\det(2\pi \frac{1}{2\alpha+1} \Sigma)} \cdot \\
&\quad \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} z^T \left(\frac{1}{2\alpha + 1} \Sigma\right)^{-1} z\right) dz \\
&= \frac{(\alpha + 1)^{N+2}}{\sqrt{(2\alpha + 1)^N}} \int_{\mathbb{R}^N} z z^T \frac{1}{\det(2\pi \frac{1}{2\alpha+1} \Sigma)} \cdot \\
&\quad \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} z^T \left(\frac{1}{2\alpha + 1} \Sigma\right)^{-1} z\right) dz.
\end{aligned}$$

Примијетимо сада да претходни интеграл можемо посматрати као $E[ZZ^T]$, гдје Z има $\mathcal{N}_N(\mathbf{0}, \frac{1}{2\alpha+1}\Sigma)$ расподелу.

Прије него што одредимо претходни интеграл, сјетимо се дефиниције коваријације произвољног вектора Y :

$$\begin{aligned}
Cov(Y) &= E[(Y - E[Y])(Y - E[Y])^T] \\
&= E[YY^T] - E[Y]E[Y^T] - E[Y]E[Y^T] + E[Y]E[Y^T] \quad (35) \\
&= E[YY^T] - E[Y]E[Y^T].
\end{aligned}$$

Примјењујући претходну једнакост на вектор Z добијамо да је

$$E[ZZ^T] = Cov(Z) = \frac{1}{2\alpha + 1} \Sigma, \quad (36)$$

па слиједи да је

$$V(\mu, P_{\mu, \Sigma}) = \left(\frac{\alpha + 1}{\sqrt{2\alpha + 1}} \right)^{N+2} \Sigma. \quad (37)$$

Одредимо сада асимптотску матрицу коваријације $V(\Sigma, P_{\mu, \Sigma})$ оције $\hat{\Sigma}$. Ради лакшег поступка, одредимо прво $V(\Sigma, P_0)$, гдје је P_0 вјероватносна мјера која одговара N -димензионој стандардној нормалној расподјели $\mathcal{N}_N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. С обзиром да је Σ симетрична матрица, посматрајмо само њене елементе који се не понављају, тј. доње-троугаону матрицу (с тим да ћемо дијагонали подијелити са $\sqrt{2}$):

$$\Delta(\Sigma) = (\sigma_{11}/\sqrt{2}, \dots, \sigma_{NN}/\sqrt{2}, \sigma_{21}, \sigma_{31}, \dots, \sigma_{N, N-1})^T.$$

Одредимо сада $V(\Delta\Sigma, P_0)$.

$$\begin{aligned} V(\Delta\Sigma, P_0) &= E_{P_0} [\Delta IF(Z; \Sigma, P_0) \Delta IF(Z; \Sigma, P_0)^T] \\ &= d_\eta \left(\mathbf{I} - \frac{1}{N} \omega \omega^T \right) + d_\tau \frac{1}{N} \omega \omega^T, \end{aligned}$$

гдје су $\omega^T = (e_N^T, \mathbf{0}_{N(N-1)/2}^T)$, $d_\eta = E_{P_0} [||Z||^4 \omega_\eta^2(||Z||)] / (N(N+2))$ и $d_\tau = E_{P_0} [\omega_\tau^2(||Z||)] / (2N)$, гдје је $\omega_\tau(t) = t^2 \omega_\eta(t) - N \omega_\delta(t)$, уз ω_η , ω_δ и ω_τ дефинисане у (30). Након пар рачунских корака добијамо

$$\begin{aligned} d_\eta &= \left(\frac{\alpha + 1}{\sqrt{2\alpha + 1}} \right)^{N+4} \text{ и} \\ d_\tau &= \frac{N\alpha^2(\alpha + 1)^{N+2}}{2(\sqrt{2\alpha + 1})^{N+4}} + \left(\frac{\alpha + 1}{\sqrt{2\alpha + 1}} \right)^{N+4}, \end{aligned}$$

па имамо да је

$$V(\Delta\Sigma, P_0) = \left(\frac{\alpha + 1}{\sqrt{2\alpha + 1}} \right)^{N+4} \mathbf{I} + \frac{\alpha^2(\alpha + 1)^{N+2}}{2(\sqrt{2\alpha + 1})^{N+4}} \omega \omega^T. \quad (38)$$

Сада, можемо лако да одредимо асимптотску матрицу коваријације $V(\Delta\Sigma, P_{\mu, \Sigma})$ вектора $\Delta(\hat{\Sigma})$, примјењујући формулу

$$V(\Delta\Sigma, P_{\mu, \Sigma}) = \left[\frac{\partial \Delta \left[\Sigma^{\frac{1}{2}} S \Sigma^{\frac{1}{2}} \right]}{\partial \Delta S} \right] V(\Delta\Sigma, P_0) \left[\frac{\partial \Delta \left[\Sigma^{\frac{1}{2}} S \Sigma^{\frac{1}{2}} \right]}{\partial \Delta S} \right]^T, \quad (39)$$

дату у [6]. Такође, ту се може видјети да за дату $N \times N$ -димензиону матрицу M важи:

$$\left[\frac{\partial \Delta \left[\Sigma^{\frac{1}{2}} S \Sigma^{\frac{1}{2}} \right]}{\partial \Delta S} \right] \Delta M = \Delta(\Sigma^{\frac{1}{2}} M \Sigma^{\frac{1}{2}}).$$

Специјално, за $M = \mathbf{I}$ имамо:

$$\left[\frac{\partial \Delta \left[\Sigma^{\frac{1}{2}} S \Sigma^{\frac{1}{2}} \right]}{\partial \Delta S} \right] \Delta \mathbf{I} = \Delta \Sigma. \quad (40)$$

Примијетимо да, раније дефинисано, $\omega = (e_N^T, \mathbf{0}_{N(N-1)/2}^T)$ можемо записати као $\omega = \sqrt{2} \Delta \mathbf{I}$, па примјењујући претходне једнакости долазимо до жељене асимптотске матрице коваријације:

$$\begin{aligned} V(\Delta \Sigma, P_{\mu, \Sigma}) &= \left(\frac{\alpha + 1}{\sqrt{2\alpha + 1}} \right)^{N+4} \left[\frac{\partial \Delta \left[\Sigma^{\frac{1}{2}} S \Sigma^{\frac{1}{2}} \right]}{\partial \Delta S} \right] \left[\frac{\partial \Delta \left[\Sigma^{\frac{1}{2}} S \Sigma^{\frac{1}{2}} \right]}{\partial \Delta S} \right]^T + \\ &+ \frac{\alpha^2 (\alpha + 1)^{N+2}}{(\sqrt{2\alpha + 1})^{N+4}} \Delta \Sigma (\Delta \Sigma)^T. \end{aligned} \quad (41)$$

7 Асимптотска релативна ефикасност

Ефикасност оцијена не треба занемарити приликом одабира методе оцјењивања непознатих параметара у претпостављеној расподјели. Познато је да су најефикасније оцијене оне добијене методом максималне вјеродостојности, међутим уколико дође до одступања узорка од претпостављене расподјеле, те исте оцијене показују низак ниво робусности. Због тога је најбоље одабрати метод који ће нас довести до оцијена које су у што већој мјери и робусне и ефикасне.

Да бисмо процијенили ефикасност наших оцијена параметара μ и Σ , добијених методом минималног псеудорастојања користимо асимптотску релативну ефикасност (*ARE*) као средство. *ARE* мјери ефикасност поменутих оцијена у односу на оцијене добијене методом максималне вјеродостојности

Нека је θ d -димензионални параметар и нека је $\hat{\theta}$ његова оцијена која је асимптотски нормална $\mathcal{N}_d(\theta, V(\theta, P))$. *ARE* се дефинише као

$$ARE(\hat{\theta}, P) = \left(\frac{\det V_0(\theta, P)}{\det V(\theta, P)} \right)^{\frac{1}{d}},$$

гдје је $V_0(\theta, P)$ асимптотска матрица коваријације оцијене максималне вјеродостојности параметра θ (видјети у [9]).

Прије него што изведемо *ARE* у случају када је $\hat{\theta} = (\hat{\mu}, \Delta \hat{\Sigma})$, гдје су $\hat{\mu}$ и $\Delta \hat{\Sigma}$ оцијене добијене методом минималног псеудорастојања, примијетимо да су $\hat{\mu}$ и $\Delta \hat{\Sigma}$ асимптотски независне оцијене (као специјалан случај M-оцијена).

Због тога можемо да запишемо сљедеће:

$$\begin{aligned} ARE(\hat{\theta}, P_{\mu, \Sigma}) &= \left(\frac{\det V_0(\theta, P_{\mu, \Sigma})}{\det V(\theta, P_{\mu, \Sigma})} \right)^{\frac{2}{N(N+3)}} \\ &= \left(\frac{\det V_0(\mu, P_{\mu, \Sigma}) \det V_0(\Delta \Sigma, P_{\mu, \Sigma})}{\det V(\mu, P_{\mu, \Sigma}) \det V(\Delta \Sigma, P_{\mu, \Sigma})} \right)^{\frac{2}{N(N+3)}} \end{aligned} \quad (42)$$

Користећи једнакости (37) и (39) добијамо:

$$\begin{aligned} ARE(\hat{\theta}, P_{\mu, \Sigma}) &= \left(\frac{\det V_0(\mu, P_0) \det V_0(\Delta \Sigma, P_0)}{\det V(\mu, P_0) \det V(\Delta \Sigma, P_0)} \right)^{\frac{2}{N(N+3)}}, \\ \det V(\mu, P_0) &= \left(\frac{\alpha + 1}{\sqrt{2\alpha + 1}} \right)^{N(N+2)} \quad \text{и} \\ \det V(\Delta \Sigma, P_0) &= \left(\frac{\alpha + 1}{\sqrt{2\alpha + 1}} \right)^{\frac{N(N+1)(N+4)}{2}} \left(1 + \frac{N\alpha^2}{2(\alpha + 1)^2} \right). \end{aligned}$$

Због претходног важи сљедеће:

$$ARE(\hat{\theta}, P_{\mu, \Sigma}) = \frac{1}{\left(\frac{\alpha+1}{\sqrt{2\alpha+1}} \right)^{\frac{N^2+7N+8}{N+3}} \left(1 + \frac{N\alpha^2}{2(\alpha+1)^2} \right)^{\frac{2}{N(N+3)}}}. \quad (43)$$

Примијетимо да ARE не зависи ни од μ ни од Σ . У Табели 1 су дате вриједности ARE за $N \in \{1, \dots, 10\}$ и $\alpha \in \{0, 0.1, 0.2, 0.5, 0.75, 1\}$. Видимо да када α узима веће вриједности, ARE је мања, што значи да су оцијене ефикасније за ниже вриједности параметра α .

Табела 1: Асимптотска релативна ефикасност

	$\alpha = 0$	$\alpha = 0, 1$	$\alpha = 0, 2$	$\alpha = 0, 5$	$\alpha = 0, 75$	$\alpha = 1$
$N = 1$	1	0,98151	0,93872	0,76905	0,63775	0,53033
$N = 2$	1	0,97704	0,92429	0,72086	0,57043	0,45267
$N = 3$	1	0,97273	0,91052	0,67698	0,51187	0,38814
$N = 4$	1	0,96851	0,89718	0,63647	0,46018	0,33371
$N = 5$	1	0,96436	0,88419	0,59880	0,41421	0,28739
$N = 6$	1	0,96025	0,87148	0,56361	0,37312	0,24778
$N = 7$	1	0,95619	0,85903	0,53066	0,33629	0,21381
$N = 8$	1	0,95216	0,84679	0,49975	0,30323	0,18460
$N = 9$	1	0,94816	0,83477	0,47073	0,27350	0,15946
$N = 10$	1	0,94418	0,82295	0,44346	0,24675	0,13779

8 Монте Карло симулације

Покажимо сада на примјерима, коришћењем Монте-Карло симулација, како се понашају оцијене уведене у поглављу 5 када долази до одступања доступних података од претпостављеног модела и када до њега не долази. То понашање ћемо видјети кроз асимптотску релативну ефикасност и кроз оцјену средњеквадратне грешке. У случају да је ред псеудорастојања $\alpha = 0$, оцијене добијене његовим минимизирањем ће се поклапати са оцијенама добијеним класичном методом, односно методом максималне вјеродостојности, па ћемо, такође, на овим примјерима моћи упоредити та два приступа оцјењивању.

8.1 Примјер 1

Нека је претпостављена расподјела N -димензиона нормална $\mathcal{N}_N(\mu_0, \Sigma_0)$, гдје је $\mu_0 = (0, \dots, 0)$ N -димензиони вектор нула и гдје је

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & \dots & \dots & 0,2 \\ 0,2 & 1 & 0,2 & \dots & 0,2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,2 & \dots & \dots & 0,2 & 1 \end{bmatrix}$$

$N \times N$ -димензиона матрица са јединицама на дијагонали и са 0,2 на осталим позицијама.

Нека је T обим узорка који генеришемо из ове расподјеле. Међутим, генеришемо га тако да са вјероватноћом $(1 - \epsilon)$ елементи узорка долазе из расподјеле $\mathcal{N}_N(\mu_0, \Sigma_0)$, док са вјероватноћом $\epsilon \cdot T$ долазе из нешто другачије расподјеле $\mathcal{N}_N(\mu_c, \Sigma_c)$, гдје је $\mu_c = (-4, \dots, -4)$, а $\Sigma_c = 4 \cdot \Sigma_0$. Ово ћемо посматрати за различите вриједности параметра ϵ из скупа $\epsilon \in \{0, 0.05, 0.1, 0.2\}$. Примјетимо да параметар ϵ користимо да бисмо добили податке који се у некој мјери разликују од претпостављене расподјеле, те нам то управо даје сценарио који нам је од интереса, на коме ћемо да видимо како се оцијене понашају. У случају да је $\epsilon > 0$ имамо одступање од претпостављене расподјеле, а када је $\epsilon = 0$ тада одступања нема. Разматраћемо димензије $N \in \{2, 5, 10, 20, 50\}$ и редове псеудорастојања $\alpha \in \{0, 0.1, 0.2, 0.5, 0.75, 1\}$.

За сваку комбинацију вриједности које узимају промјенљиве ϵ, N, T и α , 1000 пута генеришемо узорак обима T и сваки пут оцјењујемо параметре μ_0 и Σ_0 а затим одредимо средњеквадратну грешку тако добијених оцијена. Коначна оцјена средњеквадратне грешке ће бити просјек свих 1000 добијених оцијена средњеквадратних грешака.

У сваком од 1000 узорака, оцијене $\hat{\mu}_0$ и $\hat{\Sigma}_0$ добијамо понављајући низ

слједећих корака. Нека је $s \in \mathbb{N}_0$ редни број итерације. Означимо са $\mu_0^{(s)}$ и $\Sigma_0^{(s)}$ оцијене добијене у s -тој итерацији, при чему користимо правила

$$\mu_0^{(s)} = \begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T X^i, & s = 0 \\ \sum_{i=1}^T w_i^{(s-1)} X^i, & s \neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad (44)$$

$$\Sigma_0^{(s)} = \begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (X^i - \mu_0^{(s)}) (X^i - \mu_0^{(s)})^T, & s = 0 \\ \sum_{i=1}^T (\alpha + 1) w_i^{(s-1)} (X^i - \mu_0^{(s)}) (X^i - \mu_0^{(s)})^T, & s \neq 0 \end{cases}, \quad (45)$$

гдје је

$$w_i^{(s)} = \frac{\exp\left(-\frac{\alpha}{2} (X^i - \mu_0^{(s)})^T \Sigma_0^{(s)} (X^i - \mu_0^{(s)})\right)}{\sum_{i=1}^T \exp\left(-\frac{\alpha}{2} (X^i - \mu_0^{(s)})^T \Sigma_0^{(s)} (X^i - \mu_0^{(s)})\right)}.$$

Поступак понављамо све док се двије узастопне оцијене значајно разликују.

Примијетимо да када је $\alpha = 0$ тада је $w_i^{(s)} = 1$ за свако $s \geq 1$, па се поступак своди на оцјењивање методом максималне вјеродостојности. А када је $\alpha \neq 0$ тада претходним поступком додјељујемо мале тежине w_i , а самим тим и малу значајност, опсервацијама које се битно разликују од претпостављеног модела. Такође, примијетимо да се у случају када је $s \geq 1$ формуле (44) и (45) поклапају са формулама (23) и (25).

Након што 1000 пута поновимо претходни поступак, почевши од вађења узорка, а затим оцјењивања, можемо да одредимо оцјену средњеквадратне грешке:

$$M\hat{S}E = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \left\| \hat{\theta}_i - \theta_0 \right\|^2,$$

гдје су $\theta_0 = (\mu_0, \triangleright(\Sigma_0))$, параметри претпостављене $\mathcal{N}_N(\mu_0, \Sigma_0)$ расподеле, а $\hat{\theta}_i = (\hat{\mu}_i, \triangleright(\hat{\Sigma}_i))$ оцијењени параметри у i -тој итерацији, гдје је са \triangleright означена операција над матрицом, која од матрице враћа доње-троугаону матрицу (укључујући и дијагоналну) записану као вектор, при чему се записивање врши по колонама матрице.

На основу резултата можемо да видимо да када нема одступања од претпостављеног модела (када је $\epsilon = 0$), тада нема великих разлика између оцијена средњеквадратних грешака у случају када су параметри оцијењени методом максималне вјеродостојности ($\alpha = 0$) и у случају када су оцијењени методом минималног псевдорастајања ($\alpha \neq 0$). Међутим уколико постоји одступање од претпостављеног модела тада се већ виде разлике. Веће су грешке ако параметре оцјењујемо методом максималне вјеродостојности, и што је одступање од претпостављеног модела веће то су грешке веће у односу на оне које се јављају када користимо метод

Табела 2: Средњеквадратне грешке оцјењивања за $T = 10 \cdot N$

	$\epsilon = 0$					
	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,75$	$\alpha = 1$
$N = 2$	0,354	0,347	0,355	0,403	0,482	0,595
$N = 5$	0,582	0,575	0,576	0,651	0,985	1,317
$N = 10$	1,275	1,242	1,223	1,722	2,182	2,601
$N = 20$	2,531	2,477	2,458	3,402	4,543	5,786
	$\epsilon = 0,05$					
$N = 2$	4,193	2,578	1,894	1,576	1,423	1,403
$N = 5$	2,609	2,375	2,182	2,108	2,322	2,538
$N = 10$	5,576	5,245	4,964	5,245	5,499	5,745
$N = 20$	13,037	12,462	11,975	12,519	13,408	14,556
	$\epsilon = 0,1$					
$N = 2$	12,025	8,197	5,818	4,538	3,819	3,404
$N = 5$	9,107	8,476	7,617	7,020	6,806	6,666
$N = 10$	17,142	16,017	15,022	14,649	14,355	14,121
$N = 20$	39,839	37,929	36,238	35,702	35,604	36,007
	$\epsilon = 0,2$					
$N = 2$	32,469	28,142	22,538	17,197	14,002	11,921
$N = 5$	29,105	32,410	29,030	26,332	24,381	22,777
$N = 10$	55,137	52,553	49,133	46,643	44,473	42,603
$N = 20$	124,332	118,212	112,749	108,741	105,439	103,004

минималног псеудорастојања за оцјењивање параметара. Примијетимо да се у тим случајевима најмање грешке јављају код псеудорастојања већег реда ($\alpha = 0,75$ или $\alpha = 1$), међутим када бирамо коју ћемо методу користити за оцјењивање треба, поред разматрања грешке која настаје том приликом, узети у обзир и критеријум ефикасности. Раније смо видјели да су најјефикасније оцијене минималних псеудорастојања редова $\alpha = 0,1$ и $\alpha = 0,2$, док ефикасност доста опада за веће редове. Стога, иако су грешке које настају када користимо псеудорастојања виших редова најмање, и ефикасност таквих оцијена је веома ниска те оне не представљају најбољи избор. Најбољи избор би била управо псеудорастојања реда $\alpha = 0,1$ или $\alpha = 0,2$, прво због високе ефикасности оцијена добијених њиховим минимизирањем, а затим и јер су грешке настале приликом оцјењивања ипак ниже у поређењу са методом максималне вјеродосјности.

8.2 Примјер 2

Погледајмо сада какве ће бити грешке оцијена када су нам подаци јако корелисани. Нека је претпостављена расподела $\mathcal{N}_N(\mu, \Sigma)$, гдје је

Табела 3: Средњеквадратне гршке оцјењивања за $T = 100 \cdot N$

	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,75$	$\alpha = 1$
	$\epsilon = 0$					
$N = 2$	0,035	0,036	0,037	0,040	0,045	0,052
$N = 5$	0,051	0,052	0,052	0,056	0,063	0,074
$N = 10$	0,075	0,075	0,076	0,083	0,101	0,518
$N = 20$	0,498	0,480	0,466	0,488	1,495	2,522
	$\epsilon = 0,05$					
$N = 2$	2,496	1,407	0,963	0,736	0,602	0,517
$N = 5$	1,986	1,764	1,576	1,427	1,310	1,219
$N = 10$	3,980	3,705	3,465	3,260	3,093	3,367
$N = 20$	10,400	9,888	9,427	9,053	9,691	10,413
	$\epsilon = 0,1$					
$N = 2$	8,964	5,754	3,929	2,963	2,386	2,004
$N = 5$	7,204	6,579	5,858	5,281	4,815	4,433
$N = 10$	14,395	13,396	12,510	11,741	11,079	10,930
$N = 20$	36,257	34,453	32,822	31,418	31,100	30,921
	$\epsilon = 0,2$					
$N = 2$	28,566	23,557	18,191	13,670	10,955	9,149
$N = 5$	25,762	28,059	24,976	22,490	20,461	18,778
$N = 10$	50,551	48,180	44,977	42,180	39,737	38,035
$N = 20$	119,091	113,154	107,776	103,088	99,643	96,633

$N = 5$, $\mu = \mathbf{0}$ и

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Узећемо узорак димензије 500, при чему ће са вјероватноћом $(1 - \epsilon)$ опсервације одговарати наведеној расподјели $\mathcal{N}_N(\mu, \Sigma)$, а са вјероватноћом ϵ расподјели $\mathcal{N}_N(\mathbf{4}, \Sigma)$, при чему $\epsilon \in \{0, 0.1, 0.2\}$. Резултати, дати у Табели 4, показују да су чак и при високој корелацији између података, оцијене добијене методом минималног псеудорастојања боље од оцијена максималне вјеродостојности када постоји одступање од претпостављене расподјеле ($\epsilon > 0$). У случају да нема одступања ($\epsilon = 0$), оцијене методом максималне вјеродостојности су најбоље, међутим ни оцијене методом минималног псеудорастојања нису значајно лошије, поготово за вриједности параметра $\alpha \in \{0.1, 0.2\}$.

Табела 4: Средњеквадратне грешке оцјењивања када су подаци јако корелисани

	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,75$	$\alpha = 1$
$\epsilon = 0$	1,97343	2,07640	2,14152	2,98822	6,28103	8,93822
$\epsilon = 0,1$	34,90889	30,73495	26,07593	21,78896	21,74796	21,72493
$\epsilon = 0,2$	106,46890	105,26674	101,27671	85,74475	75,89161	67,79577

9 Примјена на финансијске податке

Посматрајмо сада *MSCI* индексе наредних подручја: Француска, Њемачка, Италија, Пацифичке земље, Шпанија и Велика Британија. За свако од поменутих 6 подручја имамо 169 логаритмованих мјесечних приноса, у периоду од јуна 2006. до маја 2020. године. Конструисаћемо робустан портфолио, примјењујући раније описану методу минималног псеудорастојања, те његове особине упоредити са портфолиом добијеним класичном методом.

Прво, погледајмо на слици 1 боксплотове ових података. Можемо да примијетимо да сваки од 6 финансијских инструмената са собом носи неке аутлајере, као и да подаци не одговарају сасвим симетричним распојелама, као што је претпостављена нормална распојела. Погледајмо шта ће се десити ако избацимо аутлајере. Као што можемо видјети на слици 2 подаци не одступају много од нормалне распојеле. Провјеримо то коришћењем Шапиро-Вилковог теста нормалности. За неки узорак x_1, \dots, x_n овај тест тестира претпоставку да он има нормалну распојелу, користећи при том тест статистику:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

гдје је $x_{(i)}$ i -ти најмањи елемент у узорку, а \bar{x} узорачка средња вриједност. Елементи a_i су дати са:

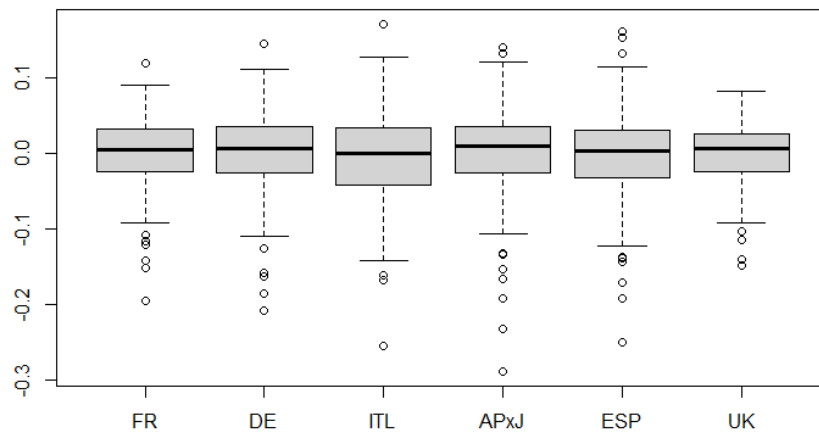
$$(a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{\frac{1}{2}}},$$

гдје је $m = (m_1, \dots, m_n)^T$ вектор очекиваних вриједности статистике поретка која се састоји од независних и једнако распојелењених случајних величина које имају стандардну нормалну распојелу, а V њихова коваријациона матрица. На основу резултата датих у табели 5 прихватамо хипотезу о нормалности података, па можемо да примијенимо Марковицов метод оптимизације портфолија.

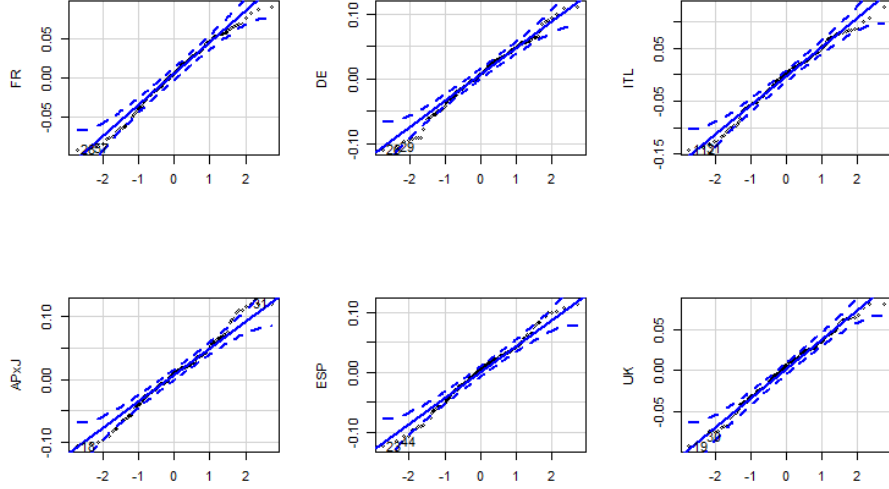
Оцијене очекиваних приноса и дисперзије су дате на слици 3. Примијетимо да су очекивани приноси већи са порастом параметра α . С обзиром да се метода оцјењивања за вриједност параметра $\alpha = 0$ поклапа са методом максималне вјеродостојности, видимо да су очекивани приноси виши када

Табела 5: P -вриједности Шапиро-Вилковог теста

	p -вриједност
<i>FR</i>	0,07303
<i>DE</i>	0,17217
<i>ITL</i>	0,0965
<i>APxJ</i>	0,16722
<i>ESP</i>	0,31406
<i>UK</i>	0,28665



Слика 1: Боксплотови приноса од 6 финансијских инструмената



Слика 2: *QQplot*-ови за нормалну расподелу

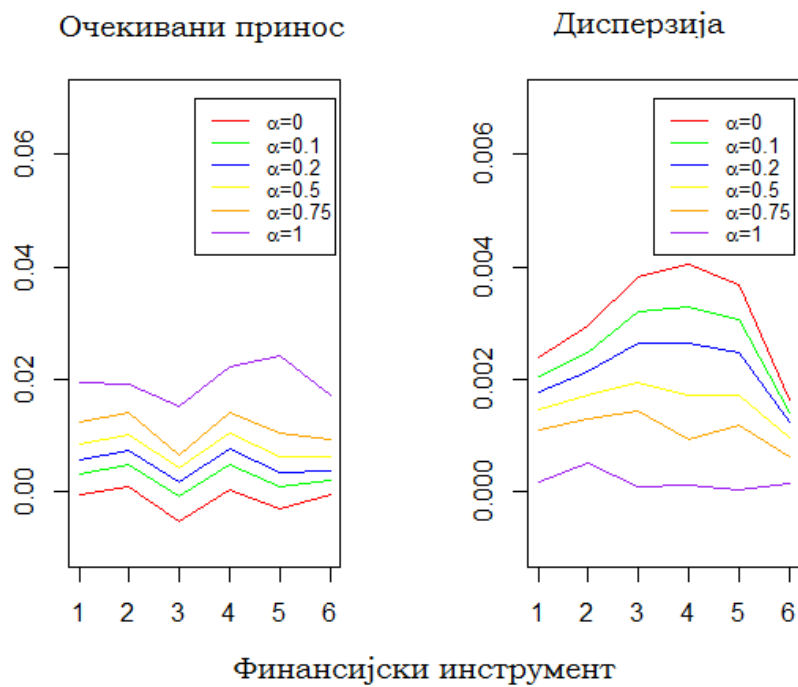
се параметри оцјењују методом минималног псевдорастојања. Што се тиче дисперзије ситуација је обрнута, ниже вриједности одговарају вишим вриједностима параметра α . Стога ће портфолио, чији су удијели добијени на основу параметара који су оцијењени методом минималног псевдорастојања имати више приносе и нижу дисперзију у поређењу са оним чији су удијели добијени на основу параметара који су оцијењени методом максималне вјеродостојности.

На Слици 4 су приказане ефикасне границе добијене уз помоћ различитих псевдорастојања (за различите вриједности параметра α .) При робусном оцјењивању ефикасне границе су доминантније него при класичном, јер се тада постиже већи принос уз мањи ризик.

Пронађимо сада утицајне елементе узорка који су одговорни за помијерање ефикасних граница. Утицајну криву можемо користити за проналажење таквих елемената, те посматрајмо мјеру утицаја података $DIM(x, \hat{p}^*)$ која је дефинисана у [10] као Еуклидско растојање утицајне криве оцјене \hat{p}^* у тачки x :

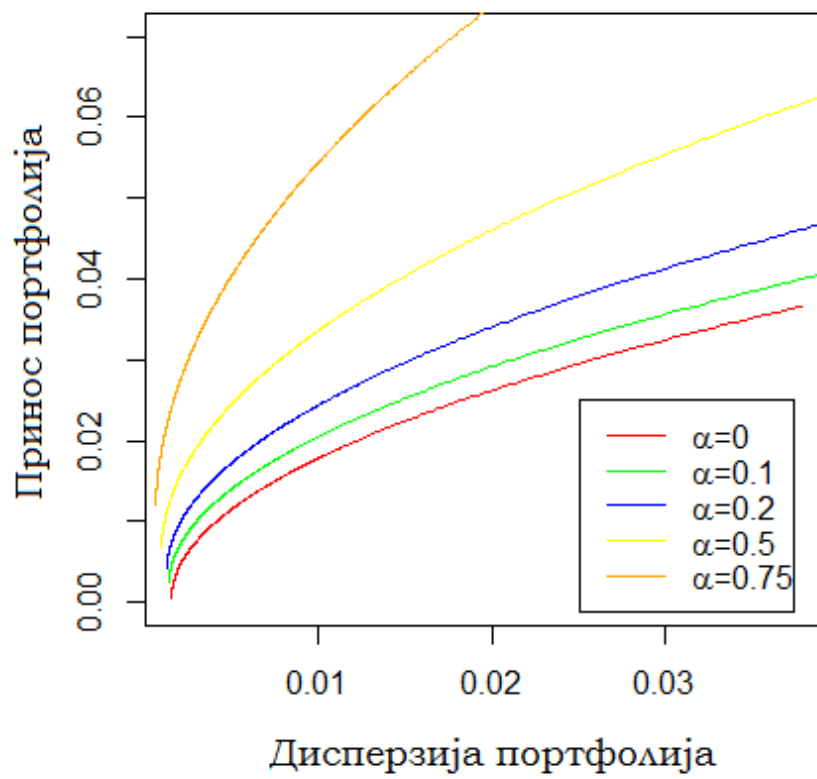
$$DIM(x, \hat{p}^*) = [IF(x; p^*, P_{\mu, \Sigma})^T IF(x; p^*, P_{\mu, \Sigma})]^{\frac{1}{2}}, \quad (46)$$

гдје је $IF(x; p^*, P_{\mu, \Sigma})$ дато једнакошћу (33), са $IF(x; \mu, P_{\mu, \Sigma})$ и $IF(x; \Sigma, P_{\mu, \Sigma})$ из једнакости (31) и (32), редом, за $\alpha = 0$. Да бисмо израчунали DIM потребно је да знамо вриједности параметара μ, Σ и p^* , међутим како их не знамо оцјењујемо их, и то робусно, да не би аутлајери имали утицаја на



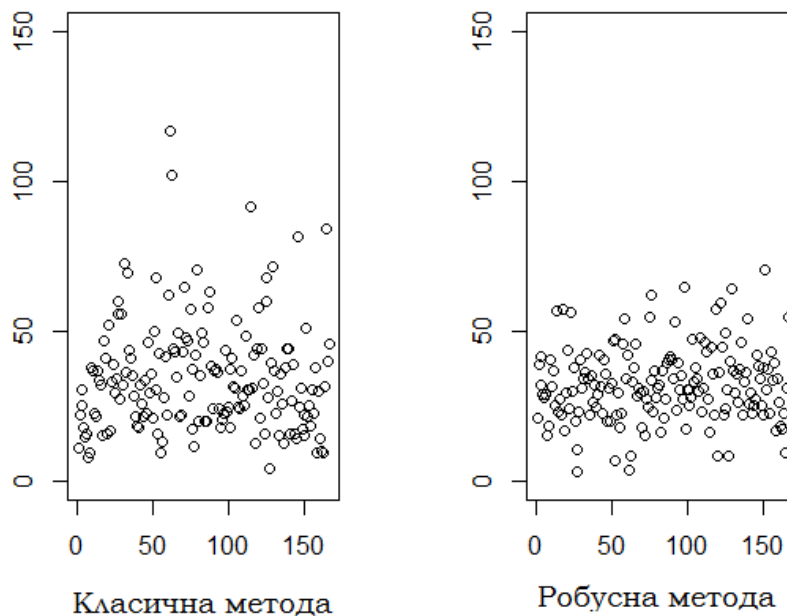
Слика 3: Средње вриједности и дисперзије приноса финансијских инструмената

Ефикасне границе



Слика 4: Ефикасне границе

Утицај података на оцијене тежина портфолија



Слика 5: *DIM*

DIM. Такође, како је за одређивање *DIM*–а потребно изабрати конкретан портфолио, изаберимо, без умањења општости, да је аверзија према ризику $\lambda = 3.85$ и оцијенимо тежине у портфолију робусним путем, методом минималног псеудорастојања за параметар $\alpha = 0.2$.

На Слици 5 је приказан утицај података на оцијене тежина портфолија добијене класичном методом максималне вјеродостојности и на оцијене добијене робусном методом минималног псеудорастојања за $\alpha = 0.2$. Можемо примјетити да робусно оцјењивање значајно смањује утицај елемената који су били доминантни у класичном оцјењивању, на оцјену удијела портфолија.

10 Мјере перформанси портфолија

Да бисмо процијенили стабилност и перформансе портфолија користимо двије мјере: тачку прекрета и Шарпов количник. Али прије тога спроведимо ”покретни хоризонт” процедуру, која је, заједно са овим мјерама, детаљно описана у [18]. Наиме, од 167 приноса финансијских

инструментата, са којима смо се већ упознали у претходном поглављу, одабраћемо првих 120 и оцијенити средње вриједности и коваријациону матрицу приноса, а затим и удијеле у портфолију, и класичном методом и робусним методама. Као и у претходном поглављу посматраћемо случај када је инвеститорова аверзија према ризику $\lambda = 3.85$. Осим тога, посматраћемо и ситуацију када је инвеститорова аверзија према ризику $\lambda = \infty$, тј. када је инвеститору циљ да минимизује ризик по сваку цијену, не узимајући у обзир принос портфолија. На овај начин добијамо удијеле портфолија оцијењене на основу првих 120 опсервација. У сљедећем кораку, узимамо наредних 120 опсервација, тј. помијерамо наш хоризонт за једну опсервацију избацујући прву и укључујући 121. На тај начин добијамо још један вектор удијела портфолија. Овај поступак понављамо све док не прођемо кроз свих 167 опсервација, те ћемо на крају имати $167 - 120 + 1 = 48$ вектора удијела портфолија на основу којих ћемо добити тачку преокрета и Шарпов количник за све посматране портфолије. У нашем случају тачка преокрета се дефинише на сљедећи начин:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{167 - 120 - 1} \sum_{t=120}^{167-1} \sum_{j=1}^6 |p_{j,t+1} - p_{j,t+}|,$$

гдје је

$$p_{j,t+} = \frac{1 + X_j^{t+1}}{1 + (X^{t+1})^T p_t} \cdot p_{j,t},$$

а p_t је вектор удијела портфолија добијен у времену $t \in \{120, \dots, 167 - 1\}$, док је $p_{j,t}$ елемент тог вектора који одговара j -том финансијском инструменту. X^t је вектор приноса финансијских инструмената из времена t , а X_j^t је принос из времена t који одговара j -том инструменту.

Шарпов количник се дефинише као:

$$\hat{SR} = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}},$$

гдје су:

$$(\hat{\sigma})^2 = \frac{1}{167 - 120 - 1} \sum_{t=120}^{167-1} ((p_t)^T X^{t+1} - \hat{\mu})^2 \text{ и}$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{167 - 120} \sum_{t=120}^{167-1} (p_t)^T X^{t+1}$$

Како се може видјети у [18], перформансе портфолија су боље што је тачка преокрета нижа и што је Шарпов количник виши, па на основу резултата приказаних у табели 6 видимо да су перформансе портфолија који не узима у обзир очекиване приносе ($\lambda = \infty$) боље од онога који узима, судећи по тачки преокрета, док је судећи по Шарповом количнику обрнута ситуација. Ако посматрамо само портфолије за $\lambda = 3.85$, вриједности мијера перформанси су приближно једнаке за различите вриједности параметра α . Слична је ситуација и код портфолија гдје је $\lambda = \infty$.

Табела 6: Мјере перформанси портфолија

	$\lambda = 3,85$		$\lambda = \infty$	
	$\hat{\tau}$	$\hat{S}R$	$\hat{\tau}$	$\hat{S}R$
$\alpha = 0$	0,73097	-0,01948	0,10695	-0,10324
$\alpha = 0,1$	0,75830	-0,00748	0,11293	-0,10693
$\alpha = 0,2$	0,85504	-0,00138	0,12371	-0,11292
$\alpha = 0,25$	0,93221	-0,00045	0,13154	-0,11653

11 Закључак

И теоријски резултати и примјери показују да су оцијене минималног псеудорастојања бољи избор, посебно када се у подацима могу појавити аутлајери. Оцијене минималног псеудорастојања, посебно за избор параметра $\alpha \in \{0.1, 0.2\}$ су уједно и робусне и ефикасне. Такође, како смо видјели у поглављу 8, оцијене минималног псеудорастојања се добро понашају чак и када су подаци међусобно јако корелисани.

С обзиром да се у пракси подаци ријетко појављују без аутлајера и да се оцијене методом минималног псеудорастојања боље понашају у поређењу са класичним оцијенама, предност би требало дати њима, поготово јер оне нису много лошије од класичних чак и када су подаци савршено нормално расподијељени, без икаквих одступања,

12 Прилог

Поглавље 7, табела 1:

Наредни код одговара формули 43 у раду.

```
N=seq(1:10)
alpha=c(0,0.1,0.2,0.5,0.75,1)
M=matrix(rep(0,length(N)*length(alpha)),
ncol=length(alpha))
for(i in 1:length(N)){
  for(j in 1:length(alpha)){
    M[i,j]=1/(((alpha[j]+1)/sqrt(2*alpha[j]+1))^
((N[i]^2+7*N[i]+8)/(N[i]+3))*
(1+(N[i]*alpha[j]^2)/
(2*(alpha[j]+1)^2))^(2/(N[i]*(N[i]+3))))))}
```

Поглавље 8, табела 2:

Функција *matrica* прави матрицу димензије $N \times N$ за жељено N са јединицама на дијагонали, и 0.2 на осталим мјестима.

Функција *vecs* за дату матрицу враћа вектор у ком су смјештени елементи из доње-троугаоне матрице.

Функција *f* провјерава да ли је матрица инвертибилна.

Функција *osena* враћа оцјену *MSE* (средње-квadratне грешке) за сваку комбинацију N и α . За сваку комбинацију узима се 1000 узорака, код којих су са вјероватноћом $(1 - eps)$ елементи из нормалне расподеле са очекивањем $\mathbf{0}_{N \times 1}$ и коваријационом матрицом *matrica*(N) а са вјероватноћом *eps* из $\mathcal{N}_N(-4, 4 \cdot \text{matrica}(N))$. У сваком таквом узорку оцјењују се μ и Σ методом минималног псевдорастојања (формуле (44) и (45)). Претходно понављамо за вриједности параметра $\epsilon \in \{0, 0.05, 0.1, 0.2\}$.

```
N=c(2,5,10,20)
alpha=c(0,0.1,0.2,0.5,0.75,1)

matrica<-function(N){
M=matrix(rep(0,N^2),ncol=N)
for(i in 1:N){
  for(j in 1:N){
    if(i==j){
      M[i,j]=1}
    }
```

```

else {M[i , j]=0.2}}
return(M)}

vecs<-function(A){
n=ncol(A)
v=A[,1]
for(i in 2:n){
v=c(v,A[,i][ -seq(1:(i-1))])}
return(v)}

f<-function(m) class(try(solve(m), silent=T))=="matrix"

ocena<-function(eps){
niz_ocena=c()
MSE=matrix(rep(0,length(N)*length(alpha)),
ncol=length(alpha))
for(i in 1:length(N)){
T=10*N[i]
theta_0=c(rep(0,N[i]), vecs(matrica(N[i])))
for(j in 1:length(alpha)){
for(k in 1:1000){
s=sample(c(0,1), size=T, replace=TRUE, prob=c(eps,1-eps))
X=mvrnorm(T, rep(0,N[i]), matrica(N[i]))
Y=mvrnorm(T, rep(-4,N[i]), matrica(N[i]*4))
uzorak=s*X+(1-s)*Y
mi_0=apply(uzorak, 2, mean)
Sigma_0=(1/T)*(t(uzorak)-mi_0)%*%t(t(uzorak)-mi_0)
if(f(Sigma_0)){
w=rep(0,T)
niz=rep(0,T)
for(l in 1:T){
niz[l]=exp(-(alpha[j]/2)*(uzorak[l,]-mi_0)
%*%solve(Sigma_0)%*%matrix(uzorak[l,]-mi_0, ncol=1))}
w=niz/sum(niz)
mi_1=apply(uzorak*w, 2, sum)
Sigma_1=(alpha[j]+1)*(t(uzorak)-mi_1)
%*%(t(t(uzorak)-mi_1)*w)
mi_lista=list(mi_0,mi_1)
Sigma_lista=list(Sigma_0,Sigma_1)

while(f(Sigma_lista[[length(Sigma_lista)]])==TRUE
&& (!all(abs(mi_lista[[length(mi_lista)-1]]-
mi_lista[[length(mi_lista)]])<0.001)||
!all(abs(Sigma_lista[[length(Sigma_lista)-1]]-

```

```

Sigma_lista [[length(Sigma_lista)] < 0.001)) {
w_n=rep(0,T)
niz_n=rep(0,T)
for(t in 1:T){
niz_n[t]=exp(-(alpha[j]/2)*(uzorak[t,]
-mi_lista [[length(mi_lista)]])
%*%solve(Sigma_lista [[length(Sigma_lista)]])
%*%matrix(uzorak[t,]-mi_lista [[length(mi_lista)]],
ncol=1))}

w_n=niz_n/sum(niz_n)
mi_lista [[length(mi_lista)+1]]=apply(uzorak*w_n,2,sum)

Sigma_lista [[length(Sigma_lista)+1]]=
(alpha[j]+1)*(t(uzorak)-mi_lista [[length(mi_lista)]])
%*%(t(t(uzorak)-mi_lista [[length(mi_lista)]]) *w_n)}

theta=c(mi_lista [[length(mi_lista)]],
vecs(Sigma_lista [[length(Sigma_lista)]]))

niz_ocena[length(niz_ocena)+1]=(theta_0-theta)
%*%(theta_0-theta)}
MSE[i,j]=mean(niz_ocena)}

colnames(MSE)<-c("alpha=0", "alpha=0.1",
"alpha=0.2", "alpha=0.5", "alpha=0.75", "alpha=1")
rownames(MSE)<-c("N=2", "N=5", "N=10", "N=20")

return(MSE) }

eps_0=ocena(0)
eps_0.05=ocena(0.05)
eps_0.1=ocena(0.1)
eps_0.2=ocena(0.2)
rbind(eps_0,eps_0.05,eps_0.1,eps_0.2)

```

Поглавље 8, Табела 3:

Поступак је исти као за табелу 2, осим што је потребно у функцији *ocena* намјестити да је $T = 100 * N[i]$.

Поглавље 8, Табела 4:

Правимо матрицу M са двојкама на дијагонали и јединицама мимо дијагонале.

Функција f провјерава да ли је матрица инвертибилна.

Функција *tabela4* за дато ϵ враћа оцјену *MSE*, при чему су са вјероватноћом $(1 - \epsilon)$ опсервације из $\mathcal{N}_5(\mathbf{0}_{5 \times 1}, M)$ расподеле, а са вјероватноћом ϵ из $\mathcal{N}_5(-\mathbf{4}_{5 \times 1}, M)$. При томе је $T = 100 \cdot 5$, при чему посматрамо $\epsilon \in \{0, 0.1, 0.2\}$. Поступак је исти као и код табела 2 и 3.

```

M=matrix(rep(0,25),ncol=5)
for(i in 1:5){
  for(j in 1:5){
    if(i==j){
      M[i,j]=2
    } else M[i,j]=1}}

f<-function(m) class(try(solve(m),silent=T))=="matrix"

tabela4<-function(eps){
  niz_ocena=c()
  MSE=rep(0,length(alpha))
  T=100*5
  theta_0=c(rep(0,5),vecs(M))

  for(j in 1:length(alpha)){
    for(k in 1:1000){
      s=sample(c(0,1),size=T,replace=TRUE,prob=c(eps,1-eps))
      X=mvrnorm(T,rep(0,5),M)
      Y=mvrnorm(T,rep(-4,5),M)
      uzorak=s*X+(1-s)*Y
      mi_0=apply(uzorak,2,mean)
      Sigma_0=(1/T)*(t(uzorak)-mi_0)%*%t(t(uzorak)-mi_0))
      if(f(Sigma_0)){
        w=rep(0,T)
        niz=rep(0,T)
        for(l in 1:T){
          niz[l]=exp(-(alpha[j]/2)*(uzorak[l,]-mi_0)
          %*%solve(Sigma_0)%*%matrix(uzorak[l,]-mi_0,ncol=1))}
          w=niz/sum(niz)
          mi_1=apply(uzorak*w,2,sum)
          Sigma_1=(alpha[j]+1)*(t(uzorak)-mi_1)
          %*%(t(t(uzorak)-mi_1)*w)
          mi_lista=list(mi_0,mi_1)
          Sigma_lista=list(Sigma_0,Sigma_1)

        while(f(Sigma_lista[[length(Sigma_lista)]])!=TRUE
        && (!all(abs(mi_lista[[length(mi_lista)-1]]-

```

```

mi_lista [[length(mi_lista)] < 0.001) ||
!all(abs(Sigma_lista [[length(Sigma_lista)-1]] -
Sigma_lista [[length(Sigma_lista)]]) < 0.001)) {
w_n=rep(0,T)
niz_n=rep(0,T)
for(t in 1:T){
niz_n[t]=exp(-(alpha[j]/2)*(uzorak[t,]-
mi_lista [[length(mi_lista)]])
%*%solve(Sigma_lista [[length(Sigma_lista)]])%*%
matrix(uzorak[t,]-mi_lista [[length(mi_lista)]], ncol=1))}

w_n=niz_n/sum(niz_n)
mi_lista [[length(mi_lista)+1]]=apply(uzorak*w_n,2,sum)

Sigma_lista [[length(Sigma_lista)+1]]=
(alpha[j]+1)*(t(uzorak)-mi_lista [[length(mi_lista)]])
%*%(t(t(uzorak)-mi_lista [[length(mi_lista)]]) *w_n)}

theta=c(mi_lista [[length(mi_lista)]],
vecs(Sigma_lista [[length(Sigma_lista)]]))

niz_ocena[length(niz_ocena)+1]=(theta_0-theta)
%*%(theta_0-theta)}
MSE[j]=mean(niz_ocena)}

return(MSE) }

tabela4_eps_0=tabela4(0)
tabela4_eps_0.1=tabela4(0.1)
tabela4_eps_0.2=tabela4(0.2)

rbind(tabela4_eps_0,tabela4_eps_0.1,tabela4_eps_0.2)

```

Поглавље 9

Учитавамо податке:

```

France=MSCIFrance
Germany=MSCIGermany
Italy=MSCIIItaly
Pacific=MSCIPacific
Spain=MSCISpain

```

```
UK=MSCIUK
```

Сортирамо цијене, од најстаријег датума ка најмлађем:

```
france_price=rev(France$Price)
germany_price=rev(Germany$Price)
italy_price=rev(Italy$Price)
pacific_price=rev(Pacific$Price)
spain_price=rev(Spain$Price)
uk_price=rev(UK$Price)
```

Добијамо мјесечне приносе од логаритмованих цијена одузимајући сусједне цијене:

```
FR=diff(log(france_price))
DE=diff(log(germany_price))
ITL=diff(log(italy_price))
APxJ=diff(log(pacific_price))
ESP=diff(log(spain_price))
UK=diff(log(uk_price))
```

Матрица X која садржи приносе свих 6 инструмената (по колонама) и слика 1:

```
X=cbind(FR,DE,ITL,JPN,APxJ,ESP,UK,USA)
boxplot(X)
```

Избацујемо аутлајере из података:

```
FR_no_outlier=X[!X[,1] %in% boxplot(X[,1])$out,1]
DE_no_outlier=X[!X[,2] %in% boxplot(X[,2])$out,2]
ITL_no_outlier=X[!X[,3] %in% boxplot(X[,3])$out,3]
APxJ_no_outlier=X[!X[,4] %in% boxplot(X[,4])$out,4]
ESP_no_outlier=X[!X[,5] %in% boxplot(X[,5])$out,5]
UK_no_outlier=X[!X[,6] %in% boxplot(X[,6])$out,6]
```

Слика 2:

```
library("car")
par(mfrow=c(2,3))
qqPlot(FR_no_outlier, ylab="FR", xlab="")
qqPlot(DE_no_outlier, ylab="DE", xlab="")
qqPlot(ITL_no_outlier, ylab="ITL", xlab="")
qqPlot(APxJ_no_outlier, ylab="APxJ", xlab="")
qqPlot(ESP_no_outlier, ylab="ESP", xlab="")
qqPlot(UK_no_outlier, ylab="UK", xlab="")
```

Табела 5:

```
matrix(c(shapiro.test(FR_no_outlier)$p.value,
        shapiro.test(DE_no_outlier)$p.value,
        shapiro.test(ITL_no_outlier)$p.value,
        shapiro.test(APxJ_no_outlier)$p.value,
        shapiro.test(ESP_no_outlier)$p.value,
        shapiro.test(UK_no_outlier)$p.value), ncol=1)
```

Функција f провјерава да ли је матрица инвертибилна.

Функција *estimate* враћа оцијене средњих вриједности и коваријационе матрице приноса датих у матрици која је аргумент функције, за дату вриједност параметра α . Све док је посљедња добијена матрица коваријације инвертибилна и док су разлике између посљедњих узастопно добијених оцијена значајне, оцјењујемо μ и Σ методом минималног псеудорастојања, описаном у 8. поглављу (формуле (44) и (45)).

```
f<-function(m) class(try(solve(m), silent=T))=="matrix"

estimate<-function(Y, alpha){
T=nrow(Y)
mi_0=apply(Y, 2, mean)
Sigma_0=((t(Y)-mi_0)%*%t(t(Y)-mi_0))/T
if(f(Sigma_0)){
w=c()
niz=c()
for(i in 1:T){
```



```

niz [ i ] = exp ( ( - alpha / 2 * t ( t ( Y ) - mi _ 0 )
%%solve ( Sigma _ 0 ) %% ( t ( Y ) - mi _ 0 ) ) [ i , i ] }

w = niz / sum ( niz )
mi _ 1 = apply ( Y * w , 2 , sum )
Sigma _ 1 = ( alpha + 1 ) * ( t ( Y ) - mi _ 1 ) %% ( t ( t ( Y ) - mi _ 1 ) * w )
mi _ lista = list ( mi _ 0 , mi _ 1 )
Sigma _ lista = list ( Sigma _ 0 , Sigma _ 1 )
while ( f ( Sigma _ lista [ [ length ( Sigma _ lista ) ] ] ) == TRUE
&& ( ! all ( abs ( mi _ lista [ [ length ( mi _ lista ) - 1 ] ] -
mi _ lista [ [ length ( mi _ lista ) ] ] ) < 0.001 ) ||
! all ( abs ( Sigma _ lista [ [ length ( Sigma _ lista ) - 1 ] ] -
Sigma _ lista [ [ length ( Sigma _ lista ) ] ] ) < 0.001 ) ) {
w _ n = rep ( 0 , T )
niz _ n = rep ( 0 , T )
for ( t in 1 : T ) {
niz _ n [ t ] = exp ( - ( alpha / 2 ) * ( Y [ t , ] -
mi _ lista [ [ length ( mi _ lista ) ] ] )
%%solve ( Sigma _ lista [ [ length ( Sigma _ lista ) ] ] )
%%matrix ( Y [ t , ] - mi _ lista [ [ length ( mi _ lista ) ] ] , ncol = 1 ) ) }

w _ n = niz _ n / sum ( niz _ n )
mi _ lista [ [ length ( mi _ lista ) + 1 ] ] = apply ( Y * w _ n , 2 , sum )

Sigma _ lista [ [ length ( Sigma _ lista ) + 1 ] ] =
( alpha + 1 ) * ( t ( Y ) - mi _ lista [ [ length ( mi _ lista ) ] ] )
%% ( t ( t ( Y ) - mi _ lista [ [ length ( mi _ lista ) ] ] ) * w _ n ) } }

r = list ( mi _ lista [ [ length ( mi _ lista ) ] ] ,
Sigma _ lista [ [ length ( Sigma _ lista ) ] ] )
return ( r ) }

```

У матрицу *sr_vr* ћемо смјестити векторе оцијена средњих вриједности приноса, за $\alpha \in \{0, 0.1, 0.2, 0.5, 0.75, 1\}$ У матрицу *var* ћемо смјестити оцијене дисперзије за $\alpha \in \{0, 0.1, 0.2, 0.5, 0.75, 1\}$.

```

sr_vr = matrix ( rep ( 0 , 6 * 6 ) , ncol = 6 )
var = matrix ( rep ( 0 , 6 * 6 ) , ncol = 6 )
alpha = c ( 0 , 0.1 , 0.2 , 0.5 , 0.75 , 1 )
for ( k in 1 : length ( alpha ) ) {
lista = estimate ( X , alpha [ k ] )
sr_vr [ k , ] = lista [ [ 1 ] ]
}

```

```
var[k,]=diag(lista[[2]])}
```

Слика 3 у раду:

```
par(mfrow=c(1,2))
plot(seq(1:6),sr_vr[1,],ylim=c(-0.01,0.07),type="l",
col="red")
lines(seq(1:6),sr_vr[2,],col="green")
lines(seq(1:6),sr_vr[3,],col="blue")
lines(seq(1:6),sr_vr[4,],col="yellow")
lines(seq(1:6),sr_vr[5,],col="orange")
lines(seq(1:6),sr_vr[6,],col="purple")
legend(4.8,0.07,
legend=c(expression(paste(alpha,"=0_")),
expression(paste(alpha,"=0.1_")),
expression(paste(alpha,"=0.2_")),
expression(paste(alpha,"=0.5_")),
expression(paste(alpha,"=0.75_")),
expression(paste(alpha,"=1"))),
col=c("red","green","blue","yellow","orange","purple"),
lty=rep(1,6),cex=0.8)

plot(seq(1:6),var[1,],ylim=c(-0.001,0.008),type="l",
col="red")
lines(seq(1:6),var[2,],col="green")
lines(seq(1:6),var[3,],col="blue")
lines(seq(1:6),var[4,],col="yellow")
lines(seq(1:6),var[5,],col="orange")
lines(seq(1:6),var[6,],col="purple")
legend(4.8,0.008,
legend=c(expression(paste(alpha,"=0_")),
expression(paste(alpha,"=0.1_")),
expression(paste(alpha,"=0.2_")),
expression(paste(alpha,"=0.5_")),
expression(paste(alpha,"=0.75_")),
expression(paste(alpha,"=1"))),
col=c("red","green","blue","yellow","orange","purple"),
lty=rep(1,6),cex=0.8)
```

Слика 4:

```

f1=function(lambda , mi , Sigma ){
  p=ocena_tezina (lambda , mi , Sigma )
  R=mi%*%p
  S=t (p)%*%Sigma%*%p
  return (c (R, S)) }
ocena_tezina=function (lambda , mi , Sigma ){
  a1=solve (Sigma )/lambda
  a2=lambda-rep (1 , 6)%*%solve (Sigma )%*%mi
  a3=rep (1 , 6)%*%solve (Sigma )%*%rep (1 , 6)
  p=a1%*%t (mi+(a2/a3)%*%rep (1 , 6))
  return (p) }
lambda=seq (1 , 100 , (100 - 1)/(10000 - 1))
ef_x=matrix (rep (0 , 5*10000) , nrow = 5)
ef_y=matrix (rep (0 , 5*10000) , nrow = 5)
alpha=c (0 , 0.1 , 0.2 , 0.5 , 0.75)
for (k in 1:length (alpha)) {
  mi=estimate (X , alpha [k]) [[1]]
  Sigma=estimate (X , alpha [k]) [[2]]
  for (i in 1:length (lambda)) {
    ef_x [k , i]=f1 (lambda [i] , mi , Sigma ) [2]
    ef_y [k , i]=f1 (lambda [i] , mi , Sigma ) [1] } }
plot (ef_x [1 , ] , ef_y [1 , ] , type="l" , col="red" , ylim=c (0 , .07))
lines (ef_x [2 , ] , ef_y [2 , ] , type="l" , col="green" )
lines (ef_x [3 , ] , ef_y [3 , ] , type="l" , col="blue" )
lines (ef_x [4 , ] , ef_y [4 , ] , type="l" , col="yellow" )
lines (ef_x [5 , ] , ef_y [5 , ] , type="l" , col="orange" )
legend (0.025 , 0.025 ,
  legend=c (expression (paste (alpha , "=0_")) ,
  expression (paste (alpha , "=0.1" )) ,
  expression (paste (alpha , "=0.2" )) ,
  expression (paste (alpha , "=0.5" )) ,
  expression (paste (alpha , "=0.75" )) ,
  expression (paste (alpha , "=1" )) ) ,
  col=c ("red" , "green" , "blue" , "yellow" , "orange" , "purple" ) ,
  lty=rep (1 , 6) , cex=1)

```

DIM:

У овом дијелу ћемо да оцијенимо мјеру утицаја података на оцијене тежина портфолија, добијене класичном методом ($\alpha = 0$) и робусном методом (за $\alpha = 0.2$). Притом, користимо формулу 46. За то ће нам бити потребна и формула 3, као и формуле 31 и 32. Не умањујући општост, узмимо да је инвеститорова аверзија према ризику $\lambda = 3.85$.

```

ocene_alpha_0.2=estimate(X,0.2)
m=ocene_alpha_0.2[[1]]
v=ocene_alpha_0.2[[2]]
ifmu=function(x){
return(sqrt(0.2+1)^(6+2)*(x-m)*exp(-0.2/2*(x-m)
%*%solve(v)%*%matrix(x-m,ncol=1)))}

ifsigma=function(x){
return(sqrt(0.2+1)^10*(matrix(rep((x-m)
%*%matrix((x-m),ncol=1),36),ncol=6)-1/(0.2+1)*v)
*drop(exp(-0.2/2*(x-m)%*%solve(v)
%*%matrix(x-m,ncol=1))))}

ocena_tezina<-function(Sigma,mi,N){
if(f(Sigma)){
p=1/3.85*solve(Sigma)%*%
matrix((mi-(rep(1,N)%*%solve(Sigma)%*%
matrix(mi,ncol=1)-3.85)/(rep(1,N)%*%solve(Sigma)
%*%matrix(rep(1,N),ncol=1))*rep(1,N)),ncol=1)
}else p=0
return(p)}

p=ocena_tezina(v,m,6)

prvi_sabirak=function(x){
return(-solve(v)%*%ifsigma(x)%*%p)}

drugi_sabirak=function(x){
return(1/3.85*solve(v)%*%matrix(ifmu(x),ncol=1))}

treći_sabirak=function(x){
return(1/3.85*solve(v)%*%matrix((rep(1,6)%*%solve(v)
%*%(ifsigma(x)%*%solve(v)%*%matrix(m,ncol=1)-
matrix(ifmu(x),ncol=1))%*%rep(1,6))/
drop(rep(1,6)%*%solve(v)%*%matrix(rep(1,6),ncol=1)),
ncol=1))}

cetvrti_sabirak=function(x){
return(1/3.85*solve(v)%*%
matrix((drop(rep(1,6)%*%solve(v)%*%ifsigma(x)
%*%solve(v)%*%matrix(rep(1,6),ncol=1))%*%
(drop(rep(1,6)%*%solve(v)%*%matrix(m,ncol=1))-3.85)
%*%rep(1,6))/drop(rep(1,6)%*%solve(v)

```

```

%*%matrix(rep(1,6), ncol=1))^2, ncol=1))}

ifp=function(x){
return(prvi_sabirak(x)+drugi_sabirak(x)+
treći_sabirak(x)+četvrti_sabirak(x))}

DIM=function(x){
return(sqrt(drop(t(ifp(x))%*%ifp(x))))}

DIM_vektor=rep(0,167)
for(i in 1:167){
DIM_vektor[i]=DIM(X[i,])}

```

До сада смо одредили DIM када су $\hat{\mu}$ и $\hat{\Sigma}$ оцијене добијене робусном методом за $\alpha = 0.2$. Одредимо сада DIM када су $\hat{\mu}$ и $\hat{\Sigma}$ оцијене добијене методом максималне вјеродостојности (за $\alpha = 0$). Као и у претходном случају, прво одређујемо утицајне криве за $\hat{\mu}$, $\hat{\Sigma}$, а онда и за \hat{p}^* (сабирак по сабирак).

```

ifmu_0=function(x){
return(sqrt(1)^(6+2)*(x-m))}

ifsigma_0=function(x){
return(sqrt(1)^10*(matrix(rep((x-m)
%*%matrix((x-m), ncol=1), 36), ncol=6)-1/(0+1)*v))}

prvi_sabirak_0=function(x){
return(-solve(v)%*%ifsigma_0(x)%*%qp)}

drugi_sabirak_0=function(x){
return(1/3.85*solve(v)%*%matrix(ifmu_0(x), ncol=1))}

treći_sabirak_0=function(x){
return(1/3.85*solve(v)%*%matrix((rep(1,6)
%*%solve(v)%*%(ifsigma_0(x)%*%solve(v)
%*%matrix(m, ncol=1)-matrix(ifmu_0(x), ncol=1))
%*%rep(1,6))/drop(rep(1,6)
%*%solve(v)%*%matrix(rep(1,6), ncol=1)), ncol=1))}

četvrti_sabirak_0=function(x){
return(1/3.85*solve(v)%*%matrix((drop(rep(1,6)
%*%solve(v)%*%ifsigma_0(x)%*%solve(v)
%*%matrix(rep(1,6), ncol=1))

```

```

%*(drop(rep(1,6))%*solve(v)%*matrix(m,ncol=1))-3.85)
%*(rep(1,6))/drop(rep(1,6)%*solve(v)
%*matrix(rep(1,6),ncol=1))^2,ncol=1))}

ifp_0=function(x){
return(prvi_sabirak_0(x)+drugi_sabirak_0(x)+
treći_sabirak_0(x)+četvrti_sabirak_0(x))}

DIM_0=function(x){
return(sqrt(drop(t(ifp_0(x))%*ifp_0(x))))}

DIM_vektor_0=rep(0,167)
for(i in 1:167){
DIM_vektor_0[i]=DIM_0(X[i,])}

```

Сада прикажимо добијене мјере утицаја DIM , (слика 5):

```

par(mfrow=c(1,2))

plot(DIM_vektor_0,ylim=c(0,150))
plot(DIM_vektor,ylim=c(0,150))

```

Поглавље 10

Одређујемо мјере перформанси портфолија $\hat{\tau}$ и \hat{SR} примјењујући процедуру ”покретни хоризонт” и формуле наведене у поглављу 10. Притом, узимамо вриједности параметра α из скупа $\{0, 0.1, 0.2, 0.25\}$. Такође, одређујемо мјере перформанси када је $\lambda = 3.85$ и када је $\lambda = \infty$.

```

ocena_tezina_lambda_infty=function(Sigma){
return((solve(Sigma)%*matrix(rep(1,6),ncol=1))
/drop(rep(1,6)%*solve(Sigma)
%*matrix(rep(1,6),ncol=1))))}
a=c(0,0.1,0.2,0.25)
turnover_niz_MV=c()
turnover_niz_V=c()
sharpe_niz_MV=c()
sharpe_niz_V=c()
for(s in 1:length(a)){
p_MV=matrix(rep(0,(167-120+1)*6),ncol=6)

```

```

p_V=matrix(rep(0,(167-120+1)*6),ncol=6)
for(i in 1:(167-120+1)){
E=estimate(X[i:(i+120-1)],a[s])
p_MV[i,]=ocena_tezina(E[[2]],E[[1]],6)
p_V[i,]=t(ocena_tezina_lambdainfy(E[[2]]))}
p_plus_MV=matrix(rep(0,(167-120)*6),ncol=6)
p_plus_V=matrix(rep(0,(167-120)*6),ncol=6)
for(i in 1:(167-120)){
for(j in 1:6){
p_plus_MV[i,j]=(1+X[i+119,j])/(1+X[i+119,])
%*%p_MV[i,]*p_MV[i,j]
p_plus_V[i,j]=(1+X[i+119,j])/(1+X[i+119,])
%*%p_V[i,]*p_V[i,j]}}
turnover_MV=0
turnover_V=0
for(i in 1:(167-120)){
for(j in 1:6){
turnover_MV=turnover_MV+abs(p_MV[i+1,j]-
p_plus_MV[i,j])/(167-120-1)
turnover_V=turnover_V+abs(p_V[i+1,j]-
p_plus_V[i,j])/(167-120-1)}}}
turnover_niz_MV[s]=turnover_MV
turnover_niz_V[s]=turnover_V
mi_MV=0
mi_V=0
for(i in 1:(167-120)){ mi_MV=mi_MV+drop(p_MV[i,]%*%
X[i+119+1,])/(167-120)
mi_V=mi_V+drop(p_V[i,]%*%X[i+119+1,])/(167-120)}
sharpe_MV=mi_MV/sqrt(disperzija_MV)
sharpe_V=mi_V/sqrt(disperzija_V)

sharpe_niz_MV[s]=sharpe_MV
sharpe_niz_V[s]=sharpe_V

matrica_MV=cbind(turnover_niz_MV,sharpe_niz_MV)
matrica_V=cbind(turnover_niz_V,sharpe_niz_V)

```

Табела 6:

```
cbind(matrica_MV,matrica_V)
```

13 Литература

- [1] Markowitz, Harry M., and G. Peter Todd. Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets. Vol. 66. John Wiley & Sons, (2000) 77-91.
- [2] Fabozzi, Frank J., Dashan Huang, and Guofu Zhou. "Robust portfolios: contributions from operations research and finance." *Annals of operations research* 176.1 (2010) 191-220.
- [3] Huber, Peter J. "Robust estimation of a location parameter." *Breakthroughs in statistics*. Springer, New York, NY, (1992) 492-518.
- [4] Hampel, Frank R. "Contribution to the theory of robust estimation." Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley (1968).
- [5] Hampel, Frank R. "The influence curve and its role in robust estimation." *Journal of the american statistical association* 69.346 (1974) 383-393.
- [6] Hampel, Frank R., et al. *Robust statistics: the approach based on influence functions*. Vol. 196. John Wiley & Sons, (2011).
- [7] Basu, Ayanendranath, et al. "Robust and efficient estimation by minimising a density power divergence." *Biometrika* 85.3 (1998) 549-559.
- [8] Broniatowski, Michel, Aida Toma, and Igor Vajda. "Decomposable pseudodistances and applications in statistical estimation." *Journal of Statistical Planning and Inference* 142.9 (2012) 2574-2585.
- [9] Serfling R. "Asymptotic relative efficiency in estimation." *International encyclopedia of statistical sciences*. New-York: Springer; (2011) 68–72.
- [10] Perret-Gentil, Cédric, and Maria-Pia Victoria-Feser. "Robust mean-variance portfolio selection." Available at SSRN 721509 (2005).
- [11] Gervini, Daniel. "The influence function of the Stahel–Donoho estimator of multivariate location and scatter." *Statistics & probability letters* 60.4 (2002) 425-435.
- [12] Fujisawa, Hironori, and Shinto Eguchi. "Robust parameter estimation with a small bias against heavy contamination." *Journal of Multivariate Analysis* 99.9 (2008) 2053-2081.
- [13] Toma, Aida, and Samuela Leoni-Aubin. "Robust portfolio optimization using pseudodistances." *Plos one* 10.10 (2015) e0140546.
- [14] Jones, M. C., et al. "A comparison of related density-based minimum

divergence estimators." *Biometrika* 88.3 (2001) 865-873.

[15] Basu, Ayanendranath, Hiroyuki Shioya, and Chanseok Park. *Statistical inference: the minimum distance approach*. CRC press, (2011).

[16] Huber, P. J. "Robust covariances In: Gupta S, Moore D, editors. *Statistical decision theory and related topics II*." (1977) 165-191.

[17] Jaupi, Luan, and Gilbert Saporta. "Using the influence function in robust principal components analysis." *New directions in statistical data analysis and robustness* (1993): 147-156.

[18] DeMiguel, Victor, and Francisco J. Nogales. "Portfolio selection with robust estimation." *Operations Research* 57.3 (2009): 560-577.

14 Биографија

Нина Уљаревић рођена је 2. априла 1995. године у Требињу. Основну школу завршила је у Бањалуци, након чега је наставила школовање у гимназији, на природно-математичком смијеру. Гимназију је завршила 2014. године. Математички факултет у Београду, смијер Статистика, актуарска и финансијска математика завршила је 2018. године, након чега је на Математичком факултету уписала мастер студије, смијер Статистика, актуарска и финансијска математика. Студентску праксу је обављала у Народној банци Србије од децембра 2017. године до септембра 2018. године. Запослена је у Народној банци Србије као млађи актуар за ризике осигурања од јануара 2019. године.