Математички факултет у Београду

Мастер рад

ЗАКОНИТОСТИ И ИНВАРИЈАНТЕ У СРЕДЊОШКОЛСКОЈ ДОДАТНОЈ НАСТАВИ

Студент:
Ана Трајковић 1124/2017

Ментор:
Проф. Небојша Икодиновић

САДРЖАЈ

1. Увод

Као што се народи разликују по обичајима, језицима којим говоре, или боји коже, исто тако постоје евидентне разлике у приступу настави математике и наставном програму математике у различитим земљама. Нешто је ипак заједничко. Због брзог развоја технологије, знања се морају стално обнављати и модификовати, а наш задатак као наставника је да припремимо децу за овакав брзи темпо живота, где год живели и радили. На нама је задатак да обликујемо младе људе који знају да мисле, који уче брзо и ефикасно, решавају проблеме и имају креативне идеје. Циљ наставника је да пробуди у деци жељу да истражују, њихову оригиналност и храброст да своје идеје представљају јавно.

У овом раду, фокусираћу се на специфичне подобласти у настави математике, везане за неке од законитости у теорији бројева, законитости везане за Паскалов троугао, и принцип инваријанти, и обрадити задатке који се могу користити у редовној настави, као и оне који су погодни за припрему ученика за математичка такмичења.

Ради поређења, наводим наставни програм математике за ученике шестог разреда (11 година старости) у редовним школама у Канади (Онтарио), Србији, и приватној школи „Spirit of Math" – Торонто, Канада. Школа у којој ја радим („Spirit of Math School"), је школа намењена само ученицима који имају одличне оцене из математике у својим редовним школама, и који желе додатну наставу из области математике, или желе да учествују на математичким такмичењима. Наставни план и програм ове школе је делимично другачији од програма у редовној школи и све наставне јединице су обрађене на дубљем нивоу у поређењу са наставним програмом у редовним школама.

Математички програм за ученике шестог разреда у Канади (Онтарио)

Математички програм за ученике осмогодишњих школа у Канади је спиралног типа. То значи да су исте математичке области заступљене у свим разредима, али се садржај продубљује из године у годину. Свака област има индивидуални наставни програм. Области које се обрађују у Онтарију су:

Теорија бројева

Представљање и упоређивање бројева до 1000000. Упоређивање разломака са различитим бројиоцима; процењивање 10%, 25%, 50%, и 75% од неке целине; сабирање и одузимање децималних бројева; множење и дељење четвороцифрених бројева са двоцифреним бројевима (коришћењем модела, графичким представљањем, коришћењем стандардног алгоритма и коришћењем дигитрона); множење и дељење децималних бројева са целим бројем; примена правила о приоритету операција; успостављање веза између процента, разломка и децималног броја.

Мерења

Коришћење метричких јединица: претварање већих метричких јединица у мање; примена формуле за површину паралелограма и троугла; примена формуле за запремину призме; претварање једних метричких јединица у друге (нпр. квадратних метара у квадратне центиметре).

Геометрија

Класификација четвороуглова; класификација полигона; мерење углова до 180 степени угломером; ротација фигура; представљање тачака у координатној равни (само у првом квадранту).

Законитости и Алгебра

Налажење и описивање различитих законитости; налажење следећег члана у низу бројева; решавање једначина користећи конкретне материјале и метод пробе и грешке; мерне јединице и претварање мерних јединица једне у другу.

Комбинаторика

Прикупљање и организовање података; представљање података уз коришћење линијских и стубичастих дијаграма и хистограма; коришћење дијаграма или хистограма за упоређивање података; израчунавање вероватноће коришћењем формуле за теоријску вероватноћу.[46]

МАТЕМАТИЧКИ ПРОГРАМ ЗА УЧЕНИКЕ ШЕСТОГ РАЗРЕДА У СРБИЈИ

Цели бројеви

Појам негативног броја; Скуп целих бројева (Z); Цели бројеви на бројевној правој; Супротан број; Апсолутна вредност целог броја; Упоређивање целих бројева; Основне рачунске операције са целим бројевима и њихова својства; Изрази са целим бројевима.

Рационални бројеви

Скуп рационалних бројева (Q); Супротан број; Апсолутна вредност рационалног броја; Приказ рационалних бројева на бојевној правој; Упоређивање рационалних бројева; Основне операције у скупу рационалних бројева; Изрази, једначине и неједначине са рационалним бројевима; Координатни систем; Приказ података у координатном систему; Приказ зависности међу величинама; Размере, пропорције и проценти; Директна и индиректна пропорционалност.

Троугао

Појам троугла; Обим троугла; Једнакокраки и једнакостранични троуглови; Висина троугла; Углови троугла; Збир углова троугла; Врсте троуглова према угловима; Однос између станица и углова троугла; Неједнакост троугла; Конструкције неких углова (60°, 120°, 30°, 45°, 75°, 135°); Основне конструкције троуглова; Појам и ставови подударности; Централна симетрија и подударност; Осна симетрија и подударност; Центар описане и уписане кружнице троугла.

Четвороугао

Четвороугао; Углови четвороугла; Збир углова четвороугла; Паралелограм; Особине паралелограма; Услови да четвороугао буде паралелограм; Ромб, правоугаоник и квадрат; Конструкција паралелограма; Сабирање и одузимање вектора; Множење вектора бројем; Трапез; Особине трапеза; Средња линија троугла и трапеза; Конструкције трапеза; Делтоид.

Површина четвороугла и троугла

Појам површине фигуре – површина правоугаоника и квадрата; Једнакост површина подударних фигура; Површина паралелограма, троугла, трапеза; Површина четвороула са нормалним дијагоналама.[45]

Математички програм за ученике шестог разреда у „Spirit of Math” , Канада

Рационални бројеви

Скуп рационалних бројева; рационални бројеви на бројевној правој; упоређивање рационалних бројева; сабирање целог и рационалног броја и одузимање рационалног броја од целог броја; сабирање и одузимање рационалних бројева; множење и дељење рационалних бројева.

Пропорције

Појам размере; решавање пропорција; појам процента; представљање процента као децималног броја или разломка; проблемски задаци везани за проценат и пропорције.

Геометрија

Увођење појмова – тачка, права, дуж; класификација углова и мерење углова угломером; комплементни, суплементни и супротни углови; углови на трансверзали.

Троугао

Класификација троуглова; збир унутрашњих и спољашњих углова у троуглу; сличност троуглова; Питагорина теорема (примитивне Питагорине тројке, однос страница у 45-45-90 и 30-60-90 правоуглом троуглу); подударност троуглова.

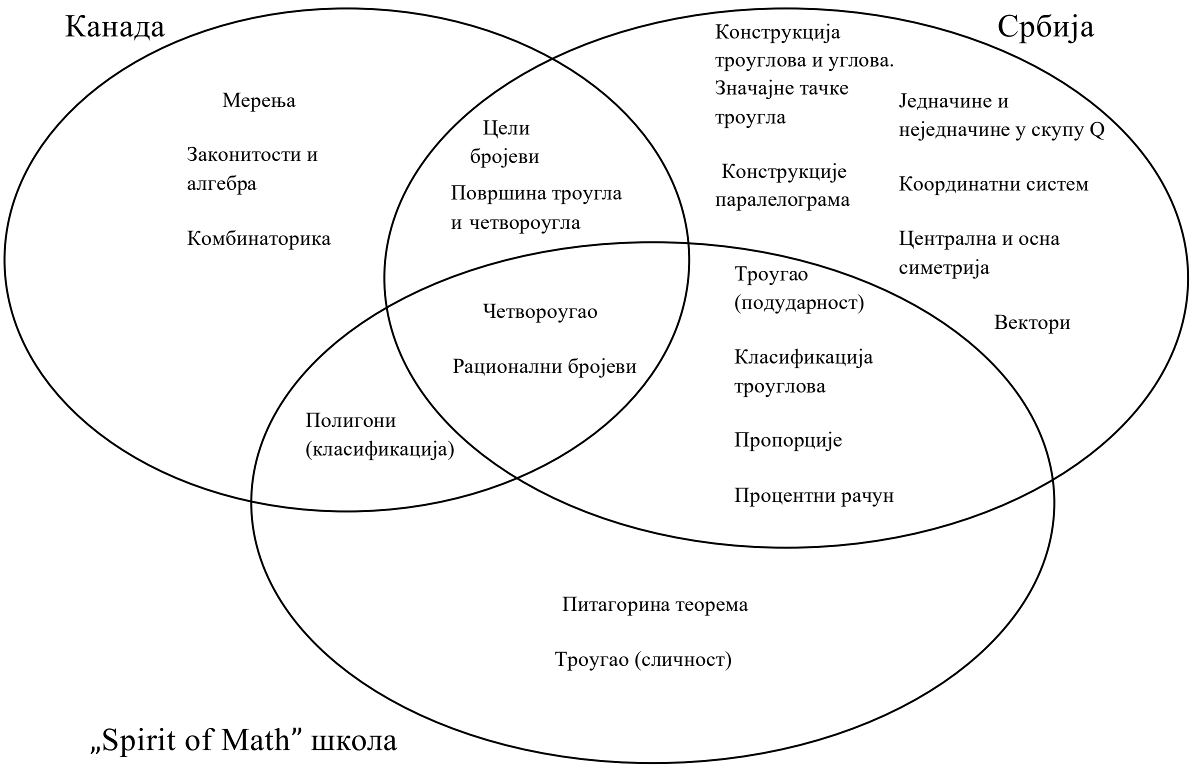
Четвороугао

Појам четвороугла; својства паралелограма (квадрат, правоугаоник, ромб) и четвороуглова (трапез и делтоид).

Полигони

Класификација полигона са више од четири странице; збир унутрашњих и спољашњих углова конвексног полигона.

Колико се ови наставни програми преклапају или разликују је боље уочљиво на приказаном дијаграму:



ПРОГРАМСКЕ КОМПОНЕНТЕ ЧАСОВА У „SPIRIT OF MATH” ШКОЛИ:

1. “Drill” (Брзо рачунање)

а) Помаже ђацима да тачно рачунају као и да брзо и прецизно изводе рачунања ментално.

б) Омогућавају ђацима да се фокусирају на нове математичке концепте представљене током часова и уче их брже, а не на базична рачунања.
в) Доприноси развоју самопоуздања код ученика.
г) Помажу ђацима да брже решавају проблемске задатке, јер су ученици концетрисани на концепте у задатку, а рачунања се изводе брзо и без употребе дигитрона.
д) Ђаци вежбају да буду у потпуности фокусирани на оно што раде.
Ђаци су мотивисани да побољшају своје резултате док раде ову вежбу, јер су у учионици изложени упоредни графикони других одељења које раде исти “drill”. Одељења се такмиче између себе и сва одељења покушавају да достигну просечну оцену, као цео разред, од 88%.

Пример “drill”-а за ученике шестог разреда, који обухвата знање претварања разломака у децимални запис. Време трајања ове вежбе је 6 минута.

	бројилац							
именилац	2	6	4	1	3	5	7	8
6	$0.\overline{3}$							
2	1							
12	$0.1\overline{6}$							
4	0.5							
3	$0.\overline{6}$							
9	$0.\overline{2}$							
5	0.4							
7	$0.\overline{285714}$							
8	0.25							
11	$0.\overline{18}$							

2. Проблемски задаци

Сваки разред обухвата решавање проблемских задатака током сваког часа. У нижим разредима сваког часа се представља „проблем дана“ који ђаци решавају у групама и презентују на табли, а у старијим разредима, ђаци имају прилике да на сваком часу дискутују о проблемским задацима који су им били задати као домаћи задатак. Сложенији задаци са којима су ђаци имали потешкоћа се раде на табли, тако што ученици учествују у расправи дајући своје идеје. Проблемски задаци су део сваког часа у свим узрастима. Од првог до четвртог разреда, ученицима се представљају неки типови проблемских задатака и обрасци или начини решавања. Од петог разреда, проблемски задаци нису типизирани, те ученици морају да употребе сва своја знања, повезују чињенице и користе литературу или интернет при решавању истих. Такође, од петог разреда, поред осталих тестова, ученици имају тестове који садрже само проблемске задатке.

3. *Језгро програма*

Обрађују се одређене математичке наставне јединице у складу са наставним планом и програмом. Неке од математичких јединица се обрађују на дубљем нивоу у поређењу са регуларним школама, а неке области су потпуно нове за ученике одређеног узраста, јер се у регуларној настави обрађују у старијим разредима, те се ученици са истим још нису сусрели. На пример, ученици у шестом разреду уче Питагорину теорему, али такође уче како да баратају са квадратним кореном броја – како да га упросте или како да рационализују именилац који садржи квадратни корен. Учећи различите математичке концепте, ђаци усвајају принципе и законитости које ће им продубити знања и помоћи при усвајању математичких идеја.[29]

НЕКЕ ЧИЊЕНИЦЕ ВЕЗАНЕ ЗА НАСТАВУ МАТЕМАТИКЕ У ОНТАРИЈУ

У последњих неколико година, у региону Онтарио (Канада), више од 50% ђака не задовољи регионални тест из математике који се ђацима даје у трећем, шестом и првом разреду средње школе. Ова чињеница изазива велику забринутост у јавности, те су од пре годину дана уведене неке промене везане за наставу математике. Неки од разлога за овакав неуспех ђака су следећи:

• Наставно особље није адекватно математички образовано. Да би предавали у школи, наставници од 1. до 6. разреда морају да имају завршене четири године било ког факултета и једну годину стручног усавршавања на „Ontario Colege Of Teachers”. Ако наставник не жели да предаје вишим разредима основне школе (седми и осми разред) или да предаје у средњој школи, онда ниједан од стручних предмета, као на пример математика, није обавезан током усавршавања на колеџу. Ово значи да многи наставници који предају од првог до шестог разреда нису имали прилике да се сусретну са математиком као предметом од своје средње школе.

• Да би се математика приближила деци, приступ настави математике је промењен пре двадесетак година. Традиционални приступ настави математике, где наставник предаје неку од наставних јединица, је замењен приступом који подразумева коришћење модела да би се представиле базичне математичке операције и ђацима је остављено да самостално и на различите начине приступају учењу математичких концепата чиме се подстиче самооткривање код деце. Од ученика се не захтева да меморишу чак ни таблицу множења и највећи део рачунских операција се, од петог разреда, изводи на дигитрону. Да би се математика приближила свим ђацима, и оним најслабијим, програм се поједностављује из године у годину, тако да деца која могу више и боље обично нису довољно мотивисана.

• Наставно особље има флексибилност у погледу колики део наставног дана ће бити посвећен ком предмету, тако да многи наставници своде наставу математике на минимум.

(*Напомена*: једна од промена, уведена пре годину дана, је да ученици морају да имају један час математике дневно).

Овакав приступ настави узрокује велику несигурност код деце која немају развијене и усвојене алатке за решавање многих базичних математичких проблема. У старијим

разредима основне школе, као и у средњој школи, ђаци често имају страх од математике јер никада нису усвојили базична знања.
Са друге стране, врло је позитивно да се велики нагласак, у средњошколском програму наставе математике у Канади, даје примени и апликацији многих математичких појмова. Тако, на пример, када се обрађују квадратне функције и графови квадратних фнкција, у другом разреду средње школе, ученицима се представљају различити задаци везани за проблеме у физици или финансијама. Један од типичних примера који следи је преузет из уџбеника за други разред средње школе редовног наставног програма:
Једно позориште које има 300 сезонских претплатника је одлучило да подигне цене сезонских карата које су до тог тренутка биле $4000. Управа позоришта је закључила да сваких $20 увећања тренутне цене има за последицу да 10 претплатника неће обновити претплату за следећу сезону. Колика треба да буде нова цена сезонских карата да би зарада била максимална?

Или, када се ученици у четвртој години средње школе упознају са изводима функција, велики акценат је стављен на проблеме везане за промену положаја или брзину датог објекта, или брзину којом се нека популација мења. Још један од типичних примера који следи је преузет из уџбеника за четврти разред средње школе:
Аутомобил чија је позиција дата функцијом $d = 25t + t^2$, *мимоилази полицијски ауто, чија је брзина* $20 \, {}^{m}\!/\!_{s}$ *.Полицијски ауто, почиње да јури аутомобил који је прошао, убрзавајући* $1.5 \, {}^{m}\!/\!_{s^2}$ *. После колико времена ће брзина аутомобила бити* $31 \, {}^{m}\!/\!_{s}$ *? Колика је брзина полицијских кола у том тренутку? Колико је растојање између возила у том тренутку? Да ли ће полиција ухватити аутомобил?*

Приступ настави математике је, од традиционалног приступа (у коме наставник предаје лекцију на табли, а онда ученици вежбају презентовани материјал кроз примере), померен у потпуну супротност, у коме је настава математике у осмогодишњој школи у многоме лишен било какве процедуралности или меморизације, а акценат је стављен на процењивање, самооткривање, употребу пробе и грешке, и препознавање математичких појмова у стварном животу.

Како пронаћи најбољи модел наставе математике?

Решење је вероватно баланс између ова два приступа. Као што се аксиоме користе за извођење теорема, тако и ђаци морају да поседују одређене алате (знања) и да буду оспособљени да их користе приликом решавања математичких задатака. Математичке чињенице морају бити представљене и објашњене ђацима јасно кроз примере, а ђаци утврђују градиво кроз вежбање задатака на часу или за домаћи задатак. Са друге стране, ђацима треба омогућити да истражују и самостално или кроз групни рад доносе закључке везане за одређене проблеме и развијају своје мисаоне способности. У настави, математику не треба сводити на процедуре које ће ученици памтити. Ученичков истраживачки рад у настави математике је од великог значаја и своди се на откривање математичких чињеница, поступака, правила и законитости. Ученици много боље памте и усвајају знања ако су до неког закључка дошли сами, користећи своја логичка размишљања или истраживачки рад. Сваком ученику треба омогућити да примени сопствене мисаоне радње. У процесу учења, наставник треба да буде уздржан у давању

помоћи ђацима. Ученике треба континуирано охрабривати и усмеравати ка самосталном раду да би стекли одговарајуће радне навике и самопоуздање.
Који метод наставе је најбољи, узрок је међусобног спора бројних психолошких школа и дидактичких праваца кроз историју, а и у данашње време.

НЕКИ ОД ВАЖНИЈИХ ПЕДАГОШКИХ ПРАВАЦА КОЈИ СУ УТИЦАЛИ НА ФОРМИРАЊЕ МЕТОДА У НАСТАВИ

• **Традиционални приступ (трансмитивна настава**) наставе се заснива на бихевиоризму и ставу да је развој појединца искључиво везан за спољашње чиниоце. У настави доминира наставник, а ученик је пасиван прималац који слуша, памти и репродукује. Циљ наставе је преношење наставног програма. Садржаји које наставник предаје су строго прописани програмом и наставник не одступа од истог. Рад на часу је индивидуални, а комуникација се одвија само на релацији наставник – ученик.
Као реакција на традиционални приступ, крајем 19. и почетком 20. века, појавио се читав низ дидактичких праваца као што су слободно васпитање, активна-радна школа, учење путем решавања проблема – хеуристички приступ, интерактивно учење.

• **Слободно васпитање** се базира на учењу по коме је за васпитање детета најважније оно што долази од њега самог. Учење је схваћено као активно коришћење природних могућности детета. Слободно васпитање не полази од унапред утврђених циљева и наставних садржаја. Интересовање детета одређује циљ и садржај учења. Улога школе није да детету преноси знања, већ да му обезбеди услове у којима ће се оно, вођено својим афинитетима развијати. Задатак наставника је да подстиче ученика на самоизражавање, самоиницијативу и подстиче слободни развој детета. У овом педагошком приступу, ученик је у центру интересовања, а наставник има улогу кординатора. Основне карактеристике праваца заснованих на слободном развоју детета су:

а. Интересовање ученика одређује циљ и садржај учења
б. Улога наставника је да створи повољну средину за самостални развој сваког детета
в. Учи се активно и путем игре и практичног рада
г. Циљ наставе је проширивање искуства

• **Активно учење** – радна школа се ослања на филозофију прагматизма и њен главни представник је Џон Дјуи[1]. У основи овог учења је веровање да ученици сами треба да откривају знања и научне истине, а наставници им у овом процесу помажу водећи их кроз процес откривања. Ово повлачи да настава не треба да се одиграва у учионици већ у школским радионицама и лабораторијама. Моторне активности, чулно искуство и експериментисање су кључни елементи наставе. Основне карактеристике овог правца су:

а. Знање није могуће пасивно преносити са наставника на ученика
б. Ученик сам открива и конструише знања користећи сопствено искуство

[1] John Dewey

в. Сама настава је процес стицања искуства

Један од најутицајнијих приступа који следи ову теорију је **конструктивизам** Жана Пијажеа[2]. Пијаже је фокус ставио на четири етапе дечијег когнитивног развоја. Прве две етапе су везане за период од рођења до поласка у школу. У трећој етапи – у доби када деца почињу са школом, Пијаже тврди да су малишани у стању да развијају одређена апстрактна мишљења која морају бити повезана са конкретним примерима. Почевши од 11 година – четврта етапа, апстрактна мишљења се продубљију, формална и логичка размишљања су могућа и објашњења различитих концепата се могу представити деци без давања примера. Могу се издвојити његова три основна става, која су допринела развоју нових наставних система, а то су:

а. учење је акт открића

б. у процесу учења ученик пролази кроз исте интелектуалне процесе кроз које је наука већ прошла

в. учење је процес стицања знања, али и процес развијања способности за стицање знања

Пијажеова замисао је да се знање не преноси пасивно, већ се задаје у виду проблема, а ученику се допушта да кроз личну истраживачку делатност дође до открића. Наставник не треба да изводи закључке, већ треба да подстиче ученике на закључивање.

• **Кооперативно учење** у основи тврди да је процес учења ефикаснији ако се одвија кроз сарадњу и међусобну размену знања ученика у разреду. Неке од метода засноване на идејама кооперативног учења су: рад у пару или групи, тимски рад, дискусије између ученика током наставе. У току кооперативног учења, ђаци уче како да сарађују, прихватају друга мишљења и договарају се. Најутицајнији представник ове наставне методе је Лав Виготски[3], који је познат по својој **социокултурној теорији когнитивног развоја.** Виготски тврди да су ученици строго детерминисани својим социокултурним пореклом тако да деци когнитивни развој у многоме зависи од интеракције са родитељима, наставницима и осталом децом у разреду. Инструкција и подршка које наставник треба да да ученицима је интезивнија у почетку, а мања онда када је ученик способан да индивидуално уради оно што се од њега тражи. Интеракција која ученику помаже при учењу не мора само да подразумева наставника или родитеља, већ и остале ученике који кроз групни рад могу да реше неке проблеме, које индивидуално не могу. Виготски је био противник стандардизованих тестова за мерење знања и умења ученика. Његове идеје су имале ефекта на промене у образовним системима, посебно на важност активне улоге ученика у процесу учења и двосмерне колаборације између наставника и ученика.[17]

• **Хеуристички приступ** је настао из потребе да се увођењем самосталног рада ученика превлада предавачка настава и побољша наставни процес. Ова метода се развијала у првој половини 20. века, а један од њених утемељивача је Ђерђ Поја[4]. Овај приступ

[2] Jean Piaget

[3] Лев Семёнович Выготский

[4] George Pólya

настави уважава слободу ученика и подржава његово властито откривање математичке истине. Садржај који се учи се не излаже у готовом облику, већ наставник наводи ученике на самостално откривање одговарајућих тврдњи и правила. У овој методи, наставник поставља проблем пред ученике, а онда уз помоћ прикладних питања их води до решења. Поја се посебно бавио проблемом приступа решавању проблемских задатака у настави математке. У својој књизи *“How to solve it”*, Поја предлаже четири етапе у решавању проблема:[24][25]

1) разумевање проблема (Пажљиво прочитај текст и сагледај проблем. Уочи кључне речи и делове текста од посебног значаја за решавање задатка.)

2) стварање плана за решавање (Означи све што је неопходно да би поставио и решио задатак математички. Шта можеш да закључиш из података? Да ли си употребио све расположиве податке? Одабери адекватну методу за решавање задатка.)

3) спровођење плана (Постави математички модел задатка. Реши проблем и решење изрази речима.)

4) освртање на решење (Пажљиво провери сваки корак при решавању. Да ли можеш да провериш резултат? Можеш ли да решиш задатак на различите начине?)

Савремене методе наставе математике које показују добре резултате

Различите земље имају тенденцију да им настава математике тежи ка једном од постојећих дидактичких праваца. Тако, источне земље нагињу ка традиционалној настави док је настава на западу оријентисана ка потребама и могућностима ученика. Иако се многи педагози противе стандардизованим тестовима, они ипак пружају неку слику о математичком образовању у земљама које партиципирају. „Programme for International Student Assessment” – PISA организује тестирање петнаестогодишњака сваке три године. На последњем тестирању (2018) је учествовало 80 земаља и преко пола милиона ученика. „Trends in International Mathematics and Science Study” – TIMSS тестира ученике четвртог, осмог разреда, и завршне године средње школе. Последње тестрање које обухвата резултате из више од 60 земаља је из 2015. године. Најбоље резултате са оба тестирања су имале следеће земље или области: Сингапур, Јужна Кореја, Тајван, Хонг Конг, Јапан и Кина. Неки од разлога зашто земље источне Азије континуирано постижу одличне резултате на математичким тестирањима су следећи:

• Математичка едукација је врло вреднована у друштву као целини и сви ученици су континуирано подстицани да се труде и стреме ка бољим резултатима. Очекивања су велика, али је мотивација од стране наставника и родитеља врло присутна. Интензивни редовни наставни план и програм је често праћен са неколико сати додатне едукације у виду домаћих задатака, додатних часова или похађања приватних часова. Наставно особље је високо квалификовано и учитељска професија је цењена у друштву. Наставници имају мањи број часова дневно што им омогућава да се боље припреме за сваки час, посвете више времена слабијим ђацима, и да се континуирано стручно усавршавају.

• Наставни план и програм се континуирано усавршава. Прихватају се нови модели учења и имплементирају се у свакодневни настани план и програм. На пример, у Сингапуру је прихваћена идеја да процес учења математичких идеја мора имати три етапе: конкретну, затим визуелну, а тек онда апстрактну репрезентацију.
• Едукација је важан аспект целог друштва и државе. Суштинске промене у образовању и наставним плановима, креирање уџбеника и едукација наставног особља се одвија на националном нивоу. Све државне школе су конзистентне приликом запошљавања наставног особља и имплементирају наставни план одобрен од стране државе.[43]

Сви дидактички правци који следе традиционални приступ имају позитиван утицај на савремену методику наставе математике. Иако се слободно васпитање не може у потпуности применити у редовним школама због великог броја ђака и ограниченог броја наставног особља, врло је позитивно да наставници креирају индивидуални наставни програм за ученике који имају потешкоћа да прате редовну наставу или су окарактерисани као талентовани ђаци. Пожељно је користити принципе активног учења у настави математике. Многе математичке формуле ученици могу извести сами уз помоћ наставника, а акт открића доприноси да научено има смисла и да се дуже памти. Кроз процес кооперативног учења ђаци се уче да буду одговорни за сопствени процес стицања знања, као и да уче кроз интеракцију са својим вршњацима. Неки ученици који нису сигурни у своја знања се често не осећају слободно да траже помоћ од наставника, али ће радо тражити помоћ од својих другова из разреда. Иако сам лично присталица хеуристичког приступа у настави математике, чињеница је да ђаци не уче истом брзином и на исти начин, па је неопходно да се наставници прилагоде индивидуалним потребама ученика у току часа као и да редовно организује допунску и додатну наставу.

2. Законитости и инваријанте кроз примере и задатке

Неки типови проблемских задатака се често појављују у збиркама, тестовима као и на различитим такмичењима у Канади као и на интернационалним такмичењима. У овом делу рада су представљени неки од образаца или законитости чије је знање корисно за решавање одређених типова проблемских задатака у старијим разредима осмогодишње школе и средњој школи. Представљени примери се могу користити у редовној настави, а „такмичарски задаци“ из сваког од поглавља су намењени ученицима који похађају додатну наставу или се припремају за математичка такмичења.

Зашто су задаци везани за примену образаца и законитисти доста заступљени на такмичењима?

- Неки типови ових задатака понекад не захтевају специфична предзнања, па их могу решавати ученици различитих узраста, а такође их могу решавати ученици који похађају различите наставне програме.
- Задаци везани за обрасце и законитости подстичу логичко размишљање код деце као и повезивање чињеница које су представљене у задатку што доприноси когнитивном развоју.
- Уочавање различитих законитости између бројева, графова, слика итд. као и размишљања зашто се јављају, умногоме подстичу радозналост код деце, развијају машту и генерално жељу за решавањем математичких проблема.
- У оваквим задацима ученици развијају способност да добијене информације обрађују самостално и користе различите приступе да би одговорили на постављено питање. Овакав приступ решавању задатака умногоме подстиче ‘истраживачки’ приступ решавању проблема што је важан аспект за успешност у животу и раду младих.

Математичко доказивање

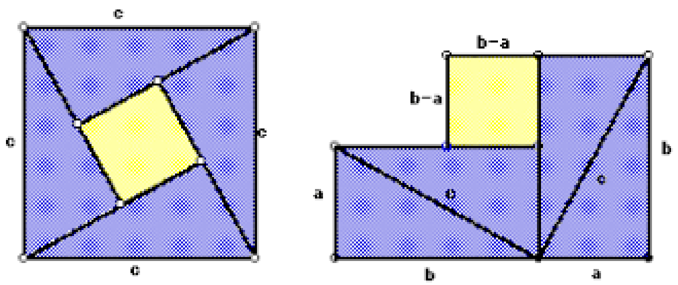
Врло је важно да се ученицима предоче ограничења при успостављању законитости које следе када се задаци решавају коришћењем емпиријског закључивања. Често ученици праве исту грешку, а то је да у задатку провере правило за првих неколико случајева и онда доносе закључак да ће законитост увек важити. Ученици често изјављују: „доказао сам да ово важи“ уместо „уочио сам да ово важи“. Успостављање претпоставки везаних за неку законитост је врло важно, али ученици морају разумети да се правило генерално не може прихватити ако се само проверава примерима. Математичари користе претпоставке, које наравно онда морају бити и доказане. Важнији докази који имају ширу примену у математици су прихваћени као леме или теореме. Емпиријско утврђивање правила које задовољава услове за првих n примера није увек довољно да би се успоставила генерална тврдња која ће важити за све могуће случајеве. Формално доказивање није део редовног наставног програма у осмогодишњој школи у Канади. Математички докази се могу представити визуелно, кроз специфичне задатке, или користећи елементе математичке логике кроз једноставније математичке примере.

Пример 1. Замисли било који троцифрен број. Запиши тај број и понови све цифре тако да се добије шестоцифрени број (*на пример*: ако је замишљени број 645, онда је добијени шестоцифрени број 645645). Докажи да овако добијени бројеви увек имају бар четири проста чиниоца који не морају међусобно бити различити.

Решење: Да би решили овај задатак, ученици треба да пронађу приступ који ће им омогућити да ову тврдњу докажу за било који шестоцифрени број добијен на описан начин, а не да испитују појединачне случајеве.
Сваки шестоцифрени број у описаној форми се може записати као *abcabc*, или као $abcabc = 1000 \cdot abc + abc = 1001 \cdot abc$. Значи да је 1001 чинилац сваког од шестоцифрених бројева у овој форми. Пошто је $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, следи да се сваки број облика *abcabc* може записати као: $abcabc = abc \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Ако је *abc* прост број, онда *abcabc* има тачно четири проста чиниоца: *abc*, 7, 11 и 13. Ако је *abc* сложен број, онда ће проста факторизација броја *abc* имати бар два проста чиниоца. Додајући овоме и просте чиниоце 7, 11, и 13, добијамо да број *abcabc* у простој факторизацији има бар пет простих чинилаца. Овим је тврдња доказана.

Пример 2. Докажи Питагорину Теорему, или да у правоуглом троуглу чије су катете *a* и *b*, а хипотенуза *c*, важи да је: $a^2 + b^2 = c^2$.

Решење:

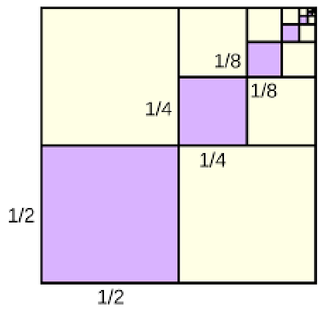


Са приложене слике се види да је површина левог већег квадрата једнака c^2. Са друге стране, површина овог квадрата је једнака збиру површина четири троугла и мањег квадрата, чија је страница $a - b$. Имамо да је:

$$c^2 = 4 \times \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

Пример 3. Визуелно представи тврдњу да је сума геометријског реда
$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ... = \frac{1}{3}$, или $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$.

Решење:



Са приложене слике се лако уочава да је површина сваког од осенчених квадрата, један од елемената у датом низу, и да је збир површина свих осенчених квадрата једнака трећини површине јединичног квадрата. Иако слика не представља строги доказ, она је илустрација дате једнакости.

Пример 4. *(доказ контрапримером)* Да ли су вредности полинома $P(n)=n^2+n+41$ увек прости бројеви за све вредности n, где је n природан број?

Решење: $P(1)=43,\ \ P(2)=47,\ \ P(3)=53...$ Изгледа да правило важи, али шта се дешава када је $n=40$? Добија се $P(40)=1681$, односно број који није прост ($1681=41^2$). Закључак који ученици доносе је да правило генерално не важи ако се пронађе бар један пример који не задовољава услове задатка.

Пример 5. Да ли је производ свака два ирационална броја ирационални број?

Решење: И у овом примеру се може наслутити да правило важи. На пример: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ или $\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}=2\sqrt{2}$. Да ли је могуће пронаћи пример за који је тврдња нетачна? Ако је $x=\sqrt{3}$ и $y=\sqrt{12}$, онда је $x\cdot y=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$, а 6 није ирационални број.

Пример 6. *(директни доказ –„ако…онда“)* Ако је n непаран број, да ли је и n^2 непаран број?

Решење: Ако је n непаран, онда се може представити у облику $n=2k+1$, где је k цео број. Онда је $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$. Пошто је k цео број, онда је и $2k^2+2k$ цео број, који можемо означити са m, па смо показали да се може представити у облику $2m+1$, што значи да је непаран.

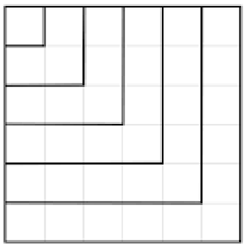
Пример 7. *(доказ контрадикцијом)* Да ли постоји бесконачно много простих бројева?

Решење: Претпоставимо супротно, да је скуп простих бројева коначан, тј. да постоји највећи прост број p. Размотримо број $q=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots\cdot p+1$. Број q је већи од броја p, па је закључак да q не може бити прост број, јер је према претпоставци p највећи прост број.

Будући да је q сложен, он се може представити као производ простих бројева (фундаментална теорема аритметике). Ово значи да је q дељив бар са једним од простих бројева $2,3,5,\ldots p$. Ово је у супротности са претпостављеним обликом броја q. Овим смо доказали тврдњу контрадикцијом.

Пример 8. *(доказ математичком индукцијом)* Доказати да је збир првих n непарних бројева једнак квадрату броја n, или да је: $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Решење: Овај пример је врло погодан, јер ђаци могу и да визуализују ову тврдњу за суму првих шест непарних бројева користећи слику испод.



Проверавамо да ли тврђење важи за $n=1: 1=1^2$. Претпоставимо да тврђење важи за n, и докажимо да важи за n+1:

$1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2(n+1)-1)=n^2+(2n+2-1)=n^2+2n+1$. Пошто је:

$n^2+2n+1=(n+1)^2$, тврдња је доказана.

3. Законитости везане за низове бројева

У оваквом типу задатака, треба наставити започети низ. Законитост између чланова низа треба одредити користећи дате елементе. У овом поглављу су обрађени неки од често коришћених типова низова са којима се ученици сусрећу. Знања везана за неке од законитости између елемената низова могу умногоме помоћи ученицима при проналажењу законитости између елемената нетипичних низова.

3.1 Фибоначијев низ

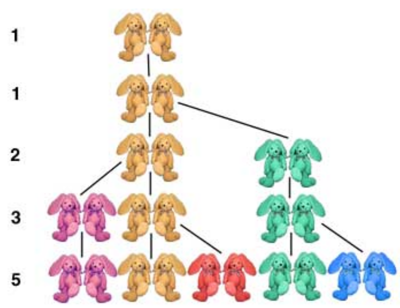
Најпознатији низ који се представља основцима је Фибоначијев низ. Фибоначи је италијански математичар из Пизе, који је у дванаестом веку у својој књизи *Liber Abaci* описао овај низ кроз идеалистичку верзију репродукције зечева. Тако је настао један од најпопуларнијих низова у математици: $1,1,2,3,5,8,13,...$ Почевши од трећег елемента, сваки следећи елемент у низу се проналази сабирањем предходна два елемента низа.

$$1+1=2$$
$$1+2=3$$
$$2+3=5$$
$$5+3=8...$$

Општа формула за проналажење n-тог члана низа је: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Идеја је да једном пару рођених зечева треба месец дана да одрасту, после чега тај пар зечева добија подмладке, један пар беба зечева, сваких месец дана. Овом новом пару зечева такође треба месец дана да одрасту, после чега ће и они добијати један пар зечева као подмладак сваког месеца. У овој апстрактној причи, зечеви никад не умиру, само се размножавају.

Број парова зечева представљен за сваки месец:



Неке од интересантних законитости које су примењиве на елементе у Фибоначијевом низу, а које се користе у задацима су:

- n-ти члан низа се може израчунати користећи формулу:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(1+\sqrt{5})^n}{2^n} - \frac{(1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right)$$

- Сума квадрата првих n чланова је једнака производу F_n и F_{n+1} чланова низа. На пример: Za $n=5$, $1^2+1^2+2^2+3^2+5^2 = F_5 \cdot F_6 = 5 \cdot 8 = 40$.

- Сума квадрата два узастопна члана низа је такође члан овог низа. На пример: $5^2+8^2=89$ (што је 11. члан овог низа). Уопштено, $F_n^{\,2}+F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$.

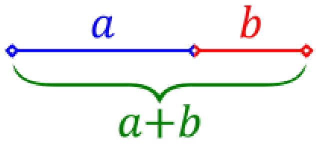
- $NZD\ (F_i, F_k)$ је увек један од Фибоначијевих бројева.

- F_n је једнак броју начина на који се $n-1$ може разложити на сабирке користећи цифре 1 и 2.
На пример: $4=2+2=1+1+2=1+2+1=2+1+1=1+1+1+1$, или постоји пет начина на који се број 4 може представити користећи цифре 1 и 2, а $F_5 = 5$.

Интересантно је поменути везу између Фибоначијевог низа и златног пресека.
У математици, за две вредности кажемо да су у „златном односу“ ако је већа вредност у односу на мању вредност једнака односу суме те две вредности наспрам веће вредности.
Односно, ако су $a > b > 0$*, онда:*

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887...$$



Ово значи да ако је однос између две вредности приближан броју φ*, онда су те две вредности у „златном односу“.*
Однос између два узастопна Фибоначијева броја има вредност која је приближна златном односу. У ствари, што су бројеви већи, то је однос између њих ближи „златном односу“ што је и приказано у табели која следи. Ова табела представља добру илустрацију наведене законитисти, али није сроги доказ исте.[34]

A	**B**	**B / A**
2	3	1.5
3	5	1.666666666...
5	8	1.6
8	13	1.625
...	...	...
144	233	1.618055556...
233	377	1.618025751...

Пример 1. У датом низу бројева одреди елемент који недостаје.
1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, 68, 125,__

Решење: Ђаци треба да уоче сличну законитост оној, која постоји између чланова Фибоначијевог низа. Сваки члан (почев од четвртог) се може пронаћи сабирањем предходна три члана у низу.
$6=1+2+3;\ 11=2+3+6;\ 20=3+6+11 ...;37+68+125=230$, што је члан који недостаје.

Пример 2. Одреди следећа три члана у низу $8,8,16,24,40\ \ldots$

Решење: Слично као и у претходном задатку, почевши од трећег елемента, сваки елемент у низу се добија сабирањем предходна два елемента
($8+8=16;\ 8+16=24;\ 16+24=40$). Стога, тражени елементи су:
$24+40=64;\ 40+64=104; 104+64=168$

Пример 3. Да би се попео на други спрат своје школе Миша мора да се попне 10 степеника. На колико начина Миша може доћи до другог спрата школе ако се пење користећи сваки степеник и/или прескаче по један степеник (на пример са другог степеника прескочи до четвртог)?

Решење: Можемо користити чињеницу да је F_n једнак броју начина на који се $n-1$ може раставити на сабирке користећи бројеве 1 и 2, јер Миша прави кораке дужине 1 или 2. Значи, број начина на који се 10 може представити као збир бројева 1 и 2 је једнак F_{11} . Пошто је 11-и број у Фибоначијевом низу 89, то значи да Миша може доћи до другог спрата школе на 89 различитих начина.

Пример 4. Поспремајући своју собу, Ружица је пронашла завежљај од 14 прутића различите дужине. Није могла да се сети чему они служе, али играјући се са прутићима, установила је да не постоје три прутића која могу формирати троугао. Ако су два најкраћа прутића дужине 1, колика је најмања могућа дужина најдужег 14. прутића?

Решење: Пошто су два најкраћа прутића дужине 1, да би се оформио троугао, трећи прутић мора имати дужину мању него збир прва два. Значи, најмања могућа дужина трећег прутића, таква да се троугао не може оформити, је $1+1=2$. Користимо сличан резон да утврдимо дужину четвртог прутића. Да би се оформио троугао, дужина четвртог прутића мора бити мања од збира прутића дужине 1 и 2, или најмања дужина потребна да се троугао не може оформити је $1+2=3$. Генерално, дужина прутића l_n мора бити мања од $l_{n-1}+l_{n-2}$ да би се троугао оформио, или је најкраћа дужина $l_n=l_{n-1}+l_{n-2}$ ако се троугао не може формирати. Уочавамо да дужине прутића представљају Фибоначијев низ. Уз мало рачунања можемо утврдити да је $l_{14}=F_{14}=377$.

3.2 РАЗЛИКА УЗАСТОПНИХ ЕЛЕМЕНАТА У НИЗУ

Једна од првих метода коју ученици користе да би пронашли законитост између чланова низа је да пронађу разлику између два узастопна члана, да би утврдили да ли је дати низ аритметички. Аритметички низ је низ у коме је разлика два узастопна члана, која се обележава са d, увек константна. На пример, низ 2, 5, 8, 11, 14, … је аритметички низ, јер је $d = 5-2 = 8-5 = 11-8 = 14-11 = 3$.

Корисне чињенице везане за аритметичке низове су:

- Аритметичка средина свих чланова коначног аритметичког низа, једнака је аритметичкој средини првог и последњег члана, или $\frac{a_1 + a_n}{2}$.
- Ако је $a_{-1} = a_1 - d$ елемент који претходи првом елементу коначног аритметичког низа, а a_n је последњи елемент у низу, онда је број елемената у коначном аритметичком низу једнак $\frac{a_n - a_{-1}}{d}$.
- Ако први члан низа означимо са a_1, а константну разлику са d, онда је се n-ти елемент може представити као $a_n = a_1 + (n-1)d$.
- Збир коначног аритметичког низа је једнак производу аритметичке средине и броја елемената у низу, или $S_n = \frac{2a + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Ако прва разлика, као у примеру који следи, није константна, онда треба наћи другу, трећу, итд. разлику.

Пример 1. У датом низу пронађи елемент који недостаје: 2, 9, 28, 65, 126, 217,__

Решење: Пошто низ није аритметички, пронађимо другу и трећу разлику, што је представљено на дијаграму који следи:

2	9	28	65	126	217	
	7	19	37	61	91	(прва разлика)
		12	18	24	30	(друга разлика)
			6	6	6	(трећа разлика)

Пошто је трећа разлика константна, фокусирајмо се на проналажење елемента који недостаје. Да би се пронашао члан који недостаје, сабирамо у обрнутом смеру:

$6 + 30 = 36$; $36 + 91 = 127$; $127 + 217 = 344$

(*Напомена:* Пошто је трећа разлика константна, онда је формула за одређивање n-тог члана низа полином трећег степена. Неки ученици ће уочити да су дати бројеви за један већи од кубних бројева: $1, 8, 27, 64, 125, 216$, што доводи до закључка да је уопштена формула: $T_n = n^3 + 1$).

Пример 2. Који од понуђених одговора представља следећа три узастопна елемента у низу бројева: 12, 14, 11, 13, 10…

A) 12, 9, 11 B) 9, 12, 11 C) 12, 8, 10 D) 12, 8 14

Решење: Ђаци треба да уоче су неки од датих чланова мањи а неки већи у поређењу са датим претходним елементом. На пример, $14=12+2$ и $13=11+2$, где су 14 и 13 парни елементи у низу. Са друге стране, за непарне чланове низа (почевши од трећег члана) уочавамо да су умањени за 3: $11=14-3$; $13-3=10$. Анализирајући понуђене одговоре закључујемо да је А) тачан одговор јер је $12=10+2$; $9=12-3$; $9+2=11$ чиме је задовољена законитост између чланова низа.

Пример 3. Нека је N број група од три узастопна садржаоца броја 7, а чија је сума између 200 и 500. Пронађи вредност броја N.

Решење: Уз мало покушаја пронађимо прву (63 +70 + 77 = 210) и последњу групу (154+ 161+ 168 = 483). Израчунајмо број елемената у аритметичком низу 63, 70, 77,…,168. Пошто је последњи елемент 168, а елемент који претходи првом 63 – 7 = 56, онда је број елемената у низу: $\frac{168-56}{7}=16$. Пошто три узастопна броја формирају групу $a_1+a_2+a_3=N_1$, $a_2+a_3+a_4=N_2$ и тако даље, а низ има 16 елемената, укупан број група је 14, или $N=14$.

Пример 4. Одредити општи члан и следећи елемент у низу бројева: 101, 119, 137, 155, 173, _

Решење: Приликом израчунавања прве разлике можемо уочити да је она константна. Пошто је $d=119-101=137-119=155-137=173-155=18$, лако можемо пронаћи следећи елемент користећи последњи дати елемент и константну разлику: $173+18=191$. Како је први елемент у низу 101, онда можемо пронаћи општи члан низа:

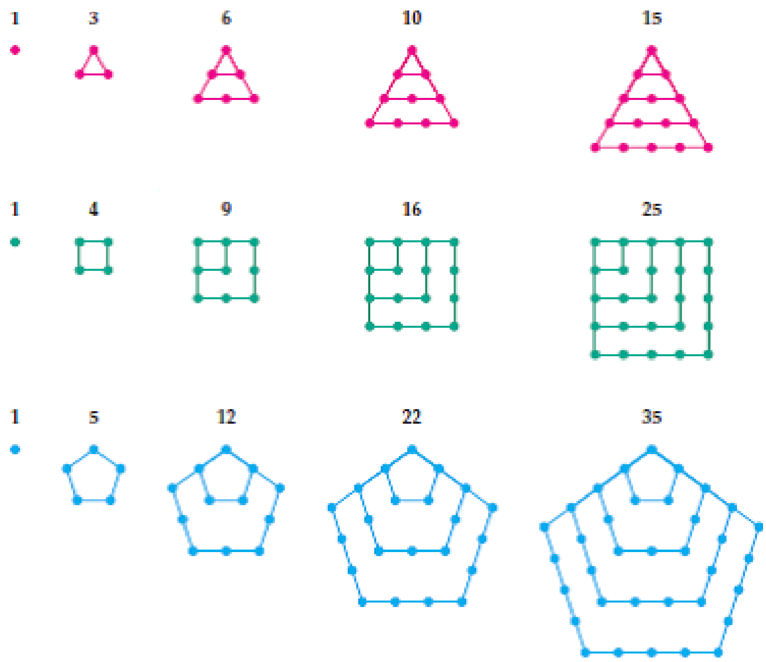
$$\begin{aligned} a_n &= 101+(n-1)\cdot 18 \\ &= 101+18n-18 \\ &= 18n+83 \end{aligned}$$

Пример 5. Пронађи број елемената и суму низа: 18, 25, 32, …,354.

Решење: Пошто је дати низ аритметички, јер је разлика свака два узастопна члана 7, можемо пронаћи елемент који би претходио првом члану: $18-7=11$. Број елемената у низу је: $(354-11):7=49$. Да бисмо пронашли суму датог низа, прво израчунајмо аритметичку средину: $(18+354):2=186$, а сума датог низа је: $S_{49}=186\cdot 49=9114$.

3.3 Троугаони, квадратни и петоугаони бројеви

Низови који се односе на троугаоне, квадратне и петоугаоне бројеве се често користе у задацима, па су неке законитости везане за исте, представљене у овом поглављу. Концепт полигоналних бројева је први пут дефинисао старогрчки математичар *Хипсикле* из Александрије 170. п.н.е.
На дијаграму испод је представљено првих пет троугаоних, квадратних и петоугаоних бројева. Сваки троугаони број је једнак збиру тачака које формирају једнакостраничан троугао. Сваки четвороугаони број је једнак збиру тачака које формирају квадрат. На сличан начин се добијају и петоугаони бројеви.[7][31]



• Троугаони бројеви: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36...

Елементи низа су добијени на следећи начин:

$$1 = 1$$

$$3 = 1 + 2$$

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4 \ ...$$

Уочимо да је сваки елемент T_n сума аритметичког низа (за троугаоне бројеве је то сума узастопних бројева од 1 до n), а ово важи и за квадратне и пентагоналне бројеве.

Формула за проналажење n-тог члана низа троугаоних бројева је:

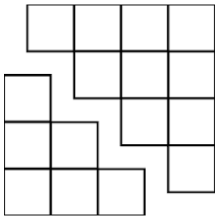
$T_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Троугаони бројеви се у основној школи обично уводе тако да се од ученика тражи да саберу првих 100 природних бројева. Уместо да сабирају бројеве по реду, ђаци треба да групишу први и последњи број (1 + 100 =

101), други и претпоследњи број (2 + 99 = 101) и тако даље. Пошто ће груписаних парова бројева бити 50, а сума сваког од парова је 101, сума првих 100 природних бројева је $50 \times 101 = 5050$. Приметимо да је број парова једнак $\frac{n}{2}$ а сума парова је $n+1$, што даје формулу $\frac{n(n+1)}{2}$.

Интересантна особина троугаоних бројева је да је сума два узастопна троугаона броја једнака квадратном броју.

$$1+3=4;\ 3+6=9;\ 6+10=16;\ldots\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2-n+n^2+n}{2}=n^2$$

Ово својство се може и визуелно представити као на слици испод:



• Квадратни бројеви: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49...

$1 = 1$

$4 = 1+3$

$9 = 1+3+5$

$16 = 1+3+5+7$ ...

Формула за проналажење n-тог члана низа квадратних бројева је:

$$T_n = 1+3+5+7+\ldots+(2n-1) = \frac{1+(2n-1)}{2}\cdot\frac{(2n-1)+1}{2} = n^2$$

• Петоугаони бројеви: 1, 5, 12, 22, 35,...

$1 = 1$

$5 = 1+4$

$12 = 1+4+7$

$22 = 1+4+7+10$ ...

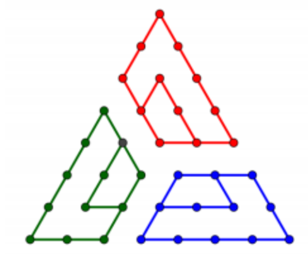
Пошто је сума коначног аритметичког низа једнака производу аритметичке средине елемената и броја елемената у низу, а први елемент у низу је 1, и n-ти елемент је: $1+3(n-1)=3n-2$, онда се n-ти пентагонални број може представити формулом:

$$T_n = 1+4+7+\ldots+3n-2 = \frac{1+(3n-2)}{2}\cdot\frac{(3n-2)+2}{3} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Уопштено, за $p = 3,4,5\ldots$ можемо дефинисати p-угаоне бројеве као суме математичке прогресије: 1, p-1, $2p$-3,... На пример, пентагонални бројеви су:

$1,\ 1+4=5,\ 1+4+7=12,\ldots$

Петоугаони бројеви поседују још неке интересантне особине. Ако посматрамо слику приложену испод, можемо уочити да је сваки пентагонални број, једна трећина одређеног троугаоног броја.



Покажимо исто алгебарски: $3\cdot\left(\frac{n\cdot(3n-1)}{2}\right)=\frac{3n\cdot(3n-1)}{2}$ што је $3n-1$-ти троугаони број.

Интересантно је поменути да је Pierre de Fermat (1601-1665) у својој теореми о полигоналним бројевима претпоставио да се сваки позитивни цео број може представити као збир три троугаона броја, или као збир четири квадратна броја, или као збир пет пентагоналних бројева, и тако даље. Иако Фермаов доказ никад није пронађен, Friedrich Gauss је 1801. доказао да претпоставка важи за троугаоне бројеве, а Augustin Cauchy је 1813. доказао уопштену теорему.

Пример 1. У разреду који има 20 ђака, сваки ученик се рукује са свим осталим ученицима у разреду. Колико ће укупно бити руковања у овом разреду?

Решење: Пошто ће се први ученик руковати са осталих 19 ђака, други ученик ће се руковати са 18 ученика (јер се већ руковао са првим учеником). Трећи ученик ће се руковати са 17 ученика (јер се већ руковао са првим и другим учеником) и тако даље. Укупан број руковања је једнак $19+18+17+...+1$, или користећи форомулу за збир првих 19 природних бројева, добијамо $\frac{19\cdot(19+1)}{2}=190$.

Пример 2. На кружници је дато 9 тачака. Колико различитих тетива одређује ових 9 тачака?

Решење: Обележимо тачке на кружници са $A_1, A_2, ...A_9$. Из тачке A_1, можемо повући 8 тетива (из тачке A_1 до преосталих 8 тачака на кружници), из тачке A_2 можемо повући 7 тетива (тетива A_1A_2 је већ нацртана), из тачке A_3 можемо повући 6 тетива (тетиве A_1A_3 и A_2A_3 су већ нацртане) и тако даље. Укупан број тетива је:

$$8+7+6+...+1=\frac{8\cdot 9}{2}=36.$$

Пример 3. Пронађи следећи елемент у низу бројева: 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, __

Решење: Приметимо да је низ растући, па пронађимо разлику између узастопних чланова низа: 4 – 1 = 3, 10 – 4 = 6; 20 – 10 = 10, 35 – 20 = 15, 56 – 35 = 21, 84 – 56 = 28. Ови бројеви поређани у низ: 3, 6, 10, 15, 21, 28,… чине низ троугаоних бројева. Први следећи троугаони број је $T_8=\frac{8\times 9}{2}=36$ што је разлика између броја у низу који недостаје и претходног елемента 84. Одавде следи да је елемент који недостаје: 84 + 36 = 120.

Пример 4. Пронађи следећи елемент у низу бројева као и општи члан низа: 1, 6, 15, 28, 45,_.

Решење: Ако посматрамо појединачне чланове низа, можемо уочити да је:
$T_1 = 1,\ \ T_2 = 1+5,\ \ T_3 = 1+5+9,\ \ T_4 = 1+5+9+13,\ \ T_5 = 1+5+9+13+17$ или да се сваки елемент у датом низу може представити као сума аритметичке прогресије. Одавде имамо да је елемент који недостаје једнак: $T_6 = 1+5+9+13+17+21 = 66$. Пошто је n-ти члан низа једнак: $1+4(n-1)$ или $4n-3$, онда можемо пронаћи и општи члан низа, користећи формулу за суму аритметичког низа:
$T_n = 1+5+9+13+...+4n-3 = \dfrac{1+4n-3}{2}\cdot\dfrac{4n-3+3}{4} = (2n-1)n.$ Приметимо да је дати низ, низ хексагоналних бројева.

3.4 Занимљиве законитости везане за низове бројева

У овом поглављу су представљени неки од нетипичних примера низова. Да би успоставили законитост између чланова оваквих низова, потребно је употребити логичка размишљања и мало маште. Знања из претходних поглавља ће помоћи ученицима да брже и лакше провере научене законитости, а такође да брже уочавају нове. Стечено искуство добијено вежбањем је важан фактор при решавању оваквих задатака, јер помаже ученицима да лакше уочавају законитости типа: Да ли је низ растући или опадајући?; Колика је разлика између узастопних елемената?; Да ли можемо пронаћи образац који одређује n-ти елемент низа? и тако даље.

Пример 1. Одреди следећи елемент у низу бројева:
1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221,…

Решење: Законитост између елемената низа је лако наћи ако се сваки елемент опише речима: „један“, „једна јединица“, „две јединице“, „једна двојка и једна јединица“, „једна јединица, једна двојка и две јединице“…Сваки следећи члан низа се добија читањем претходног члана низа и записивањем прочитаних бројева.
Напомена: Постоји само један изузетак оваквог низа у коме су сви чланови идентични, а то је: 22, 22, 22,...

Пример 2. Дата су прва четири савршена броја 6, 28, 496, 8128. Пронађи следећи елемент у низу савршених бројева.
(*Помоћ*: Користи Мерсенове просте бројеве)

Решење: ***Савршени број*** *је природан број који је једнак збиру својих позитивних делилаца, укључујући и број 1, али не рачунајући сам тај број. На пример, 28 је савршен број, јер је скуп чинилаца броја 28: {1, 2, 4, 7, 14, 28}, а 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.*

Интересантно је поменути да су сви до сада пронађени савршени бројеви парни и да се увек завршавају цифром 6 или 8.

Раставићемо дате савршене бројеве на просте чиниоце и уочити законитост која важи. Сваки од датих савршених бројева, када је растављен на просте чиниоце, садржи степен броја 2 (или 2^p) и прост број који је у облику $2^{p+1}-1$. Из приложеног изгледа да се сваки савршен број може представити у облику $2^p(2^{p+1}-1)$ или $2^{p-1}(2^p-1)$.[28][46]

Еуклид је прва четири савршена броја описао у својој IX књизи Елемената, као и доказао следеће:

Теорема:

Ако је 2^p-1 прост, онда је $2^{p-1}(2^p-1)$ савршен број.

Око 2000 година касније, Ојлер је доказао да ако је N саврешен број, онда је он облика $N=2^{p-1}(2^p-1)$.

Кажемо да је број ***Mersenne прост број*** *ако се дати прост број може представити у облику* 2^p-1 .

Видимо да је проналажење савршених бројева уско везано за проналажење простих бројева облика 2^p-1*, или Мерсенових простих бројева.*

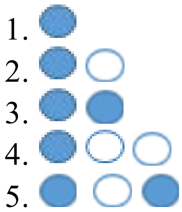
Из факторизације прва четири савршена броја се види да само за одређене природне бројеве *p* (2, 3, 5,…), важи да, замењени у горњу формулу, дају савршен број. Да бисмо пронашли пети савршен број, користимо Мерсенове просте бројеве. Пошто за *p* = 7, добијамо четврти савршен број, пронађимо следећи *p*, за који ће важити да је $2^{p-1}(2^p-1)$ савршен број. За *p* = 8, проверавамо да ли је $2^8-1=255$ прост, па пошто није, проверавамо за *p* = 9 и тако даље. За *p* = 13, имамо да је $2^{13}-1=8191$ прост број. Одавде следи да је $2^{13-1}(2^{13}-1)=33550336$ пети савршен број.[29][47]

Пример 3. Пронађи трећи број у тридесетој врсти низа са слике.

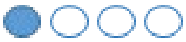
$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 2 & 3 & 4 & & \\
 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\
10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\
 & & . & . & . & &
\end{array}
$$

Решење: Можемо уочити следећу законитост: последњи број, у свакој од врста, је квадрат броја текуће врсте. На пример: 16 је последњи број у четвртој врсти, а $16=4^2$. Ово значи да ће последњи број у 29-ој врсти бити $29^2=841$. Пошто су бројеви у врстама узастопни природни бројеви, то ће трећи број у 30-тој врсти бити: $841+3=844$.

Пример 4. Мића је сваком природном броју доделио визуелну репрезентацију на следећи начин:



Користећи Мићин код, како ће изгледати број 8?

Решење: Да бисмо уочили законитост, морамо бити упознати са бинарним записом броја. $1=1\cdot 2^0$; $2=1\cdot 2^1+0\cdot 2^0$; $3=1\cdot 2^1+1\cdot 2^0$; $4=1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0$; $5=1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0$.
Ако сваки од датих бројева представимо као низ, користећи цифре 0 и 1, онда имамо да су дати бројеви: $1=1$; $2=1,0$; $3=1,1$; $4=1,0,0$; $5=1,0,1$
Ако плави круг представља јединицу, а бели круг нулу, у бинарном запису броја, онда ће број 8 ($8=1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0$), користећи Мићин код, изгледати као:


Пример 5. У холу једне велике школе се налази 10000 ормарића којима су додељени бројеви од 1 до 10000. Сви ормарићи су иницијално затворени. Првог дана школе, први ђак који је ушао у школу, отвора све ормариће. Други ђак који је стигао у школу затвара сваки други ормарић. Трећи пристигли ђак, мења положај сваког трећег ормарића (отвара ормарић, ако је био затворен или га затвори, ако је био отворен). Четврти ђак мења положај врата сваког четвртог ормарића и тако даље све док 10000. ђак не промени положај врата на 10000. ормарићу. Који ормарићи су на крају отворени?

Решење: Да бисмо боље уочили шта се дешава са вратима ормарића, у табели испод смо представили првих девет ормарића након што је првих десет ђака стигло у школу. Нека слово „*O*“ представља отворен ормарић, а слово „*Z*“ затворен.

ђак	Врата 1	Врата 2	Врата 3	Врата 4	Врата 5	Врата 6	Врата 7	Врата 8	Врата 9
#1	O	O	O	O	O	O	O	O	O
#2	O	Z	O	Z	O	Z	O	Z	O
#3	O	Z	Z	Z	O	O	O	Z	Z
#4	O	Z	Z	O	O	Z	O	O	Z
#5	O	Z	Z	O	Z	Z	O	O	Z
#6	O	Z	Z	O	Z	Z	O	O	Z
#7	O	Z	Z	O	Z	Z	Z	O	Z
#8	O	Z	Z	O	Z	Z	Z	Z	Z
#9	O	Z	Z	O	Z	Z	Z	Z	O
#10	O	Z	Z	O	Z	Z	Z	Z	O

Из табеле можемо уочити да су ормарићи са редним бројевима 1, 4 и 9 отворени, а остали ормарићи затворени. Пошто ниједан од преосталих ђака, након доласка у школу, неће отварати или затварати ормариће из табеле, онда можемо слободно закључити да ће ормарићи: 1, 4 и 9 остати отворени након што свих 10000 ђака стигне у школу. Погледајмо шта је карактеристично за бројеве ових ормарића. Уочимо важну законитост: пошто су сви ормарићи затворени на почетку, да би ормарић на крају био отворен, положај његових врата мора бити промењен непаран број пута. Позицију ормарића #1 мења само први ђак. Позицију ормарића #4 мења ђак број 1, 2 и 4. Позицију ормарића #9 мења први, 3. и 9. ђак. Приметимо да су 1, 2 и 4 чиниоци броја 4, а 1, 3 и 9 чиниоци броја 9, као и да оба броја имају непаран број делилаца. Са друге стране, погледајмо шта се дешава са ормарићем #20. Његову позицију мењају ђаци 1, 2, 4, 5, 10, 20 или укупно шест ђака, што повлачи да ће овај ормарић на крају бити затворен. Значи, треба посматрати само оне ормариће који имају непаран број делилаца, а то су квадрати бројева. Закључак је да ће ормарићи са бројем 1, 4, 9, 16, 25, 36, и тако даље бити на крају отворени.

3.5 Примери задатака за додатну наставу и такмичарски задаци (низови бројева)

Задатак 1. *Ако је 2 # 3 = 10, 7 # 2 = 63, 6 # 5 = 66, 8 # 4 = 96, онда је 9 # 7 једнак ком броју?*

Решење: Законитост коју треба уочити је да је свака операција # једнака првом броју помноженом збиром датих бројева.
Пошто је $2\cdot(2+3)=10$ или $7\cdot(7+2)=63$, онда је $9\#7=151$, јер је $9\cdot(9+7)=151$.

Задатак 2. *Који број недостаје у низу бројева*: 1, 13, 27, __, 53, 65, 79.

Решење: Законитост коју треба уочити је да се елементима у низу наизменично додају 12, па онда 14, па опет 12, па 14 и тако даље. Тражени број је 39.

Задатак 3. *Пронађи следећи елемент у низу*: *1, 3, 4, 21, 100, __* .

Решење: Законитост коју треба уочити је да се, почев од трећег члана низа, сваки следећи елемент проналази тако што се први од два претходна члана помножи збиром два претходна члана низа: $1\cdot(1+3)=4$; $3\cdot(3+4)=21$; $4\cdot(4+21)=100$
Тражени број је: $21\cdot(21+100)=2541$.

Задатак 4. *Израчунај збир цифара броја који је једнак вредности израза:* $\frac{10^{36}+26}{18}$.

Решење: Треба уочити шта се дешава са вредношћу израза када се експонент броја 10 у изразу мења: $\frac{10^2+26}{18}=7$; $\frac{10^3+26}{18}=57$; $\frac{10^4+26}{18}=557$; $\frac{10^5+26}{18}=5557$ и тако даље. Вредност израза је број који увек има цифру седам на месту јединица испред које је низ цифара петица. Број цифара 5 у броју је условљен експонентом броја 10 у изразу, тако да је број петица увек за 2 мањи него експонент броја 10 у изразу. Значи, $\frac{10^{36}+26}{18}=555...7$ (34 петице). Збир цифара траженог броја је $34\cdot 5\ +\ 7\ =\ 177$.

Доказаћемо и уопштену тврдњу, или да је $\frac{10^n+26}{18}=\underbrace{555...5}_{n-2}7$

$$
\begin{aligned}
\underbrace{555...5}_{n-2}7 &= 5\cdot\underbrace{111...1}_{n-2}0+7=\frac{5}{9}\cdot\underbrace{999...9}_{n-2}0+7\\
&=\frac{5}{9}\cdot(10^{n-2}-1)\cdot 10+7\\
&=\frac{5}{9}\cdot(10^{n-1}-10)+7\\
&=\frac{5\cdot 10^{n-1}-50+63}{9}\\
&=\frac{5\cdot 10^{n-1}+13}{9}\\
&=\frac{10\cdot 10^{n-1}+26}{18}=\frac{10^n+26}{18}
\end{aligned}
$$

Задатак 5. *Осамдесетшестоцифрени број 666...666 је помножен бројем 333...333 који има 85 цифара. Колико пута ће се појавити цифра 7 у производу ова два броја?*

Решење: Законитост можемо пронаћи кроз примере сличних бројева који имају много мањи број цифара: $666\cdot 33=21978$; $6666\cdot 333=2219778$; $66666\cdot 3333=222197778$, и тако даље. Уочавамо да је број седмица у резултату за два мањи од броја цифара броја чије су све цифре шестице. Значи, резултирајући производ ће бити број који има 84 седмице. Доказаћемо и уопштену трврдњу, или да је:

$$\underbrace{666...6}_{n}\cdot\underbrace{333...3}_{n-1}=\underbrace{222...2}_{n-2}19\underbrace{777...7}_{n-2}8.$$

Лева страна једнакости је:

$$
\begin{aligned}
\underbrace{666...6}_{n}\cdot\underbrace{333...3}_{n-1} &= \frac{6}{9}\cdot\underbrace{999...9}_{n}\cdot\frac{3}{9}\cdot\underbrace{999...9}_{n-1}\\
&=\frac{2}{9}\cdot(10^n-1)(10^{n-1}-1)\\
&=\frac{2}{9}\cdot(10^{2n-1}-10^{n-1}-10^n+1).
\end{aligned}
$$

Десна стана једнакости је:

$$\underbrace{222...2}_{n-2}19\underbrace{777...7}_{n-2}8=\frac{2}{9}\cdot\underbrace{999...9}_{n-2}\cdot 10^{n+1}+19\cdot 10^{n-1}+\frac{7}{9}\cdot\underbrace{999...9}_{n-2}\cdot 10+8$$

$$=\frac{2}{9}\cdot(10^{n-2}-1)\cdot 10^{n+1}+19\cdot 10^{n-1}+\frac{7}{9}\cdot(10^{n-2}-1)\cdot 10+8$$

$$=\frac{2}{9}\cdot 10^{2n-1}-\frac{2}{9}10^{n+1}+20\cdot 10^{n-1}-10^{n-1}+\frac{7}{9}\cdot 10^{n-1}-\frac{70}{9}+8$$

$$=\frac{2}{9}\cdot 10^{2n-1}-\frac{20}{9}10^{n}+2\cdot 10^{n}-\frac{2}{9}\cdot 10^{n-1}+\frac{2}{9}$$

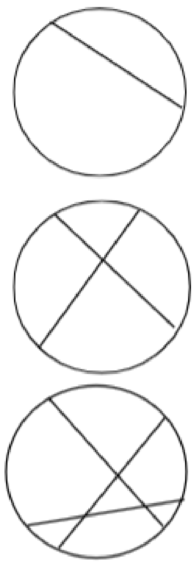
$$=\frac{2}{9}\cdot 10^{2n-1}-\frac{2}{9}\cdot 10^{n}-\frac{2}{9}\cdot 10^{n-1}+\frac{2}{9}$$

$$=\frac{2}{9}\cdot(10^{2n-1}-10^{n-1}-10^{n}+1).$$

Показали смо да су обе стране једнаке, па је тврђење доказано.

Задатак 6. *Пронађи максималан број региона, који се не преклапају, а који се могу добити када се кроз круг провуче деветнаест сечица.*

Решење: Можемо уочити законитост по којој се број региона увећава у зависности од броја сечица користећи дијаграм испод. Такође, приметимо да се сваки број добијених региона може представити као сума првих *n* природних бројева плус један, где је *n* једнак броју сечица.



Broj Sečica	Broj Regiona
1	2 (1+1)
2	4 (1+1+2)
3	7 (1+1+2+3)
4	11 (1+1+2+3+4)
5	16 (1+1+2+3+4+5)
…	…
19	1+1+2+3+…+19 = 191

Број региона који се добија је: $1+1+2+3...+19=1+\frac{19\cdot(19+1)}{2}=191$.

Задатак 7. *Пронађи следећи елемент у низу: 2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321,* ____

Решење: Ако одузмемо 1 од сваког члана низа, онда ће низ постати: 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320,…. Сада можемо успоставити законитост између чланова овог низа на следећи начин:

$a_1 = 1,\ a_2 = a_1 \cdot 2,\ a_3 = a_2 \cdot 3,\ a_4 = a_3 \cdot 4 \dots a_9 = a_8 \cdot 9,$ ili $a_9 = 40320 \cdot 9 = 362880$

Пошто смо на почетку одузели један од сваког члана низа, сада га треба додати назад, па је $a_9 = 362881$.

Задатак 8. (CEMC[5] - Gauss 2011) *У низу квадратних бројева: 1, 4, 9, 16, 25, …после броја 1, следећа два елемента су замењена супротним бројевима, а следећа два броја остају иста и тако даље. Нови низ је: 1, -4, -9, 16, 25, -36, -49, 64, 81,… Колика је сума првих 2011 елемената у овом новом низу?*

Решење: Ако групишемо по четири узастопна члана суме, можемо уочити да је свака од ових парцијалних сума једнака 4. Покажимо да ово важи на уопштеном примеру:

$$n^2 - (n+1)^2 - (n+2)^2 + (n+3)^2 = n^2 - n^2 - 2n - 1 - n^2 - 4n - 4 + n^2 + 6n + 9 = 4$$

Стога можемо релативно лако пронаћи суму, када је број чланова низа дељив са 4. Нађимо суму првих 2012 чланова, или S_{2012}:

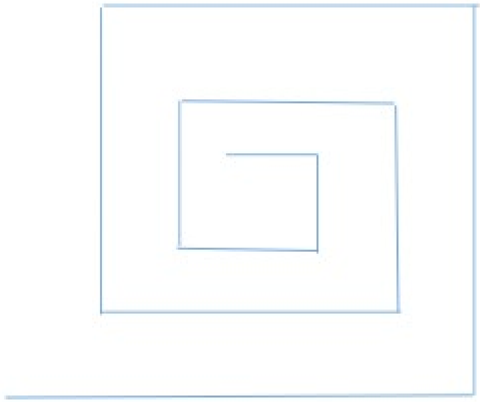
$$\begin{aligned} S_{2012} &= (1 + (-4) + (-9) + 16) + (25 + (-36) + (-49) + 64) + (81 + (-100) + (-121) + 144) + \dots \\ &= 4 + 4 + 4 + \dots + 4 \text{ (број сабирака у овој суми је } 2012:4) \\ &= 2012. \end{aligned}$$

Да бисмо пронашли S_{2011}, од претходне суме треба одузети 2012. елемент у низу, а то је 2012^2. Дакле:

$$\begin{aligned} S_{2011} &= S_{2012} - 2012^2 \\ &= 2012 - 4048144 \\ &= -4046132. \end{aligned}$$

Задатак 9. (CEMC - Gauss 1998) *На листу папира Дана је нацртала квадратну спиралу, цртајући дужи дужине: 1,1,2,2,3,3,4,4,… у центиметрима као што је приказано на слици испод. Дани је понестало мастила у оловци у тренутку када је укупна дужина нацртаних дужи била 3000cm. Колика је дужина најдуже дужи коју је Дана нацртала, пре него што јој је понестало мастила?*

[5] The Centre for Education in Mathematics and Computing



Решење: Нека је n дужина најдуже дужи коју је Дана нацртала. Израчунајмо укупну дужину дужи коју је нацртана.

$$1+1+2+2+3+3+4+4+...+n+n=1+2+3+4+...+n+1+2+3+4+...+n$$

$$=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n\cdot(n+1).$$

Пронађимо n, за које је $n\cdot(n+1)\leq 3000$. Пошто је $\sqrt{3000}\approx 54.7$, закључујемо да је $n=54$. Пошто је $54\cdot 55=2970\leq 3000$, најдужа дуж на њеном цртежу је $54cm$, а Дана је нацртала и део дужи дужине $55cm$, тачније $30cm$, пре него што јој је понестало мастила.

Задатак 10. (CEMC - Gauss 2010) *У низу од 10 бројева, први број је један, други број је x, а сваки следећи је сума претходна два елемента. На пример: ако је* $x=11$, *онда је низ:* $1,\ 11,\ 12,\ 23,\ 35,\ 58,...395$. *За неке вредности броја x, број 463 ће бити један од бројева у добијеном низу. Ако је x позитиван цео број, пронађи суму свих могућих вредности броја x за које ће се у низу појавити 463 као један од бројева.*

Решење: Пратећи правило дато у задатку, чланови овог низа се могу представити као: $1,\ x,\ x+1,\ 2x+1,\ 3x+2,\ 5x+3,\ 8x+5,\ 13x+8,\ 21x+13,\ 34x+21$. Проверићемо који од ових чланова може бити једнак 463.

- $x=463$
- $x+1=463\Rightarrow x=462$
- $2x+1=463\Rightarrow x=231$
- $3x+2$, $8x+5$, и $21x+13$ (не могу бити 463, јер x у овом случају не би био цео број)
- $5x+3=463\Rightarrow x=92$
- $13x+8=463\Rightarrow x=35$
- $34x+21=463\Rightarrow x=13$

Сума добијених могућности за x је: $463+462+231+92+35+13=1296.$

Задатак 11. (CEMC - Pascal 2013)
а) Низ a:1, 3, 7, 12,… је растући низ.
б) Низ b чине разлике суседних елемената низа a (b:2, 4, 5,…), и такође је растући низ.
в) Ако позитиван цео број није елемент у низу a, онда је он елемент у низу b.
Пронађи 100-ти елемент у низу a.

Решење: Из *в*) следи да су бројеви: 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11 у низу *b*, што нам омогућава да пронађемо још неке чланове низа *a*.
a: 1, 3, 7, 12, 18 (12+6), 26 (18+8), 35 (26+9), 45 (35+10), 56 (45+11),…

Сви бројеви мањи од 26 (са изузетком 1, 3, 7, 12, и 18) су у низу *b*, па можемо даље да допунимо чланове у низу *a:*
a: …56, 69 (56+13), 83 (69+14), 98 (83+15), 114 (98+16), 131 (114+17),…

Сви бројеви мањи од 114 (са изузетком 1, 3, 7, 12, 18, 26, 35, 45, 56, 69, 83 и 98) су у низу *b*, или укупно 113 – 12 = 101 бројева. Да бисмо пронашли 100. члан у низу *a*, можемо користити првих 99 чланова низа *b*. Пошто је $b_{101} = 113$, $b_{100} = 112$, онда је $b_{99} = 111$.

$a_{100} = 1 + \text{првих 99 елемената у низу } b$

$= \ 1 + (1+2+3+4+\ldots+111) - (1+3+7+12+18+26+35+45+56+69+83+98)$

$= \ 1 + \dfrac{111 \cdot 112}{2} - 456 = 5764 \ \therefore a_{100} = 5764$.

Задатак 12. (CEMC - Pascal 2010) *Низ* $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{2010}$ *се састоји од 2010 чланова. Сваки следећи члан у низу је за 1 већи од претходног. Сума свих 2010 чланова је 5307. Колика је сума када се саберу сви наизменични чланови почев од првог, а завршно са претпоследњим чланом?*

Решење: Са S ћемо представити суму свих чланова на непарним местима овог низа. Из задатка је познато:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2010} = 5307 \text{ и } \ x_2 - x_1 = 1;\ x_4 - x_3 = 1; \ldots\ x_{2010} - x_{2009} = 1$$

Ово повлачи да је сума чланова на парним позицијама:

$$\begin{aligned} x_2 + x_4 + x_6 + \ldots + x_{2010} = 1 + x_1 + 1 + x_3 + 1 + \ x_5 + \ldots 1 + x_{2009} &= 1005 + x_1 + x_3 + x_5 + \ldots + x_{2009} \\ &= 1005 + S \end{aligned}$$

Сума свих чланова низа је једнака суми чланова на парним местима плус суми чланова на непарним местима, или: $5307 = (S + 2005) + S \Rightarrow S = \dfrac{5307 - 2005}{2} = 2151$. Одавде следи да је сума свих чланова на непарним местима у низу једнака 2151.

Задатак 13. *Ако се низ на слици натави, испод ког слова се налази број 3715?*

A	B	C	D	E	F
1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7
13	14	15	16	17	18
24	23	22	21	20	19
25	26	27 …			

Решење: Пошто се циклус понавља после дванаест бројева, а како је $3715:12=309(\textit{остатак}\,7)$, закључујемо да ће се циклус поновити 309 пута. Сада морамо додати још 7 бројева да бисмо записали број 3715. После 309 пуних циклуса, последњи записан број је испод слова *A*. Ако запишемо још седам бројева (310. циклуса), са дијаграма можемо уочити да би првих шест бројева било записано испод слова од *A* до *F*, а да би седми број (или 3715) био записан испод слова *F*.

Задатак 14. (CEMC - Gauss 2016) *У низу бројева приказаном на слици, у којој врсти ће се број 2016 појавити по први пут?*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 2 & & 2 & & & & \\
 & & & 3 & & 4 & & 3 & & & \\
 & & 4 & & 6 & & 6 & & 4 & & \\
 & 5 & & 8 & & 9 & & 8 & & 5 & \\
6 & & 10 & & 12 & & 12 & & 10 & & 6 \\
 & & & & & \cdots & & & & &
\end{array}
$$

Решење: Уочимо дијагонале које почињу на левој страни троугла и простиру се наниже и у десно. Први број у n-тој дијагонали је n (која се простире од n-те врсте наниже). Други број у n-тој дијагонали је $2n$, трећи број је $3n$ и тако даље. На пример, у трећој дијагонали (3, 6, 9, 12,…) први број је 3, и налази се у трећој врсти (3, 4, 3). Други број на n-тој дијагонали ($2n$) се налази у n+1 врсти. Трећи број на n-тој дијагонали ($3n$) се налази у n + 2 врсти. Значи, m-ти број на n-тој дијагонали се налази у $n+(m-1)$ врсти и једнак је $m\cdot n$. Сада ћемо утврдити у којој врсти је 2016. Пошто је 2016 m-ти број у n-тој дијагонали и у n + (m-1) врсти, 2016 је једнак $m\cdot n$. Могућности за m и n су:

$(m,n)=(1,2016)$ што повлачи да је $m+n-1=2016$.

$(m,n)=(2,1008)$ што повлачи да је $m+n-1=1009$.

$(m,n)=(3,672)$ што повлачи да је $m+n-1=674$ и тако даље.

Можемо уочити да се вредност $m+n-1$ смањује што су бројеви m и n ближи по вредности један другом. Ако скуп чинилаца броја 2016: $\{1,2016,2,1008,3,672,...\}$ напишемо у паровима, можемо уочити да је пар чинилаца m и n који су по вредности најближи један другом, или чија је разлика минимална, бројеви 42 и 48. Одавде следи да је $m+n-1=42+48-1=89$. Ово значи да ће се број 2016 први пут појавити у врсти 89.

Задатак 15. (CEMC - Gauss 2012) *Природни бројеви су поређани по врстама на следећи начин:*

Врста 1:	1					
Врста 2:	2	3				
Врста 3:	4	5	6			
Врста 4:	7	8	9	10		
Врста 5:	11	12	13	14	15	
Врста 6:	16	17	18	19	20	21

Колико бројева мањих од 2000 се налази у колони у којој се налази број 2000?

Решење: Можемо уочити да је последњи број у свакој врсти један од бројева у низу троугаоних бројева. Ово повлачи да је последњи број у n-тој врсти једнак: $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Пронађимо први троугаони број већи од 2000. Пошто је $\dfrac{63\times 64}{2}=2016$, онда је 2016 последњи број у 63-ој врсти. Такође, приметимо да врста n има n елемената. Одавде следи да се 2000 налази у 63-ој. врсти у којој је последњи број 2016. Такође, из формације можемо уочити да су сви бројеви у m-тој колони, а који се налазе изнад датог броја, мањи од тог броја. Последњи број у свакој од врста нема бројева изнад у формацији. Претпоследњи број, или $2015=2016-1$, у нашем случају, има један број изнад, број $2014=2016-2$ има два броја изнад у формацији, и тако даље. Значи да се у колони у којој је број $2000=2016-16$ налази 16 бројева изнад, а сви они су мањи од броја 2000.

---

4. ЗАКОНИТОСТИ ВЕЗАНЕ ЗА СВОЈСТВА БРОЈЕВА

4.1 ЗБИР ЦИФАРА БРОЈА

Врло интересантна законитост везана за целе бројеве се односи на збир цифара датог броја. Ако се процедура сабирања цифара датог броја понавља док се не добије једноцифрени број, тај једноцифрени број је увек једнак остатку који оригинални број даје при дељењу са бројем девет.

На пример: Збир цифара броја 12565 је 19. Збир цифара броја 19 је 10, а збир цифара броја 10 је 1. Значи, збир цифара броја 12565 је 1, а његово проналажење има за ефекат одбацивање (12565-1)/9=1396 деветки из иницијалног броја. Ово можемо видети и из следећег:

$$
\begin{aligned}
12565 &= 1\cdot 10000 + 2\cdot 1000 + 5\cdot 100 + 6\cdot 10 + 5\cdot 1 \\
&= 1\cdot(9999+1) + 2\cdot(999+1) + 5\cdot(99+1) + 6\cdot(9+1) + 5\cdot 1 \\
&= 1\cdot 9999 + 1 + 2\cdot 999 + 2 + 5\cdot 99 + 5 + 6\cdot 9 + 6 + 5 \\
&= 1\cdot 9999 + 2\cdot 999 + 5\cdot 99 + 6\cdot 9 + 19 = 1\cdot 9999 + 2\cdot 999 + 5\cdot 99 + 8\cdot 9 + 1
\end{aligned}
$$

Прва четри сабирка су дељива са 9, што значи да ће остатак када се број 12565 подели са 9 бити 1.

Ова законитост је врло корисна при провери резултата рачунања (сабирање, одузимање, множење, и дељење) са целим или децималним бројевима. Европљани су ову математичку законитост преузели од Арапа, а Фибоначи ју је описао у књизи *Liber Abaci*.

Ова законитост се може формално описати користећи модуларну аритметику.

Дефиниција:

Нека су a и b цели бројеви и нека је $m \in N$. Тада се каже да је број a конгруентан по модулу m са бројем b, ако и само ако при дељењу са m, бројеви a и b дају исти остатак, што пишемо: $a \equiv b(\bmod m)$.

Ако су a и b цели бројеви и нека је $a \cdot b = c$. Нека са *Sa, Sb* и *Sc* означимо збир цифара бројева a, b, и c.

Тада је $a \equiv Sa(\bmod 9)$, $\mathrm{b} \equiv Sb(\bmod 9)$, и $c \equiv Sc(\bmod 9)$. Такође је $a \cdot b \equiv Sa \cdot Sb(\bmod 9)$ и $c \equiv Sc(\bmod 9)$. Ако су $Sa \cdot Sb$ и Sc конгруентни по модулу 9, онда је резултат множења можда тачан, а ако $Sa \cdot Sb$ и Sc нису конгруентни по модулу 9, онда је приликом множења сигурно направљена грешка. [15]

На пример: $12345 \cdot 67890 = 838102050.$ Збир цифара броја 12345 је 15 или 1+5 = 6, а збир цифара броја 67890 је 30, или 3+0 = 3. Њихов производ је 18, или $1+8=9\equiv 0(\bmod 9)$. Са

друге стране, збир цифара броја 838102050 је 27, или $2+7=9\equiv 0(\bmod 9)$, што повлачи да је резултат множења можда тачан.
Слично, ако је $a\pm b=c$, онда је $S(Sa\pm Sb)=Sc$, или ако је $a:b=c$, онда је $S(Sa:Sb)=Sc$.

4.2 Законитости везане за степене бројева

Важна и корисна законитост коју ученици треба да знају је везана за питање шта се дешава са цифром јединица приликом степеновања неког целог броја. Кроз неколико примера, може се утврдити да се цифра јединица степена целог броја увек циклично мења. У табели испод је представљено као се цифра јединица (која може бити било која цифра од 0 до 9) циклично мења приликом степеновања било ког позитивног целог броја:

цифра јединица броја x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
цифра јединица броја x^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
цифра јединица броја x^3	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0
цифра јединица броја x^4	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
цифра јединица броја x^5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
цифра јединица броја x^6	1	4	9	6	5	6	9	4	1	0
цифра јединица броја x^7	1	8	7	4	5	6	3	2	9	0

Табела 1

Из приложене табеле се види да цифра јединица или остаје непромењена, без обзира на степен броја, или се мења циклусно. Препоручује се да ову табелу ученици попуне сами да би установили циклусе, као и дужину сваког од циклуса.[29]

Пример 1. 2017^{2016} је цео број. Која цифра је на месту јединица овог броја?

Решење: Ако се прати законитост поменута у *Табели 1*, онда је јасно да је цифра јединица било ког броја који се завршава цифром седам: 7, 9, 3, или 1. Пошто се овај циклус понавља истим редоследом и дужина циклуса је четири $(7,9,3,1)$, онда је довољно да се експонент броја подели са дужином циклуса, или са четири у овом случају, да бисмо утврдили колико пута ће се циклус поновити. Пошто је $2016:4=504$ (и остатка нема), онда ће цифра јединица бити последња цифра у циклусу, односно 1.

Пример 2. Нађи цифру јединица следећег производа: $7^{295}\cdot 3^{158}$.

Решење: Прво ћемо пронаћи цифру јединица за сваки од два експонента. Ако се примени законитост из претходне табеле, онда цифру јединица броја 7^{295} проналазимо на следећи начин: $295\div 4=73$ и остатак је 3. Значи да ће задња цифра броја 7^{295} бити трећа цифра из циклуса $(7,9,3,1)$, или 3. На сличан начин можемо пронаћи цифру јединица броја 3^{158}. На месту јединица било ког степена броја који се завршава цифром 3 је једна од цифара (3, 9, 7, 1). Пошто се овај циклус понавља и такође има дужину четири, онда цифру јединица проналазимо на следећи начин: $158:4=39$ и остатак је 2. Значи да ће последња цифра броја 3^{158} бити друга цифра из циклуса, или 9. Имамо: $7^{295}\cdot 3^{158}=...3\cdot ...9=......7$, па је цифра 7 на месту јединица производа ова два степена.

Пример 3. Колико је цифара нула на крају броја 4^{4^4} када је овај број написан у бази четири?

Решење: Ако применимо поступак за пребацивање броја из декадног система у број са базом четири, у овом случају, онда дати број треба поделити са свим степенима броја 4 који се садрже у датом броју, почевши од највећег могућег степена. У овом случају, највећи степен броја 4 који се садржи у датом броју је 4^{256}. Пошто је $4^{4^4}\div 4^{256}=1$, а остатак је 0, онда при дељењу овог остатка са свим степенима броја 4 од 4^{255} до 4^0 се добија количник 0. Ово повлачи да ће се цифра 0 понављати на свим цифарским позицијама од друге до последње.
Значи: $4^{256}=1\cdot 4^{256}+0\cdot 4^{255}+0\cdot 4^{254}+...+0\cdot 4^0=1000...0_{четири}$ или добијени број у бази четири има последњих 256 цифара, цифру 0.

Да бисмо разматрали задатке у којима се тражи да се пронађу завршне две, три или више цифара неког великог степена, мораћемо да одредимо остатак при дељењу датог броја са 100, 1000 и тако даље. Представићемо теоријске чињенице везане за конгруенције које ученици треба да знају да би успешно решавали овакве задатке.
Пошто је појам конгруенције по модулу већ уведен у претходном поглављу, навешћемо само неке важније особине и теореме везане за конгруенције.[20][37]

Особине конгруенција:

- $a\equiv b \pmod m$ ако и само ако је $a=mt+b, t\in Z$.
- $a\equiv b \pmod m$ ако и само ако је $(a-b)$ дељив са m.

Теорема:

а) $a\equiv a \pmod m$ (особина рефлексивности)

б) Следеће конгруенције су еквивалентне: $a\equiv b \pmod m$, $b\equiv a \pmod m$, и $a-b\equiv 0 \pmod m$ (особина симетричности)

в) Ако је $a\equiv b \pmod m$ и $b\equiv c \pmod m$, онда је $a\equiv c \pmod m$ (особина транзитивности)

г) Ако је $a\equiv b \pmod m$ и $c\equiv d \pmod m$, онда је $ax+cy\equiv bx+dy \pmod m$, где су $x,y\in Z$ (особина линеарности)

д) Ако је $a\equiv b \pmod m$ и $c\equiv d \pmod m$, онда је $ac\equiv bd \pmod m$ (особина мултипликативности)

ђ) Ако је $a\equiv b \pmod m$ и $n\in N$, онда је $a^n\equiv b^n \pmod m$

e) Ако је $a \equiv b \pmod m$ и $d \mid m$, онда је $a \equiv b \pmod d$

Дефиниција:

За скуп целих бројева $\{a_1, a_2, a_3, ... a_m\}$ кажемо да је *потпуни систем остатака* по модулу *m*, уколико не постоје два елемента овог скупа која дају исти остатак при дељењу са *m*. Чланови овог скупа који су релативно прости у односу на *m*, чине подскуп овог скупа који се зове: *сведени систем остатака* по модулу *m*.
Број елемената овог подскупа се означава са $\phi(m)$ и представља *Ојлерову функцију*.

На пример: Потпуни систем остатака по модулу 8 је скуп $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. Пошто су бројеви 1, 3, 5, и 7 узајамно прости са 8, онда је $\phi(8) = 4$.

У задацима можемо користити формулу за израчунавање вредности Ојлерове функције природног броја.

Теорема:

Ако је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, где су p_i прости чиониоци природног броја *n*, онда је:

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Доказ: Ради упрошћења доказа, нека је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, где су p_1 и p_2 прости чиниоци броја *n*. Следи да су са *n* узајамно прости сви бројеви који нису дељиви са p_1 и p_2. Нека је *A* скуп свих бројева из скупа $N_0 < n$ дељивих са p_1, и *B* скуп свих бројева из скупа $N_0 < n$ дељивих са p_2. Пронађимо колико има бројева из скупа $N_0 < n$ који су дељиви бар са једним од бројева p_1, p_2. Ако са $|A|$ означимо кардинални број скупа *A*, а са $|B|$ кардинални број скупа *B*, број бројева из скупа $N_0 < n$ дељивих са p_1 или p_2 је: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Како је $|A| = \frac{n}{p_1}$, $|B| = \frac{n}{p_2}$, и $|A \cap B| = \frac{n}{p_1 p_2}$, онда следи:

$$|A \cup B| = \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} - \frac{n}{p_1 p_2} = n \cdot \frac{p_1 + p_2 - 1}{p_1 p_2}.$$

Пошто тражимо колико бројева мањих од *n* нису дељиви са *n*, онда од *n* одузмемо $|A \cup B|$ што представља Ојлеров број.

$$\phi(n) = n - n \cdot \frac{p_1 + p_2 - 1}{p_1 p_2} = n \cdot \left(1 - \frac{p_1 + p_2 - 1}{p_1 p_2}\right) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right).$$

Уопштено, ако је $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k} \Rightarrow \phi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) ... \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$

Теорема:

Ако је $(a,m)=1$, и ако је $ax \equiv ay(\bmod m)$, тада важи да је $x \equiv y(\bmod m)$

Доказ: Ако је $ax \equiv ay(\bmod m)$, онда је $a(x-y) \equiv 0(\bmod m)$, или $a(x-y)=km$. Пошто је $(a,m)=1$, онда је $x-y$ дељиво са *m,* па из дефиниције конгруенција следи да је $x \equiv y(\bmod m)$.

Теорема:

Ако је $(b,m)=1, b \in Z,$ и ако је $\{a_1, a_2, a_3, ... a_m\}$ потпун систем остатака по модулу *m*, онда је и $\{ba_1, ba_2, ba_3, ... ba_m\}$ потпун систем остатака по модулу *m*.

Доказ: Пошто елемената у скупу $\{ba_1, ba_2, ba_3, ... ba_m\}$ има исто колико и елемената у скупу $\{a_1, a_2, a_3, ... a_m\}$, довољно је доказати да су свака два елемента ba_i неконгруентна по модулу *m*.
Претпоставимо да је за неке *i* и *j*, $ba_i \equiv ba_j(\bmod m)$. Како је $(b,m)=1$, следи да је $a_i \equiv a_j(\bmod m)$. Пошто су оба броја из скупа потпуног система остатака, следи да је $i=j$.

Мултипликативни инверз

Ако за прост број *p* посматрамо коначно поље Z_p чији су елементи остаци при дељењу бројем *p*, а операције сабирање и множење по модулу, тада се поставља питање шта представља инверз елемента *a* у том пољу. Према дефиницији инверза важи да је $x \in Z_p$ инверз од a ако је x решење конгруенције $ax \equiv 1\,(\bmod p)$. Тако добијамо да се одређивање мултипликативног инверза a^{-1} елемента своди на решавање линеарне конгруенције. У скупу Z_m, где је *m* природни сложен број, такође је могуће на исти начин одредити мултипликативни инверз елемента a. Како је $NZD(a,m)=1$ услов да конгруенција $ax \equiv 1\,(\bmod m)$ има решење, то следи да је a инвертибилан ако су a и m узајамно прости бројеви.[14]

Еуклидов алгоритам

Еуклидов алгоритам је ефикасан начин за одређивање највећег заједничког делиоца два природна броја. Алгоритам је заснован на чињеници да се највећи заједнички делилац два природна броја неће променити ако се од већег броја одузме мањи, па се затим посматра *NZD* новодобијеног броја и мањег од два предходно посматрана. Понављајући овај поступак и имајући у виду да скуп природних бројева има најмањи елемент, овај алгоритам се завршава у коначно много корака. Алгоритам има велику практичну примену као што је решавање линеарних диофантских једначина, решавање конгруенција, проналажење мултипликативног инверза и тако даље.

Теорема 1:

За произвољан природни број b и цели број a, постоје јединствени цели бројеви q и r такви да је $a = qb + r,\ 0 \le r < b$. Број q је количник, а број r је остатак при дељењу a са b.

Теорема 2:

Нека су $a, b, p, q \in Z$ і $b > 0, 0 \le r < b$ і $a = bq + r$. Тада је $NZD(a,b) = NZD(b,r)$.

Теорема 3:

Нека су $a, b \in Z$ і $b > 0$. Претпоставимо да је узастопном применом *теореме 1* добијен низ једнакости:

$$
\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1 \\
b &= r_1 q_2 + r_2 \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\
&\ \ \dots \\
r_{j-2} &= r_{j-1} q_j + r_j \\
r_{j-1} &= r_j q_{j+1}
\end{aligned}
$$

Тада је $NZD(a,b) = r_j$, или последњем остатку различитом од нуле. Из претходног алгоритма можемо уочити да се r_1 , па онда и r_2 могу представити као линеарне комбинације бројева a и b. Из треће једнакости се r_3 може представити као линеарна комбинација r_1 и r_2, што значи да се може приказати и као линеарна комбинација од a и b. Ако наставимо овај поступак, добијамо да се r_j може представити као линеарна комбинација бројева r_{j-1} и r_{j-2} односно као линеарна комбинација бројева a и b.

Теорема 4:
Нека су $a, b \in Z$ и $b > 0$. Тада постоје цели бројеви x_0 и y_0, тако да је
$NZD(a,b) = ax_0 + by_0$.
Еуклидов алгоритам, и чињеница да се највећи заједнички делилац два броја може представити као линеарна комбинација та два броја, ће нам умногоме помоћи при решавању конгруенција и проналажењу мултипликативног инверза.[14]

Пример 4. Реши конгруенцију $17x \equiv 3 \pmod{29}$ користећи Еуклидов алгоритам.

Решење: Да бисмо решили ову конгруенцију, морамо пронаћи мултипликативни инверз броја 17. Ако га означимо са v, онда ће $17 \cdot v \equiv 1 \pmod{29}$, па ће решење конгруенције бити: $x \equiv 3 \cdot v \pmod{29}$. Ако је v, мултипликативни инверз броја 17 по модулу 29, онда се $17\cdot v$ може представити као: $17\cdot v = 1-29\cdot w$, или $17\cdot v+29\cdot w=1$. Пошто су 17 и 29 узајамно прости, коришћењем Еуклидовог алгоритма решавамо једначину $17\cdot v+29\cdot w=1$:

$$\begin{aligned} 29 &= 1\cdot 17+12 \;\Rightarrow\; 12 = 29-17 \quad (1)\\ 17 &= 1\cdot 12+5 \;\Rightarrow\; 5 = 17-12 \quad (2)\\ 12 &= 2\cdot 5+2 \;\Rightarrow\; 2 = 12-2\cdot 5 \quad (3)\\ 5 &= 2\cdot 2+1 \;\Rightarrow\; 1 = 5-2\cdot 2 \quad (4)\end{aligned}$$

Користећи супституцију за вредност броја 2 из једначине (3) у једначину (4), имамо:

$$1 = 5-2\cdot(12-2\cdot 5) = 5-2\cdot 12+4\cdot 5 = 5\cdot 5-2\cdot 12.$$

Сада заменимо вредност броја 5 из једначине (2) у последњу једначину, па имамо:

$$1 = 5\cdot(17-12)-2\cdot 12 = 5\cdot 17-7\cdot 12.$$

На крају, заменимо вредност за број 12 из (1) у последњу једначину:

$$1 = 5\cdot 17-7\cdot(29-17) = 12\cdot 17-7\cdot 29, \text{ или } 17\cdot 12+29\cdot(-7)=1.$$

Одавде следи да је $v=12$, па је дата конгруенција:

$$x \equiv 3\cdot 12 \pmod{29}, \text{ или } x \equiv 36 \pmod{29}, \text{ или } x \equiv 7 \pmod{29}.$$

Ојлерова теорема:

Ако је $(a,m)=1$, онда је $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$. У специјалном случају, када је $m=p$, а p је прост број имамо да је $a^{\phi(m)} = a^{p-1}$, па је $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ *(Мала Фермаова Теорема).*

Доказ: Ако је $\{r_1, r_2, r_3 \ldots r_{\phi(m)}\}$ сведени систем остатака по модулу m, онда из теореме која је раније наведена следи да је $\{ar_1, ar_2, ar_3 \ldots ar_{\phi(m)}\}$ сведени систем остатака по модулу m. Према томе, производи ова два скупа су једнаки по модулу m, односно $r_1\cdot r_2\cdot r_3 \ldots \cdot r_{\phi(m)} \equiv ar_1\cdot ar_2\cdot ar_3 \ldots \cdot ar_{\phi(m)} \pmod{m}$ или $r_1\cdot r_2\cdot r_3 \ldots \cdot r_{\phi(m)} \equiv a^{\phi(m)}\cdot r_1\cdot r_2\cdot r_3 \ldots \cdot r_{\phi(m)} \pmod{m}$

Када се обе стране поделе са $r_1\cdot r_2\cdot r_3 \ldots \cdot r_{\phi(m)}$, добија се $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Пример 5. Пронађи последње две цифре броја 33^{42}.

Решење: Пронађимо остатак при дељењу овог броја са 100, или другим речима треба да решимо конгруенцију $33^{42} \equiv x \pmod{100}$.

Пошто је $\phi(100)=40$ и $33^{40} \equiv 1 \pmod{100}$, следи да је $33^{42} \equiv 33^2 \pmod{100}$. Пошто је $33^2 = 1089$, следи да су последње две цифре 89.

Кинеска теорема о остацима:

Нека је $M = m_1 m_2 m_3 \ldots m_k$ и $(m_i, m_j)=1$ за $i \neq j$ и нека су $a_1, a_2, a_3 \ldots a_k$ цели бројеви. Онда систем конгруенција:

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$
$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$
$$x \equiv a_3 \pmod{m_3}$$
$$\ldots$$
$$x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

има решење, и решење је јединствено по модулу $M = m_1 m_2 m_3 \ldots m_k$.

Доказ: Нека је $M_k = \dfrac{M}{m_k}$, где је $M = m_1 m_2 m_3 \ldots m_k$. Онда је $(M_k, m_k) = 1$ за свако k. Нека је y_k мултипликативни инверз од M_k по модулу m_k или $y_k \cdot M_k \equiv 1 \pmod{m_k}$. Показаћемо да је цео број x, где је $x = \sum_{1}^{k} a_i M_i y_i$ јединствено решење овог система конгруенција.

За сваки $i = 1, 2, 3, \ldots k$ је:

$x \pmod{m_i} \equiv (a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + a_3 M_3 y_3 \ldots + a_k M_k y_k) \pmod{m_i}$

$x \pmod{m_i} \equiv a_i M_i y_i \pmod{m_i}$ (остали сабирци су дељиви са m_i, па су једнаки 0)

$x \pmod{m_i} \equiv a_i \pmod{m_i}$ (јер је $M_i y_i \equiv 1 \pmod{m_i}$).

Нека су u и v два решења овог система. Ово повлачи да је, на пример, $v \equiv a_1 \pmod{m_1}$ и $u \equiv a_1 \pmod{m_1}$ што повлачи да је $u - v \equiv 0 \pmod{m_1}$ или $m_1 \mid (u - v)$. Онда се на сличан начин доказује да $m_2 \mid (u-v)$, $m_3 \mid (u-v) \ldots m_k \mid (u-v)$. Пошто је $(m_i, m_j) = 1$ за $i \neq j$, онда $M \mid (u - v) \Rightarrow u \equiv v \pmod{M}$ чиме доказујемо да је решење јединствено.[41]

Пример 6. Пронађи последње две цифре броја 74^{540}.

Решење: Уместо да решимо конгруенцију $74^{540} \equiv x \pmod{100}$, применићемо Кинеску теорему о остацима (јер је $(4, 25) = 1$) и пронаћи ћемо: $x \equiv 74^{540} \pmod{4}$ и $x \equiv 74^{540} \pmod{25}$.

$$74^{540} \equiv 2^{540} \cdot 37^{540} \equiv 0 \pmod{4}$$
$$74^{540} \equiv (-1)^{540} \equiv 1 \pmod{25}$$

Решење система конгруенција: $x \equiv 0 \pmod{4}$ и $x \equiv 1 \pmod{25}$ је по теореми коју користимо: $x = a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 = 0 + 1 \cdot 4 \cdot y_2$, где је y_2 мултипликативни инверз броја 4 по модулу 25, па решавамо конгруенцију: $4 y_2 \equiv 1 \pmod{25}$. Како је $25 = 6 \cdot 4 + 1$ односно $25 - 6 \cdot 4 = 1$, то је $-6 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{25}$ или $19 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{25}$, те је $y_2 = 19$, а решење је $x = 0 + 1 \cdot 4 \cdot 19 = 76$. Из претходног следи да су последње две цифре 76.

Пример 7. Пронађи последње две цифре броја 99^{123}.

Решење: Овај пример ћемо урадити на три начина да бисмо показали да нас различити приступи могу довести до решења. Решимо конгруенцију $99^{123} \equiv x(\bmod 100)$.

Први начин: Пошто је $99 \equiv -1(\bmod 100)$, коришћењем особина конгруенција имамо да је:

$$99^{123} \equiv (-1)^{123}(\bmod 100), \text{ или } 99^{123} \equiv -1(\bmod 100), \text{ или } 99^{123} \equiv 99(\bmod 100).$$

Други начин: Пошто је 123 прост број, коришћењем Ојлерове теореме имамо да је:

$$99^{\phi(123)} = 99^{122} \equiv 1(\bmod 100).$$

Ако обе стране помножимо са 99, добијамо:

$$99 \cdot 99^{122} \equiv 1 \cdot 99(\bmod 100), \text{ или } 99^{123} \equiv 99(\bmod 100).$$

Трећи начин: Пошто су 4 и 25 узајамно прости, коришћењем Кинеске теореме о остацима, решимо систем конгруенција:

$99^{123} \equiv x(\bmod 4)$ и $99^{123} \equiv x(\bmod 25)$.

Пошто је $99 = 4 \cdot 24 + 3$, онда је: $99 \equiv 3(\bmod 4)$, или $99 \equiv -1(\bmod 4)$, или

$99^{123} \equiv (-1)^{123}(\bmod 4)$. Имамо да је: $99^{123} \equiv -1$ или $3(\bmod 4)$.

Решавањем друге конгруенције имамо: $99 \equiv -1(\bmod 25)$, или $99^{123} \equiv (-1)^{123}(\bmod 25)$.

Одавде је: $99^{123} \equiv -1$ или $24(\bmod 25)$. Дакле остало нам је да решимо систем конгруенција: $x \equiv 3(\bmod 4)$ и $x \equiv 24(\bmod 25)$.

Из Кинеске теореме о остацима знамо да је решење система:

$x = a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 = 3 \cdot 25 \cdot y_1 + 24 \cdot 4 \cdot y_2$, где су y_1 и y_2 мултипликативни инверзи. Из $25 \cdot y_1 \equiv 1(\bmod 4) \Rightarrow y_1 = 1$, а из $4 \cdot y_2 \equiv 1(\bmod 25) \Rightarrow y_2 = 19$ (користи претходни пример).

Добијамо да је: $x = 3 \cdot 25 \cdot 1 + 24 \cdot 4 \cdot 19 = 75 + 1824 = 1899 \equiv 99(\bmod 100)$,

па су последње две цифре датог броја 99.

4.3 Примери задатака за додатну наставу и такмичарски задаци (степени бројева)

Задатак 1. (CEMC - Gauss 1998) *Дата су два природна броја p и q, чије цифре јединица нису 0, али чији производ представља степен броја 10. Ако је $p > q$, онда цифра јединица $p - q$, никад не може бити:*

A) 1 *B) 3* *C) 5* *D) 7* *E) 9*

Решење*:* Ако се два природна броја не завршавају нулом, а њихов производ је степен броја 10, онда један од ова два броја мора бити степен броја 5, а други број, степен броја 2. Њихов производ је: $p \cdot q = 5^n \cdot 2^n = (5 \cdot 2)^n = 10^n$. Ако погледамо могуће вредности за p и q и њихове разлике, можемо уочити следеће:

p	***q***	***цифра јединица p-q***
5	*2*	*3*
25	*4*	*21*
125	*8*	*117*
625	*16*	*609*
3125	*32*	*3093*
15625	*64*	*15561*
...	...	...

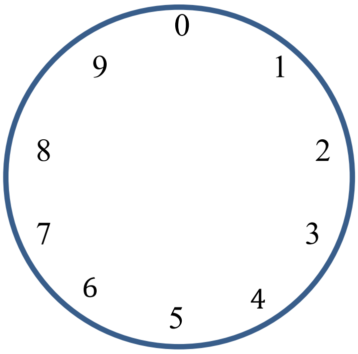
Пошто се цифра јединица периодично мења у циклусима од четири броја: 3, 1, 7, и 9, закључак је да цифра јединица не може бити 5, па је тачан одговор: *C)*.

Задатак 2. (CEMC – Gauss 2012) *Број M је производ свих непарних природних бројева од 1 до 99 који за цифру јединица немају цифру 5. Значи* $M = 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \ldots \cdot 99$. *Цифра јединица броја M је:*

A) 1 *B) 3* *C) 5* *D) 7* *E) 9*

Решење: Цифра јединица производа бројева је цифра јединица производа последњих цифара у производу. Цифре јединица бројева у горњем производу су 1, 3, 7 и 9 и исте се понављају циклично десет пута. Цифра јединица производа $1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 = 189$ је 9. Да бисмо пронашли цифру јединица броја *M*, пронађимо цифру јединица производа $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ или производа $81 \cdot 81 \cdot 81 \cdot 81 \cdot 81$, што је очигледно 1. Тачан одговор је *A)*.

Задатак 3. (CEMC – Cayley 2010) *Пера се креће по кругу са слике по правилу: при првој кретњи у смеру казаљке на сату, Пера прави један корак до броја 1. У другој етапи, Пера прави* 2^2 *корака до броја 5. У трећој етапи, Пера прави* 3^3 *корака до броја 2, и тако даље. Ако Пера настави да се креће по кругу по овом правилу, поред ког броја ће се Пера наћи после 1234 етапе?*



Решење: Нека је $u(n)$ цифра јединица броја *n* (на пример: $u(25) = 5$). Занима нас позиција на кругу на којој ће се Пера зауставити после одређеног броја етапа, а број пуних обилазака око круга може бити занемарен. На пример, ако Пера направи 25 корака, почевши од 0, што су два пуна круга и још пет корака, Пера ће се зауставити

код броја 5. Ова позиција је једнака цифри јединица броја 25. У n-тој етапи, Пера ће направити n^n корака, па нас занима да утврдимо $u(n^n)$. Укупан број корака који ће Пера направити после n етапа је једнак: $S = 1 + 2^2 + 3^3 + 4^4 + \ldots + 1234^{1234}$. Пошто треба посматрати само цифру јединица при било ком броју корака, да бисмо одредили крајњу позицију на кругу, пронађимо:
$u(S) = u(u(1) + u(2^2) + u(3^3) + u(4^4) + \ldots + u(1234^{1234}))$. Да бисмо пронашли $u(n^n)$, довољно је да посматрамо цифру јединица броја n, да степенујемо тај број и опет утврдимо цифру јединица тог резултата, што је $u(u(n)^n)$. На пример: да би пронашли $u(13^{13})$, треба утврдити $u(u(13)^{13})$, што је једнако $u(3^{13})$. У *Табели 1* је приказано да се цифре јединица увек циклусно понављају у зависности од степена броја. За степене броја 3, циклус је (3, 9, 7, 1). Пошто је $13:4=3$ *ostatak* 1, ово повлачи да је $u(3^{13}) = 3$. Сада ћемо ово уопштити и одредити $u(n^n)$.

а) Ако је $u(n)$ = 0, 1 ,5, или 6 онда је $u(n^n)$ = 0, 1, 5, или 6 у овом редоследу.

б) Ако је $u(n)$ = 4, онда је n паран, па је и степен паран, што повлачи да је $u(n^n)$ = 6.

в) Ако је $u(n)$ = 9, онда је n непаран, па је и степен непаран, што повлачи да је $u(n^n)$ = 9.

г) Ако је $u(n)$ = 2, онда је n паран, па је и степен паран, што повлачи да је $u(n^n)$ = 4 или 6 (у зависности од вредности степена).

д) Ако је $u(n)$ = 8, онда је n паран број, па је и степен паран, што повлачи да је $u(n^n)$ = 4 или 6 (у зависности од вредности степена).

ђ) Ако је $u(n)$ = 3, онда је n непаран, па је и степен непаран, што повлачи да је $u(n^n)$ = 3 или 7 (у зависности од вредности степена).

е) Слична је законитост и за $u(n)$ = 7, па је $u(n^n)$ = 7 или 3.

Пошто се цифра јединица броја n понавља у циклусима од дужине 10 (цифра јединица броја 12 је иста као и цифра јединица бројева: 22, 32, 42,…), а цифра јединица степена броја n у циклусима дужине 1 или 2, онда се $u(n^n)$ понавља после циклуса дужине 20. Пронађимо Перину позицију после 20 етапа:
$u(1) + u(2^2) + u(3^3) + u(4^4) + \ldots + u(20^{20})$
$= u(1+4+7+6+5+6+3+6+9+0+1+6+3+6+5+6+7+4+9+0) = u(94) = 4$

Да бисмо пронашли позицију на којој је Пера после 1234 етапа, уочимо да је: $1234 = 61 \cdot 20 + 14 = 1220 + 14$. Пера се налази поред броја 4 после 1220 етапа. Додајмо овом резултату цифру јединица суме још 14 етапа.
$u(4 + (1+4+7+6+5+6+3+6+9+0+1+6+3+6)) = u(67) = 7$.

Перина крајња позиција је поред цифре 7.

Задатак 4. *(AIME[6] 2014) Нека се N и N^2 завршавају са четири истоветне цифре abcd, где је a цифра различита од нуле. Пронађи троцифрени број abc.*

Решење: Разлика $N^2 - N = N(N-1)$ је број чије су последње четири цифре нуле. Ово повлачи да $N(N-1)$ мора бити дељив са 2^4 и 5^4. Није могуће да је један од бројева дељив са оба 2^4 и 5^4, јер би се то противило услову задатка да је $a \neq 0$. Ако један од бројева има у факторизацији оба 2 и 5, то повлачи да ће се завршавати нулом, или да ће се други број завршавати цифром 1 или 9, па неће бити дељив са 2 и 5. Значи, један од бројева је дељив са 2^4 а други број је дељив са 5^4. Пошто је $625 \equiv 1 \pmod{16}$, и ако би $N-1$ био дељив са 16, онда би последње четири цифре броја N биле 0625, што је супротно услову задатка. Значи да је N дељив са 16, а $N-1$ је дељив са 625. Да би ово било задовољено, биће да је $15 \cdot 625 \equiv -1 \pmod{16}$. Пошто знамо да је $625 \equiv 1 \pmod{16}$, онда је $15 \cdot 625 \equiv -1 \pmod{16}$, или $N-1 = 9375$, а $N = 9376$. Тражени број је $abc = 937$.

Задатак 5. (IMO[7] 1975) *Нека је A сума цифара вредности израза* 4444^{4444}. *Нека је B сума цифара броја A. Пронађи суму цифара броја B.*

Решење: Нека је $N = 4444^{4444}$. Пошто је $N < (10^5)^{4444} = 10^{22220}$, ово значи да ће N имати мање од 22220 цифара. Пошто су све цифре броја N мање или једнаке од 9, сигурни смо да је $A < 22220 \cdot 9 = 199980$. Пошто A може имати највише шест цифара, то сума цифара броја A мора бити мања од $6 \cdot 9 = 54$. Ово повлачи да је $B < 54$. Број који је мањи од 54, а има највећу суму цифара је 49, где је сума цифара 13. Нека је C збир цифара броја B, одакле следи да је $C \leq 13$. Такође знамо да $N \equiv A \equiv B \equiv C \pmod 9$, па израчунајмо конгруенцију $4444^{4444} \pmod 9$. Имамо да је: $4444 = 9 \cdot 493 + 7 \equiv 7 \pmod 9$ и $7^3 \equiv 1 \pmod 9$, а $4444 = 3 \cdot 1481 + 1$, па је онда:

$$\begin{aligned}
4444^{4444} &\equiv 7^{4444} \pmod 9 \\
&\equiv 7^{3\times 1481+1} \pmod 9 \\
&\equiv 7^{3\times 1481} \cdot 7 \pmod 9 \\
&\equiv (7^3)^{1418} \cdot 7 \pmod 9 \equiv 7 \pmod 9.
\end{aligned}$$

Ово повлачи да је $C \equiv 7 \pmod 9$. Пошто је $C \leq 13$, онда је $C = 7$.

Задатак 6. *Производ* $n(n+1)(n+2)$ *је дељив са 5, када је* $n = 3$. *Нека су n, за које је* $n(n+1)(n+2)$ *дељив са 5 исписани по реду. Који је 2018. број у овом низу?*

Решење: Направимо табелу вредности производа $n(n+1)(n+2)$ за првих 10 природних бројева n.

[6] American Invitational Mathematical Examination

[7] International Mathematical Olympiad

n	$n(n+1)(n+2)$
1	$1\cdot 2\cdot 3=6$
2	$2\cdot 3\cdot 4=24$
3	$3\cdot 4\cdot 5=60$
4	$4\cdot 5\cdot 6=120$
5	$5\cdot 6\cdot 7=210$
6	$6\cdot 7\cdot 8=336$
7	$7\cdot 8\cdot 9=504$
8	$8\cdot 9\cdot 10=720$
9	$9\cdot 10\cdot 11=990$
10	$10\cdot 11\cdot 12=1320$

Можемо приметити да је производ дељив са 5 ако је n = 3, 4, 5, 8, 9, и 10. Такође можемо уочити да, пошто је $n(n+1)(n+2)$ производ три узастопна броја, производ је дељив са 5 ако је један од бројева из производа дељив са 5. Пошто је број дељив са 5, ако је цифра јединица тог броја 0 или 5, погледајмо цифре јединица бројева n, n + 1 и n + 2 представљене у табели која следи:

цифра јединица броја n	цифра јединица броја n + 1	цифра јединица броја n + 2
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	6
5	6	7
6	7	8
7	8	9
8	9	0
9	0	1
0	1	2

Из табеле видимо да је један од фактора дељив са 5, када је цифра јединица броја n: 3, 4, 5, 8, 9 или 0. Такође, уочимо да се цифре јединица за све факторе циклично понављају у циклусима од по 10. Значи 6 бројева у сваком блоку од 10, ће имати својство да је $n(n+1)(n+2)$ дељив са 5. Пошто је $2018=336\cdot 6+2$, закључујемо да ће у првих $3360=336\cdot 10$ природних бројева бити $2016=336\cdot 6$ бројева n за које ће важити да је $n(n+1)(n+2)$ дељив са 5. Пошто морамо да нађемо 2018. број у низу, следећа два броја n за које важи да је $n(n+1)(n+2)$ дељив са 5, се морају завршавати цифром 3 и 4, што су бројеви 3363 и 3364. Тражени број је 3364.

Задатак 7. *Сви двоцифрени бројеви од 19 до 92 су исписани по реду и тиме је формиран један велики природни број:* $N = 19202122...909192$. *Претпоставимо да је* 3^k *највећи степен броја 3 који је чинилац добијеног броја N. Пронађи вредност за k.*

Решење: Нека је *S(N)* збир цифара броја *N*. Пошто је $N \equiv S(N) \pmod 9$ (или збир цифара неког броја је једнак остатку добијеном када се тај број подели са 9), пронађимо *S(N)*.

$$\begin{aligned} S(N) &= 1+9+9+0+9+1+9+2+10\cdot(2+3+4...+8)+7\cdot(0+1+2...+9) \\ &= 40+10\cdot 35+7\cdot 45 \\ &= 705. \end{aligned}$$

Збир цифара броја 705 је 12, и $12 \equiv 3 \pmod 9$, те број N није дељив са 9, али јесте дељив са 3, тако да је $k=1$.

Задатак 8. *Одреди последње три цифре збира бројева:* $1^{2019}+2^{2019}+3^{2019}...+1000^{2019}$.

Решење: Последње три цифре представљају остатак при дељењу броја са 1000, па посматрајмо конгуренције по модулу 1000. $1000^{2019} \equiv 0 \pmod{1000}$ и $500^{2019} \equiv 0 \pmod{1000}$. Такође је $999^{2019} \equiv (-1)^{2019} \pmod{1000} = -1 \pmod{1000}$ (јер је $999 \equiv -1 \pmod{1000}$). Слично, $998^{2019} \equiv (-2)^{2019} = -2^{2019} \pmod{1000}$ (јер је $998 \equiv -2 \pmod{1000}$) и тако даље.

Уопштено имамо да је: $(1000-k)^{2019} \equiv -k^{2019} \pmod{1000}$.

Дати израз је: $1^{2019}+2^{2019}+3^{2019}...+499^{2019}+0-499^{2019}...-3^{2019}-2^{2019}-1^{2019} \equiv 0 \pmod{1000}$.

Видимо да је задати збир дељив са 1000, па су последње три цифре овог збира: 000.

Задатак 9. *Одреди остатак при дељењу броја* $3^{2^n}-1$ *бројем* 2^{n+3}.

Решење: Ако применимо формулу $x^2-1=(x-1)(x+1)$ n пута, добићемо да је: $3^{2^n}-1=(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^{2^2}+1)...(3^{2^{n-1}}+1)$.

Како је $3 \equiv -1 \pmod 4$, или $3^{2^k} \equiv (-1)^{2^k} \equiv 1 \pmod 4$, онда приметимо да је сваки од бројева $3^2+1,...,3^{2^{n-1}}+1$ дељив бројем 2, али није дељив бројем 4. Онда постоји непаран број $2m+1$, такав да је: $(3+1)(3^2+1)(3^{2^2}+1)...(3^{2^{n-1}}+1)=2^{n-1}(2m+1)$. Имамо да је $3^{2^n}-1=2\cdot 4\cdot 2^{n-1}(2m+1)=m\cdot 2^{n+3}+2^{n+2}$. Одавде следи да је остатак 2^{n+2}.

5. Законитости везане за факторијеле бројева

Неке од законитости везаних за факторијеле бројева су често присутне у проблемским задацима, па је корисно обрадити са ученицима како пронаћи цифру јединица или број нула на крају резултата израза који садржи факторијеле.
Након што се израчунају вредности:

$$1! = 1$$
$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$
$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \cdot 10 = 120$$
$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72 \cdot 10 = 720$$

ученици треба да уоче да почевши од 5!, сваки следећи факторијел има бар једну двојку и бар једну петицу када је функција представљена као производ. Пошто је $2 \cdot 5 = 10$, то ће цифра јединица $n!$, $n \geq 5$ увек бити 0.[29]

Ученике треба подстаћи на размишљање од чега ће зависити број 0 на крају броја $n!$.

Пример 1. Поризвод представљен са 52! је врло велики број. Колико ће бити цифара нула на крају овог броја?

Решење: Једна од првих идеја које ће ђаци предложити је да у производу представљеним са 52!, треба пронаћи све десетке и да ће број десетки одређивати број нула на крају датог броја. Као модел, ученици су већ установили број нула на крају $5!$ и $6!$. Такође, уочавамо да је свака десетка добијена множењем једне двојке и једне петице из производа. Не би било временски ефикасно да се преброје све двојке и петице у производу имајући у виду да би морали да представимо, користећи просте факторе, све чиниоце производа који су дељиви са 2 или 5. Корисно је вратити се на пример који смо претходно користили и пронаћи све двојке и петице у производу представљеном са $6!$.

Из $6! = (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ уочавамо да двојки има више него петица, а разлог је што је у производу узастопних бројева, сваки други број дељив са 2, а тек сваки пети дељив са 5. Пошто је раније установљено да 6! има само једну десетку у производу, која је добијена множењем једне петице и двојке, закључак је да се треба фокусирати на број петица у производу, јер њих има мање. Пошто је 52! производ 52 узастопна природна броја, дељењем 52 са 5 би пронашли број бројева који су дељиви са 5.
$52 : 5 = 10.4$, или 10 бројева је дељиво са 5. Значи, пронашли смо 10 петица које су означене црвеном бојом. $52! = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 ... \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 ... \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Са друге стране, неки од бројева у датом производу имају две или више петица када су растављени на просте чиниоце (као што су 25 и 50). Пошто сваки број који је дељив са 25 има у простој факторизацији бар две петице, да бисмо пронашли заостали број петица, морамо наћи колико је бројева у овом производу дељиво са 25. Имамо да је: $52:25=2.08$, или 2 броја је дељиво са 25. Овим смо пронашли још 2 петице у датом производу. Пошто у производу прва 52 природна броја нема бројева који имају три или више петица, јер ниједан од чинилаца није дељив са 125, пребројавање петица је завршено. Имамо да је број петица у датом производу 12. Када се свака од 12 петица помножи са једном двојком (за које смо утврдили раније да их има више него петица), добијамо 12 десетки. Значи, 52! се може представити као $52!=n\cdot10\cdot10\cdot10...\cdot10$ (дванаест десетки), или имамо 12 нула на крају датог броја.[29]

Уопштено, формула за проналажење највећег степена a, тако да $p^a \mid n!$ је позната као Лежандрова формула или Полигнакова формула, а гласи:

$a=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+...\left[\frac{n}{p^i}\right]$, *где је i природан број такав да важи да* $\left[\frac{n}{p^{i+1}}\right]=0$. [21]

Пример 2. Која цифра је на месту јединица када се израчуна вредност израза: $2!+4!+6!+...+98!$

Решење: Пошто је $2!=2$ и $4!=24$, а сваки следећи факторијел, почевши од $5!$ у изразу има 0 на месту јединица, онда је цифра јединица представљеног израза: $2+4+0+0+...+0=6$.

Пример 3. Наћи цифру на месту десетица резултата израза: $0!+1!+2!+3!+...+100!$.

Решење: Знамо из претходних примера да сваки $n!$, $n\geq5$ има нулу на месту јединица. За овај пример нас занима за које вредности *n* ће $n!$ имати 0 и на месту десетица. Уз мало рачунања, уочићемо да почев од 10!, сви факторијели који следе, имају 0 на месту десетица. Ово значи да факторијели од 10! до 100! неће утицати на вредност цифре која се налази на месту десетица. Опет уз мало рачунања установљавамо да је:
0!+1!+2!+3!+4!+5!+6!+7!+8!+9! = 1+1+2+6+24+120+720+5040+40320+362880.
Кад саберемо бројеве означене црвеним добијамо 214, што значи да је цифра 1 на месту десетица овог израза.

Пример 4. Докажи да $n!$ није дељив са 2^n за било коју вредност природног броја *n*.

Решење: Из Лежандрове формуле следи да је највећи експонент броја 2 који дели *n*! једнак: $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\left[\frac{n}{2^3}\right]+...$. Са друге стране, искористимо чињеницу да је

$\frac{n}{2}+\frac{n}{2^2}+\frac{n}{2^3}+...=n$.

Пошто је $\frac{n}{2}+\frac{n}{2^2}+\frac{n}{2^3}+...>\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\left[\frac{n}{2^3}\right]+...$, онда је $n>\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\left[\frac{n}{2^3}\right]+...$, или *n* је већи од највећег експонента броја 2 који дели *n*!. Одавде следи да 2^n не дели *n*!.

5.1 Примери задатака за додатну наставу и такмичарски задаци (факторијели бројева)

Задатак 1. *Последњих седам цифара броја 30! су нуле. Пронаћи цифру која директно претходи овим последњим нулама.*

Решење: Користећи идеје из *Примера 1*, можемо установити да 30! има 26 двојки када је растављен на просте чиниоце. На сличан начин можемо пронаћи број и свих осталих простих чинилаца броја 30!. Такође, приметимо да 30! у својој факторизацији има све просте бројеве од 2 до 29. Имамо да је $30!=2^{26}\cdot 3^{14}\cdot 5^{7}\cdot 11^{2}\cdot 13^{2}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29$. Ако се овај производ подели са 10^7, можемо утврдити последњу цифру овог резултата, што ће бити и решење задатка. (Користимо базична знања из модуларне аритметике обрађене у претходном поглављу).

$$\begin{aligned}30! &= 2^{26}\cdot 3^{14}\cdot 5^{7}\cdot 11^{2}\cdot 13^{2}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29 / :10^7\\ &= 2^{19}\cdot 3^{14}\cdot 5^{0}\cdot 11^{2}\cdot 13^{2}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\\ &\equiv 8\cdot 9\cdot 1\cdot 9\cdot 7\cdot 9\cdot 3\cdot 9 \pmod{10}\\ &\equiv (-2)\cdot(-1)\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot 3\cdot(-1)\\ &\equiv 18\equiv 8 \pmod{10}\end{aligned}$$

Цифра која непосредно претходи нулама је 8.

Задатак 2. (CEMC – Cayley 2018) *Нека су x и y природни бројеви, и нека је* $\frac{30!}{36^x 25^y}$ *такође природан број. Пронаћи максималну вредност за* $x+y$.

Решење: Пошто је $\frac{30!}{36^x 25^y}=\frac{30!}{6^{2x}5^{2y}}$, пронађимо највеће вредности за x и y тако да 6^{2x} дели 30! и 5^{2y} дели 30!. Пошто 30! има 7 петица када је растављен на просте чиниоце, следи да је $2y\le 7$ или $y\le 3$. Пошто је $6^{2x}=2^{2x}\cdot 3^{2x}$, а тројки имам мање него двојки у 30!, пронађимо број тројки када је израз 30! растављен на просте чиниоце. Како 30! има 14 тројки, онда је $2x\le 14$ или $x\le 7$. Максимална вредност за $x+y\le 7+3=10$.

Задатак 3. *Пронаћи највећи степен n, тако да* 7^n *дели* $\frac{200!}{90!30!}$.

Решење: Користећи идеје из *Примера 1*, или Лежандрову формулу, можемо пронаћи број чинилаца броја 7 у сваком од израза 200!, 90!, и 30!. Пошто је

$\left[\frac{200}{7}\right]=28$, $\left[\frac{200}{7^2}\right]=4$, а $\left[\frac{200}{7^3}\right]=0$, број чинилаца броја 7 у изразу 200! је 32, или

$200!=7^{32}\cdot t$, где је t природан број који није дељив са 7. На сличан начин утврђујемо да 90! има 13 седмица у простој факторизацији, а 30! има 4 седмице. Значи, $90!=7^{13}\cdot r$

и $30! = 7^4 \cdot s$, где су r и s природни бројеви који нису дељиви са 7. Имамо да је:

$\dfrac{200!}{90!30!} = \dfrac{7^{32} \times t}{(7^{13} \cdot r)(7^4 \cdot s)} = \dfrac{7^{32}}{7^{13} \cdot 7^4} \cdot \dfrac{t}{rs} = 7^{15} \cdot \dfrac{t}{rs}$. Пошто је вредност почетног израза цео број, а производ rs није дељив са 7, онда rs дели t, и $\dfrac{t}{rs}$ није дељив са 7. Следи да је највећи експонент броја 7 који дели дати израз 15, или $n = 15$.

Задатак 4. *Пронађи све природне бројеве n такве да се n! завршава са 1000 нула.*

Решење: Ако се $n!$ завршава са 1000 нула, онда $5^{1000} | n!$, или

$$\left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \left[\frac{n}{5^3}\right] + \ldots = 1000.$$

Такође је $\left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \left[\frac{n}{5^3}\right] + \ldots < \frac{n}{5} + \frac{n}{5^2} + \frac{n}{5^3} + \ldots = \frac{n}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{n}{4}.$ Одавде следи да је $n > 4000.$ Такође, пошто је $[a] > a - 1$, где је a природан број, имамо да је:

$$1000 > \left(\frac{n}{5} - 1\right) + \left(\frac{n}{5^2} - 1\right) + \left(\frac{n}{5^3} - 1\right) + \left(\frac{n}{5^4} - 1\right) + \left(\frac{n}{5^5} - 1\right) = \frac{n}{5}\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4}\right) - 5$$

$$= \frac{n}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^5}{1 - \frac{1}{5}} - 5 = \frac{n}{5} \cdot \frac{781}{625} - 5.$$

Значи да је $1000 > \frac{n}{5} \cdot \frac{781}{625} - 5.$ Када решимо неједначину по n имамо да је:

$n < \dfrac{1005 \cdot 3125}{781} < 4022.$ Овим смо ограничили n са обе стране, па је $4000 < n < 4022.$ За бројеве од 4001! до 4021! морамо проверити који од њих има 1000 петица користећи *Лежандрову формулу.* На пример, 4001! има:

$$\left[\frac{4001}{5}\right] + \left[\frac{4001}{5^2}\right] + \left[\frac{4001}{5^3}\right] + \left[\frac{4001}{5^4}\right] + \left[\frac{4001}{5^5}\right] = 800 + 160 + 32 + 6 + 1 = 999 \text{ петица.}$$

Слично, можемо показати да 4002!, 4003!, и 4004! такође имају 999 петица. Број 4005! има:

$$\left[\frac{4005}{5}\right] + \left[\frac{4005}{5^2}\right] + \left[\frac{4005}{5^3}\right] + \left[\frac{4005}{5^4}\right] + \left[\frac{4005}{5^5}\right] = 801 + 160 + 32 + 6 + 1$$

$$= 1000 \text{ петица.}$$

Приметимо да је 4005 дељив са 5, па је следећи број дељив бројем 5, број 4010. Пошто је

$4010! = \underbrace{4010}_{2 \times 5 \times 401} \times 4009 \times 4008 \times 4007 \times 4006 \times \underbrace{4005!}_{\text{има 1000 петица}}$, следи да 4010! има 1001 петица.

Очигледно је да важи да за $n > 4010$, $n!$ има бар 1001 петица, па су тражени бројеви: 4005, 4006, 4007, 4008, и 4009.

Задатак 5. (CEMC – Cayley 2013) *Нека је Z(m) број нула на крају броја m, при чему цифра која непосредно предходи нулама на крају броја мора бити различита од нуле. На пример, Z(1030000) = 4. Ако се направи листа* $L(n) = n - Z(n!)$ *за све бројеве n од 100 до 10000, колико бројева на овој листи се појављује бар три пута?*

A) 2　　*B) 3*　　*C) 4*　　*D) 5*　　*E) 6*

Решење: Пошто је број нула на крају броја $n!$ одређен бројем чинилаца броја 10, користимо *Пример 1.* $Z(n!)$ је једнак броју петица у простој факторизацији броја $n!$. Нека је $V(m)$ једнак броју петица у простој факторизацији броја m. Значи $L(n) = n - V(n!)$. Пошто је $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, онда је $V((n+1)!) = V(n+1) + V(n!)$. Ако n+1 није дељив са 5, онда је $V(n+1) = 0$, па је $V((n+1)!) = V(n!)$. Ако n+1 јесте дељив са 5, онда је $V(n+1) > 0$, па је $V((n+1)!) > V(n!)$. Такође је:

$$\begin{aligned} L(n+1) - L(n) &= ((n+1) - V((n+1)!) - (n - V(n!)) \\ &= (n+1) - V(n+1) - V(n!) - n + V(n!) \\ &= 1 - V(n+1) \end{aligned}$$

Ако n+1 није дељив са 5, онда је $V(n+1) = 0$, па је $L(n+1) - L(n) = 1$. Ово значи да ће у листи бројева која се тражи, $L(n+1)$ бити за један већи од предходног броја на листи ($L(n)$). Пошто четири узастопна броја нису дељива са 5, то ће и листа имати четири узастопна броја.

Ако је n +1 дељив са 5, имамо да је $L(n+1) = L(n)$, ако је $V(n+1) = 1$, или $L(n+1) < L(n)$, ако је $V(n+1) > 1$. Можемо приметити циклус који се понавља у траженој листи. Ако је $V(m)$= 1, имамо:

$L(m-1) = a,\ L(m) = a,\ L(m+1) = a+1,\ L(m+2) = a+2,\ L(m+3) = a+3,\ L(m+4) = a+4$.

Уз мало испитивања како се елементи на листи мењају, за различите вредности $V(m)$, можемо уочити да је $L(m+5) = a$, ако је $V(m+5) = 5$. Ово је могуће ако дати број има 5 петица када је растављен на просте чиниоце. Нека је $N = 5^5 \cdot k = 3125 \cdot k$. Пошто је $N \le 10000$, следи да је k = 1, 2, или 3. Нека је $L(n) = a$, па потврдимо шта се дешава са траженом листом користећи следећу табелу:

m	*N-6*	*N-5*	*N-4*	*N-3*	*N-2*	*N-1*	*N*	*N+1*	*N+2*	*N+3*	*N+4*	*N+5*	*N+6*
V(m)	0	1	0	0	0	0	5	0	0	0	0	1	0
L(m)	*a*	*a*	*a+1*	*a+2*	*a+3*	*a+4*	*a*	*a+1*	*a+2*	*a+3*	*a+4*	*a+4*	*a+5*

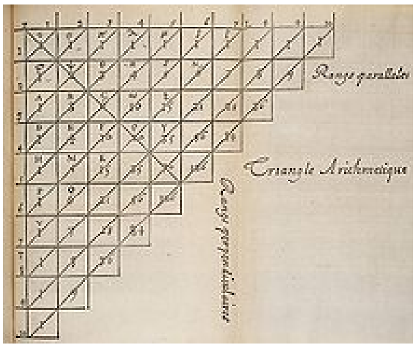
Као што можемо приметити, бројеви a и a + 4 се понављају три пута. Пошто постоје три могућности за k тако да је $100 \le N \le 10000$, закључујемо да ће бити 6 бројева који ће се понављати бар три пута на траженој листи. Следи да је тачан одговор *E*).

6. ПАСКАЛОВ ТРОУГАО

У овом поглављу ћемо обрадити неке од занимљивих законитости које постоје у Паскаловом троуглу са којима се ђаци сусрећу како у редовној настави тако и на различитим такмичењима.

Паскалов троугао је бесконачан низ природних бројева који је у облику троугаоне шеме. Крајњи бројеви шеме су увек јединице. Сваки број у једном реду, који није крајњи, је једнак збиру бројева који су дијагонално лево и десно, директно изнад тог броја. Иако је овај низ добио име по француском математичару *Blaise Pascal*-у (1623-1662), многи математичари пре Паскала су га користили у Индији, Персији, и Кини.

На слици је приказана Паскалова верзија троугла (Treatise on Arithmetical Triangle) објављена 1665. или после Паскалове смрти. Паскал је објавио већ познате чињенице везане за троугао и користио их да реши проблеме из вероватноће.



Иако се елементи Паскаловог троугла не представљају као коефицијенти биномне формуле у старијим разредима осмогодишње школе, ученици у овом узрасту баратају са формулом за израчунавање броја комбинација ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!} = \dbinom{n}{r}$, те се прави веза између броја комбинација и елемената у Паскаловом троуглу, коју ћемо приказати у овом поглављу.

На слици је приказано првих седам врста Паскаловог троугла и како су бројеви генерисани:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Пример 1. Представљен је део Паскаловог троугла. Пронађи елементе X, Y, и Z.

1287 ____ ____ X

3003 3432 Y

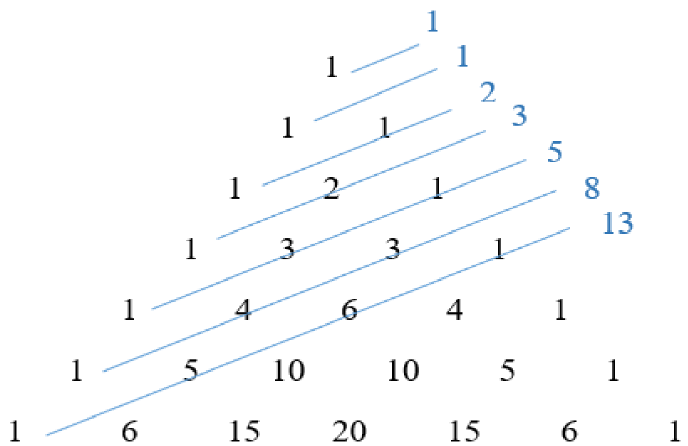
____ 6435

Z

Решење: Користећи законитост да је сваки елемент у Паскаловом троуглу, који није на рубу троугла, једнак збиру два елемента који су дијагонално лево и десно изнад тог броја, можемо пронаћи елемент који недостаје у трећој врсти, сабирајући бројеве лево идесно изнад: 3003 + 3432 = 6435. Одавде проналазимо да је Z = 6435 + 6435 = 12870. Пошто је 3432 + Y = 6435, онда је Y = 3003. Такође, први елемент у првој врсти који недостаје је: 3003 – 1287 = 1716, а други је: 3432 – 1716 = 1716. Због симетричности троугла, добијамо да је X = 1287.

6.1 Законитости у Паскаловом троуглу

а) **Сабирајући бројеве по дијагоналама, у Паскаловом троуглу се могу уочити Фибоначијеви бројеви**



Доказ: $F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$, За $n = 0$, $F_1 = 1$; за $n = 1$, $F_2 = 1$. Докажимо рекурзивну формулу, односно да је $F_{n+1} + F_{n+2} = F_{n+3}$.

$$F_{n+1}+F_{n+2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1-k}{k}$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n-k+1}{k-1}+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1-k}{k}$$

(за леву суму, индекс $k \to k-1$)

$=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n-k+1}{k-1}+\binom{n+1}{0}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n-k+1}{k}$ (за десну суму смо издвојили елемент за $k=0$)

$=1+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1-k}{k-1}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1-k}{k}$ (користимо једнакост $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$)

$=1+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+2-k}{k}$ (пошто је $k=n+2,$ имамо да је $\binom{n+2-(n+2)}{n+2}=0$)

$=\sum_{k=0}^{n+2}\binom{n+2-k}{k}=F_{n+3}$. [48]

б) **Збир бројева у свакој врсти Паскаловог троугла је 2^n, где је n број врсте у троуглу**

На слици је приказана законитост везана за збир елемената по врстама у првих шест врста Паскаловог троугла.

Врста 0						1						Сума: $2^0=1$
Врста 1					1		1					Сума: $2^1=2=1+1$
Врста 2				1		2		1				Сума: $2^2=4=1+2+1$
Врста 3			1		3		3		1			Сума: $2^3=8=1+3+3+1$
Врста 4		1		4		6		4		1		Сума: $2^4=16=1+4+6+4+1$
Врста 5	1		5		10		10		5		1	Сума: $2^5=32=1+5+10+10+5+1$

Доказ: Користимо индукцију. За $n=0$, $\binom{0}{0}=1=2^0.$ Претпоставимо да тврђење важи за $n=m$: $\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}...+\binom{m}{m}=2^m$, и докажимо да тврђење важи за $n=m+1$, односно да је:

$$\binom{m+1}{0}+\binom{m+1}{1}+\binom{m+2}{2}...+\binom{m+1}{m+1}=2^{m+1}$$

користимо: $\left(\binom{m+1}{k}=\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k},\ \binom{m+1}{0}=\binom{m}{0}=1,\ \binom{m+1}{m+1}=\binom{m}{m}=1\right)$, па имамо:

$$\binom{m+1}{0}+\binom{m+1}{1}+\binom{m+2}{2}...+\binom{m+1}{m+1}=\binom{m}{0}+\left[\binom{m}{0}+\binom{m}{1}\right]+\left[\binom{m}{1}+\binom{m}{2}\right]+...$$

$$\left[\binom{m}{m-1}+\binom{m}{m}\right]+\binom{m}{m}$$

Пошто се сваки елемент појављује два пута, имамо:

$$=2\cdot\left[\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+...+\binom{m}{m}\right]\ =2\cdot 2^m=2^{m+1}.$$

Ова законитост се може доказати и на једноставнији начин. Користећи биномну формулу за $x = y = 1$, имамо да је: $(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+...+\binom{n}{n}y^n$ једнако

$$(1+1)^n=2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}.$$ [48]

в) **Степени броја 11**

Када су елементи у првих пет врста Паскаловог троугла поређани један поред другог, они креирају бројеве који су степени броја 11, или 11^n, где је n број врсте у троуглу. Степене броја 11 добијамо и ако су елементи вишецифрени бројеви, али онда цифру јединица броја који претходи вишецифреном броју треба сабрати са:

a) Првом цифром вишецифреног броја који следи (ако је вишецифрени број двоцифрен), или

b) Делом тог вишецифреног броја, не укључујући цифру јединица.

Описано правило је приказано у табели која следи:[33]

Број врсте	Елементи у тој врсти	Степен броја 11
0	1	$11^0=1$
1	1, 1	$11^1=11$
2	1, 2, 1	$11^2=121$
3	1, 3, 3, 1	$11^3=1331$
4	1, 4, 6, 4, 1	$11^4=14641$
5	1, 5, 10, 10, 5, 1 1, (5+1), (0+1), 0, 5, 1 1, 6, 1, 0, 5, 1	$11^5=161051$
6	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 1, (6+1), (5+2), (0+1), 5, 6, 1 1, 7, 7, 1, 5, 6, 1	$11^6=1771561$

Пример 2. Користећи елементе у Паскаловом троуглу израчунај 11^9.

Решење: Елементи врсте #9 су: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1. Користећи методу груписања описану изнад, имамо: 1 (9 + 3)(6 + 8)(4 + 12)(6 + 12)(6 + 8)(4 + 3)6 9 1. Приметимо да пошто су неки од елемената двоцифрени или троцифрени бројеви, процедуру груписања морамо поновити све док не добијемо једноцифрене бројеве:

1	12	14	16	18	14	7	6	9	1
(1 + 1)	(2 + 1)	(4 + 1)	(6 + 1)	(8 + 1)	4	7	6	9	1
2	3	5	7	9	4	7	6	9	1

Добијамо да је $11^9 = 2357947691$.

г) **Законитости везане за дијагоналне бројеве у Паскаловом троуглу**

1

1 1 — Узастопни бројеви

1 2 1 — Троугаони бројеви

1 3 3 1 — Тетраедарни бројеви

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Као што видимо са дијаграма, на другој дијагонали у Паскаловом троуглу, означеној црвеном бојом, можемо уочити узастопне бројеве. На трећој дијагонали, означени плавом бојом су троугаони бројеви, а у четвртој дијагонали, означени наранџастом бојом, уочавамо тетраедарне бројеве. Формула за проналажење *n*-тог члана тетраедарног низа се може лако пронаћи користећи знања из поглавља 3.3, и гласи: $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$. Знамо од раније да је збир два узастопна троугаона броја квадратни број, а ову законитост можемо сад уочити и у Паскаловом троуглу. Квадрат сваког природног броја са друге дијагонале у троуглу, једнак је збиру троугаоног броја који је непосредно поред и следећег троугаоног броја у низу са треће дијагонале. На пример, са дијаграма изнад имамо да је: $4^2 = 6 + 10 = 16$.

д) **Каталанови бројеви у Паскаловом троуглу**

Каталанови бројеви представљају низ бројева који су првенствено коришћени у геометрији и при решавању многих комбинаторних проблема. Открио их је Леонард Ојлер (Leonhard Euler, 1707-1783), у поступку тражења општег решења за број различитих начина на који се један многоугао односно полигон од n страница може поделити на троуглове. Притом је требало водити рачуна да се не користе дијагонале многоугла које се међусобно секу. Ови бројеви су добили име по белгијском математичару Еугену Чарлсу Каталану (Eugene Charles Catalan, 1814-1894) који је открио везу ових бројева и проблема низова n-парова заграда. Каталанови бројеви се појављују као решења великог броја комбинаторних проблема, а нека од њих су: триангулације полигона, бинарна стабла, број могућих путева у дискретној решетки димензије $n \times n$ *и тако даље.*[49]

Формула за израчунавање Каталанових бројева је: $C_n = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n},\ n \geq 0.$

Првих десет Каталанових бројева су:
$C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, C_4 = 14, C_5 = 42, C_6 = 132, C_7 = 429, C_8 = 1430, C_9 = 4862, C_{10} = 16796$

У Паскаловом троуглу, у парним врстама, разлика између бројева у средњој колони и суседних бројева су Каталанови бројеви.

1	$C_0 = 1 - 0 = 0$
1 1	
1 2 1	$C_1 = 2 - 1 = 1$
1 3 3 1	
1 4 6 4 1	$C_2 = 6 - 4 = 2$
1 5 10 10 5 1	
1 6 15 20 15 6 1	$C_3 = 20 - 15 = 5$
1 7 21 35 35 21 7 1	
1 8 28 56 70 56 28 8 1	$C_4 = 70 - 56 = 14$

Доказ: Уопштено, централни елемент у парним врстама Паскаловог троугла је $\binom{2n}{n}$, а први елемент до њега је $\binom{2n}{n+1}$. Разлика ова два елемента је:

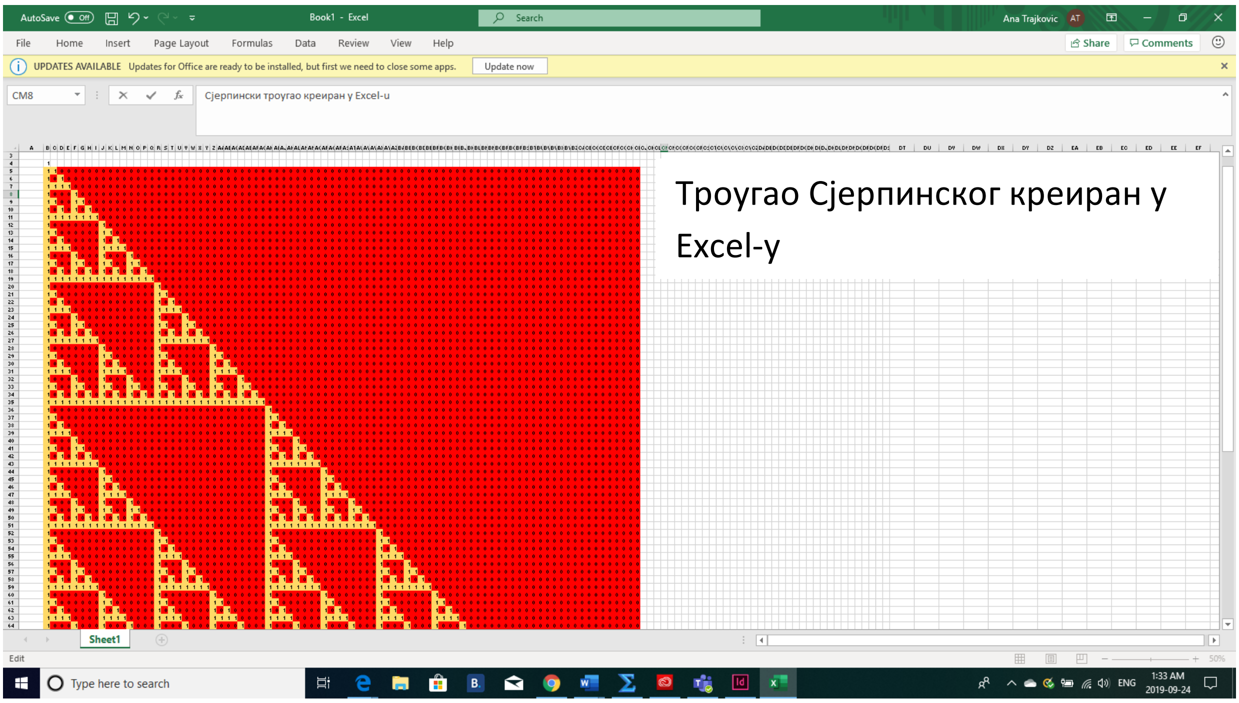
$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}=\frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\cdot\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]=\frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\cdot\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}=C_n,$$ што је n-ти Каталанов број.

ђ) Троугао Сјерпинског

Ако се сви непарни бројеви у Паскаловом троуглу офарбају једном бојом, добиће се троугао који одговара троуглу Сјерпинског. Слично, ако користимо модуларну аритметику и бројеве у Паскаловом троуглу заменимо конгруентним бројевима по модулу 2, односно са 0 и 1, које онда офарбамо различитом бојом, добићемо троугаону форму која је идентична троуглу Сјерпинског.[50]

Троугао Сјерпинског је фрактал у облику једнакостраничног троугла, подељен рекурзивно у мање једнакостраничне троуглове. Може се добити тако што се почне од једнакостраничног троугла који се подели на четири подударна мања једнакостранична троугла и централни троугао уклони. Онда се овај поступак понови са сваким од преосталих троуглова. Овај троугао је добио је име по пољском математичару Waclaw Sierpinski (1882-1969).

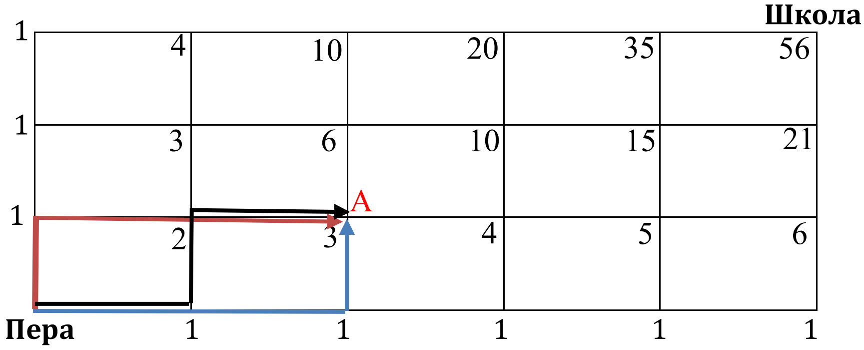


ж) **Веза између броја могућих путева кроз $m \times n$ дискретну решетку и бројева у Паскаловом троуглу**

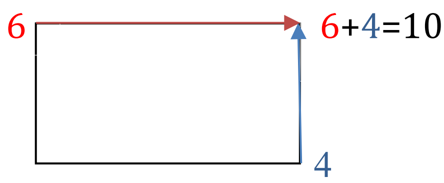
Да бисмо успоставили ову везу прво ћемо се позабавити концептима које ђаци користе да би пронашли број путања кроз $m \times n$ решетку.

Пример 3. На колико начина Пера може стићи до школе ако се креће искључиво источно или северно по 5×3 решетки, представљеној на дијаграму испод?
Урадићемо овај задатак на два начина:

- Пребројавајући путање са решетки



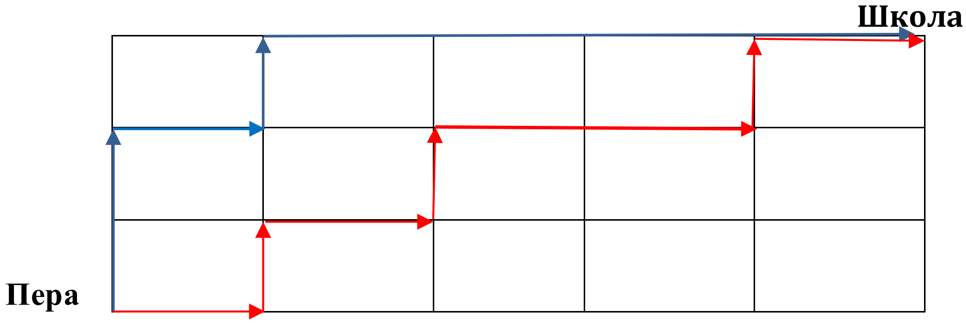
До сваке „раскрснице“ на доњем или левом ободу решетке може се доћи на само један начин крећући се источно или северно. Да бисмо пронашли број путања до првих неколико „раскрница“ у првом реду решетке, пожељно је да ученици, користећи различите боје, исцртају све путање. На пример, да би се дошло до раскрснице означене са A, Пера може ићи: источно-источно-северно, или источно-северно-источно, или северно-источно-источно, или на три различита начина. Са дијаграма можемо успоставити законитост како да се пронађе број путања до сваке следеће „раскрснице“. На пример:



Број путања до сваке од „раскрсница“ се може добити сабирањем броја путања са суседних „раскрсница“. До грешке у овом процесу неће доћи ако се број путања до следеће „раскрснице“ попуњава врста по врста „крећући се удесно и навише“. Са дијаграма се добија да је укупан број путања једнак 56.

- Користећи комбинације

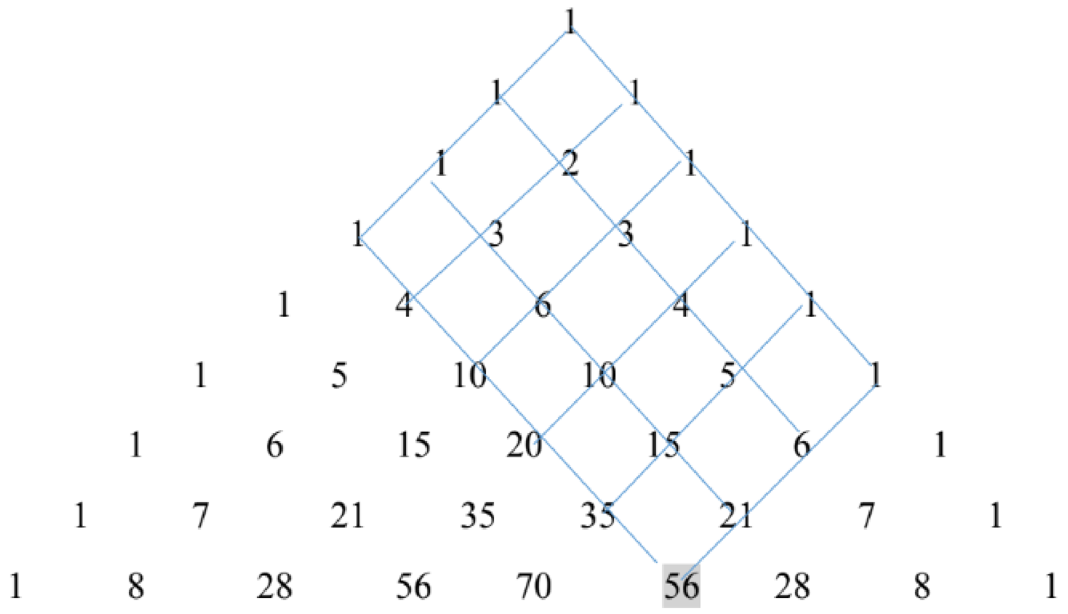
Ако сваку хоризонталну кретњу између две „раскрснице“ означимо са И(источно), а сваку вертикалну кретњу изеђу две „раскрснице“ означимо са С(северно), онда можемо уочити да свака од путања којом Пера може доћи до школе подразумева пет кретњи на исток и три кретње на север, што се може представити као реч која ће имати пет слова И и три слова С. На пример:



Путања означена црвеном бојом се може описати као кретња: исток-север-исток-север-исток-исток-север-исток, или представити као реч: *ИСИСИИСИ.*
Путања означена плавом бојом се може описати као кретња: север-север-исток-север-исток-исток-исток-исток, или представити као реч: *ССИСИИИИ.*
Укупан број путања се може израчунати ако се пронађу све пермутације слова речи *ИИИИИССС.*

Уз помоћ формуле: ${}_nC_r = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ имамо да је укупан број путања једнак ${}_8C_5 = \binom{8}{5} = \dfrac{8!}{5!3!} = 56.$ Приметимо да је n једнак збиру димензија решетке, или 5+3 = 8 у овом случају, а број r је једнак једној од димензија решетке, што је број 5 или 3 у датом примеру.

Сада ћемо успоставити релацију између укупног броја путања на решетки и бројева у Паскаловом троуглу, и више од тога - корелацију између бројева добијених на „раскрсницама“ решетке и бројева у Паскаловом троуглу.
Ако нацртамо решетку истих димензија као у претходном примеру у Паскаловом троуглу, можемо приметити да је број путања до сваке од „раскрсница“ као и укупан број путања један од бројева у Паскаловом троуглу. Ово је приказано на дијаграму испод.



Чињеница да су решења задатака везаних за број могућих путања на решетки уствари елементи Паскаловог троугла, нам омогућава да без проблема пронађемо било који број у Паскаловом троуглу.[29]

Пример 4. Пронађи пети број у деветнаестој врсти Паскаловог троугла.

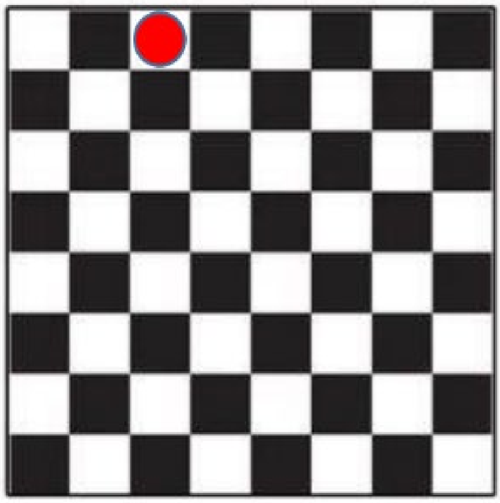
Решење: Прва врста у Паскаловом троуглу је нумерисана као врста #0. Друга врста је врста #1 и тако даље. На сличан начин су нумерисане и колоне. Ово значи да је пети број, уствари број у колони #4, а бројеви у деветнаестој врсти, су у врсти #18. Користећи формулу за комбинације добија се тражени број: ${}_{18}C_{4} = 3060$

Пример 5. У следећем низу бројева пронађи елементе који недостају.

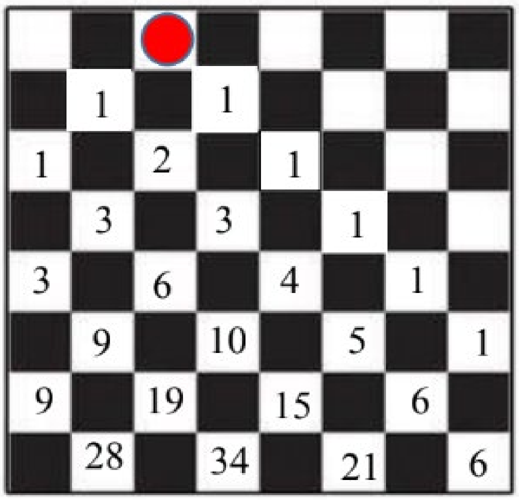
1 _ 78 186 715 1287 1716 1716 1287 715 186 78 _ 1

Решење: Можемо уочити да низ има 14 елемената и да је симетричан, чиме добијамо идеју да је дати низ, четрнаеста врста у Паскаловом троуглу. Ово можемо и да проверимо, пре него пронађемо чланове низа који недостају. На пример, проверимо да ли је број 78 трећи елемент у четрнаестој врсти Паскаловог троугла користећи формулу за комбинације. Пошто је ${}_{13}C_{2} = 78$, овим смо утврдили да је реч о Паскаловом троуглу. Други елемент у четрнаестој врсти (врсти #13) је број 13. Пошто је низ симетричан, и претпоследњи број у низу је такође 13.

Пример 6. На слици испод је представљена шаховска табла на којој се налази једна фигура. На колико начина се може стићи до супротне стране шаховске табле, ако се фигура може померати једно поље унапред, остајући на пољу које је беле боје?



Решење: Можемо користити исти принцип као и за проналажење броја путања на решетки користећи Паскалов троугао. На слици испод је приказано на колико начина се може стићи до сваког од белих поља на шаховској табли.



Сабирајући број могућих путања до сваког од поља на супротној страни шаховске табле добијамо: 28+34+21+6 = 89 начина на које се може стићи до супротне стране шаховске табле.

з) **Веза између биномне формуле и елемената у Паскаловом троуглу**

Коефицијенти биномне формуле се изједначавају са елементима у Паскаловом троуглу.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n \quad \text{или} \quad \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

На дијаграму испод је представљена релација између бројева у троуглу и коефицијената користећи већ познато да је ${}_nC_r = \binom{n}{r}$.

Докажимо да се сваки биномни коефицијент може генерисати на исти начин као и бројеви у Паскаловом троуглу.[29]

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \cdots & & & &
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{c}
{}_0C_0 \\
{}_1C_0 \quad {}_1C_1 \\
{}_2C_0 \quad {}_2C_1 \quad {}_2C_2 \\
{}_3C_0 \quad {}_3C_1 \quad {}_3C_2 \quad {}_3C_3 \\
{}_4C_0 \quad {}_4C_1 \quad {}_4C_2 \quad {}_4C_3 \quad {}_4C_4 \\
\cdots
\end{array}
\Leftrightarrow
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\cdots
\end{array}
$$

Доказ:

$$
\begin{aligned}
{}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \\
&= \frac{r(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!(n-r)}{r!(n-r)(n-r-1)!} \\
&= \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{(n-1)!(n-r)}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!}\left[r+(n-r)\right] \\
&= \frac{(n-1)!n}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= {}_nC_r.
\end{aligned}
$$

Пример 7. Користећи биномну формулу развити израз у облику несличних монома $\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^4$.

Решење:

$$\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^4=\sum_{r=0}^{4}{}_4C_r x^{4-r}\left(\frac{2}{x^2}\right)^r$$

$$={}_4C_0x^4+{}_4C_1x^3\left(\frac{2}{x^2}\right)+{}_4C_2x^2\left(\frac{2}{x^2}\right)^2+{}_4C_3x\left(\frac{2}{x^2}\right)^3+{}_4C_4\left(\frac{2}{x^2}\right)^4$$

$$=1x^4+4x^3\left(\frac{2}{x^2}\right)+6x^2\left(\frac{4}{x^4}\right)+4x\left(\frac{8}{x^6}\right)+1\left(\frac{16}{x^8}\right)$$

$$=x^4+8x+24x^{-2}+32x^{-5}+16x^{-8}$$

Подсетимо се да је збир бројева у врсти #n Паскаловог троугла једнак 2^n. Користећи комбинације закључујемо да је: ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+...+{}_nC_n=2^n$.

Пример 8. а) Израчунај вредност израза: ${}_{32}C_4+{}_{32}C_5$.

б) Ако је $\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r=16384$, пронађи вредност за n.

Решење: а) Пошто знамо да је $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$, онда је ${}_{32}C_4+{}_{32}C_5=$ ${}_{33}C_5=237336$.

б) Пошто је $\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r=2^n$, онда је $16384=2^n$ или $\log_2 16384=14$, те је $n=14$.

Пример 9: Пронаћи последње две цифре броја 31^{25} користећи биномну формулу.

Решење: $31^{25}=(1+30)^{25}=1^{25}+\binom{25}{1}\cdot1^{24}\cdot30+\binom{25}{2}\cdot1^{23}\cdot30^2...+\binom{25}{25}\cdot30^{25}.$

Почевши од трећег члана суме, сви чланови су дељиви бројем 100, што значи да сваки од њих има бар две нуле као последње две цифре. Пошто ови чланови не утичу на крајњи исход, можемо их занемарити и посматрати само суму прва два члана $1+25\cdot30=751\equiv51\ (\mathrm{mod}\ 100)$. Последње две цифре су 51.

Пример 10. Користећи чињеницу да су биномни коефицијенти бројеви у Паскаловом троуглу покажи да је десети елемент Фибоначијевог низа једнак збиру претходна два елемента у низу, или да је $F_{10}=F_9+F_8$.

Решење: Пошто смо већ показали у овом поглављу да се елементи Фибоначијевог низа могу наћи на дијагоналама у Паскаловом троуглу, имамо да је $F_{10}=\binom{9}{0}+\binom{8}{1}+\binom{7}{2}+\binom{6}{3}+\binom{5}{4}$. Користећи чињеницу да је сваки елемент у Паскаловом троуглу, који није на рубу, једнак збиру два елемента која су непосредно лево и десно изнад датог елемента, имамо:

$$F_{10}=\binom{9}{0}+\left[\binom{7}{0}+\binom{7}{1}\right]+\left[\binom{6}{1}+\binom{6}{2}\right]+\left[\binom{5}{2}+\binom{5}{3}\right]+\left[\binom{4}{3}+\binom{4}{4}\right]$$

$$=\binom{9}{0}+\left[\binom{7}{1}+\binom{6}{2}+\binom{5}{3}+\binom{4}{4}\right]+\left[\binom{7}{0}+\binom{6}{1}+\binom{5}{2}+\binom{4}{3}\right]$$

Пошто је: $\binom{9}{0}=\binom{8}{0}=1,$ онда је:

$$\mathrm{F}_{10}=\left[\binom{8}{0}+\binom{7}{1}+\binom{6}{2}+\binom{5}{3}+\binom{4}{4}\right]+\left[\binom{7}{0}+\binom{6}{1}+\binom{5}{2}+\binom{4}{3}\right]$$

$$=F_9+F_8.$$

Пример 11. Ако се елементи у врстама Паскаловог троугла помноже по реду са 2^k, где је $k=n,\ n-1,\ n-2,...,0$, онда је збир овако добијених елемената увек степен броја 3.

Решење: Тврдња се лако доказује користећи биномну формулу. Ако у биномној формули заменимо *x* са 2 и *y* са 1, добијамо да је:

$(2+1)^n=\binom{n}{0}2^n1^0+\binom{n}{1}2^{n-1}1+\binom{n}{2}2^{n-2}1^2+...+\binom{n}{n}2^01^n$, или да је

$3^n=\binom{n}{0}2^n+\binom{n}{1}2^{n-1}+\binom{n}{2}2^{n-2}+...+\binom{n}{n}2^0$, што је и требало доказати.

и) **Дељивост елемената у Паскаловом троуглу**

Интересантно је посматрати законитости које су везане за парност или непарност елемената у Паскаловом троуглу или дељивост елемената Паскаловог троугла неким датим бројем.

За разумевање идеја представљених у овом поглављу, ђаци треба да имају предзнања везана за конвертовање бројева из једног у други бројевни систем и предзнања везана за извођење базичних операција у различитим бројевним системима.

Лукасова Теорема:

За целе бројеве $m,n\geq 0,$ и прост број *p* важи да је $\binom{n}{m}\equiv\prod_{i=0}^{k}\binom{n_i}{m_i}(\mathrm{mod}\,p),$ где су

$m=m_kp^k+m_{k-1}p^{k-1}+...+m_1p+m_0$, и $n=n_kp^k+n_{k-1}p^{k-1}+...+n_1p+n_0$ (*k* је цео број)

репрезентације бројева *n* и *m* у бази *p*. Користићемо конвенцију да је $\binom{n}{m}=0$ када је $n<m$.

Број $\binom{n}{m}$ у Паскаловом троуглу је дељив простим бројем p, ако и само ако је бар једна од цифара броја m у бази p већа од одговарајуће цифре броја n у бази p.[41]

Пример 12. За $p = 2$, утврдимо да је $\binom{8}{3}$ паран број користећи Лукасову теорему.

Решење: Пошто је $m = 3 = 0011_2$, а $n = 8 = 1000_2$, и број m у бази 2 има бар једну цифру већу од одговарајуће цифре броја n у бази 2 (последње две цифре броја m су јединице, а последње две цифре броја n су нуле) онда је $\binom{8}{3}$ дељив бројем 2, или $\binom{8}{3}$ је паран.

Интересантна последица Лукасове теореме је да су сви елементи облика $\binom{2^k-1}{m}$ *у Паскаловом троуглу, где је k цео број и* $m \le 2^k - 1$, *непарни. Ово је стога што биномна репрезентација броја* $2^k - 1$ *има само јединице, па не постоји број m такав да у биномној форми има бар једну цифру већу од одговарајуће цифре броја* $2^k - 1$, *за било коју вредност* $k \ge 0$. *Ово повлачи да* $\binom{2^k-1}{m}$ *није дељив са 2, или да је увек непаран број.*

Пример 13. Покажи да је $\binom{n}{p} \equiv \left[\frac{n}{p}\right] (\mathrm{mod}\ p)$, где је n позитиван цео број и p прост број.

Решење: Нека је $n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \ldots + n_1 p + n_0$ у бази p. По Лукасовој теореми имамо да је: $\binom{n}{p} \equiv \binom{n_1}{1}\binom{n_0}{0} = n_1 (\mathrm{mod}\ p)$. Такође имамо да је:

$\left[\frac{n}{p}\right] = n_k p^{k-1} + n_{k-1} p^{k-2} + \ldots + n_1 \equiv n_1 (\mathrm{mod}\ p)$. Одавде следи да је $\binom{n}{p} \equiv \left[\frac{n}{p}\right] (\mathrm{mod}\ p)$.

Пример 14. Пронађи остатак при дељењу броја $\binom{1000}{300}$ бројем 13.

Решење: Пошто је $1000 = 5 \cdot 13^2 + 11 \cdot 13 + 12$ и $300 = 1 \cdot 13^2 + 10 \cdot 13 + 1$ у бази 13, онда по Лукасовој теореми имамо да је $\binom{1000}{300} \equiv \binom{5}{1}\binom{11}{10}\binom{12}{1} = 5 \cdot 11 \cdot 12 = 660 \equiv 10 (\mathrm{mod}\ 13)$. Из овога следи да је остатак при дељењу датог броја бројем 13 једнак 10.

Веома корисна формула за проналажење броја елемената у n-тој врсти Паскаловог троугла који су дељиви простим бројем p се базира на *Кумеровој теореми* (*Ernst Eduard Kummer 1810-1893*).

Кумерова теорема:

Највећи експонент броја p који дели $\binom{n}{m}$ је једнак броју преноса при сабирању бројева $n-m$ и m у бази p.

Лакше је утврдити колико елемената у n-тој врсти није дељиво простим бројем p, или за колико k не постоји пренос када су k и $n-k$ сабрани у бази p. Погледајмо пример:

Пример 15. Нека је $n=133866$ и $p=5$. Дати број у бази 5 је: $133866=13240431_5$. Табела која следи нам омогућава да уочимо могућности за сваку од цифара броја k, тако да не постоји пренос када су k и $n-k$ сабрани у бази 5.

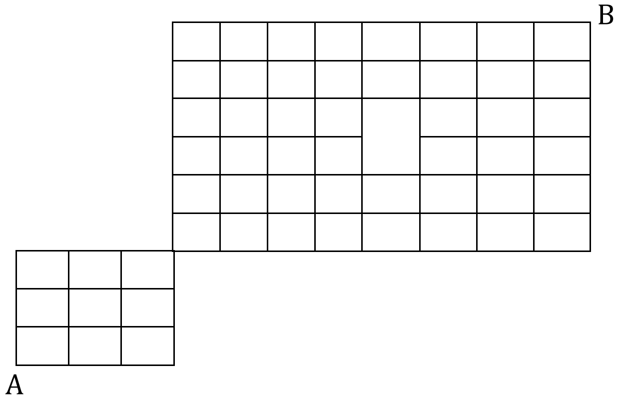
Место цифре у броју n	Цифра у броју n	Могућности за вредност цифре броја k
5^0	1	0, 1
5^1	3	0, 1, 2, 3
5^2	4	0, 1, 2, 3, 4
5^3	0	0
5^4	4	0, 1, 2, 3, 4
5^5	2	0, 1, 2
5^6	3	0, 1, 2, 3
5^7	1	0, 1

Приметимо да за сваки цифру n_s броја n, постоји n_s+1 могућности за цифру броја k. Све различите вредности броја k се добијају множењем могућности за сваку од цифара броја k, па имамо да је k = 4800. Ово повлачи да 4800 елемената у 133866-тој врсти Паскаловог троугла неће бити дељиво са 5, или да ће 133866+1 – 4800 = 129067 елемената бити дељиво са 5.

Следи да је формула за број елемената у n -тој врсти Паскаловог троугла који нису дељив са простим бројем p: $\prod_{k=0}^{s}(1+n_k)=(1+n_0)(1+n_1)(1+n_2)...(1+n_s)$, где је $n=n_s p^s+n_{s-1}p^{s-1}+...+n_1 p+n_0$ репрезентација броја n у бази p.[38]

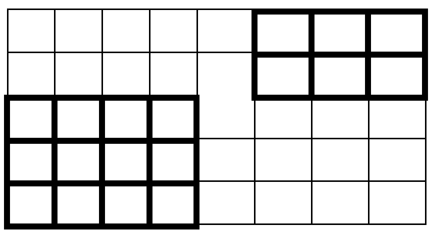
6.2 Примери задатака за додатну наставу и такмичарски задаци (Паскалов троугао)

Задатак 1. *Пронађи број путања од тачке A до тачке B на датој решетки, крећући се навише и удесно.*



Решење:

Број путања од тачке A до тачке где се две решетке додирују је: $\frac{6!}{3!3!}=20$. Пошто 8×5 решетка има прекид, путање које би пролазиле кроз две „раскрснице“ које нису повезане нису могуће. Укупан број путања на 8×5 решетки без прекида је: $\frac{13!}{8!5!}=1287$. Путање које пролазе кроз прекид на 8×5 решетки су означене на дијаграму, а њихов укупан број је једнак: $\frac{7!}{4!3!}\cdot\frac{5!}{2!3!}=350$.



Значи, број путања који постоји на 8×5 решетки је једнак укупном броју путања кроз ову решетку минус број путања које нису могуће због прекида, односно 1287 – 350 = 937 путања. За сваку од 20 путања на 3×3 решетки, постоји 937 путања на 8×5 решетки, или укупно $20\cdot 937=18740$ путања.

Напомена: Задатак се може решити и проналажењем броја путања до сваке од „раскрсница“ на датој решетки, али би овај метод трајао дуже.

Задатак 2. (CEMC – Gauss 2003) *У низу бројева представљеном на слици испод, свака врста почиње са један а завршава се са 2. Сваки од преосталих бројева који није први или последњи у врсти се добија сабирањем два броја која се налазе директно лево и десно изнад датог броја. Колика је сума у 13-тој врсти овог низа?*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 2 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 2 & & \\
 & 1 & & 4 & & 5 & & 2 & \\
1 & & 5 & & 9 & & 7 & & 2 \\
 & & & & \cdots & & & &
\end{array}
$$

Решење: Сума бројева у првој врсти је 3, у другој врсти је 6, у трећој врсти 12, у четвртој 24 итд. Уочимо законитост која постоји између ових бројева:

$$
\begin{aligned}
&3 = 1\cdot 3 = 2^0\cdot 3\\
&6 = 2\cdot 3\\
&12 = 2\cdot 2\cdot 3 = 2^2\cdot 3\\
&24 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3 = 2^3\cdot 3 \ \ldots
\end{aligned}
$$

Из овога можемо закључити да је сума елемената у 13-тој врсти: $2^{12}\cdot 3 = 4096\cdot 3 = 12288.$

Задатак 3. *Троугаони низ бројева у првој врсти има непарне бројеве од 1 до 99 у растућем редоследу. Свака следећа врста има један елемент мање, а последња врста има само један елемент. Сваки од елемената, почевши од друге врсте, је једнак збиру два елемента која су директно дијагонално лево и десно изнад. Колико елемената у овом низу је дељиво са 67?*

Решење: Напишимо првих неколико врста овог низа:

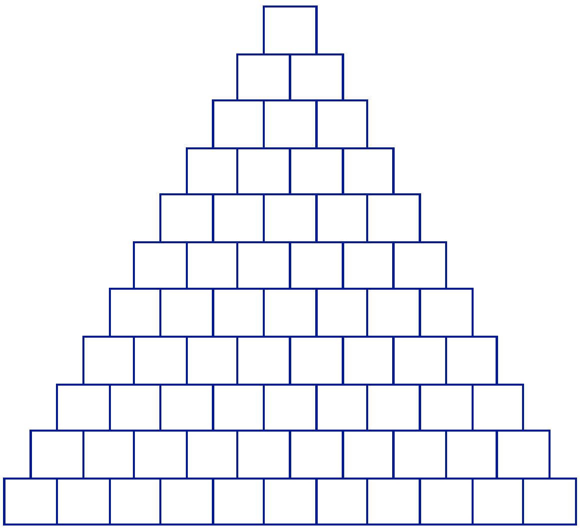
$$
\begin{array}{l}
1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11\ldots \ 97 \quad 99\\
\quad 4 \quad 8 \quad 12 \quad 16 \quad 20\ldots \quad 196\\
\qquad 12 \quad 20 \quad 28 \quad 36\ldots \quad 388\\
\qquad\qquad\qquad \ldots
\end{array}
$$

Приметимо да су, почев од друге врсте, сви елементи врсте m дељиви са 2^{m-1}. Када сваку врсту $m \geq 2$, поделимо са 2^{m-1}, низ ће постати:

$$
\begin{array}{l}
1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 11\ldots \quad 97 \quad 99\\
\quad 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10\ldots \quad 98\\
\qquad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9\ldots \quad 97
\end{array}
$$

Овај поступак не утиче на дељивост бројем 67. Уочимо да непарне врсте садрже елемент који је дељив са 67. Такође, пошто се број елемената умањује за један у свакој следећој врсти, последњих 66 врста неће имати бројеве дељиве са 67. Од преостале 33 врсте, свака непарна врста има елемент дељив са 67, или укупно $\frac{33+1}{2}=17$. Ово повлачи да ће овај низ имати 17 елемената дељивих са 67.

Задатак 4. (AIME II 2007) *У низу квадрата у троугаоном облику са слике видимо да у првој врсти низ има један квадрат, у другој - два, у трећој - три и тако даље. Сваки квадрат лежи на два квадрата која су директно испод тог квадрата. У сваки од квадрата у 11-тој врсти су уписани 0 или 1. Онда су и остали квадрати попуњени бројевима који прате законитост да је број у сваком квадрату (од десете врсте навише) једнак суми бројева у два квадрата директно лево и десно испод. На колико различитих начина можемо уписати 0 и 1 у квадрате у 11-тој врсти тако да је у квадрату на врху добијен број који је дељив бројем 3?*



Решење: Означимо бројеве у 11-тој врсти са $x_0, x_1, x_2, \dots x_{10}$. Ако посматрамо број путања којим сваки од датих бројева x_i „путује“ до врха, уочићемо да је број путања за сваки од бројева x_i, једнак броју који презентује колико пута је x_i додат суми која ће презентовати број на врху пирамиде. Број на врху пирамиде је једнак:
$\binom{10}{0}x_0+\binom{10}{1}x_1+\binom{10}{2}x_2+\dots+\binom{10}{10}x_{10}$. Сви сабирци почев од трећег до деветог имају као фактор број 9 у имениоцу, па ће бити дељиви са 3. На пример, трећи сабирак је:
$\binom{10}{2}x_2=\frac{10!}{2!8!}x_2=\frac{9\cdot 10}{2}x_2$ и евидентно је дељив са 9. Значи, посматраћемо само прва два и последња два сабирка, или за које вредности x_i је:
$x_0+10x_1+10x_9+x_{10}\equiv 0 \pmod 3$. Пошто је $10\equiv 1 \pmod 3$, можемо посматрати само:
$x_0+x_1+x_9+x_{10}\equiv 0 \pmod 3$. Ова сума је дељива са 3, ако су сви сабирци 0, или ако су три

од четири дата сабирка 1. Број могућих комбинација за овај исход је: $1+\binom{4}{3}=1+4=5$.

Пошто преостале вредности $x_2,\ x_3,\ldots x_8$, могу бити 0 или 1, то нам даје $2^7=128$ могућности, или укупно $5\cdot 128=640$ начина.

Задатак 5. (AIME 1992) *У којој врсти Паскаловог троугла ће три узастопна броја бити у размери* $3:4:5$?

Решење: Три узастопна броја у Паскаловом троуглу можемо представити као: $\binom{n}{r},\ \binom{n}{r+1},\ \binom{n}{r+2}$. Одавде следи да је:

$$\frac{3}{4}=\frac{\dfrac{n!}{r!(n-r)!}}{\dfrac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}}=\frac{r+1}{n-r}\ \text{ и слично, }\ \frac{4}{5}=\frac{\dfrac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}}{\dfrac{n!}{(r+2)!(n-r-2)!}}=\frac{r+2}{n-r-1}\ .$$

Ако решимо систем једначина:

$\frac{3}{4}=\frac{r+1}{n-r},\ \frac{4}{5}=\frac{r+2}{n-r-1}$ или $3(n-r)=4(r+1)$ и $5(r+2)=4(n-r-1)$, добијамо:

$$\begin{aligned}&3n-7r=4\ /\cdot 9\\&\underline{4n-9r=14}\ /\cdot 7\\&27n-63r=36\\-\ &\underline{28n-63r=98}\\&n=62\\&3\cdot 62-7r=4\Rightarrow r=26\end{aligned}$$

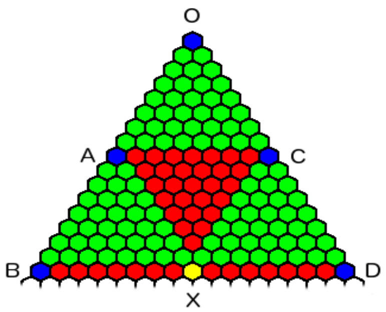
Ова три броја су: $\binom{62}{26},\ \binom{62}{27}$, и $\binom{62}{28}$, а налазе се у 63-ој врсти Паскаловог троугла.

Задатак 6. *Колико има непарних бројева у 2013-тој врсти Паскаловог троугла? Пронађи опште правило за проналажење броја непарних елемената у n-тој врсти Паскаловог троугла.*

Решење: Нека *f(n)* представља број непарних елемената у *n*-тој врсти Паскаловог троугла. За неколико првих вредности *n* имамо:

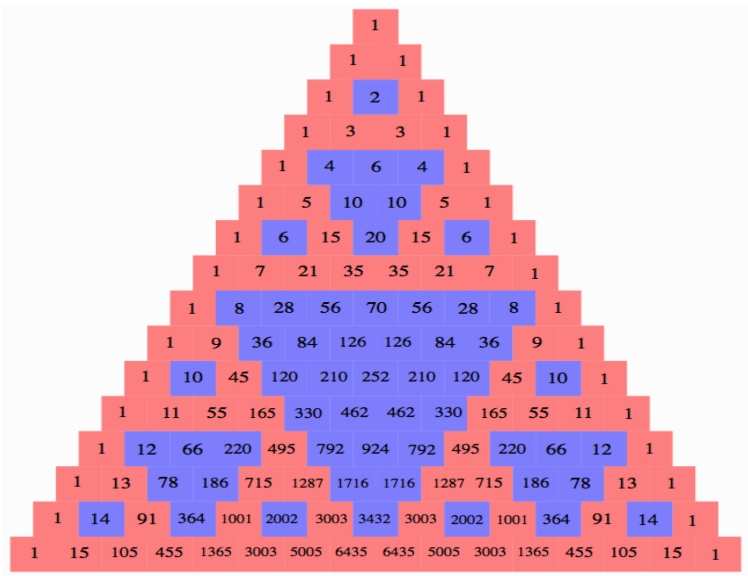
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
f(n)	1	2	2	4	2	4	4	8	2	4	4	8	4	8	8	16	2

Ако означимо блокове у низу вредности *f(n)*: 1| 2| 2, 4| 2, 4, 4, 8| 2, 4, 4, 8, 4, 8, 8, 16| 2, 4, 4, 8, 4,… можемо уочити законитост да су вредности у сваком следећем блоку двоструке вредности сваког од бројева у свим претходним блоковима, у истом поретку. Такође, приметимо да се прекиди у блоковима јављају после прве, друге, четврте, осме, шеснаесте, и тако даље позиције у низу вредности. Сваки од блокова (сем првог) почиње са 2, па претпоставимо да за сваки $k \geq 1$, свака 2^k врста има само парне бројеве (осим крајња два броја која су јединице). За k = 1, важи да врста #2 садржи само паран број (осим крајња два броја). Користећи индукцију докажимо да, ако ова претпоставка важи за сваку 2^k врсту, важи и за 2^{k+1} врсту. Нека на дијаграму испод, линија од A до C представља врсту 2^k. Крајња два броја офарбана плавом бојом су непарни бројеви, а парни бројеви су означени црвеном бојом. Доажимо да врста 2^{k+1}, или елементи на линији BD имају све бројеве парне (осим крајња два). Зелени бројеви могу бити парни или непарни.



Оно што знамо је да ако саберемо два парна броја, резултат је паран број. Ако саберемо два непарна броја, резултат је паран број. Такође, ако саберемо један паран и један непаран број, резултат је непаран број. Водећи се овом логиком, добијамо да су сви бројеви на линији BX парни (не укључујући B и X), и сви бројеви на линији XD су парни (не укључујући D и X). Пошто су сви бројеви на линији AC парни, то ће и сви бројеви који су у следећим врстама добијени сабирањем два парна броја бити парни, те је троугао ACX формиран од само парних бројева (не укључујући бројеве A, C, и X). Пошто су два елемента директно изнад броја X непарни, број X је паран број. Овим смо показали да 2^{k+1} врста има само парне бројеве (не укључујући два крајња броја B и D).

На слици испод је приказана дистрибуција парних и непарних бројева у делу Паскаловог троугла.



Значи да је број непарних елемената по врстама означених функцијом *f(n)* следећи:

a. $f(0)=1$.

b. Ако је $n=2^m$ где је *m* позитиван цео број, онда је $f(n)=2$.

c. Ако је $n=2^m+r$, где је *r* позитиван цео број, а 2^m највећи експонент броја 2 мањи од *n*, онда је $f(n)=2\cdot f(r)$.[39]

На пример:

$$\begin{aligned} f(14) &= f(2^3+6) \\ &= 2\cdot f(6) \\ &= 2\cdot f(2^2+2) \\ &= 2\cdot 2\cdot f(2) \\ &= 8. \end{aligned}$$

Са слике изнад можемо проверити да врста #14 уистину има 8 непарних елемената.
Број непарних бројева у 2013-тој врсти Паскаловог троугла је:

$$\begin{aligned} &f(2013)=f(2^{10}+989)=2\cdot f(989) \\ &2\cdot f(2^9+477)=2^2\cdot f(477) \\ &2^2\cdot f(2^8+221)=2^3\cdot f(221) \\ &2^3\cdot f(2^7+93)=2^4\cdot f(93) \\ &\ldots \\ &2^7\cdot f(2^2+1)=2^8\cdot f(1) \\ &2^8\cdot 2=512. \end{aligned}$$

Задатак 7. *Сваки природни број се може представити као сума експонената броја* 2 *на јединствени начин. На пример,* 27 =16 + 8 + 2 +1. *За број k кажемо да је „подређен“ броју n, ако су експоненти броја* 2 *коришћени да би се добио број n, такође коришћени да би се добио број k. На пример, бројеви* 10 *и* 19 *су „подређени“ броју* 27, *јер* 10 = 8 +2 *и* $19=16+2+1$. *Доказати да ако је* $\binom{27}{k}$ *непаран, онда је „подређен“ броју* 27.

Решење: Из предходног задатка знамо да су сви бројеви $\binom{2^n}{k}$ парни за $1<k<2^n$ (само су крајња два броја јединице, односно непарни бројеви). Ово повлачи да је $(1+x)^{2^n}\equiv 1+x^{2^n} \pmod 2$. Такође знамо да су елементи у врсти #27 Паскаловог троугла коефицијенти биномне формуле $(1+x)^{27}$. Када се ова биномна формула прошири и такође израчуна по модулу 2, само експонети x^k, такви да су $\binom{27}{k}$ непарни, ће се појавити у развоју. Са друге стране, имамо да је:

$$(1+x)^{27} = (1+x)^{16+8+2+1} = (1+x)^{16}\cdot(1+x)^{8}\cdot(1+x)^{2}\cdot(1+x)$$
$$\equiv (1+x^{16})\cdot(1+x^{8})\cdot(1+x^{2})\cdot(1+x) \pmod 2.$$

Када овај израз проширимо, могуће вредности за експонент k броја x^k који се појављује су: 1, 2, 8, 16, или суме неких од ових бројева или сума сва четири броја. Ово повлачи да број k мора бити „подређен“ броју 27.

Задатак 8. *Да ли је* $\binom{1000}{500}$ *дељив бројем 7?*

Решење: Користићемо Лукасову теорему. Пошто је:
$500 = 1\cdot 7^3 + 3\cdot 7^2 + 1\cdot 7 + 3 = 1313_7$, и $1000 = 2\cdot 7^3 + 6\cdot 7^2 + 2\cdot 7 + 6 = 2626_7$, онда је

$$\binom{1000}{500} \equiv \binom{2}{1}\binom{6}{3}\binom{2}{1}\binom{6}{3} = 2\cdot 2\cdot\frac{6!}{3!3!} = 80 \equiv 3 \pmod 7.$$

Пошто постоји остатак када се $\binom{1000}{500}$ подели бројем 7, следи да дати број није дељив бројем 7.

Задатак 9. *Ако је* F_n n-ти члан *Фибоначијевог низа, доказати да је*

$$F_1\binom{n}{1} + F_2\binom{n}{2} + \ldots + F_n\binom{n}{n} = F_{2n}.$$

Решење: Користимо Бенетову формулу за n-ти елемент Фибоначијевог низа:

$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ за $n \ge 0$. Пошто је $F_0 = 0$, имамо да је:

$$\sum_{i=0}^{n} F_i\binom{n}{i} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i - \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i\right].$$

Користимо познату чињеницу да је $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$, па следи да је:

$$\sum_{i=0}^{n} F_i\binom{n}{i} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)^n\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Пошто је $\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)=\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2$, онда је претходни израз једнак:

$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\right]$. Добијени израз је F_{2n} елемент у Фибоначијевом низу.

7. Принцип инваријанти

Ако нека особина посматраног објекта приликом трансформације, процедуре или алгоритма остаје непромењена, за њу ћемо рећи да је *инваријантна*. Инваријантне тачке су већини познате у геометрији, као тачке које се пресликавају у себе приликом примене неких изометријских трансформација. Али, са феноменом инваријанти се сусрећемо и у другим гранама математике. Неки примери инваријанти су:

- Парност или непарност броја је инваријантна приликом множења парним бројем.
- Углови и однос растојања су инваријантани приликом било које трансформације којом се добијају сличне фигуре.
- Реални део и апсолутна вредност комплексног броја су инваријантни приликом израчунавања конјуговано комплексног броја.
- За било који планарни граф важи да је: (број чворова) – (број грана) + (број региона) инваријантан (и увек једнак 2).
- Број решења полиномне једначине остаје инваријанатан након линеарне смене.
- У геометрији, површина два полигона је инваријантна ако и само ако се један од полигона може изрезати на мање полигоне, а други полигон добити користећи добијене мање полигоне. Кажемо да су оваква два полигона једнакоразложива.[8]

У многим проблемима овог типа дати су почетни услови као и трансформација, али се често поставља питање да ли је одређени резултат могућ. Приликом решавања оваквих проблемских задатака ученици треба да утврде да ли постоји инваријанта из контекста задатка. Питања која треба поставити су:

- Шта остаје непромењено приликом извршавања трансформација?
- Да ли се може доћи до завршног стања применом трансформација?
- Како пронаћи сва завршна стања?

Проблемски задаци овог типа се не обрађују у редовној настави али су релативно често присутни на математичким такмичењима, па је корисно обрадити их са ђацима на додатној настави.

Пример 1. На табли су написани бројеви од 1 до 6. Игру играмо на следећи начин: Изаберемо било која два броја, обришемо их, а на табли напишемо њихову суму. Овај поступак понављамо док на табли не остане само један број. Које су могуће вредности овог преосталог броја?

Решење: Приметимо да, иако се бројеви који су исписани на табли мењају, сума свих бројева на табли у сваком кораку остаје непромењена, односно инваријантна.

[8] 1900 Hilbert је проширио ово на три димензије, са питањем да ли ће запремина два полиедра бити инваријантна ако су они једнакоразложиви. Овај проблем је познат као трећи Хилбертов проблем, а решио га је његов студент M.Dehn, који је доказао да ово не важи. Dehn је доказао да се два полиедра са истим запреминама могу разложити један у други ако и само ако се њихови диедарни углови разликују за рационални умножак броја π.

Пошто је сума бројева од 1 до 6 једнака 21, онда ће последњи број који је написан на табли бити број 21.

Пример 2. Троје људи *A, B*, и *C* играју игру. На почетку игре, особа *A* има 50 динара, особа *B* има 100 динара, а особа *C* има 200 динара. После сваког круга игре, победник је једна од три особе. Победник у сваком кругу игре добија по један динар од преостала два играча. Ако један од играча у неком тренутку остане без пара, игра може да се настави тако што ће играч који је остао без пара позајмити од било ког играча који има пара. Да ли је могуће да на крају ове игре, сваки од три играча има по 100 динара?

Решење: У овој игри укупна сума пара, којом играчи располажу, остаје непромењена, па је укупна сума инваријанта. Пошто је на почетку игре укупна сума $50+10+200=350$ динара, то играчи никада неће доћи у ситуацију да сваки има $(13,15,17)\equiv\{1,0,2\}(\mathrm{mod}\,3)$. по 100 динара, јер је $100+100+100=300$ динара.

Пример 3. На једном острву се налази 13 сивих, 15 браон, и 17 зелених камелеона. Ако се два камелеона различитих боја сретну, оба промене боју у трећу боју. Да ли је могуће да после неког броја сусрета, сви камелеони имају исту боју?

Решење: Нека *a, b* и *c* представљају редом број сивих, браон и зелених камелеона. После сваког сусрета два камелеона могући исходи су:
$(a+2,b-1,c-1),(a-1,b+2,c-1)$, или $(a-1,b-1,c+2)$. Ако број сивих, браон или зелених камелеона после сваког сусрета поделимо са 3, могући остаци су 0, 1, или 2. Овај скуп остатака $\{0,1,2\}$ је инваријантан без обзира на број сусрета камелеона. На почетку, број камелеона је $(13,15,17)$ или Ако проверимо шта се дешава после могућих сусрета камелеона, утврдићемо да је:

$(13+2,15-1,17-1)=(15,14,16)\equiv\{0,2,1\}(\mathrm{mod}\,3)$ - за први случај,

$(13-1,15+2,17-1)=(12,17,16)\equiv\{0,2,1\}(\mathrm{mod}\,3)$ - за други случај,

$(13-1,15-1,17+2)=(12,14,19)\equiv\{0,2,1\}(\mathrm{mod}\,3)$ - за трећи случај.

Ако би сви камелеони на крају имали исту боју, имали бисмо један од ова три случаја: $(45,0,0),(0,45,0)$, или $(0,0,45)$, што је $\equiv\{0\}(\mathrm{mod}\,3)$. Закључујемо да је ова ситуација немогућа, те сви камелеони никада неће имати исту боју.

Пример 4. На шаховској табли, димензија 8×8, два крајња дијагонално супротна поља су отклоњена тако да шаховска табла има 62 поља. Да ли овакву шаховску таблу можемо прекрити са 2×1 правоугаоницима који су величине два узастопна поља?

Решење: Два супротна поља на шаховској табли су увек исте боје. Приликом прекривања шаховске табле датим правоугаоницима, сваки ће прекрити два узастопна поља која су на шаховској табли увек различитих боја (једно бело и једно црно поље). Значи да је број прекривених белих поља, минус број прекривених црних поља, увек једнак нули, па је ова разлика инваријанта. Како смо уклонили два поља исте боје, на пример црна, треба приметити да је разлика између укупних белих и црних поља на оваквој шаховској табли 32 – 30 = 2. Ово значи да овакву шаховску таблу не можемо прекрити датим правоугаоницима.

У неким задацима је врло тешко одредити особину која остаје непромењена услед низа трансформација, или инваријанту. У неким задацима, чак и кад уочимо инваријанту, она нам неће помоћи да дођемо до решења. У оваквим случајевима можда можемо да пронађемо особину датог објекта која се континуирано умањује или увећава при процесу извршавања алгоритма.

Пример 5. Миша и Оља играју игру са великом таблом чоколаде у облику 10×10 квадрата. У сваком кораку, један играч или поједе целу таблу или поломи једну од табли чоколаде на две правоугаоне табле, по линији која раздваја коцкице чоколаде на табли. Играч који игра последњи губи игру. Ко ће победити?

Решење: Први играч вероватно неће појести целу чоколаду, јер у том случају губи игру. Ако први играч поломи чоколаду на две табле, онда други играч поломи једну од табли на два дела, па ће број табли бити 3, или ће појести једну од табли, па ће остати само једна табла. У сваком кораку, број табли чоколаде се увећава за један (ако играч поломи таблу на два дела) или се смањује за један (ако играч поједе таблу). Играч који игра први увек игра са непарним бројем табли чоколаде. Овај број је инваријантан по модулу 2. Пошто играчи не могу бесконачно да деле таблу чоколаде, први играч ће после извесног броја рунди игре остати са парчетом које не може више да се дели, па ће морати да поједе задњу коцкицу чоколаде и тиме изгуби игру.

Пример 6. Хиљаду људи борави у једном великом замку који има 100 соба. Сваке минуте, сем ако сви људи нису у истој соби, једна особа се премести у другу собу у којој је исти или већи број људи од оне из које особа долази. Доказати да ће после извесног времена сви људи завршити у истој соби.

Решење: Нека је $a_1, a_2, a_3, ..., a_{100}$ број људи у свакој од 100 соба. Очигледно је да се укупан број људи неће променити ако се гости хотела премештају из собе у собу, али ова чињеница нам неће помоћи да решимо проблем. Уместо да посматрамо $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{100}$, посматраћемо суму квадрата броја људи у собама или $M = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_{100}^2$. Можемо претпоставити да је $a_1 < a_2$ и да се особа преместила из собе 1 у собу 2. Онда је нова вредност:

$$M_{нова} = (a_1 - 1)^2 + (a_2 + 1)^2 + a_3 + ... + a_{100}$$

$M_{нова} > M$, ако је $(a_1 - 1)^2 + (a_2 + 1)^2 > a_1^2 + a_2^2$, односно ако је

$$a_1^2 - 2a_1 + 1 + a_2^2 + 2a_2 + 1 > a_1^2 + a_2^2.$$

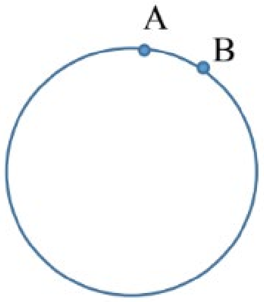
Из ове неједнакости добијамо да је $a_1 < a_2 + 1$, што повлачи да је $a_1 < a_2$ што смо и претпоставили. Одавде можемо закључити да се у сваком кораку нова вредност *M* увећава. Пошто вредност *M* има своју максималну вредност (*M* не може бити већа од $100 \cdot 1000^2$, јер је сваки $a_i \le 1000$), то је овај процес коначан. Пошто се процес премештања завршава само ако су сви људи у једној соби, овим смо доказали да ће се после извесног времена то и десити.

Пример 7. У скупштини Србије сваки посланик има највише три непријатеља. Посланик не може бити свој непријатељ и непријатељство између два посланика је узајамно. Доказати да се скупштина може поделити на две групе посланика, тако да сваки посланик има највише једног непријатеља у групи у којој се налази.

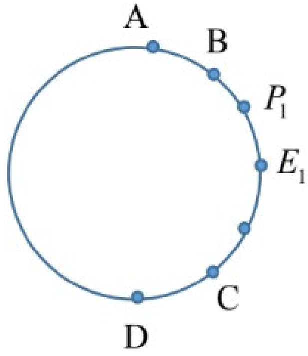
Решење: Ово је тип задатка у коме се тражи да се докаже да је неки распоред могућ. Овакав тип задатка обично можемо решити тако што ћемо кренути од произвољног распореда, а уведена трансформација ће омогућити да се корак по корак стигне до жељеног циља.
Нека се посланици распореде произвољно у две групе. Нека је A сума свих непријатеља сваког од посланика у групи 1. Ако посланик p из групе 1, има бар два непријатеља у својој групи, онда ће он прећи у другу групу у којој има највише једног непријатеља (пошто сваки посланик има највише 3 непријатеља). Овим ће се број A смањити за бар 4. На пример, ако је p непријатељ са посланицима q и r, онда је посланик q непријатељ са послаником p, и посланик p непријатељ са послаником r, што је укупно 4 непријатељства. Ако наставимо овај поступак премештања посланика, A ће се смањивати у сваком кораку. Пошто је A природан број, односно A има минимум, то се овај процес премештања посланика мора завршити. Ово значи да више не постоји посланик који има бар два непријатеља у својој групи чиме је тврђење доказано.

Пример 8. Племићки сенат планете Набоо има 12 чланова. Неки чланови овог сената не воле једни друге, али сваки од чланова сената не воли мање од половине чланова. Приликом заседања сената сви чланови се смештају око округлог стола. Краљица Амидала, која организује заседање, зна да неки чланови не воле једни друге и хоће да направи распоред седења тако да два члана која се не воле не седе један поред другог. Да ли ће краљица Амидала успети у свом покушају?

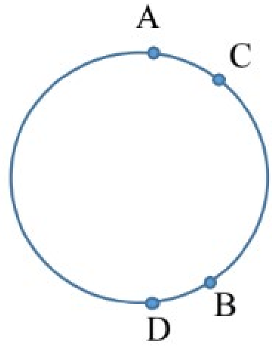
Решење: Распоредимо чланове сената на произвољан начин. Нека је k број чланова сената који се не воле али седе један поред другог у овом распореду. Нека члан A не воли члана B и нека члан B седи поред члана A у смеру казаљке на сату (*Слика 1*). Постоји бар шест чланова $P_1, P_2, ..., P_6$ које A воли. Других шест чланова сената седи у произвољном распореду поред чланова $P_1, P_2, ..., P_6$. Бар једног од њих B воли (јер B не воли највише 5 чланова и један од њих је члан A). Значи, постоји пар чланова C и D таквих да A воли члана C, B воли члана D, а чланови C и D седе један поред другога у смеру казаљке на сату (*Слика 2*). Ако заменимо места члановима B и C, онда ће члан A седети поред члана C (кога воли), а у супротном смеру казаљке на сату, поред члана D (*Слика 3*). Ово значи да се број чланова који седе један поред другог - k, а не воле се, смањио за један. Ако постоји други пар чланова који седе један поред другог, а не воле се, краљица Амидала ће поновити поступак. Пошто је k природан број, може се смањивати коначно много, што значи да ће се процес премештања завршити.



Слика 1



Слика 2



Слика 3

Пример 9. Природни бројеви од 1 до 2015 су написани на табли. Два произвољна броја су изабрана и замењена позитивном разликом два избрисана броја. Овај процес се понавља док не остане само један број. Да ли је преостали број паран или непаран?

Решење*:* У низу првих 2015 природних бројева, непарних је 1008 бројева а парних 1007 бројева. Могућности приликом извршавања задате трансформације су следеће:

1) Ако су са табле избрисана два парна броја, разлика је паран број, па је укупан број непарних бројева остао непромењен.
2) Ако су са табле избрисана два непарна броја, разлика је паран број, што повлачи да се број непарних бројева умањио за два.
3) Ако су са табле избрисани један паран и један непаран број, разлика је непаран број, па је укупан број непарних бројева остао непромењен.

Пошто укупан број непарних бројева, при извршавању трансформације, остаје непромењен или се умањује за два, а пошто је полазни број непарних бројева 1008, то ће сви непарни бројеви бити избрисани после извесног броја корака. Преостали број на табли је паран.

7.1 Примери задатака за додатну наставу и такмичарски задаци (инваријанте)

Задатак 1. (IMO 1986) *Сваком темену правилног петоугла је додељен један цео број, тако да је сума бројева на теменима позитивна. Ако су бројеви x, y, и z додељени трима узастопним теменима петоугла, и ако је $y < 0$, онда се бројеви x, y, и z замењују бројевима $x + y$, $-y$, и $z + y$, у овом поретку. Ова трансформација се понавља док је бар један од бројева негативан. Да ли се ова процедура завршава у коначно много корака?*

Решење: Приметимо да, приликом извршавања ове трансформације, сума бројева на теменима остаје непромењена, али ова информација нам неће помоћи да решимо задатак. Логично је да посматрамо суму апсолутних вредности, јер ће се она мењати из корака у корак. На пример, ако су три узастопна броја $(x,y,z)=(2,-4,5)$, после трансформације, вредности темена су вредности $(-2,4,1)$. Значи, сума $|2|+|-4|+|5|=11$ постаје $|-2|+|4|+|1|=7$. Приметимо да се $|y|$ није променило, док су се вредности $|x|$ и $|z|$ промениле. При сваком кораку, сума апсолутних вредности бројева на теменима се умањује за: $|x|+|z|-|x+y|-|z+y|$. Проблем је у томе што овај израз није увек позитиван, а наш циљ је да, ако је могуће, пронађемо функцију чија је монотоност инваријантна и која ће се при сваком кораку смањивати. Уместо да посматрамо суму апсолутних вредности бројева на теменима, посматрајмо следећу суму:

$$\begin{aligned}S(u,w,x,y,z)=&|u|+|w|+|x|+|y|+|z|+|u+w|+|w+x|+|x+y|+|y+z|+|u+z|\\&+|u+w+x|+|w+x+y|+|x+y+z|+|y+z+w|+|z+u+w|\\&+|u+w+x+y|+|w+x+y+z|+|x+y+z+u|+|y+z+u+w|+|z+u+w+x|.\end{aligned}$$

Након извршавања трансформације, сума S постаје (црвеним су означени сабирци који ће се променити):

$$\begin{aligned}S_1(u,w,x,y,z)=&|u|+|w|+|x+y|+|y|+|y+z|+|u+w|+|w+x+y|+|x|+|z|+|z+u+y|\\&+|u+w+x+y|+|w+x|+|x+y+z|+|z+u|+|z+y+u+w|\\&+|u+w+x|+|w+x+y+z|+|x+z+y+u|+|z+u+w|+|z+u+w+x+2y|.\end{aligned}$$

Пошто је $S-S_1=|z+u+w+x|-|z+u+w+x+2y|$ или

$S_1=S-|z+u+w+x|+|z+u+w+x+2y|$

онда уочавамо да се сума S умањила за $|z+u+w+x|-|z+u+w+x+2y|$.

Нека је $M=u+w+x+y+z$, па је овај израз једнак $|M-y|-|M+y|$. Пошто је $M>0$, а $y<0$, онда је $|M-y|>|M+y|$ или $|M-y|-|M+y|>0$. Пошто се сума S умањује за вредност која је позитиван цео број, процес се мора завршити.

Задатак 2. (IMO 2005) *Нека је n маркера поређано један поред другог. Сваки маркер је бео на једној страни, а црн на другој. Сви маркери су иницијало постављени са белом страном навише. У сваком кораку бирамо маркер који је окренут белом бојом навише (али не крајње маркере), отклањамо га, а суседна два маркера окренемо супротном бојом навише. Доказати да ако можемо доћи до тренутка у коме су преостала само два маркера онда n-1 није дељив са 3.*

Решење: Приметимо да се парност црних маркера не мења током ове процедуре, јер се при сваком кораку број црних маркера увећава за два, смањује за два или остаје непромењен. Ако су два маркера преостала после низа корака, онда они имају исту боју. Сваком белом маркеру који са леве стране има t црних маркера доделимо број $(-1)^t$ и посматрајмо суму ових бројева. Ова сума је једнака броју n при почетној конфигурацији. Са друге стране, нека је S остатак при дељењу бројем 3 суме свих бројева додељених белим маркерима. Ова вредност је инваријантна приликом извршавања горе поменуте процедуре.

Ако је бели маркер који има t црних маркера на левој страни уклоњен, онда се S увећава за $-(-1)^t + (-1)^{t-1} + (-1)^{t-1}$. Размотримо могуће случајеве. Нека B представља бели маркер, а C црни маркер.

1) Нека је изабрани бели маркер између два црна маркера:
   …*C, B* (*овај маркер се уклања, тј.* $-(-1)^t$), *C* $\rightarrow$… *B* ($+(-1)^{t-1}$), *B* ($+(-1)^{t-1}$.)
   Значи, сума бројева додељена белим маркерима се увећала за $-(-1)^t + (-1)^{t-1} + (-1)^{t-1}$, што је једнако $(-1)^{t-1} + (-1)^{t-1} + (-1)^{t-1}$, или $3(-1)^{t-1}$, а $3(-1)^{t-1} \equiv 0 \pmod{3}$.
2) Нека је изабрани бели маркер између два бела маркера:
   …*B* (*овај маркер постаје црни, тј.* $-(-1)^t$), *B* (*овај маркер се уклања, тј.* $-(-1)^t$), *B* (*овај маркер постаје црни, тј.* $-(-1)^t$) $\rightarrow$…*C, C*.
   Значи, сума бројева додељена белим маркерима се увећала за:
   $-(-1)^t + (-1)^{t-1} + (-1)^{t-1}$ (јер је $-(-1)^t - (-1)^t - (-1)^t = (-1)^{t-1} + (-1)^{t-1} + (-1)^{t-1}$).
   Такође, $-(-1)^t - (-1)^t - (-1)^t = 3(-1)^{t-1} \equiv 0 \pmod{3}$.
3) Нека је изабрани бели маркер између црног и белог маркера:
   …*C* (*овај маркер постаје бели, тј.* $+(-1)^{t-1}$) B (*овај маркер се уклања тј.* $-(-1)^t$), *B* (*овај маркер постаје црни, тј.* $-(-1)^t$) …*B* ($+(-1)^{t-1}$), *C*.
   Значи, сума бројева додељена белим маркерима се увећала за
   $-(-1)^t - (-1)^t + (-1)^{t-1}$, што је једнако $(-1)^{t-1} + (-1)^{t-1} + (-1)^{t-1} = 3(-1)^{t-1} \equiv 0 \pmod{3}$.
4) Нека је изабрани бели маркер између белог и црног маркера:
   …*B* (*овај маркер постаје црни, тј.* $-(-1)^t$), *B* (*овај маркер се уклања, тј.* $-(-1)^t$), *C* (*овај маркер постаје бели, тј.* $+(-1)^{t+1}$).
   У овом случају, сума бројева додељена белим маркерима се увећава за $-(-1)^t - (-1)^t + (-1)^{t+1}$, што је једнако $-(-1)^t - (-1)^t - (-1)^t = -3(-1)^t \equiv 0 \pmod{3}$

Из претходног видимо да се иницијална вредност суме S, при сваком кораку, увећава за вредност која је дељива бројем 3. Ако на крају остану два црна маркера, онда је S = 0, а ако на крају остану два бела маркера, онда је S = 2. У оба случаја је доказано да n-1 није дељив са 3.

Задатак 3. *Дата је уређена тројка бројева. При сваком кораку, два броја од три броја, рецимо a и b замењујемо са* $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ *и* $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. *Да ли је могуће, користећи ову операцију, добити уређену тројку* $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$, *ако је почетна уређена тројка* $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *?*

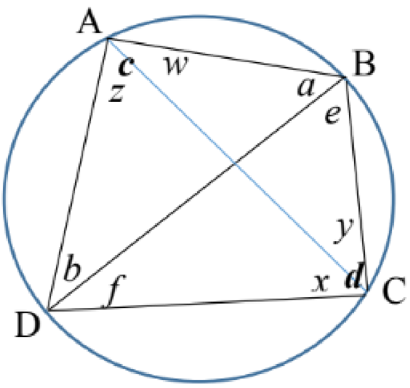
Решење: Пошто је $a^2 + b^2 = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2$, онда је сума квадрата бројева уређене тројке инваријанта при оваквој трансформацији. Такође, имамо да је сума квадрата завршне уређене тројке: $1^2 + (\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{2}$, а почетне тројке

$2^2+(\sqrt{2})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=6\frac{1}{2}$. Онда је закључак да није могуће трансформисати почетну тројку у $(1,\sqrt{2},1+\sqrt{2})$.

Задатак 4. (Класификациони тест индијског тима - IMO 2005) *Нека је полигон који има n страница, где је* $n\geq 4$, *уписан у круг. Поделимо полигон на* $n-2$ *троуглова повлачећи дијагонале које се не секу. Доказати да сума полупречника уписаних кругова у сваки од* $n-2$ *троуглова не зависи од начина на које је полигон подељен на троуглове.*

Решење: Не губећи на општости, доказаћемо тврђење за тетивни четвороугао, јер се дисекције могу трансформисати једна у другу користећи трансформације четвороугла представљене на слици испод. Такође, произвољну дисекцију полигона можемо увек трансформисати у дисекцију у којој све дијагонале полазе из истог темена, померајући крајње тачке дијагонала у једно заједничко теме.

Инваријанта је у задатку дата, па ћемо доказати да је она стварно инваријанта. Користићемо тригонометријски индетитет да је: $1+\frac{r}{R}=\cos X+\cos Y+\cos Z$, где је r полупречник уписаног круга троугла, R полупречник описаног круга око троугла, а X, Y, и Z су унутрашњи углови у троуглу. Доказаћемо да је сума $1+\frac{r_i}{R}$, где су r_i полупречници уписаних кругова у троуглове добијене дисекцијом, инваријантна. Користећи дијаграм испод и чињеницу да је збир косинуса суплементних углова једнака 0, јер је $\cos(180^o-x)=-\cos x$ имамо:



$\cos a+\cos b+\cos c+\cos d+\cos e+\cos f=\cos a+\cos b+\cos e+\cos f$ (јер је $\cos c+\cos d=0$).

Такође користимо чињеницу да су перферни углови над истим тетивама једнаки, па имамо да је последњи израз:

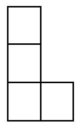
$=\cos x+\cos y+\cos z+\cos w$

$= \cos x + \cos z + \cos(b+f) + \cos y + \cos w + \cos(a+e)$ (јер је $\cos(b+f)+\cos(a+e)=0$).

Ако су r_1 и r_2 полупречници уписаних кругова троуглова *ABC* и *BCD*, а r_1^1 и r_2^1 полупречници уписаних кругова троглова *ADC* и *ABC*, онда је:

$1+\frac{r_1}{R}+1+\frac{r_2}{R}=1+\frac{r_1^1}{R}+1+\frac{r_2^1}{R} \Rightarrow r_1+r_2=r_1^1+r_2^1$, што је и требало да докажемо.

Задатак 5. *Да ли се под димензија* 11×4 *може у потпуности и без преклапања прекрити плочицама L облика као на слици?*



Решење: Поделимо под на 11×4 јединичних квадрата и нека је центар сваког квадрата тачка (x,y), $x,y\in Z$ у координатној равни. Офарбајмо под са четири боје користећи Клајнову 4-групу $K=\left\{a,b,c,d \,/\, a^2=b^2=c^2=e, ab=c, ac=b, bc=a\right\}$ на следећи начин. Ако су *x* и *y* непарни, офарбајмо то поље бојом *e*. Ако је *x* паран, а *y* непаран, офарбајмо поље бојом *c*. Ако је *x* непаран а *y* паран, поље се фарба бојом *b*, и ако је *x* паран и *y* паран, бојом *a*, као на слици испод.

b	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*
e	*c*	*e*	*c*	*e*	*c*	*e*	*c*	*e*	*c*	*e*
b	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*
e	*c*	*e*	*c*	*e*	*c*	*e*	*c*	*e*	*c*	*e*

Производ свих елемената у јединичним квадратима је *e*. Када се плочица постави на под, производ елемената четири квадрата које покривају је *a* или *b*. Ако се под може прекрити датим плочицама, онда $a^m b^n = e$ за $m+n=11$. Из овога следи да један од бројева *m* или *n* мора бити паран а други непаран. Са друге стране, пошто је $a^2=b^2=e$, то повлачи да оба броја *m* и *n* морају бити парни бројеви што је немогуће, па покривање пода датим плочицама није могуће.

Задатак 6. *Да ли је могуће прекрити квадратни под димензија* 10×10 *правоугаоним плочицама димензија* 4×1?

Решење: Посматрајмо групу: $m\in N$, $Z_m=\left\{0,1,\ldots,m-1\right\}$. За $a,b\in Z_m$ уведимо операцију $+_m : Z_m\times Z_m \to Z_m$, тако да је $a +_m b = a+b$ (mod m). За $m=4$, имамо следећу таблицу сабирања по модулу 4 групе Z_4:

$+_m$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Поделимо под на 100 јединичних квадрата. Сваком од квадрата доделимо један елемент Z_4 групе на следећи начин: ако је квадрат у i врсти и j колони, њему се додељује број $i+j \in Z_4$. Када се правоугаона плочица димензија 1×4 постави на било која четири поља, увек ће покривати поља са четири различита елемента групе Z_4. Да бисмо прекрили цео под, требаће нам 25 оваквих плочица. Ово значи да ће четири различита елемента групе Z_4 бити додељена свакој од 25 плочица. Са друге стране, приметимо да се, приликом додељивања елемената групе Z_4 сваком јединичном квадрату, сваки од елемената не додељује једнак број пута у свакој врсти. На пример, елемент 1 ће бити уписан у 24 различита поља, а број 3, у 26 различитих поља. Одавде закључујемо да није могуће поплочати под датим правоугаоним плочицама.

Задатак 7. *Правоугаони под димензија $k\times l$ треба поплочати користећи 2×2 квадратне плочице и 1×4 правоугаоне плочице. Показати да ако је могуће поплочати овај под са m квадратних плочица и n правоугаоних плочица, да онда није могуће поплочати дати под са m+1 квадратних плочица и n-1 правоугаоних плочица.*

Решење: Поделимо под на јединичне квадрате. Сваком пољу ћемо доделити један елемент групе Z_2 на следећи начин. Поље (i, j) је означено са 1, ако су i и j оба парни бројеви или са 0 у осталим случајевима. На пример, ако је под димензија 10×4, онда ће елементи групе Z_2 бити додељени пољима као на слици испод. Када се на под постави плочица димензија 2×2 на било који начин, она увек покрива једно поље означено са 1. Када се правоугаона плочица 1×4 постави на под, она покрива поља означена са 0 или два поља означена са 1, у парним врстама и парним колонама. Сума у Z_2 свих бројева у пољима прекривена са m квадратних и n правоугаоних плочица је $m+2n$, док је сума бројева у пољима прекривеним са m+1 квадратних и n-1 правоугаоних плочица једнака $m+1+2(n-1)=m+2n-1$. Овим смо показали да је тврђење задатка тачно.

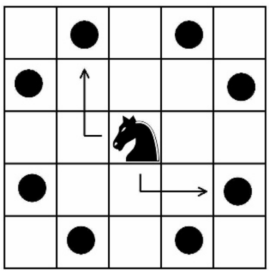
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Задатак 8. (Putnam[9] 2008) *Почнимо са позитивним низом природних бројева* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$. *Ако је могуће, изаберимо два индекса* $j < k$, *тако да* a_j *не дели* a_k *и заменимо* a_j и a_k *са* $nzd(a_j, a_k)$ *и* $nzs(a_j, a_k)$ *у овом поретку. Докажимо да се, ако се овај процес понавља, он мора завршити у једном тренутку.*

Решење: Прво приметимо да је производ $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 ... \cdot a_n$ инваријантан. Ово следи из чињенице да је $a_j \cdot a_k = nzd(a_j, a_k) \cdot nzs(a_j, a_k)$. Сваки елемент у низу је ограничен одозго овим производом. Последњи елемент у низу a_n се никад неће умањити, напротив може се само увећати, јер се замењује са $nzs(a_i, a_n)$. После извесног броја корака, a_n ће достићи своју максималну вредност, после чега се више неће мењати. Исто ће се поновити и са претпоследњим чланом низа a_{n-1} као и са осталим члановима низа у опадајућем поретку до тренука када је цео низ фиксиран и више се не може мењати. Овим смо доказали да ће се процес завршити.

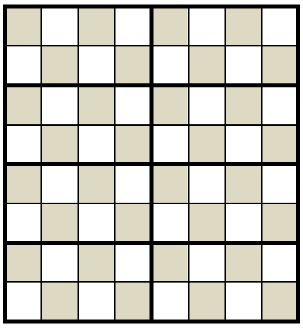
Задатак 9. *Хипатија и Гаус играју следећу игру на шаховској табли. Хипатија почиње игру тако што поставља коња (скакача) на једно поље шаховске табле. Гаус помера коња први, користећи стандардне покрете ове фигуре. Хипатија и Гаус наизменично померају коња (скакача) водећи рачуна да коњ заврши на пољу на коме није био ни у једном од претходних корака игре. Играч који нема где да помери коња губи игру. Да ли постоји стратегија која ће омогућити једном од ова два играча сигурну победу?*

Решење: Коњ (скакач) може да се помера на једно од 8 поља, као што је представљено на слици испод.



Ако је иницијално коњ спуштен на бело поље, после првог круга игре биће на црном пољу и обрнуто, ако је коњ спуштен на црно поље, после једног покрета ће се налазити на белом пољу. Претпоставимо да је коњ спуштен на бело поље. Онда ће Гаус померити коња на црно поље, па Хипатија на бело поље и тако даље. Значи, Хипатија увек помера коња на бело поље, а Гаус на црно. Ова чињеница је инваријанта. Пошто на шаховској табли постоји 32 бела поља и 32 црна поља и ако је свако поље на табли искоришћено током игре, онда је последње поље на које се коњ спушта црно, што повлачи да други играч побеђује. Размислимо шта би била победничка стратегија?
Поделимо шаховску таблу на 8 блокова димензија 2×4, као на слици.

[9] The William Lowell Putnam Mathematical Competition (Mathematical Association of America)



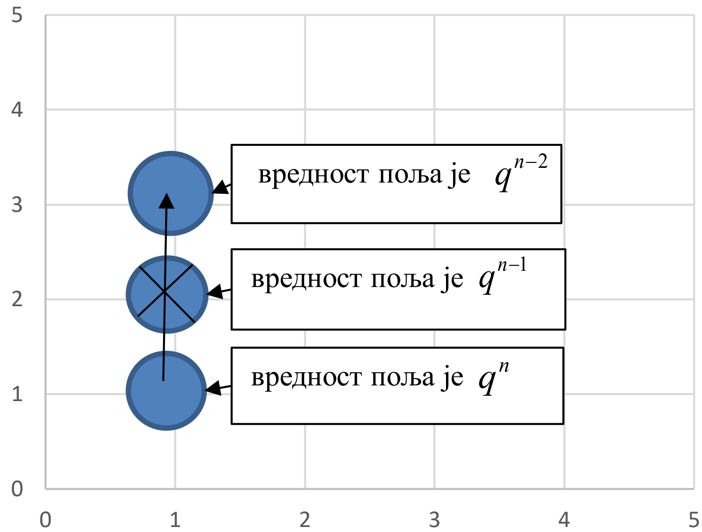
Први играч ће поставити коња у један од ових блокова. Други играч, има само једну могућност да помери коња, а да остане у истом блоку. Ако то и уради, први играч ће морати да помери коња ван овог блока. Ово значи да ће други играч увек моћи да помери коња тако што ће остати унутар блока, а први играч ће после извесног времена остати без могућег потеза. Ова стратегија ће омогућити Гаусу да сигурно победи.

Интересантно је поменути да су проблеми везани за *'скакачеве туре'* врло популарни у математици. Оригинални проблем би гласио овако:
Колике треба да буду димензије m и n шаховске табле тако да је могуће, да после низа дозвољених покрета, скакач обиђе свако поље табле тачно једанпут, и врати се на првобитно поље?
Овај проблем су решавали многи математичари кроз историју као што су: de Moivre, Euler, Vandermonde и тако даље.
Разликујемо затворене туре, у којима се коњ може вратити на првобитно поље, и отворене туре у којима се коњ не може вратити на првобитну позицију. У свом раду "Which Rectangular Chessboards Have a Knight's Tour?", Allen J. Schwenk је доказао да је за шаховску таблу димензија $m \times n,\ m \le n$, затворена тура могућа, осим ако је испуњен барем један од следећа три услова: i) m и n су оба непарни; ii) m = 1, 2 или 4; iii) m = 3 и n = 4, 6 или 8.
Schwenk је проблем скакачевих тура обрадио користећи графове са $m \times n$ темена, у којима је свако теме графа представља једно поље шаховске табле, а темена на графу су повезана ако је могуће померити скакача са једног на друго одговарајуће поље шаховске табле. Schwenk је доказао да је скакачева тура могућа ако и само ако постоји циклус кретњи по графу који садржи сва темена датог графа.[28]

Задатак 10. (МЕМО[10] припреме 2015) *У чворове правоугаоне координатне мреже $\{(i,j)/i,j \in Z\}$, за које је $j \le 0$ можемо поставити коначан број жетона на произвољан начин. У сваком кораку можемо померити жетон хоризонтално или вертикално преко једног заузетог чвора на мрежи, на чвор који није заузет. При томе се жетон који се прескаче уклања. Да ли се на овај начин са бар једним жетоном може стићи на један од чворова за који је $j \ge 5$?*

[10] The Middle European Mathematical Olympiad

Решење: Погледајмо да ли можемо стићи до чвора (0, 5). Доделимо сваком чвору мреже за који је $j \geq 5$ један број на следећи начин. Чвору (*x*, *y*) за који је $y = |x| + 5 - k$, где је *k* цео број, придружимо број q^k. На овај начин, чвору (0, 5) је придружен број 1 или q^0. Чвору директно испод је додељен број q, чвору испод q^2 и тако даље. Са *S* означимо суму бројева на којима су жетони. Број *q* бирамо тако да приликом сваког скока којим се приближавамо чвору (0, 5), *S* не мења вредност.



Пошто се при покрету ка позицији (0, 5), жетон са поља q^n помера на поље које има вредност q^{n-2}, а жетон са поља q^{n-1} уклања, ово значи да се *S* умањује за q^n и q^{n-1}, а увећава за q^{n-2}. Да би сума *S* остала непромењена, $q^{n-2} = q^{n-1} + q^n$. Одавде следи да је *q* позитивно решење једначине $q^{n-2} = q^{n-1} + q^n$, или $q = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ако се жетон са поља q^n помера у десно, онда се жетон који је непосредно са десне сране, а има вредност q^{n+1} уклања, а иницијални жетон долази на позицију q^{n+2}. При овом покрету се *S* умањује за q^n и q^{n+1}, а увећава за q^{n+2}.

Пошто је $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n + \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} > \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+2}$, уочавамо да се при сваком покрету жетона којим се удаљавамо од (0, 5), број *S* смањује. Дакле, *S* се никада не повећава. Ако се може стићи до чвора (0, 5), онда *S* мора бити бар 1, јер је вредност чвора (0, 5) једнака 1. Уколико покажемо да је *S* мањи од 1, доказаћемо да се не може стићи до чвора (0, 5). Израчунаћемо бесконачан збир свих вредности чворова за које је $j \leq 0$. Пошто је број жетона коначан, *S* је на почетку мањи од тог збира, тј. $S < S_0 + 2(S_1 + S_2 + S_3 + ...)$, где је S_i збир вредности на чворовима (*i*, *j*), где је $j \leq 0$.

Значи: $S < \dfrac{q^5}{1-q} + 2 \cdot \dfrac{q^6 + q^7 + ...}{1-q} = \dfrac{q^5}{1-q} + 2 \cdot \dfrac{q^6}{(1-q)^2}$

(користили смо формулу за збир геометријског низа $=\dfrac{q^5+q^6}{(1-q)^2}$) .

Пошто је $1=q+q^2$, имамо да је $\dfrac{q^5+q^6}{(1-q)^2}=\dfrac{q^4(q+q^2)}{q^4}=1$

Како је $S<1$, не може се стићи до чвора (0, 5), па се не може стићи ни до једног чвора (i,j) за који је $j\geq 5$.

Задатак 11. *Да ли се дати чвор може одвезати или не?*

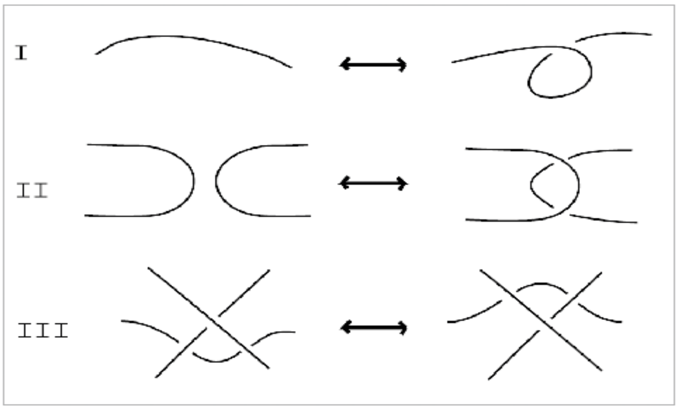
Следи веома упрошћено упознавање са теоријом чворова, да би овакав тип задатка могли да разумеју и ученици средњих школа.
Ако узмемо парче канапа који увежемо а онда крајеве канапа спојимо добићемо оно што у математици зовемо чвор. Формална дефиниција следи.

Дефиниција 1: *Чвор представља глатко утапање круга S^1 у еуклидски тродимензионални простор S^3. Ако се чвор може одвезати, онда се од њега може добити круг или прстен у тродимензионалном простору. Ако је ово изводљиво, онда је у питању тривијални чвор (нечвор).*

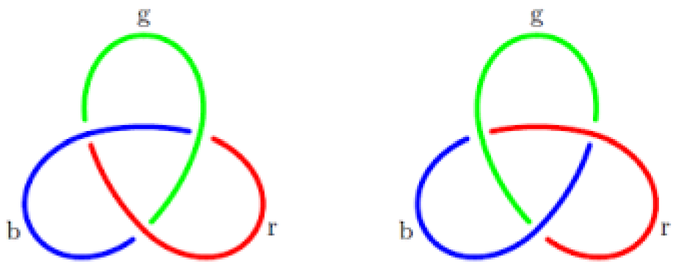
Два чвора K_1 и K_2 су еквивалентна (амбијентално изотопна) ако постоји непрекидна деформација простора S^3 која трансформише K_1 у K_2. Ово значи да, ако премотавањем или одмотавањем, од једног чвора можемо направити други, али без сечења и поновног спајања крајева и без сажимања неког дела чвора у тачку, онда су ови чворови еквивалентни.

Дефиниција 2: *Сенка чвора је пројекција чвора $K\subset S^3$ на дводимензионалну раван, тако да не постоје три тачке чвора које одговарају једној тачки у равни (релација „изнад-испод“ није дефинисана).*

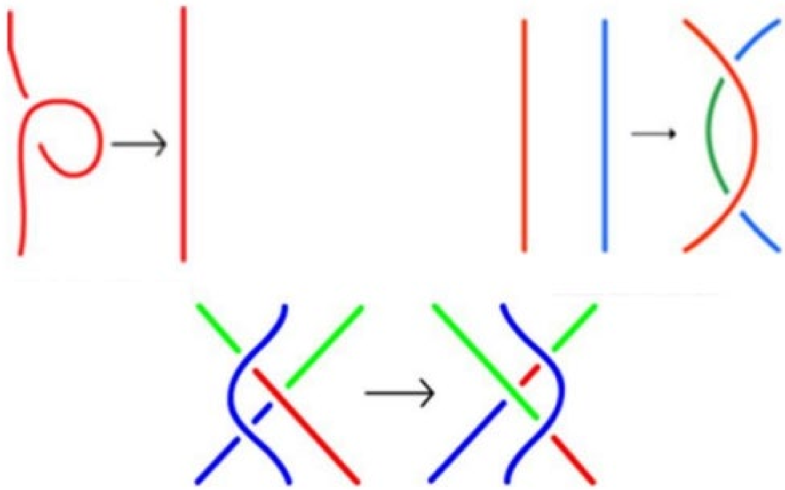
Да бисмо утврдили да ли су два чвора еквивалентна, можемо посматрати трансформације њихових дијаграма у равни, користећи *Рајдемајстерове* потезе илустроване на слици испод. Пројекција чвора је сенка чвора са додатним информацијама о односима „изнад-испод“.



Теорема Рајдемајстера се заснива на тврдњи да су два чвора еквивалентна (амбијентално изоморфна) ако се њихови дијаграми могу трансформисати један у други у коначно много потеза користећи три Рајдемајстерова покрета.
Рајдемајстер је такође први увео једну од инваријанти дијаграма чворова, а то је „трообојеност“. Ово значи да се дијаграм чвора може офарбати користећи три боје по следећем правилу. На сваком пресеку на дијаграму се користе све три боје или само једна боја. Да би се избегло тривијално фарбање једном бојом, све три боје морају бити коришћене бар једанпут при фарбању дијаграма (као на слици испод). Ова инваријанта је примењива и на саме чворове а не само на њихове дијаграме.[3][12][35]



На слици испод је приказано да ће се приликом примене Рајдемајстерових потеза „трообојеност “ очувати.



Решење: Из претходног следи да дати тролисни чвор из задатка има особину „тробојености“, а пошто је ова особина инваријантна приликом примене Рајдемајстерових потеза, онда закључујемо да ће и сваки дијаграм који добијемо приликом „одвезивања“ чвора такође бити „тробојености“. Такође, ако се овај чвор може „одвезати“, онда је његов најједноставнији дијаграм - круг. Са друге стране, тривијални чвор не може бити „тробојен“, јер круг нема пресека. Из овога следи да се дати чвор не може одвезати.

8. Закључак

Наставници су једни од најзначајнијих чинилаца који одређују квалитет образовања и важни су актери у одређивању школског успеха. Успешност наставе математике је условљена улогом наставника у наставном процесу, тако и ван наставе у погледу стручног усавршавања и планирања наставе. Промене у друштву условљавају промене у образовању чиме се од наставног кадра континуирано очекује да се прилагођава и мења дидактичке приступ наставног процеса. Такође, професионална улога наставника се стално мења и условљена је развојем технологија и променама у образовним захтевима. У савременом образовању акценат је стављен на активност ученика, тако да наставник више не представља центар образовања. У настави математике, од наставника се очекује да адекватно планира наставу, оспособљава ученике да развијају математичко мишљење и користе различите алате да би представили апстрактне појмове. Свеобухватно, најважнија улога наставника је да научи ђаке како да уче.

Ученици се кроз своје школовање континуирано сусрећу са различитим неочекиваним и интересантним законитостима у математици. Представљене кроз наставу, оне најчешће изазивају реакцију знатижеље и интересовања, као и жељу да се научено детаљније истражи и повеже са другим математичким чињеницама.

Идеја овог рада је да се обраде неке од законитости из теорије бројева које су интересантне за ученике старијих разреда основних школа и за средњошколце. Обрађени примери се могу користити у редовној настави при продубљивању већ научених чињеница везаних за низове бројева, степене бројева, факторијеле, и Паскалов троугао. Обрађени задаци, као и део рада везан за инваријанте, су превасходно намењени ученицима који похађају додатну наставу и припремају се за различита математичка такмичења. У сваком поглављу су наглашене важне чињенице и информације које је пожељно да ученици поседују при решавању специфичних типова задатака. Решени примери и задаци имају за циљ да имплементирају одређене законитости и помогну ученицима да споје научене чињенице и њихову непосредну примену при решавању проблема. Неки од задатака се намерно дотичу тема које нису детаљно обрађене, као што су бројевни системи, Мерсенови бројеви, Каталанови бројеви, теорија чворова, проблеми на шаховској табли и тако даље. Оваквим примерима се читаоци усмеравају на самостални истраживачки рад и ка чињеници да се до решења долази продубљивањем наученог, логичким размишљањем, и повезивањем чињеница.

Могућност даљег продубљивања теме би обухватало обрађивање различитих законитости у геометрији.

Литература

[1] Andreescu T., Gelca R. (2000). *Mathematical Olympiad Challenges*. London, Springer

[2] Andreescu T, Erescu B. (2010). *Mathematical Olympiad Treasure*. Svedska. Birkhäuser

[3] Adkinsson W. *An Overview of Knot Invariant Theory* -Abstract. University of Chicago. Доступно на: http://math.uchicago.edu/~may/REU2015/REUPapers/Adkisson

[4] American Invitational Mathematics Examination. Доступно на: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php

[5] Barnsley M.F. (1993). *Fractal Everywhere*. Cambridge. Academic Press

[6] Брнетић И. Иваријанте и моноваријанте, MEMO припреме 2015. Доступно на:

http://natjecanja.math.hr

[7] Conway J.H. (1996). *The Book of Numbers.* New York . Springer-Verlag

[8] Edwards A.W.F.(1987). *Pascal's Arithmetical Triangle*. London. Griffin

[9] Engel A. (1991). *Problem Solvining Strategies*. New York. Springer

[10] Forhan.E. (2014) *Polygonal Numbers and Finite Calculus*. Публикација.

[11] Ge K. (2016) *Two Theorems of Binomial Coefficients* - публикација. Доступно на: https://www.aquatutoring.org

[12] Gelca R., Andreescu T. (2007). *Putman and Beyond*. London. Springer

[13] Ибрахимпашић Б, Золић А. *Четири етапе за решавање линеарних конгруенција* - публикација. Доступно на: https://www.elib.mi.sanu.ac.rs/files/jurnals

[14] Ибрахимпашић Б, Золић А. Еуклидов алгоритам и његова примена – Артикал. Доступно на: http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/nm/245/nm581202.pdf

[15] Izmirli M. *On Some Properties of Digital Roots* – Артикал. Scientific Research. Доступно на: www.script.org/jurnal/apm

[16] Курник З. (2008). *Методика Математике* - Стручни рад. Доступно на: https://www.scribd.com/document/100450320/Kurnik-Hrv-metodika-Matematike

[17] Лаловић З. (2009). Наша Школа методе учења-наставе у школи. Завод за школство, Подгорица

[18] Larson L.C. (1982). *Problem-Solving Through Problems*. Problems Books in Mathematics Vol 5. Springer-Verlag

[19] Lavrov M. (2006). *The Invariance Principle* - Стручни рад. Доступно на: http://math.cmu.edu/~cargue/arml/archive/15-16/proofs-02-28-16-solutions.pdf

[20] Несторовић В. (2011). *Бројевне конгруенције* - Мастер рад. Природно-математички факултет, Универзитета у Новом Саду

[21] Santos D.A. (2005) *Number Theory for Mathematical Contests* – Збирка задатака.

[22] Parshall K.H. (1989). *Towards a History of 19th Century Invariant Theory*. D.E. Rowe and J. McCleary

[23] Петровић Н., Лазић Б. , Мрђа М.(2010). Методика разредне наставе - Прегледни чланак. Сомбор. Педагошки факултет у Сомбору

[24] Polya G. (2004). *How to Solve It*. Princeston. Princeston University Press

[25] Ранковић Д. - Проблемска и хеуристичка настава као савремени облици наставе математике - Стручни рад. Београд. САНУ

[26] Rajarama Bhat B.V.(2010). *Invariants* -Abstrakt. Indian Academy of Science. Доступно на: https://link.springer.com/article/10.1007/s12045-010-0045-1

[27] Романо Д.А. (2009). Истраживање математичког образовања - Стручни рад. Бања Лука. Природно-математички факултет. Доступно на: https://www.researchgate.net/publication/303728192_Istraživanje_matematičkog_obrazovanja

[28] Schwenk J. A (1991). *Which Rectangular Chessboard Have a Night's Tour*. Mathematics Magazine Vol.64.

[29] Spirit of Math (2012). *Grade 6, Grade 7, Grade 9 Teacher Curriculum Book*. Spirit of Math School Inc.

[30] Tao T. (2006) *Solving Mathematical Problems*. Department of Mathematics, USLA, LA. Oxford Press.

[31] Tattersal J. (1990). *Elementary Number Theory in Nine Chapters*. Cambrige University Press.

[32] The National Council of Teachers of Mathematics USA. Доступно на: https://www.nctm.org/

[33] University of Waterloo. (2014). *Pascal's Triangle* – Publication. Доступно на: http://www.cemc.math.uwaterloo.ca/events/mathcircle/2013-2014/winter/Junior6-Pascals Triangle_Mar45.pdf

[34] Verner E. (1969). *Fibonacci and Lucas Numbers*- Публикација. University of Santa Clara.

[35] Зековић А.З. (2015) Конвејева нотација у теорији чворова и њена примена у методама за одређивање растојања чворова - Докторска дисертација. Београд. Математички факултет

[36] Zeitz P. (2007). *The Art and Craft of Problem Solving.* New York. Wiely & Sons

[37] Zoller J. (2015) *Modular Arithmetic Practice*. Доступно на: http://math.cmu.edu/~cargue/arml/archive/15-16/number-theory-09-13-15-solutions.pdf

[38] *Results for the Patterns in Pascal's Triangle Problem.* Доступно на: http://www2.edc.org/makingmath/mathprojects/pascal/Pascal_results.asp

[39] http://mathcenter.oxford.emory.edu

[40] http://www.math.uwaterloo.ca

[41] http://www.brilliant.org

[42] http://www.purplemath.com

[43] http://www.ourworldindata.org

[44] http://www2.edc.org/makingmath/mathprojects

[45] https://zuov.gov.rs/

[46] http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/elementary/math.html

[47] https://primes.utm.edu/mersenne/

[48] https://www.math.bu.edu

[49] https://www.cut-the-knot.org

[50] http://jwilson.coe.uga.edu