Универзитет у Београду
Математички факултет

МАСТЕР РАД

Конвергенција вероватносних мера у метричким просторима и Прохоровљева теорема

Студент:
Никола Тешић

Ментор:
др Павле Младеновић

Београд
Септембар 2020.

Садржај:

Увод

Циљ овог рада је увођење појма слабе конвергенције вероватносних мера у метричким просторима, дефинисање и доказивање неких својстава које оне поседују и, коначно, као главни циљ, доказ Прохоровљеве теореме. Рад је подељен на четири поглавља према тим циљевима.

У првом поглављу, бавићемо се дефинисањем слабе конвергенције вероватносних мера у метричким просторима, као и неких других основних појмова. Такође, на неколико примера ћемо видети како можемо утврдити која од дефинисаних својстава поседују. У другом поглављу посветићемо се својствима слабе конвергенције вероватносних мера у метричким просторима. Видећемо алтернативне начине да докажемо слабу конвергенцију, као и примере у којима ћемо доказивати слабу конвергенцију. У трећем и за овај рад најбитнијем поглављу, дефинисаћемо и доказати Прохоровљеву теорему.

Четврто поглавље представља додатак - у њему ће бити доказане неке теореме које ћемо користити у прва три поглавља, и биће дефинисани и појмови које ћемо користити као што су сепарабилност, комплетност, компакстонст... Када будемо користили неку од теорема из додатка, даћемо назнаку којом теоремом долазимо до жељеног резултата. Измештањем ових дефиниција и доказа из главног дела рада, циљ је био да се смање дигресије у самом раду и да се одржи ток рада. Поред појмова који су дефинисани у Додатку, у раду нећемо дефинисати ни основне појмове из анализе, теорије мера и теорије вороватноће попут σ-алгебре, мере и вероватносне мере из истог разлога умањења дигресија у раду.

1 Слаба конвергенција у метричким просторима

У овом поглављу дефинисаћеомо слабу конвергенцију у метричким просторима, као и неке појмове који ће нам бити од користи као што су регуарност мере и густа мера и кроз теореме и примере ћемо испитивати ова својства. Појмови као што су сепарабилност, компактност и комплетност ће се често корситити у овом, али и у наредном поглављима, а њихове дефиниције се налазе у Додатку. У овом раду, често ћемо разматрати неку вероватносну меру P на $(S, \mathcal{S})$ где је S неки скуп а $\mathcal{S}$ његова σ-алгебра. Како је $\int_S f dP$ за неку ограничену и непрекидну реалну функцију f на S нешто што је кључно за слабу конвергенцију и појављиваће се често у овом раду, уводимо краћу нотацију $Pf = \int_S f dP$.

Дефиниција 1.1 *Ако вероватносне мере P_n, $n \in \mathbb{N}$ и P на $(S, \mathcal{S})$ задовољавају $P_n f \to Pf$ за сваку ограничену и непрекидну реалну функцију f на S, онда кажемо да P_n слабо конвергира ка P и пишемо $P_n \Rightarrow P$.*

Теорема 1.2 *Свака вероватносна мера P на $(S, \mathcal{S})$ је регуларна, односно, за сваки $\mathcal{S}$-скуп A и свако $\epsilon > 0$ постоје затворен скуп F и отворен скуп G такви да $F \subset A \subset G$ и $P(G \setminus F) < \epsilon$.*[1]

Доказ: Обележимо метрику на S са $\rho(x, y)$ и растојање тачке x од скупа A са $\rho(x, A)$. Ако је A затворен, можемо узети $F = A$ и $G = A^\delta = \{x \in S | \rho(x, A) < \delta\}$ за неко $\delta > 0$, јер знамо да $A^\delta \to A$ када $\delta \downarrow 0$. Нека је $\mathcal{G}$ класа $\mathcal{S}$-скупова који задовољавају $F \subset A \subset G$ и $P(G \setminus F) < \epsilon$. Пошто смо доказали да сви затворени $\mathcal{S}$-скупови припадају овој класи, сада је довољно да докажемо да је $\mathcal{G}$ σ-алгебра, јер ће тиме $\mathcal{G}$ бити Борелова σ-алгебра на S, односно, показаћемо да је $\mathcal{G}$ исто што и $\mathcal{S}$. Нека су A_n, $n \in \mathbb{N}$ скупови из $\mathcal{G}$. Одаберимо затворене скупове F_n и отворене скупове G_n такве да $F_n \subset A_n \subset G_n$ и $P(G_n \setminus F_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Нека је $G = \bigcup_n G_n$ и нека је $F = \bigcup_{n \leq n_0} F_n$ са $n_0 \in \mathbb{N}$ одабраним тако да $P(\bigcup_n F_n \setminus F) < \frac{\epsilon}{2}$. Тада важи $F \subset \bigcup_n A_n \subset G$ и $P(G \setminus F) < \epsilon$. На тај начин, доказали смо да је $\mathcal{G}$ затворена над пребројивом унијом, а како је затворена и над комплеметом и како садржи све затворене скупове, доказали смо да је $\mathcal{G}$ Борелова σ-алгебра, а тиме смо доказали и ову теорему. $\square$

Размотримо сада за какве скупове $A \in \mathcal{S}$ постоје отворен скуп G и затворен скуп F такви да важи својство када у дефиницији регуларности затворен и отворен

[1] Теорема 1.2 са доказом се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* обележена као теорема 1.1

скуп замене улоге, односно такви да важи $G \subset A \subset F$ и $P(F \setminus G) < \epsilon$ за дато $\epsilon > 0$. Управо ово питање нам поставља задатак 1.8 из књиге *[1] Convergence of Probability Measures*. За разлику од случаја када разматрамо регуларност, овде се скупови F и G сами намећу, јер знамо да су најмање затворено F и највеће отворено G који испуњавају $G \subset A \subset F$ заправо $F = A^-$ и $G = A^o$. За њих имамо да важи $P(A^- \setminus A^o) = P(\partial A)$, а ово ће бити мање од сваког $\epsilon > 0$ само у случају да је $P(\partial A) = 0$. Дакле, само за скупове којима је руб P-мере нула, можемо за свако $\epsilon > 0$ наћи отворене G и затворене F такве да важи $G \subset A \subset F$ и $P(F \setminus G) < \epsilon$.

На основу доказа теореме 1.2, закључујемо да је P у потпуности дефинисана вредностима $P(F)$ затворених скупова F. Ово нам често може бити од користи јер је много једноставније фокусирати се само на затворене скупове када нам је потребно да докажемо да су две вероватносне мере једнаке.

У следећој теореми, показаћемо да је P такође у потпуности дефинисана вредностима Pf за равномерно непрекидне и ограничене функције f.

Теорема 1.3 *Вероватносне мере P и Q на $(S, \mathcal{S})$ су коинцидентне ако је $Pf = Qf$ за све равномерно непрекидне и ограничене реалне функције f.*[2]

Доказ: Да би смо доказали ову теорему, користићемо се апроксимирањем индикатора I_F функцијом f дефинисаном са $f(x) = \max(0, 1 - \frac{\rho(x,F)}{\epsilon})$. Таква фунцкија је ограничена, јер важи $0 \leq f(x) \leq 1$. Даље, функција је и равномерно непрекидна јер важи $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\rho(x,y)}{\epsilon}$. На овај начин, добили смо ограничену и равномерно непрекидну функцију која апроксимира I_F - ако је $x \in F$, тада је $f(x) = 1$, а ако је $x \notin F^\epsilon$, онда је $f(x) = 0$. Дакле, важи

$$I_F(x) \leq f(x) \leq I_{F^\epsilon} \tag{1.1}$$

Нека је F затворен. Користећи функцију $f(x) = \max(0, 1 - \frac{\rho(x,F)}{\epsilon})$, добијамо да је

$$P(F) \leq Pf = Qf \leq Q(F^\epsilon) \tag{1.2}$$

Када пустимо да $\epsilon \downarrow 0$, добијамо да је $P(F) \leq Q(F)$. Аналогно, добијамо и $Q(F) \leq P(F)$, па је $P(F) = Q(F)$ за све затворене скупове F. Међутим, како смо видели да је вероватносна мера у потпуности одређена вредностима $P(F)$ за затворене F, показали смо да су P и Q коинцидентне. $\square$

[2] Теорема 1.3 са доказом се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* обележена као теорема 1.2

Захваљујући овој теореми, можемо користити мере $P(A)$ и интеграле Pf у зависности од тога шта нам више одговара, јер, као што видимо, за равномерно непрекидне и ограничене функције f, интеграли Pf одређују вероватносну меру. Приметимо још да нам чак нису потребне вредности Pf за све ограничене непрекидне функције f из дефиниције слабе конвергенције, него, одређеније, довољне су нам само оне функције које су и равномерно непрекидне.

Дефиниција 1.4 *За вероватносну меру P на $(S, \mathcal{S})$ кажемо да је густа ако за свако $\epsilon > 0$ постоји компактан скуп K такав да је $P(K) > 1 - \epsilon$*

Појам густине игра битну улогу и у теорији слабе конвергенције и у њеним применама. На основу теореме 1.2, P је густа ако и само ако је за свако A из $\mathcal{S}$ $P(A)$ једнако супремуму $P(K)$ за све компактне скупове K који су уједно и подскупови од A.

Теорема 1.5 *Ако је S сепарабилан и комплетан, онда је свака вероватносна мера P на $(S, \mathcal{S})$ густа.*[3]

Доказ: Како је S сепарабилан, знамо да за свако $k \in \mathbb{N}$ постоји низ A_{k1}, A_{k2},... отворених кугли полупречника $\frac{1}{k}$ који покрива S. Одаберимо n_k довољно велико да би важило $P(\bigcup_{i \le n_k} A_{ki}) > 1 - \frac{\epsilon}{2^k}$. Како је $\bigcap_{k \ge 1} \bigcup_{i \le n_k} A_{ki}$ тотално ограничен и S комплетан (па је и сваки затворен скуп на њему комплетан), на основу теореме 4.13, скуп $\bigcap_{k \ge 1} \bigcup_{i \le n_k} A_{ki}$ има компактно затворење K, а важи $P(K) \ge P(\bigcap_{k \ge 1} \bigcup_{i \le n_k} A_{ki}) \ge 1 - \sum_{k=1} \frac{\epsilon}{2^k} = 1 - \epsilon$, те је стога P густа. $\square$

Претходна теорема је специјалан случај Уламове теореме. Размотримо сада како можемо ослабити њене услове. За почетак, уместо комплетности, можемо захтевати тополошку комплетност (односно, захтевати да постоји хомеоморфан простор (S, ρ') који је комплетан). Како је сепарабилност тополошко својство, знамо да постоји хомеоморфан простор (S, ρ') који је сепарабилан и комплетан. У том простору постоји низ A_{k1}, A_{k2},... отворених кугли полупречника $\frac{1}{k}$ који покрива S. У нашем полазном простору (S, ρ) , ове отворене кугле ће бити отворени скупови, тако да можемо конструисати $\bigcap_{k \ge 1} \bigcup_{i \le n_k} A_{ki}$ на сличан начин као у оригиналном доказу. Дакле, знамо да у њему важи $P(\bigcap_{k \ge 1} \bigcup_{i \le n_k} A_{ki}) \ge 1 - \sum_{k=1} \frac{\epsilon}{2^k} = 1 - \epsilon$. Са друге стране, у (S, ρ') је $\bigcap_{k \ge 1} \bigcup_{i \le n_k} A_{ki}$ тотално ограничен, тако да је његово затворење K компактан скуп (ово важи на основу теореме 4.13 јер је K као затворен подскуп комплетног скупа такође комплетан). Како је компактност

[3]Теорема 1.5 са доказом се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* обележена као теорема 1.3

тополошко својство, K ће бити компактан и у полазном простору а притом важи $P(K) \geq P(\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{i \leq n_k} A_{ki}) \geq 1 - \epsilon$, па је P густа. Овиме смо смањили услове теореме на сепарабилност и тополошку комплетност, а простор који је сепарабилан и тополошки комплетан се назива још и пољски простор. Пољски простори су битни за теорију вероватноће, што се може видети и у овом раду на основу могућности које нам дају.

Корак даље, можемо ослабити и услов сепарабилности - довољно нам је да P има сепарабилан носач мере. Када бирамо низ кугли A_{k1}, A_{k2},... на почетку доказа, за разлику од до сада, бираћемо кугле које покривају носач мере $supp(P)$. Остатак доказа ићи це скоро идентичним током, јер знамо да је P-мера сваког отвореног покривача од $supp(P)$ једнака 1, тако да можемо конструисати K на сличан начин.

Дакле, уместо да захтевамо да је S сепарабилан и комплетан, довољно нам је да је S тополошки комплетан и да је носач мере од P сепарабилан. Управо ова два слабљења почетних услова су оно што од нас захтева задатак 1.12 из књиге *[1] Convergence of Probability Measures* да докажежемо као адекватну алтернативу.

Дефиниција 1.6 *За подкласу $\mathcal{A}$ Борелове σ-алгебре $\mathcal{S}$ кажемо да је сепарирајућа класа ако се сваке две вероватносне мере које се подудатају на $\mathcal{A}$, подударају на $\mathcal{S}$.*

Дакле, вредности $P(A)$ за A из $\mathcal{A}$ су довољне да издвоје P из свих осталих вероватносних мера на $\mathcal{S}$. Као што смо видели раније, затворени скупови чине сепарирајућу класу.

Следеће тврђење користи појмове π-систем и λ-систем који су дефинисани у Додатку.

Тврђење 1.7 *$\mathcal{A}$ је сепарирајућа класа ако је π-систем који генерише $\mathcal{S}$.*[4]

Доказ: Нека су P и Q вероватносне мере на $(S, \mathcal{S})$, где се $\mathcal{S}$ може представити као $\sigma(\mathcal{A})$, где је $\mathcal{A}$ π-систем. Нека је $\mathcal{A}_1$ класа скупова из $\mathcal{S}$ за које важи $P(A) = Q(A)$. Очигледно, важи $S \in \mathcal{A}_1$. Ако је $A \in \mathcal{A}_1$, онда $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - Q(A) = Q(A^c)$, па $A^c \in \mathcal{A}_1$. Ако су A_n дисјунктни скупови из $\mathcal{A}_1$, онда $P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n) = \sum_n Q(A_n) = Q(\bigcup_n A_n)$, па $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}_1$. Дакле, $\mathcal{A}_1$ је

[4] Тврђење 1.7 са доказом се може пронаћи у књизи *[2] Probability and Measure* обележено као теорема 3.3

λ-систем, па на основу теореме 4.18 важи $\mathcal{S} = \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}_1$, па су P и Q коинцидентне. $\square$

Претходно тврђење је битно јер нам олакшава доказ да је нешто сепарирајућа класа - често је много једноставније показати да је нешто π-систем и да му, рецимо, припадају сви отворени или сви затворени скупови, него што би било директно доказивање да се ради о сепарирајућој класи.

У наредна два примера, разматраћемо R^k, који се може сматратити и за најчешћи специјални случај (поготово када је $k = 1$) и простор непрекидних функција, који је важан за даљи рад на слабој конвергенцији, који излази из оквира овог рада.

Пример 1.8 Нека је R^k k-димензиони еуклидски простор са метриком $|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - y_i)^2}$. Обележаваћемо са $\mathcal{R}^k$ класу k-димензионих Борелових скупова. Посматрајмо сада фунцкију расподеле $F(x_1, ..., x_k) = P(y \in R^k | y_i \le x_i, i \le k)$. Како скупови из десне стране једнакости чине π-систем, и како тај π-систем генерише $\mathcal{R}^k$, они чине сепарирајућу класу. Дакле, F у потпуности дефинише P.[5] $\square$

Иако се у овом раду фокусирамо примарно на вероватносне мере, чињеница да функција расподеле у потпуности дефинише вероватносну меру је свакако битан резултат. Захваљујући томе, када се бавимо вероватносним мерама на R^k, можемо користити фунцкије расподеле или вероватносне мере у зависности од тога шта нам више одговара у датој ситуацији.

Пример 1.9 Нека је $C = C[0, 1]$ простор непрекидних функција x на $[0, 1]$. Дефинисаћемо норму од x са $||x|| = \sup_t |x(t)|$ и дефинисаћемо униформну метрику на C са

$$\rho(x, y) = ||x - y|| = \sup_t |x(t) - y(t)| \tag{1.3}$$

Како $\rho(x_n, x) \to 0$ имплицира равномерну конвергенцију x_n ка x, онда одатле следи и да x_n тачка по тачка конвергира ка x. Обрнуто не мора важити, јер, посматрајмо z_n која линеарно расте на $[0, \frac{1}{n}]$ од 0 до 1, линеарно опада од 1 до 0 на $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ и након тога остаје 0, односно

$$z_n(t) = ntI_{[0,\frac{1}{n}]}(t) + (2 - nt)I_{(\frac{1}{n},\frac{2}{n}]} \tag{1.3}$$

[5]Пример 1.8 се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* обележен као пример 1.1

Овакво z_n тачка по тачка конвергира ка 0-функцији, међутим $\rho(z_n, 0)$ ће увек бити 1.

Приметимо да је простор C сепарабилан. Јер, нека је D_k скуп део по део линеарних функција које су линеарне на подинтервалима $I_{ki} = [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]$ и имају рационалне вредности у тачкама крајева ових интервала. Тада је $\bigcup_k D_k$ пребројив. Такође је и густ, јер за дато x и $\epsilon > 0$ захваљујући равномерној непрекидности можемо одабрати k такво да $|x(t) - x(\frac{i}{k})| < \epsilon$ за свако $t \in I_{ki}$, $1 \leq i \leq k$ и онда одабрати $y \in D_k$ такво да $|y(\frac{i}{k}) - x(\frac{i}{k})| < \epsilon$ за свако i. Дакле, за $t \in I_{ki}$, важи $|y(\frac{i}{k}) - x(t)| < 2\epsilon$ и $|y(\frac{i-1}{k}) - x(t)| < 2\epsilon$, па како је y линеарна на I_{ki} важи $\rho(x, y) \leq 2\epsilon$. Дакле, $\bigcup_k D_k$ је густ у C, па је C заиста сепарабилан.

Даље, C је комплетан. Ако је $\{x_n\}$ неки Кошијев низ, што у овом случају значи да $\epsilon_n = \sup_{m>n} \rho(x_m, x_n) \to 0$, $n \to +\infty$, онда то значи да је за свако t низ $\{x_n(t)\}$ Кошијев, па стога има и неку граничну вредност $x(t)$. Када у неједнакости $|x_n(t) - x_m(t)| \leq \epsilon_n$ пустимо да $m \to +\infty$, добијамо да $|x_n(t) - x(t)| \leq \epsilon_n$. Према томе, x_n равномерно конвергира у x, x је непрекидна и $\rho(x_n, x) \to 0$, па је C комплетан.

Како је C сепарабилан и комплетан, онда је на основу теореме 1.5 свака вероватносна мера P на $(C, \mathcal{C})$ густа (где је $\mathcal{C}$ Борелова σ-алгебра од C).

За дате $0 \leq t_1 < ... < t_k \leq 1$, можемо дефинисати пројекцију из C у R_k са $\pi_{t_1 \dots t_k}(x) = (x(t_1), ..., x(t_k))$. Скупови $\pi^{-1}_{t_1 \dots t_k} H$, $H \in \mathcal{R}^k$ (где је $\mathcal{R}^k$ Борелова σ-алгебра од R^k) из C су коначно-димензиони, и садржани су у $\mathcal{C}$ јер су пројекције непрекидне, па и $\mathcal{C}/\mathcal{R}^k$ мерљиве (у смислу да $H \in \mathcal{R}^k$ имплицира $\pi^{-1}_{t_1 \dots t_k} H \in \mathcal{C}$). Ово важи за све непрекидне функције, јер за њих важи да је инверз неког отвореног скупа G такође отворен (више детаља у Додатку). Индекс k се увек може проширити, јер, ако имамо неко t_1, t_2 које желимо да проширимо на t_1, s, t_2 (где је $t_1 < s < t_2$), увек можемо дефинисати пројекцију ψ из R^3 у R^2 дефинисану са $\psi(u, v, w) = (u, w)$ и имаћемо $\pi_{t_1 t_2} = \psi \circ \pi_{t_1 s t_2}$ и стога $\pi^{-1}_{t_1 t_2}(H) = \pi^{-1}_{t_1 s t_2} \circ \psi^{-1}(H)$ и важиће $\psi^{-1}(H) \in \mathcal{R}^3$ ако је $H \in \mathcal{R}^2$. На сличан начин можемо прећи са било ког R^m на било које R^n. Нека је $\mathcal{C}_f$ класа коначно-димензионих скупова из C форме $\pi^{-1}_{t_1 \dots t_k}(H)$, $H \in \mathcal{R}^k$. Због начина на који смо је дефинисали, $\mathcal{C}_f$ је π-систем. Даље, имамо да су затворене кугле $B(x, \epsilon)^- = \bigcap_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \{y \in C | y(r) - x(r)| \leq \epsilon\}$. Према томе, σ-алгебра $\sigma(\mathcal{C}_f)$ генерисана од $\mathcal{C}_f$ садржи затворене кугле, па тиме садржи и отворене кугле и отворене скупове. На основу овога, и на основу тога што је $\mathcal{C}_f$

π-систем, закључујемо да је $\sigma(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}$, па је $\mathcal{C}_f$ сепарирајућа класа.[6] $\square$

Простор C игра битну улогу у теорији вероватноће, иако она излази из оквира овог рада. Више детаља о простору C се може видети у књизи *[1] Convergence of Probability Measures*. У овој најбитнијој књизи из наше литературе, док је главни фокус целог овог рада садржан у првом поглављу, простору C је посвећено комплетно друго поглавље.

[6]Пример 1.9 се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* обележен као пример 1.3

2 Својства слабе конвергенције

У овом поглављу бавићемо се својствима слабе конвергенције. Изнећемо и доказати неке теореме које нам могу знатно олакшати доказивање слабе конвергенције тако што ће нам пружити еквивалентне услове. Касније ћемо те теореме користити у даљим доказивањима слабих конвергенција.

Тврђење 2.1 *Низ вероватносних мера P_n на $(S, \mathcal{S})$ не може конвергирати слабо ка двема различитим вероватносним мерама.*[7]

Доказ: Претпоставимо супротно, да $P_n \Rightarrow P$ и $P_n \Rightarrow Q$, када $n \to +\infty$, где су P и Q различите вероватносне мере. По дефиницији слабе конвергенције, $P_n f \to Pf$ и $P_n f \to Qf$, када $n \to +\infty$ за сваку ограничену и непрекидну реалну функцију f. Дакле, имамо да је $Pf = Qf$ за сваку ограничену и непрекидну реалну функцију f. Како ово значи да та једнакост важи и за сваку равномерно непрекидну ограничену реалну функцију f, захваљујући теореми 1.3 из претходне главе, закључујемо да су P и Q коинцидентне, те је тиме овај доказ завршен. $\square$

У претходном тврђењу, доказали смо битно својство слабе конвергенције, а то је јединственост вероватносне мере ка којој низ вероватносних мера конвергира. Захваљујући том тврђењу, потрага за потенцијалним вероватносним мерама ка којима наш низ конвергира завршава се проналаском прве такве вероватносне мере, јер знамо да не може постојати више њих.

Пример 2.2 На произвољном S, са δ_x обележавамо вероватносну меру која одређује да ли скуп A садржи тачку x, односно вероватносну меру на $\mathcal{S}$ дефинисану са $\delta_x(A) = I_A(x)$. Ако $x_n \to x_0$ када $n \to +\infty$ и ако је f непрекидна, тада

$$\delta_{x_n} f = \int_S f d\delta_{x_n} = f(x_n) \to f(x_0) = \int_S f d\delta_{x_0} = \delta_{x_0} f,$$

када $n \to +\infty$. Стога, $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_{x_0}$.

Међутим, ако $x_n \to x_0$ не важи, онда постоји $\epsilon > 0$ такво да $\rho(x_n, x_0) > \epsilon$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Ако је $F = x_0$ и ако посматрамо фунцкију f дефинисану са $f(x) = \max(0, 1 - \frac{\rho(x,F)}{\epsilon})$, онда је $f(x_0) = 1$ и $f(x_n) = 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$, тако да не

[7] Тврђење 2.1 са скицом доказа се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* на страни 14

важи $f(x_n) \to f(x_0)$ а самим тим не важи ни $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_{x_0}$. Дакле, $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_{x_0}$ ако и само ако $x_n \to x_0$.[8] $\square$

Резултат из примера 2.2 је битан јер δ_x можемо користити да представимо друге вероватносне мере. Ако се ради о дискретној вероватносној мери, лако је можемо представити као линеарну комбинацију вероватносних мера облика δ_x. У одређеним ситуацијама, овакво представљање нам може бити од користи.

Наредни пример је од значаја за апроксимирање вероватносних мера - видећемо како униформну расподелу можемо апроксимирати дискретном вероватносном мером.

Пример 2.3 Нека је S $[0,1]$ са стандардном еуклидском метриком. За свако $n \in \mathbb{N}$ узмимо r_n тачака из $[0,1]$ које ћемо обележити са x_{nk}, $0 \leq k < r_n$. Претпоставимо да су ове тачке асимптотски униформно распоређене, односно да за сваки подинтервал J важи

$$\frac{1}{r_n}\#\{k|x_{nk} \in J\} \to |J|, \tag{2.1}$$

где # користимо да обележимо кардиналност скупа, а $|J|$ користимо да обележимо дужину J. Дакле, када $n \to +\infty$, удео тачака x_{nk} које се налазе унутар интервала J асимптотски је једнак његовој дужини. Нека P_n има масу $\frac{1}{r_n}$ у свакој тачки x_{nk}. У случају да постоји више коинцидентних тачака, нека се њихове масе сабирају. Нека је P Лебегова мера на $[0,1]$.

Ако (2.1) важи, онда $P_n \Rightarrow P$. То ћемо показати на следећи начин. Нека је f непрекидна на $[0,1]$. Онда је она и Риман-интеграбилна, и за свако $\epsilon > 0$ постоји коначна декомпозиција интервала $[0,1]$ на подинтервале J_i такве да, ако су ν_i и υ_i супремум и инфимум f на J_i, онда су горња и доња Дарбуова сума $\sum_i \nu_i |J_i|$ и $\sum_i \upsilon_i |J_i|$ унутар ϵ-околине Римановог интеграла $Pf = \int_0^1 f(x)dx$. На основу (2.1) закључујемо следеће

$$P_n f = \sum_k \frac{1}{r_n} f(x_{nk}) \leq \sum_i \nu_i \frac{1}{r_n}\#\{k|x_{nk} \in J_i\} \to \sum_i \nu_i |J_i| \leq Pf + \epsilon$$

Аналогно, користећи доњу Дарбуову суму, добијамо да је $P_n \geq Pf - \epsilon$, те одатле закључујемо да $P_n f \to Pf$, то јест, $P_n \Rightarrow P$.[9] $\square$

[8] Пример 2.2 се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* обележен као пример 2.1

[9] Пример 2.3 се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* обележен као пример 2.2

Наредна теорема ће нам дати прилику да користимо услове који су еквивалентни слабој конвергенцији, и који нам могу бити од користи за лакше доказивање слабе конвергенције (или доказивање да слаба конвергенција не важи). Како су еквивалентни, сваки од ових услова нам може користити и као дефиниција слабе конвергенције.

Теорема 2.4 *Нека су P_n, $n \in \mathbb{N}$ и P вероватносне мере на $(S, \mathcal{S})$. Тада су следећих пет услова еквивалентни:*[10]

(i) $P_n \Rightarrow P$

(ii) $P_n f \to P f$, $n \to +\infty$ *за све ограничене, равномерно непрекидне* f

(iii) $\limsup_n P_n(F) \leq P(F)$ *за све затворене* F

(iv) $\liminf_n P_n(G) \geq P(G)$ *за све отворене* G

(v) $P_n(A) \to P(A)$, $n \to +\infty$ *за све скупове* A *за које важи* $P(\partial A) = 0$

Доказ: $(i) \Rightarrow (ii)$ важи тривијално.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: За овај доказ ћемо још једном користити фунцкију f дефинисану са $f(x) = \max(0, 1 - \frac{\rho(x,F)}{\epsilon})$. Као што знамо, f је равномерно непрекидна и ограничена. Нека је F затворен скуп. Користећи се неједнакостима из (1.2) и условом (ii), добијамо следеће

$$\limsup_n P_n(F) \leq \limsup_n P_n f = Pf \leq P(F^\epsilon)$$

Како је F затворен, пуштањем да $\epsilon \downarrow 0$ добијамо $\limsup_n P_n(F) \leq P(F)$.

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$: Користећи се комплементом, добијамо

$$\limsup_n P_n(F) \leq P(F) \Leftrightarrow \liminf_n P_n(G) \geq P(G),$$

где је $G = F^c$, односно, еквивалентно, $F = G^c$ и где је F затворен, а G отворен.

$(iii) \wedge (iv) \Rightarrow (v)$: Нека су A^o и A^- редом унутрашњост и затворење неког скупа A за који важи $P(\partial A) = 0$. Тада користећи (iii) и (iv) добијамо

$$P(A^-) \geq \limsup_n P_n(A^-) \geq \limsup_n P_n(A) \geq \\ \geq \liminf_n P_n(A) \geq \liminf_n P_n(A^o) \geq P(A^o) \quad (2.2)$$

[10]Теорема 2.4 са доказом се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* обележена као теорема 2.1

Међутим, како важи $P(\partial A) = 0$, онда знамо да је $P(A^-) = P(A) = P(A^o)$, па одатле и из низа неједнакости (2.2) добијамо да је $\limsup_n P_n(A) = P(A)$ и $\liminf_n P_n(A) = P(A)$, одакле следи да $P_n(A) \to P(A)$ за $n \to +\infty$.

$(v) \Rightarrow (i)$: Како сваку ограничену функцију можемо линеарно трансформисати у функцију за коју важи $0 < f(x) < 1$ за свако x, то значи да је довољно доказати да за све непрекидне функције за које важи $0 < f(x) < 1$ за свако x, важи и $P_n f \to Pf$, $n \to +\infty$. Дакле, претпоставимо да је f непрекидна функција за коју важи $0 < f(x) < 1$ за свако x. Тада важи $Pf = \int_0^{+\infty} P(\{x | f(x) > t\})dt = \int_0^1 P(\{x | f(x) > t\})dt$. Слично, важи и $P_n f = \int_0^1 P_n(\{x | f(x) > t\})dt$. Како је f непрекидна, важи $\partial\{x | f(x) > t\} \subset \{x | f(x) = t\}$, па стога важи $P(\partial\{x | f(x) > t\}) = 0$ за свако t, осим за највише пребројиво много t. (Ако би $P(\{x | f(x) = t\}) > 0$ важило за непребројиво много t, онда P не би могла бити вероватносна мера.) Према томе, користећи се условом (v) добијамо да важи

$$P_n f = \int_0^1 P_n(\{x | f(x) > t\})dt \to \int_0^1 P(\{x | f(x) > t\})dt = Pf, \quad n \to +\infty.$$

□

Претходна теорема нам даје значајне олакшице у доказивању слабе конвергенције. Услов (v) нам даје могућност да се фокусирамо само на скупове руба P-мере нула, док нам услов (iii) и услов (iv) дају могућности да се фокусирамо на лимес супериор, односно лимес инфериор затворених или отворених скупова. Још важније, ова два услова нам могу бити од користи у ситуацијама када већ знамо да слаба конвергенција важи, што ћемо видети и касније у овом раду.

Вратимо се сада на пример 2.2. Претпоставимо да $x_n \to x_0$. Како знамо из примера 2.2, $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_{x_0}$ ако и само ако $x_n \to x_0$, тако да знамо да важи $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_{x_0}$. Претпоставимо још да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи да је x_n различито од x_0. Један од начина на које ово можемо постићи је да је $x_0 = 0$ и $x_n = \frac{1}{n}$. Захваљујући теореми 2.4, знамо да услови (iii), (iv) и (v) важе. За $F = \{x_0\}$ неједнакост (iii) је строга, а за $G = \{x_0\}^c$, неједнакост (iv) је строга. Можемо приметити да за $A = \{x_0\}$, $P_n(A) \to P(A)$ не важи, али то нам не представља проблем - $P(\partial A) = P(\{x_0\}) = 1$, тако да услов $P(\partial A) = 0$ свакако није испуњен за $A = \{x_0\}$.[11]

Поред еквивалентних услова из претходне теореме, још један чест начин за олакшавање процеса доказивања слабе конвергенције је доказивање да $P_n(A) \to P(A)$ важи за скупове A из неке згодне подкласе од $\mathcal{S}$ из које се може закључити да

[11] Ова дискусија се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* на страни 16

$P_n(A) \to P(A)$ важи на целом $\mathcal{S}$. Услов (v) из претходне теореме је управо пример овога, а следеће теореме ће нам пружити још таквих олакшица у доказивању слабе конвергенције.

Теорема 2.5 *Нека су P_n, $n \in \mathbb{N}$ и P вероватносне мере на $(S, \mathcal{S})$, нека је $\mathcal{A}_P$ подкласа од $\mathcal{S}$ и нека важе следећа три услова:*

(i) $\mathcal{A}_P$ *је π-систем*

(ii) *сваки отвроен скуп из S се може представити као пребројива унија скупова из $\mathcal{A}_P$*

(iii) $P_n(A) \to P(A)$, $n \to +\infty$ *за свако A из $\mathcal{A}_P$*

Тада важи $P_n \Rightarrow P$.[12]

Доказ: Ако су $A_1,...,A_r$ из $\mathcal{A}_P$, онда су и њихови коначни пресеци из $\mathcal{A}_P$ јер је $\mathcal{A}_P$ π-систем. Захваљујући томе, можемо искористити формулу укључења и искључења и тада добијамо

$$P_n(\bigcup_{i=1}^{r} A_i) = \sum_i P_n(A_i) - \sum_{ij} P_n(A_i \cap A_j) + \sum_{ijk} P_n(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... \to$$

$$\to \sum_i P(A_i) - \sum_{ij} P(A_i \cap A_j) + \sum_{ijk} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - ... = P(\bigcup_{i=1}^{r} A_i)$$

Ако је G отворен, захваљујући услову (ii) знамо да се може представити као $G = \bigcup_i A_i$ за неки низ скупова $\{A_i\}$ из $\mathcal{A}_P$. За дато $\epsilon > 0$, одаберимо r тако да $P(\bigcup_{i=1}^{r} A_i) \geq P(G) - \epsilon$. Дакле, имамо да важи

$$P(G) - \epsilon \leq P(\bigcup_{i=1}^{r} A_i) = \lim_n P_n(\bigcup_{i=1}^{r} A_i) \leq \liminf_n P_n(G)$$

Како је ϵ произвољно, пуштањем да $\epsilon \downarrow 0$, добијамо да важи $P(G) \leq \liminf_n P_n(G)$ за све отворене скупове G, па на основу теореме 2.4 закључујемо да $P_n \Rightarrow P$. $\square$

Ова теорема нам даје згодну алтернативу приликом доказивања слабе конвергенције. Често се можемо наћи у ситуацији где нам је много лакше да докажемо конвергенцију на π-систему који је описан у теореми, него на целом S. Приметимо још да ова теорема нема никакве услове везане за S, тако да је веома згодна за

[12] Теорема 2.5 са доказом се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* обележена као теорема 2.2

опште случајеве. Међутим, како су у теорији вероватниће у фокусу често сепарабилни простори, нарадне две теореме ће нам пружити резултате који важе за њих и који користе предности сепарабилности.

Теорема 2.6 *Нека су P_n, $n \in \mathbb{N}$ и P вероватносне мере на $(S, \mathcal{S})$, нека је $\mathcal{A}_P$ подкласа од $\mathcal{S}$ и нека важе следећа четири услова:*

(i) *$\mathcal{A}_P$ је π-систем*

(ii) *S је сепарабилан*

(iii) *за свако x из S и $\epsilon > 0$, постоји A из $\mathcal{A}_P$ такво да важи $x \in A^o \subset A \subset B(x, \epsilon)$*

(iv) *$P_n(A) \to P(A)$, $n \to +\infty$ за свако A из $\mathcal{A}_P$*

Тада важи $P_n \Rightarrow P$.[13]

Доказ: На основу услова (iii) можемо закључити да за сваку тачку x неког отвореног скупа G постоји неко A_x из $\mathcal{A}_P$ такво да важи $x \in A_x^o \subset A_x \subset G$. Како је $\{A_x^o | x \in G\}$ отворени покривач од G, а G је сепарабилан, на основу теореме 4.7 знамо да постоји пребројива подкласа $\{A_{x_i}^o\}$ од $\{A_x^o | x \in G\}$ која је отворени покривач од G. Стога, $G = \bigcup_i A_{x_i}^o$, па су услови теореме 2.5 задовољени, те користећи њу добијамо да важи $P_n \Rightarrow P$, чиме је овај доказ завршен. $\square$

За подкласу $\mathcal{A}$ од $\mathcal{S}$ кажемо да *одређује конвергенцију* ако за сваку вероватносну меру P и сваки низ вероватносних мера $\{P_n\}$ из $(S, \mathcal{S})$ из тога што за свако $A \in \mathcal{A}$ за које важи $P(\partial A) = 0$ конвергенција $P_n(A) \to P(A)$, $n \to +\infty$ важи следи да $P_n \Rightarrow P$. Дакле, класа која одређује конвергенцију је сепарирајућа класа. Да бисмо доказали да је неко $\mathcal{A}$ класа која одређује конвергенцију, потребно је да за свако P, $\mathcal{A}_P = \{A \in \mathcal{A} | P(\partial A) = 0\}$ задовољава услове из претходне теореме. За дато $\mathcal{A}$, нека је $\mathcal{A}_{x,\epsilon} = \{A \in \mathcal{A} | x \in A^o \subset A \subset B(x, \epsilon)\}$ и нека је $\partial\mathcal{A}_{x,\epsilon} = \{\partial A | A \in \mathcal{A}_{x,\epsilon}\}$. Ако $\partial\mathcal{A}_{x,\epsilon}$ садржи пребројиво много дисјунктних скупова, онда бар један од њих мора имати P-меру 0, што нам може бити од користи.

Сада ћемо искористити теорему 2.6 и новоуведене појмове и формулисати и доказати теорему која нам може бити од још веће користи, што ћемо показати у даљем тексту после доказа.

[13]Теорема 2.6 са доказом се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* обележена као теорема 2.3

Теорема 2.7 *Нека је $\mathcal{A}$ подкласа од $\mathcal{S}$ и нека важе следећа три услова:*

(i) *$\mathcal{A}$ је π-систем*

(ii) *S је сепарабилан*

(iii) *за свако x и за свако $\epsilon > 0$, $\partial\mathcal{A}_{x,\epsilon} = \{\partial A | A \in \mathcal{A}, x \in A^o \subset A \subset B(x,\epsilon)\}$ или садржи $\emptyset$ или садржи пребројиво много дисјунктних скупова*

Тада је $\mathcal{A}$ класа која одређује конвергенцију.[14]

Доказ: Нека је P нека вероватносна мера из $(S,\mathcal{S})$ и нека је $\mathcal{A}_P = \{A \in \mathcal{A} | P(\partial A) = 0\}$. Како важи

$$\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B,$$

из тога имамо да ако A и B припадају $\mathcal{A}_P$, онда и $A \cap B \in \mathcal{A}_P$. То добијамо јер $P(\partial(A \cap B)) \leq P(\partial A \cup \partial B) \leq P(\partial A) + P(\partial B) = 0$, па је $P(\partial(A \cap B)) = 0$. Дакле, $\mathcal{A}_P$ је π-систем. Нека је $\{P_n\}$ низ вероватносних мера из $(S,\mathcal{S})$ такав да $P_n(A) \to P(A)$ за свако $A \in \mathcal{A}_P$. Како $\partial\mathcal{A}_{x,\epsilon}$ садржи или $\emptyset$ или пребројиво много дисјунктних скупова, знамо да $\partial\mathcal{A}_{x,\epsilon}$ садржи барем један скуп P-мере нула, односно садржи барем један елемент из $\mathcal{A}_P$. Како су сада сви услови теореме 2.6 задовољени, њеном применом добијамо да $P_n \Rightarrow P$. Стога је $\mathcal{A}$ класа која одређује конвергенцију. $\square$

Вратимо се сада на R^k из примера 1.8. Ако је $\mathcal{A}$ класа квадрова, односно скупова $\{y = (y_1, ..., y_k) \in R^k | a_i < y_i \leq b_i,\ i \leq k\}$, можемо приметити да она задовољава све услове теореме 2.7. Дакле, применом те теореме, добијамо да је $\mathcal{A}$ класа која одређује конвергенцију.

Даље, класа скупова $Q_x = \{y = (y_1, ..., y_k) \in R^k | y_i \leq x_i,\ i \leq k\}$ је такође класа која одређује конвергенцију, што ћемо сада показати. Нека су P и $\{P_n\}$ вероватносне мере из $(S,\mathcal{S})$ такве да $P_n(Q_x) \to P(Q_x)$ важи за свако x за које $P(\partial Q_x) = 0$. Нека је $E_i = \{t \in R | P(\{y = (y_1, ..., y_k) \in R^k | y_i = t\}) > 0\}$. Такав скуп је највише пребројив, па је због тога $D = (\bigcup_i E_i)^c$ густ. Нека је $\mathcal{A}_P$ калса квадрова којима свака координата сваког темена лежи у D. Како је $\partial Q_x \subset \bigcup_i \{y = (y_1, ..., y_k) \in R^k | y_i = x_i,\ i \leq k\}$ и како за неко $A \in \mathcal{A}_P$ свака координата сваке тачке лежи у D, $P(\partial Q_x) = 0$ за свако x које је теме неког квадра $A \in \mathcal{A}$. Због начина на који смо дефинисали $\mathcal{A}_P$, применом формуле укључења и

[14] Теорема 2.7 са доказом се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* обележена као теорема 2.4

искључења, можемо добити да за свако $A \in \mathcal{A}_P$ важи $P_n(A) \to P(A)$. Одатле, и из тога што је D густ, имамо да $\mathcal{A}_P$ задовољава све услове теореме 2.6, па њеном применом добијамо да $P_n \Rightarrow P$, па је $\mathcal{A}_P$ класа која одређује конвергенцију.

Ово се може формулисати и на другачији начин, јер, приметимо да су функције расподеле од P и P_n заправо $F(x) = P(Q_x)$ и $F_n(x) = P_n(Q_x)$. Како је F непрекидна у x ако и само ако је $P(\partial Q_x) = 0$ имамо да $P_n \Rightarrow P$ ако и само ако $F_n(x) \to F(x)$ за све x које су тачке непрекидности функције F.[15]

Теорема 2.8 *Нека су* P_n, $n \in \mathbb{N}$ *и* P *вероватносне мере на* $(S, \mathcal{S})$. *Тада је за* $P_n \Rightarrow P$ *неопходан и довољан услов да сваки подниз* $\{P_{n_i}\}$ *низа* $\{P_n\}$ *има даљи подниз* $\{P_{n_{i(m)}}\}$ *који слабо конвергира ка* P *када* $m \to +\infty$.[16]

Доказ: Неопходност овог услова очигледно важи. Што се довољности тиче, претпоставимо супротно, да $\{P_n\}$ не конвергира слабо у P. Тада $P_n f \not\to Pf$ за неку ограничену и непрекидну функцију f. Међутим, у том случају постоји неко $\epsilon > 0$ и неки подниз $\{P_{n_i}\}$ такви да $|P_{n_i} f - Pf| > \epsilon$ за свако $i \in \mathbb{N}$. Стога, $\{P_{n_i}\}$ не може имати неки даљи подниз који конвергира ка P, што је у контрадикцији са почетном претпоставком. Дакле, $P_n \Rightarrow P$ ако и само ако сваки подниз $\{P_{n_i}\}$ низа $\{P_n\}$ има даљи подниз $\{P_{n_{i(m)}}\}$ који слабо конвергира ка P. $\square$

Нека h пресликава метрички простор (S, ρ) са σ-алгебром $\mathcal{S}$ у неки други метрички простор (S', ρ') са σ-алгебром $\mathcal{S}'$. Нека је $h : S \to S'$ $\mathcal{S}/\mathcal{S}'$ мерљиво (више о овоме у Додатку). Тада за сваку вероватносну меру P на $(S, \mathcal{S})$ можемо дефинисати вероватносну меру Ph^{-1} на $(S', \mathcal{S}')$ са $Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}(A))$. Сада ћемо размотрити услове при којима $P_n \Rightarrow P$ имплицира $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$. Један од таквих услова био би да је h непрекидна, јер када је h непрекидна из (4.2) и из $P_n \Rightarrow P$ следи

$$\int_{S'} f(y) P_n h^{-1}(dy) = \int_S f(h(x)) P_n(dx) \to \int_S f(h(x)) P(dx) = \int_{S'} f(y) Ph^{-1}(dy) \quad (2.2)$$

Дакле, (2.2) важи ако је h непрекидно пресликавање из S у S'.[17]

[15] Ова дискусија се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* на обележена као пример 2.3

[16] Теорема 2.8 са доказом се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* обележена као теорема 2.6

[17] Ова дискусија се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* на страни 20

Међутим, овај услов се може ослабити. Довољно је да је h $\mathcal{S}/\mathcal{S}'$ мерљива и да скуп њених тачака прекида D_h (овај скуп лежи у $\mathcal{S}$ на основу теореме 4.15) има P-меру 0. То можемо видети у слдећој теореми.

Теорема 2.9 *Нека су P и $\{P_n\}$ вероватносне мере на $(S, \mathcal{S})$, нека је $h : S \to S'$ $\mathcal{S}/\mathcal{S}'$ мерљива и нека је D_h скуп тачака прекида пресликавања h. Нека су Ph^{-1} и P_nh^{-1} вероватносне мере на $(S', \mathcal{S}')$ дефинисане са $Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}(A))$ и $P_nh^{-1}(A) = P_n(h^{-1}(A))$ за $A \in S'$. Тада ако $P_n \Rightarrow P$ и ако $P(D_h) = 0$, онда $P_nh^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$.*[18]

Доказ: Нека је F скуп из S'. Ако $x \in (h^{-1}(F))^-$ онда постоји низ $\{x_n\}$ такав да $x_n \to x$ и такав да $h(x_n) \in F$. Али онда, ако $x \in D_h^c$, $h(x) \in F^-$. Другим речима, $D_h^c \cap (h^{-1}(F))^- \subset h^{-1}(F^-)$. Ако је F затворен у S' и ако $P(D_h^c) = 1$ (што следи директно из претпоставке да је $P(D_h) = 0$), онда

$$\limsup_n P_n(h^{-1}(F)) \leq \limsup_n P_n((h^{-1}(F))^-) \leq$$
$$\leq P((h^{-1}(F))^-) = P(D_h^c \cap (h^{-1}(F))^-) \leq P(h^{-1}(F^-)) = P(h^{-1}(F))$$

Дакле, услов (iii) теореме 2.4 је задовољен, па $P_nh^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$. $\square$

Сада када смо увели све ове теореме које нам олакшавају доказивање слабе конвергенције и које нам пружају више информација о слабој конвергенцији, можемо се још једном вратити на пример 2.2 да видимо које додатне закључке можемо извући захваљујући овим теоремама. Задатак 2.8 из књиге *[1] Convergence of Probability Measures* поставља следеће питање: ако низ вероватносних мера δ_{x_n} конвергира слабо ка некој вероватносној мери P, да ли онда и та вероватносна мера мора бити облика δ_x за неко $x \in S$?

Претпоставимо да δ_{x_n} конвергира слабо ка некој вероватносној мери P. Ако $\{x_n\}$ садржи конвергентан подниз $\{x_{n_i}\}$ који конвергира ка неком x, онда је из доказа примера 2.2 јасно да $\delta_{x_{n_i}} \Rightarrow_i \delta_x$. Како из теореме 2.8 знамо да је неопходан услов за слабу конвергенцију $\delta_{x_{n_i}} \Rightarrow_i P$ да постоји даљи подниз тог подниза који слабо конвергира ка P и како из теореме 2.1 знамо да низ вероватносних мера конвергира ка јединствреној вероватносној мери, добијамо да P мора бити коинцидентна са δ_x.

[18] Теорема 2.9 са доказом се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* обележена као теорема 2.7

Дакле, у остатку овог разматрања можемо претпоставити да $\{x_n\}$ не садржи конвергентан подниз. Због тога, за свако $k \in \mathbb{N}$, можемо одабрати полупречник кугле $r_k > 0$ такав да бесконачно много чланова низа $\{x_n\}$ не припада отвореној кугли $B(x_k, r_k)$. Коришћењем теореме 2.4, како је $B(x_k, r_k)$ отворен и како $\delta_{x_n} \Rightarrow P$, знамо да је $P(B(x_k, r_k)) \leq \liminf_n \delta_{x_n}(B(x_k, r_k))$. С друге стране, како знамо да бесконачно много чланова низа $\{x_n\}$ не припада $B(x_k, r_k)$, знамо да је $\liminf_n \delta_{x_n}(B(x_k, r_k)) = 0$, па је због тога $P(B(x_k, r_k)) = 0$. Како у $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ не постоји конвергентан подниз, онда је овај скуп затворен, па је његов комплеменет $G = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}^c$ отворен. Према томе, можемо и на G применити тоерему 2.4 на сличан начин и добити да је $P(G) \leq \liminf_n \delta_{x_n}(G)$. Међутим, како је $G = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}^c$, знамо да за свако x_n важи $\delta_{x_n}(G) = 0$, па је и $\liminf_n \delta_{x_n}(G) = 0$, одакле закључујемо да је $P(G) = 0$. Како сада можемо представили S као пребројиву унију $G \cup \bigcup_k B(x_k, r_k)$, знамо да је $P(S) \leq P(G) + \sum_k P(B(x_k, r_k)) = 0$, што је немогуће јер мора важити $P(S) = 1$.

Овиме смо показали да δ_{x_n} може слабо конвергирати само ка вероватносној мери која је облика δ_x за неко $x \in S$. Али, још битније, показали смо колико нам додатних могућности и олакшица, али и бољег разумевања слабе конвергенције пружају теореме које смо доказивали у овом поглављу.

3 Прохоровљева теорема

У наставку рада, са Π ћемо обележавати фамилију вероватносних мера на $(S, \mathcal{S})$. За Π кажемо да је *релативно компактна* ако сваки низ елемената из Π има слабо конвергентан подниз - односно за сваки низ $\{P_n\}$ из Π постоје подниз $\{P_{n_i}\}$ и вероватносна мера Q из $(S, \mathcal{S})$ (приметимо да Q не мора бити из Π) такви да $P_{n_i} \Rightarrow Q$, када $i \to +\infty$. Иако $P_n \Rightarrow Q$ не би имало смисла када би $Q(S)$ било мање од 1, ипак ћемо нагласити да захтевамо да $Q(S) = 1$. У овом раду, углавном ће нас занимати релативна компактност низова $\{P_n\}$, што значи да ће нас интересовати да сваки подниз $\{P_{n_i}\}$ низа $\{P_n\}$, садржи даљи подниз $\{P_{n_{i(m)}}\}$ такав да да $P_{n_{i(m)}} \Rightarrow Q$, када $m \to +\infty$ за неку вероватносну меру Q из $(S, \mathcal{S})$. За Π кажемо да је *густа* ако за свако $\epsilon > 0$ постоји компактан скуп K такав да за свако $P \in \Pi$ важи $P(K) > 1 - \epsilon$.

Како смо сада увели све појмове који су нам потребни, и како смо у претходним поглављима доказали теореме које ће нам бити подребне, сада можемо формулисати и доказати Прохоровљеву теорему. Кренућемо од директног смера.

Теорема 3.1 *Нека је* Π *фамилија вероватносних мера на* $(S, \mathcal{S})$. *Ако је* Π *густа, онда је и релативно компактна.*[19]

Доказ: Нека је $\{P_n\}$ низ вероватносних мера из Π која је густа. Да бисмо доказали релативну компактност, желимо да нађемо подниз $\{P_{n_i}\}$ и вероватносну меру P такве да важи $P_{n_i} \Rightarrow_i P$.

Узмимо компактне скупове K_u, $u \in \mathbb{N}$ такве да $K_1 \subset K_2 \subset ...$ и $P_n(K_u) > 1 - \frac{1}{u}$ за свако u и свако n. Како су K_n компактни, онда су и сепарабилни, па је и $\bigcup_u K_u$ сепарабилан. Стога, на основу теореме 4.7, знамо да постоји пребројива класа $\mathcal{A}$ отворених скупова са таквих да ако за неки отворен скуп G важи $x \in \bigcup_u (K_u) \cap G$, онда постоји неко A из $\mathcal{A}$ тако да важи $x \in A \subset A^- \subset G$. Нека се $\mathcal{H}$ састоји од $\emptyset$ и од коначних унија скупова $A^- \cap K_u$ за $A \in \mathcal{A}$ и $u \geq 1$.

Како је у $\mathcal{H}$ има пребројиво много скупова H и како су P_n вероватносне мере па важи $0 \leq P_n(H) \leq 1$, можемо применити дијагоналну методу (теорема 4.1) и

[19] Теорема 3.1 са доказом се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* обележена као теорема 5.1

захваљујући њој знамо да постоји подниз $\{P_{n_i}\}$ низа $\{P_n\}$ такав да постоји

$$\alpha(H) = \lim_i P_{n_i}(H) \tag{3.1}$$

за свако H из $\mathcal{H}$. Наш циљ је да конструишемо вероватносну меру P на $(S, \mathcal{S})$ такву да

$$P(G) = \sup_{H \in \mathcal{H}, H \subset G} \alpha(H) \tag{3.2}$$

за сваки отворен скуп G. Ако такво P постоји, доказ би био завршен - како је $H \subset G$, важи $\alpha(H) = \lim_i P_{n_i}(H) \leq \liminf_i P_{n_i}(G)$, одакле је

$$P(G) = \sup_{H \in \mathcal{H}, H \subset G} \alpha(H) \leq \liminf_i P_{n_i}(G),$$

па стога на основу теореме 2.4 важи $P_{n_i} \Rightarrow_i P$.

Да бисмо конструисали P која задовољава (3.2), приметимо прво да је $\mathcal{H}$ затворена под коначном унијом и да $\alpha(H)$ има следећа својства:

$$\alpha(H_1) \leq \alpha(H_2), \text{ за } H_1 \subset H_2 \tag{3.3}$$

$$\alpha(H_1 \cup H_2) = \alpha(H_1) + \alpha(H_2), \text{ ако } H_1 \cap H_2 = \emptyset \tag{3.4}$$

$$\alpha(H_1 \cup H_2) \leq \alpha(H_1) + \alpha(H_2) \tag{3.5}$$

Такође, очигледно важи и $\alpha(\emptyset) = 0$. За отворене скупове G, дефинишимо

$$\beta(G) = \sup_{H \in \mathcal{H}, H \subset G} \alpha(H) \tag{3.6}$$

Приметимо да важи $\beta(\emptyset) = \alpha(\emptyset) = 0$ и да је β монотона. Коначно, дефинишимо за $M \subset S$

$$\gamma(M) = \inf_{M \subset G} \beta(G) \tag{3.7}$$

Приметимо да за отворене скупове G важи $\gamma(G) = \beta(G)$.

Следећи циљ биће нам да докажемо да је γ спољашња мера. Скуп M је по дефиницији γ-мерљив ако важи $\gamma(L) = \gamma(L \cap M) + \gamma(L \cap M^c)$ за свако $L \subset S$. Али како је γ спољашња мера, важи субадитивност за пребројиву унију, тако да је довољно да докажемо да важи $\gamma(L) \geq \gamma(L \cap M) + \gamma(L \cap M^c)$ да бисмо доказали да је M γ-мерљив. Нека је $\mathcal{M}$ класа γ-мерљивих скупова. Тада је $\mathcal{M}$ σ-алгебра и рестрикција γ на $\mathcal{M}$ је мера. Ако успемо да докажемо да су сви затворени скупови садржани у $\mathcal{M}$, из тога ћемо добити да је $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$, а рестрикција P од γ на $\mathcal{S}$ ће задовољавати $P(G) = \gamma(G) = \beta(G)$ за отворене скупове G, па ће (3.2) важити за такве скупове. Даље, P је вероватносна мера јер

$$1 \geq P(S) = \beta(S) \geq \sup_u \alpha(K_u) \geq \sup_u (1 - \frac{1}{u}) = 1 \tag{3.8}$$

Приметимо да у (3.8) $1 \geq P(S)$ важи због начина на који је P дефинисана, из $P(S) = \beta(S)$ имамо да је

$$P(S) = \sup_{H \in \mathcal{H}, H \subset S} \lim_i P_{n_i}(H) \leq 1$$

Даље, приметимо да свако K_u има коначни покривач из $\mathcal{A}$, па стога свако $K_u \in \mathcal{H}$, те смо захваљујући ове две ствари могли добити (3.8), из ког следи да је $P(S) = 1$, па је P вероватносна мера. Овиме би доказ био завршен - тако да нам остаје да докажемо да је γ спољашња мера и да су сви затворени скупови садржани у $\mathcal{M}$. Управо то ћемо доказати у наредних шест корака.

Корак 1: Ако је F затворен и G отворен и ако важи $F \subset G$ и ако постоји неко $H \in \mathcal{H}$ такво да $F \subset H$, онда постоји $H_0 \in \mathcal{H}$ такво да важи $F \subset H_0 \subset G$.

Како је F затворен подскуп од $H \in \mathcal{H}$, F је компактан. Даље, постоји неко u такво да $F \subset K_u$. Можемо за свако $x \in F$ одабрати неко $A_x \in \mathcal{A}$ такво да $x \in A_x \subset A_x^- \subset G$. Овакви скупови A_x представљају покривач од F, а како је F компактан, знамо да постоји коначан потпокривач A_{x_1}, A_{x_1},...,A_{x_k}. Можемо узети $H_0 = \bigcup_{i=1}^k (A_{x_i}^- \cap K_u)$ и за такво H_0 ће важити $F \subset H_0 \subset G$.

Корак 2: β је коначно субадитивна на отвореним скуповима.

Нека је $H \subset G_1 \cup G_2$ где су G_1 и G_2 отворени и $H \in \mathcal{H}$. Тада дефинишимо F_1 и F_2 на следећи начин:

$$F_1 = \{x \in H | \rho(x, G_1^c) \geq \rho(x, G_2^c)\}, \;\; F_2 = \{x \in H | \rho(x, G_2^c) \geq \rho(x, G_1^c)\}$$

Ако је $x \in F_1$ и $x \notin G_1$, онда мора бити $x \in G_2$ јер је $F_1 \subset G_1 \cup G_2$. Али, с друге стране, како је G_2^c затворен, то би значило да је $\rho(x, G_2^c) > 0 = \rho(x, G_1^c)$, што је контрадикција јер је $x \in F_1$. Дакле, на овај начин смо показали да је $F_1 \subset G_1$, а аналогно се добија и да је $F_2 \subset G_2$. Како $F_1 \subset H$ и $F_2 \subset H$ и $H \in \mathcal{H}$, применом корака 1 добијамо да постоје $H_1 \in \mathcal{H}$ и $H_2 \in \mathcal{H}$ такви да важе $F_1 \subset H_1 \subset G_1$ и $F_2 \subset H_2 \subset G_2$. Како имамо да је $H = F_1 \cup F_2$, онда имамо и да је $H \subset H_1 \cup H_2$. Тада на основу (3.3), (3.5) и начина на који смо дефинисали β важи

$$\alpha(H) \leq \alpha(H_1 \cup H_2) \leq \alpha(H_1) + \alpha(H_2) \leq \beta(G_1) + \beta(G_2)$$

Како ово важи за свако $H \subset G_1 \cup G_2$, одатле добијамо да $\beta(G_1 \cup G_2) \leq \beta(G_1) + \beta(G_2)$. Овиме је коначна субадитивност β доказана.

Корак 3: β је пребројиво субадитивна на отвореним скуповима.

Ако је $H \subset \bigcup_n G_n$, $H \in \mathcal{H}$, онда, како је H компактан, постоји неко n_0 такво да је $H \subset \bigcup_{n \leq n_0} G_n$. Како смо у кораку 2 доказали да важи коначна субадитивност, имамо да важи

$$\alpha(H) \leq \beta(\bigcup_{n \leq n_0} G_n) \leq \sum_{n \leq n_0} \beta(G_n) \leq \sum_n \beta(G_n)$$

Коришћењем супремума по $H \subset \bigcup_n G_n$, добијамо да важи $\beta(\bigcup_n G_n) \leq \sum_n \beta(G_n)$.

Корак 4: γ је спољашња мера.

Како је γ монотона и како важи $\gamma(\emptyset) = 0$, довољно је да докажемо да је γ пребројиво субадитивна. За произвољно $\epsilon > 0$ и произвољне скупове M_n који су подскупови од S, због начина на који је γ дефинисана, можемо одабрати отворене скупове G_n такве да $M_n \subset G_n$ и да важи $\beta(G_n) < \gamma(M_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$. Како је β пребројиво субадитивна, имамо

$$\gamma(\bigcup_n M_n) \leq \beta(\bigcup_n G_n) \leq \sum_n \beta(G_n) < \sum_n \gamma(M_n) + \epsilon,$$

а како је ϵ произвољно, пуштањем да $\epsilon \downarrow 0$ добијамо $\gamma(\bigcup_n M_n) \leq \sum_n \gamma(M_n)$. Тиме смо завршили доказ да је γ пребројиво субадитивна, што значи да је спољашња мера.

Корак 5: За сваки затворен скуп F и отворен скуп G из S важи $\beta(G) \geq \gamma(F \cap G) + \gamma(F^c \cap G)$.

За произвољно $\epsilon > 0$ одаберимо $H_1 \in \mathcal{H}$ за које важи $H_1 \subset F^c \cap G$ и $\alpha(H_1) > \beta(F^c \cap G) - \epsilon$. Сада одаберимо $H_0 \in H$, $H_0 \subset H_1^c \cap G$ такво да важи $\alpha(H_0) > \beta(H_1^c \cap G) - \epsilon$. Како су H_0 и H_1 дисјунктни, можемо искористити (3.4) и уз помоћ те једнакости и дефиниција β и γ добијамо

$$\beta(G) \geq \alpha(H_0 \cup H_1) = \alpha(H_0) + \alpha(H_1) > \beta(H_1^c \cap G) + \beta(F^c \cap G) - 2\epsilon \geq$$
$$\geq \beta(F \cap G) + \beta(F^c \cap G) - 2\epsilon \geq \gamma(F \cap G) + \gamma(F^c \cap G) - 2\epsilon$$

Како је ϵ прозвољно, пуштањем да $\epsilon \downarrow 0$, добијамо да важи $\beta(G) \geq \gamma(F \cap G) + \gamma(F^c \cap G)$.

Корак 6: Ако је F затворен, $F \in \mathcal{M}$.

Нека је F затворен, G отворен и нека је $L \subset G$. Тада, на основу корака 5 важи

$$\beta(G) \geq \gamma(F \cap G) + \gamma(F^c \cap G) \geq \gamma(F \cap L) + \gamma(F^c \cap L)$$

Када узмемо инфимум отворених G који садрже L, добијамо да је $\gamma(L) \geq \gamma(F \cap L) + \gamma(F^c \cap L)$, па је F γ-мерљив, односно $F \in \mathcal{M}$. Овиме је доказ завршен. $\square$

Директни смер Прохоровљеве теореме теореме има широку примену и, делом због тога што нема никакве услове везане за S, користи се чешће од инверзног смера. Пре него што пређемо на инверзни смер, докажимо следећу последицу теореме 3.1.

Последица 3.2 *Нека су P вероватносна мера на $(S, \mathcal{S})$ и $\{P_n\}$ низ вероватносних мера на $(S, \mathcal{S})$. Ако је $\{P_n\}$ густ и ако сваки његов подниз који слабо конвергира, слабо конвергира у P, онда важи и $P_n \Rightarrow P$.*[20]

Доказ: Посматрајмо неки произвољан подниз $\{P_{n_i}\}$ од $\{P_n\}$. Како је и он густ, на основу претходне теореме, он има неки даљи слабо конвергентан подниз $\{P_{n_{i(m)}}\}$. На основу препоставке ове последице, он слабо конвергира баш у P, односно важи $P_{n_{i(m)}} \Rightarrow P$. Применом теореме 2.8, добијамо да $P_n \Rightarrow P$. $\square$

Сада можемо прећи на инверзни смер Прохоровљеве теореме.

Теорема 3.3 *Нека је S сепарабилан и комплетан и Π фамилија вероватносних мера на $(S, \mathcal{S})$. Ако је Π релативно компактна, онда је и густа.*[21]

[20] Последица 3.2 са доказом се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* на страни 59

[21] Теорема 3.3 са доказом се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* обележена као теорема 5.2

Доказ: Узмимо отворене скупове G_n који расту ка S. Тада за свако $\epsilon > 0$ постоји n такво да $P(G_n) > 1 - \epsilon$ за свако P из Π. Разлог за то долази из релативне компактности Π - ако би за свако n постојала нека вероватносна мера P_n из Π таква да $P_n(G_n) \leq 1 - \epsilon$, на основу релативне компактности, могли бисмо да закључимо да постоје подниз P_{n_i} и вероватносна мера Q за које важи $P_{n_i} \Rightarrow Q$. Међутим, у том случају имали бисмо да

$$Q(G_n) \leq \liminf_i (P_{n_i}(G_n)) \leq \liminf_i (P_{n_i}(G_{n_i})) \leq 1 - \epsilon.$$

Али, како $G_n \uparrow S$, онда бисмо имали $Q(S) \leq 1 - \epsilon$, што је немогуће.

Даље имамо да ако низ A_{k_1}, A_{k_2}... отворених кугли полупречника $\frac{1}{k}$ покрива S (знамо да овакав низ постоји јер је S сепарабилан), онда постоји n_k такво да $P(\bigcup_{i \leq n_k}) A_{ki} > 1 - \frac{\epsilon}{2^k}$ за свако P из Π. Ако је K затворење скупа $\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{i \leq n_k} A_{ki}$, онда је K компактан. Разлог за то је што је $\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{i \leq n_k} A_{ki}$ тотално огранчен. (За свако $\epsilon > 0$ можемо одабрати довољно велико k такво да је $\frac{1}{k} < \epsilon$. Због тога су $\bigcup_{i \leq n_k} A_{ki}$ тотално ограничени, јер центри A_{ki} чине ϵ-мрежу, па је и $\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{i \leq n_k} A_{ki}$ тотално ограничен) Из тога и из комплетности, на основу теореме 4.13, имамо да је K компактан. Са друге стране, имамо да је за сваку вероватносну меру $P \in \Pi$

$$P(K) \geq P(\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{i \leq n_k} A_{ki}) > 1 - \sum_{k \geq 1} \frac{\epsilon}{2^k} = 1 - \epsilon,$$

па смо тиме доказали да је Π густа. □

Како смо већ доказали и директни и инверзни смер Прохоровљеве теореме, остало је још само да је формулишемо.

Теорема 3.4 *(Прохоровљева теорема) Нека је* Π *фамилија вероватносних мера на* $(S, \mathcal{S})$. *Ако је* Π *густа, онда је и релативно компактна. Инверзно, ако је* Π *релативно компактна и ако још важи да је* S *сепарабилан и комплетан, онда је* Π *густа.*

Доказ: Доказ следи директно из теорема 3.1 и 3.3. □

Ако се вратимо још једном на еуклидски простор R^k из примера 1.8. Овај простор, и још чешће, овај простор за $k = 1$ је најчешћи специјални случај како за Прохоровљеву теорему, тако и за остала разматрања из овог рада. Како је R^k и сепарабилан и комплетан, ти услови инверзног смера Прохоровљеве теореме су свакако задовољени, и зато се често може видети специјални случај ове теореме на R^k или на R који износи да је фамилија вероватносних мера густа ако и само ако је релативно компактна. Управо овако је на R формулисана Прохоровљева теорема и у књизи *[3] Вероватноћа и статистика.*

Вратимо се сада на општи случај. У инверзном смеру захтевамо сепарабилност и комплетност, али ако обратимо пажњу на доказ теореме 3.3, можемо приметити да део у ком користимо комплетност има доста сличности са коришћењем комплетности у доказу теореме 1.5. Сетимо се да смо у дискусији после теореме 1.5 тај услов успели да ослабимо и да га заменимо условом тополошке комплетности, односно, да захтевамо да је простор пољски. Иако се често Прохоровљева теорема формулише тако да се у инверзном смеру захтева сепарабилност и комплетност, заправо се и код ње овај услов може ослабити, и може се само захтевати да је простор пољски, што ћемо сада показати.

Слично као и у дискусији везаној за теорему 1.5, и овде ћемо формирање кугли A_{k_1}, A_{k_2}... из доказа теореме 3.3 пребацити из почетног простора (S, ρ) у хомеоморфан простор (S, ρ') који је сепарабилан и комплетан. Онда ћемо се вратити у почетни простор и конструисати $\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{i\leq n_k} A_{ki}$ на исти начин као и раније, што можемо да урадимо јер ће A_{ki} бити отворени скупови и у (S, ρ). Оно што је битно је да је $\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{i\leq n_k} A_{ki}$ у (S, ρ') идаље тотално ограничен, а његово затворење K је комплетно као затворен подскуп комплетног скупа, па је стога на основу теореме 4.13 K компактан у (S, ρ'), а како је компактност тополошко својство, компактан је и у (S, ρ). Остатак доказа се наставља на идентичан начин као и у случају када захтевамо комплетност, а не само тополошку комплетност.

Дакле, за инверзни смер Прохоровљеве теореме довољно је да захтевамо да је простор пољски. Из тог разлога, на неким местима се ова теорема може наћи и у таквој формулацији.

Вратимо се још једном на δ_x из примера 2.2. Нека је Π фамилија вероватносних мера дефинисана са $\Pi = \{\delta_x | x \in A\}$ за неко A из S које има компактно затворење. Задатак 5.3 из књиге *[1] Convergence of Probability Measures* од нас тражи да докажемо да је тада Π релативно компактна. Сетимо се да из примера 2.2 и из претходних враћања на њега знамо да низ δ_{x_n} може слабо конвергирати само ка вероватносној мери облика δ_x за неко $x \in S$, и да $\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x$ важи ако и само ако $x_n \to x$, $n \to +\infty$. Дакле, на основу тога и на основу дефиниције релативне компактности, закључујемо да је Π релативно компактна ако и само ако сваки низ $\{x_n\}$ из A има конвергентан подниз. Међутим, како је A^- компактан, управо овај резултат нам даје услов (ii) теореме 4.13. Овиме је релативна компактност Π доказана.

Ако још имамо да је S сепарабилан и комплетан (или, како смо управо показали, још слабије, ако је S пољски простор) онда можемо применити теорему 3.4, тако да ће на тим просторима Π бити и густа.

Сада ћемо коришћењем Прохоровљеве теореме доказати следеће тврђење које је важно за област финансијске математике.

Тврђење 3.5 *Нека је* $\Pi_{\{\varphi_i\}i\in I} = \{P \in \Pi(R^n_+) | P\varphi_i \leq 0, i \in I\}$*, где је* $\Pi(R^n_+)$ *фамилија свих вероватносних мера на* $(R^n_+, \mathcal{R}^n_+)$ *и* φ_i*,* $i \in I$ *непрекидне функције из* R^n_+*. Нека за неко* $i \in I$ *важи* $\varphi_i = m$*, где је* $m(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n g(x_i)$ *где је* g *конвексна суперлинеарна функција, то јест, важи* $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$*. Тада је* $\Pi_{\{\varphi_i\}i\in I}$ *релативно компактна.*[22]

Доказ: Прво ћемо доказати да је $\Pi_{\{\varphi_i\}i\in I}$ густа. Приметимо да из суперлинеарности g следи $\lim_{||x||\to+\infty} \frac{m(x)}{||x||} = +\infty$. Даље, из тога што $m \in \{\varphi_i\}i \in I$ важи $Pm \leq 0$ за свако $P \in \Pi_{\{\varphi_i\}i\in I}$.

Ако је $m(x) \geq 0$ за свако $x \in R^n_+$, онда за свако $P \in \Pi_{\{\varphi_i\}i\in I}$ важи $Pm = 0$ (јер је $Pm \geq 0$ и $Pm \leq 0$), па је $P(m^{-1}(\{0\})) = 1$. Са друге стране, како је $m^{-1}(\{0\})$ компактан, имамо да је $\Pi_{\{\varphi_i\}i\in I}$ густа.

У супротном, ако не важи $m \geq 0$, имамо да је $\min m = -a$ за неко $0 < a < +\infty$. За свако $\delta > 0$ постоји $k_\delta > 0$ такво да за $K_\delta = [0, k_\delta]^n$ на K^c_δ важи $m(x) > \frac{1}{\delta}$. Према томе, имамо да за свако $P \in \Pi_{\{\varphi_i\}i\in I}$ важи

$$\int_{K^c_\delta} mdP \geq \frac{P(K^c_\delta)}{\delta} \tag{3.9}$$

Даље, имамо да

$$0 \geq \int_{R^n_+} mdP = \int_{K_\delta} mdP + \int_{K^c_\delta} mdP \geq -aP(K_\delta) + \int_{K^c_\delta} mdP$$

[22]Тврђење 3.5 са доказом је уопштење првог корака доказа директног смера теореме 1.3 из рада *[4] A model-free version of the Fundamental theorem of asset pricing and the Super-replication theorem*

Одатле добијамо да важи

$$\int_{K_\delta^c} mdP \leq aP(K_\delta) \tag{3.10}$$

Коришћењем неједнакости (3.9) и (3.10), добијамо да важи

$$P(K_\delta^c) \leq \delta \int_{K_\delta^c} mdP \leq \delta a P(K_\delta) \leq \delta a$$

Дакле, за свако $\epsilon > 0$ можемо одабрати $\delta = \frac{\epsilon}{a}$ тако да је $P(K_\delta^c) \leq \epsilon$, односно тако да је $P(K_\delta) \geq 1 - \epsilon$. Како је K_δ компактан, $\Pi_{\{\varphi_i\}i\in I}$ је густа.

Дакле, доказали смо да је $\Pi_{\{\varphi_i\}i\in I}$ густа. Користећи теорему 3.1, добијамо да је $\Pi_{\{\varphi_i\}i\in I}$ и релативно компактна, чиме је овај доказ завршен. $\square$

Претходно тврђење представља један од кључних делова за доказ Фундаменталне теореме о цени у дискретном времену, независно од модела, која се може наћи у раду *[4] A model-free version of the Fundamental theorem of asset pricing and the Super-replication theorem* као теорема 1.3. Ова теорема представља изузетно важан резултат из финансијске математике и одређује услов за постојање прилике за арбитражу.

4 Додатак

Теорема 4.1 *(Дијагонална метода) Нека је сваки ред следећег низа*

$$\begin{aligned} &x_{1,1},\ x_{1,2},\ldots \\ &x_{2,1},\ x_{2,2},\ldots \\ &\ \vdots \quad\ \ \vdots \end{aligned} \tag{1}$$

ограничен низ реалних бројева. Тада постоји растући низ бројева n_1, n_2,... таквих да $\lim_k x_{r,n_k}$ постоји за свако $r \in \mathbb{N}$.[23]

Доказ: Како сваки ограничен низ има конвергентан подниз, одаберимо из првог реда подниз

$$x_{1,n_{1,1}},\ x_{1,n_{1,2}},\ldots \tag{2}$$

који конвергира и у ком су $n_{1,i}$ растући. Сада, посматрајмо подниз другог реда из (1)

$$x_{2,n_{1,1}},\ x_{2,n_{1,2}},\ldots \tag{3}$$

Како је други ред из (1) ограничен, ограничен је и (3), па и он има конвергентан подниз

$$x_{2,n_{2,1}},\ x_{2,n_{2,2}},\ldots \tag{4}$$

На тај начин, и за други ред из (1) одабрали смо подниз (4) у ком су $n_{2,k}$ растући и за који $lim_k x_{2,n_{2,k}}$ постоји. Настављајући на овај начин, добијамо

$$\begin{aligned} &n_{1,1},\ n_{1,2},\ldots \\ &n_{2,1},\ n_{2,2},\ldots \\ &\ \vdots \quad\ \ \vdots \end{aligned} \tag{5}$$

који има следећа својства

[23]Теорема 4.1 са доказом се може пронаћи у Додатку књиге *[2] Probability and Measure* обележена као A14

(i) сваки ред из (5) је растући

(ii) низ из $(r+1)$-вог реда из (5) је подниз низа из r-тог реда из (5)

(iii) за свако r, $lim_k x_{r,n_{r,k}}$ постоји

Дакле, имамо да је

$$x_{r,n_{r,1}},\ \ x_{r,n_{r,2}}, ... \tag{6}$$

конвергентан подниз r-тог реда из (1)

Нека је $n_k = n_{k,k}$. Како је сваки ред из (5) растући низ који је садржан у претходном реду, имамо да је n_1, n_2,... растући. Даље, n_r, n_{r+1},... је подниз r-тог реда из (5), па је стога конвергентан и $lim_k x_{r,n_k}$ постоји.

Како је $\{n_k\}$ дијаганалан у (5), примена ове теореме назива се *дијагонална метода.* $\square$

Дефиниција 4.2 *Простор S је сепарабилан ако садржи пребројив скуп густ у S.*

Дефиниција 4.3 *База простора S је класа отворених скупова из S са својством да се сви отворени скупови у S могу представити као унија скупова из базе.*

Дефиниција 4.4 *Отворен покривач неког скупа A из S је класа отворених скупова из S чија унија садржи A.*

Теорема 4.5 *Следећа три услова су еквивалентна:*[24]

(i) S је сепарабилан

(ii) S има пребројиву базу

(iii) сваки отворен покривач неког $A \subset S$ има пребројиви потпокривач.

Доказ: $(i) \Rightarrow (ii)$: Нека је D пребројив и густ у S и нека је $\mathcal{V}$ класа кугли $B(d,r)$ где је $d \in D$ и $r \in \mathbb{Q}$. Нека је G отворен. Да бисмо доказали да је $\mathcal{V}$ база, морамо доказати да ако је G_1 унија свих скупова из $\mathcal{V}$ који су садржани у G, онда је $G = G_1$. На основу начина на који смо дефинисали G_1, $G_1 \subset G$ важи. Да бисмо доказали да $G \subset G_1$, потребно је да покажемо да за савко $x \in G$ постоје $d \in D$

[24]Теорема 4.5 са доказом се може пронаћи у Додатку књиге *[1] Convergence of Probability Measures* на страни 237

и $r \in \mathbb{Q}$ такви да је $x \in B(d,r) \subset G$. Како је $x \in G$ и како је G отворен, постоји ϵ такво да је $B(x,\epsilon) \subset G$. Како је D густ у S, постоји $d \in D$ такво да је $\rho(x,d) < \frac{\epsilon}{2}$. Са друге стране, можемо узети $r \in \mathbb{Q}$ такво да $\rho(x,d) < r < \frac{\epsilon}{2}$, па је онда $x \in B(d,r) \subset B(x,\epsilon)$, па је $x \in G_1$. Према томе, $G = G_1$, па је $\mathcal{V}$ пребројива база од S.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Нека је $\{V_1,\ V_2, ...\}$ пребројива база и нека је $\{G_\alpha\}$ отворен покривач од A. За свако V_k за које постоји неко G_α које садржи V_k, узмимо неко такво G_{α_k}. За њега важи $V_k \subset G_{\alpha_k}$. Тада је $A \subset \bigcup_k G_{\alpha_k}$, па је $\{G_{\alpha_k}\}$ пребројив потпокривач од A.

$(iii) \Rightarrow (i)$: За свако $n \in \mathbb{N}$, $\{B(x, \frac{1}{n}) | x \in S\}$ је отворен покривач од S. Ако (iii) важи, онда постоји његов пребројиви потпокривач $\{B(x_{nk}, \frac{1}{n}) | k \in \mathbb{N}\}$. Дакле, $\{x_{nk} | n, k \in \mathbb{N}\}$ је пребројив и густ у S, па је S сепарабилан. $\square$

Дефиниција 4.6 *За подскуп M из S кажемо да је сепарабилан ако постоји пребројиви скуп D из S који је густ у M, односно за који важи $M \subset D^-$.*

Приметимо да D из претходне дефиниције не мора бити подскуп од M, иако се ово лако може обезбедити. Претпоставимо да је $\{d_k\}$ густ у M и нека је x_{nk} тачка у $B(d_k, \frac{1}{n}) \cap M$, ако таква тачка постоји (односно ако је пресек непразан). Тада за свако $x \in M$ и $\epsilon > 0$ можемо одабрати d_k и n такве да $\rho(x, d_k) < \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$. Како је $B(d_k, \frac{1}{n}) \cap M$ непразан, онда x_{nk} постоји и важи $\rho(x_{nk}, x) < \epsilon$. Дакле $\{x_{nk}\}$ је пребројив скуп густ у M који је подскуп од M.[25]

Теорема 4.7 *Нека је подскуп M од S сепарабилан. Тада важи:*[26]

(i) Постоји пребројива класа отворених скупова $\mathcal{A}$ који имају својство да ако је $x \in G \cap M$ и G је отворен, онда $x \in A \subset A^- \subset G$ за неко $A \in \mathcal{A}$.

(ii) Сваки отворен покривач од M има пребројив потпокривач.

Доказ: (i): Нека је D пребројив подскуп од M који је густ у M. Нека се $\mathcal{A}$ састоји од кугли $B(d,r)$, где је $d \in D$ и $r \in \mathbb{Q}$. Тада, ако је $x \in G \cap M$ и G је отворен, можемо одабрати ϵ такво да $B(x,\epsilon) \subset G$ и $d \in D$ такво да $\rho(x,d) < \frac{\epsilon}{2}$. Коначно, одаберимо $r \in \mathbb{Q}$ такво да важи $\rho(x,d) < r < \frac{\epsilon}{2}$. Тада имамо да

[25] Ова дискусија се може пронаћи у Додатку књиге *[1] Convergence of Probability Measures* на страни 237

[26] Теорема 4.7 са доказом се може пронаћи у Додатку књиге *[1] Convergence of Probability Measures* на страни 237

$x \in B(d,r) \subset B(d,r)^- \subset B(x,\epsilon) \subset G.$

(ii): Нека је $\mathcal{A} = \{A_1,\ A_2, ...\}$ класа из (i). Тада, ако је $\{G_\alpha\}$ покривач од M, онда за свако A_k можемо одабрати неко G_{α_k} такво да $A_k \subset G_{\alpha_k}$ (односно, за свако A_k за које такво G_{α_k} постоји). Онда $M \subset \bigcup_k G_{\alpha_k}$, па је G_{α_k} пребројив потпокривач од M. Ово својство се назива Линделофово својство. □

Дефиниција 4.8 *Низ $\{x_n\}$ је фундаменталан, или, Кошијев ако*

$$\sup_{i,j \geq n} \rho(x_i,\ x_j) \to 0, \quad n \to +\infty$$

Дефиниција 4.9 *Скуп M је комплетан ако сваки Кошијев низ у M има граничну вредност која лежи у M.*

Очигледно, комплетан скуп је увек затворен. У овом раду ће нас често занимати да ли је S комплетан.

Дефиниција 4.10 *Скуп A је компактан ако сваки отворен покривач од A има коначан потпокривач.*

Дефиниција 4.11 *За скуп A, скуп тачака $\{x_k\}$ са својством да за свако $x \in A$ постоји неко x_k такво да $\rho(x,\ x_k) < \epsilon$ називамо његовом ϵ-мрежом.*

Дефиниција 4.12 *За скуп A кажемо да је тотално ограничен ако за свако $\epsilon > 0$ има коначну ϵ-мрежу.*

Приметимо да из дефиниције за ϵ-мрежу, тачке ϵ-мреже не морају да леже у скупу A.

Теорема 4.13 *Следећа три услова су еквивалентна:*[27]

(i) *A^- је компактан*

(ii) *сваки низ из A има конвергентан подниз (чија је гранична вредност у A^-)*

(iii) *A је тотално ограничен и A^- је комплетан.*

[27]Теорема 4.13 са доказом се може пронаћи у Додатку књиге *[1] Convergence of Probability Measures* на страни 239

Доказ: Како (ii) важи ако и само ако сваки низ из A^- има конвергентан подниз чија гранична вредност лежи у A^- и како је A тотално ограничен ако и само ако је A^- тотално ограничен, у остатку доказа можемо претпоставити да је A затворен и да је $A = A^-$.

Да бисмо поједноставили доказ, дефинисаћемо следеће кораке који ће нам бити међукораци између (i) и (ii):

(1) сваки пребројив отворен покривач од A има коначан потпокривач

(2) ако $A \subset \bigcup_n G_n$, где су G_n отворени скупови за које важи $G_1 \subset G_2 \subset ...$, онда је $A \subset G_n$ за неко $n \in \mathbb{N}$

(3) ако је $A \supset F_1 \supset F_2 \supset ...$ где су F_n затворени непразни скупови, онда је $\bigcap_n F_n$ непразан

Прво ћемо доказати да су (1), (2), (3), (ii) и (iii) еквивалентни.

(1) $\Leftrightarrow$ (2): Директан смер овог тврђења очигледно важи, а што се инверзног смера тиче, ако је $\{G_n\}$ неки пребројиви отворени покривач од A, можемо га заменити са $\bigcup_{k\leq n} G_k$, а тада из (2) знамо да постоји n такво да $A \subset \bigcup_{k\leq n} G_k$, те смо на тај начин добили коначни отворени потпокривач.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Други начин да формулишемо (2) је да за отворене скупове G_n $A \cap G_n \uparrow A$ имплицира да за неко $n \in \mathbb{N}$ $A \cap G_n = A$. Слично, (3) можемо формулисати тако да за затворене скупове F_n $A \cap F_n \downarrow \emptyset$ имплицира да је за неко $n \in \mathbb{N}$ $A \cap F_n = \emptyset$ (у овој формулацији F_n не мора бити садржано у A). Међутим, када узмемо $F_n = G_n^c$, видимо да су ове две тврдње еквивалентне.

(3) $\Leftrightarrow$ (ii): Ако је $\{x_n\}$ неки низ из A, узмимо $B_n = \{x_n,\ x_{n+1}, ...\}$ и $F_n = B_n^-$. Тада је сваки F_n непразан и ако (3) важи, следи да је $\bigcap_n F_n$ непразан. Узмимо неко $x \in \bigcap_n F_n$. Како је x из затворења од B_n, постоји $i_n \geq n$ такво да $\rho(x,\ x_{i_n}) < \frac{1}{n}$. Бирајмо i_n тако да $i_1 < i_2 < ...$ важи. Онда је $\lim_n \rho(x, x_{i_n}) = 0$, односно (ii) важи. Са друге стране, ако је F_n опадајући низ непразних скупова и ако (ii) важи, онда можемо узети $x_n \in F_n$ и неки подниз од $\{x_n\}$ ће имати неку граничну вредност x. Како се ради о затвореним скуповима, важиће $x \in \bigcap_n F_n$, па је тај скуп непразан.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Претпоставимо супротно, да A није тотално ограничен. Тада постоје ϵ и бесконачни низ $\{x_n\}$ из A такви да $\rho(x_m,\ x_n) \geq \epsilon$ за $m \neq n$. Али, у том случају низ $\{x_n\}$ не би могао имати конвергентан подниз, што је у супротности с претпоставком (ii), тако да A мора бити тотално ограничен. Даље, (ii) имплицира и комплетност, јер ако је низ $\{x_n\}$ Кошијев и има неки подниз који конвергира у x, онда и $\{x_n\}$ конвергира у x.

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Ако је A тотално ограничен, за свако $n \in \mathbb{N}$, може бити покривен са коначно много отворених кугли B_{n1},...,B_{nk_n} полупречника $\frac{1}{n}$. За сваки низ $\{x_m\}$ из A, можемо одабрати растући низ бројева m_{11}, m_{12},... тако да сви $x_{m_{11}}$, $x_{m_{12}}$... буду садржани у истом B_{1k}. Знамо да је ово могуће, јер постоји коначно много ових кугли. У следећем кораку одаберимо неки подниз m_{21}, m_{22},... низа m_{11}, m_{12},... такав да $x_{m_{21}}$, $x_{m_{22}}$... буду у истом B_{2k}. Наставимо конструкцију m_{ij} даље на овај начин. Нека је $r_i = m_{ii}$. Тада x_{r_n}, $x_{r_{n+1}}$,... сви леже у истом B_{nk}. Дакле, због начина на који смо га конструисали x_{r_1}, x_{r_2},... је Кошијев и из комплетности следи да конвергира ка некој тачки из A.

Овиме смо доказали да су (1), (2), (3), (ii) и (iii) еквивалентни. Из (i) очигледно следи (1), тако да је довољно да докажемо да (i) следи из (1) и (iii). Како је A у том случају тотално ограничен, онда је и сепарабилан, па на основу Линделофовог својства сваки отворени покривач од A има пребројив потпокривач. Даље, из (1) имамо да сваки пребројив покривач има коначан потпокривач, те је A компактан. $\square$

Нека је $\mathcal{S}$ Борелова σ-алгебра за метрички простор (S, ρ) и нека је (S', ρ') неки други метрички простор са Бореловом σ-алгебром $\mathcal{S}'$. Тада, ако је $h : S \to S'$ непрекидна, онда је и $\mathcal{S}/\mathcal{S}'$ мерљива, у смислу да ако је $A' \in \mathcal{S}'$, онда је и $A = h^{-1}(A') \in \mathcal{S}$. Доказ за ово се базира на томе да је ово довољно доказати за отворене скупове, а ако је $G' \in \mathcal{S}'$ отворен, онда је и $h^{-1}(G')$ отворен, па самим тим и $h^{-1}(G') \in \mathcal{S}$. Ако имамо неко пресликавање $h : S \to S'$ које је $\mathcal{S}/\mathcal{S}'$ мерљиво и неку меру μ на $\mathcal{S}$, онда можемо дефинисати меру μh^{-1} на $\mathcal{S}'$ са[28]

$$\mu h^{-1}(A') = \mu(h^{-1}(A')), \quad A' \in \mathcal{S}' \tag{4.1}$$

Теорема 4.14 *Ако је f ненегативна, μ мера на метричком простору (S, ρ) са σ-алгебром $\mathcal{S}$, (S', ρ') метрички простор и $h : S \to S'$ пресликавање из S у S', онда важи*[29]

$$\int_S f(h(A))\mu(dA) = \int_{S'} f(A')\mu h^{-1}(dA') \tag{4.2}$$

[28]Ова дискусија се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* на страни 243 и у књизи *[2] Probability and Measure* на страни 182

[29]Теорема 4.14 са доказом се може пронаћи у књизи *[2] Probability and Measure* обележена као теорема 16.13

Доказ: Ако је $f = I_{A'}$, онда $f \circ h = I_{h^{-1}A'}$, па се у том случају (4.2) своди на (4.1), па одатле важи. Линеарношћу, добијамо да (4.2) важи за све просте функције. Ако су $\{f_n\}$ просте фунцкије такве да $0 \leq f_n \uparrow f$, онда и $0 \leq f_n(A) \uparrow f(A)$, па одатле и за f важи (4.2), чиме смо доказали (4.2) за све ненегативне функције. $\square$

Теорема 4.15 *Нека су (S, ρ) и (S', ρ') метрички простори са Бореловим σ-алгебрама $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$, нека је $h : S \to S'$ пресликавање из S у S' и нека је D_h скуп тачака прекида од h. Тада $D_h \in \mathcal{S}$.*[30]

Доказ: Нека је $A_{\epsilon\delta}$ скуп тачака $x \in S$ за које постоје тачке y и z из S такве да $\rho(x, y) < \delta$, $\rho(x, z) < \delta$ и $\rho(h(y), h(z)) \geq \epsilon$. Како је $A_{\epsilon\delta}$ отворен и како је $D_h = \bigcup_{\epsilon \in \mathbb{Q}^+} \bigcap_{\delta \in \mathbb{Q}^+} A_{\epsilon\delta}$, онда $D_h \in \mathcal{S}$. $\square$

Дефиниција 4.16 *За класу $\mathcal{A}$ на S кажемо да је π-систем ако је затворена за коначни пресек.*

Дефиниција 4.17 *За класу $\mathcal{A}$ на S кажемо да је λ-систем ако садржи S и ако је затворена за комплемент и за коначну унију дисјунктних скупова.*

Теорема 4.18 *Ако је $\mathcal{A}$ π-систем на S и ако је $\mathcal{B}$ λ-систем на S, онда из $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ следи $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$.*[31]

[30] Теорема 4.1 са доказом се може пронаћи у књизи *[1] Convergence of Probability Measures* на страни 243

[31] Теорема 4.18 се може пронаћи у књизи *[2] Probability and Measure* обележена као теорема 3.2

Литература

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures, 2nd edition*, Wiley, 1999.

[2] P. Billingsley, *Probability and Measure, 3rd edition*, Wiley, 1995.

[3] П. Младеновић, *Вероватноћа и статистика, четврто издање*, Математички факултет, 2008.

[4] B. Acciaio, M. Beiglböck, F. Penkner, W. Schachermayer, *A model-free version of the Fundamental theorem of asset pricing and the Super-replication theorem*, Mathematical Finance, 2013.