Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Uporedni prikaz strogog zasnivanja prstena polinoma i školske nastave o polinomima

MASTER RAD

Mentor:
dr Dragana Todorić

Student:
Aleksandra Stanišić 1121/2016

Beograd, 2020.

Sadržaj

1 Uvod

Značaj polinoma u nastavi viših razreda osnovne škole ogleda se u njihovoj primeni prilikom rešavanja jednačina i nejednačina, dokazivanja Pitagorine toreme, kao i u geometriji, pa bi se moglo reći da predstavljaju najvažniji algebarski sadržaj na tom obrazovnom nivou. Takođe, linearna i kvadratna funkcija ubrajaju se među takozvane polinomne funkcije, dok na višim stupnjevima znanja polinomi imaju veliku ulogu u aproksimaciji funkcija, zatim u teorijskoj i primenjenoj matematici. Zbog svega pomenutog zauzimaju bitno mesto u algebri.

Cilj rada je zasnivanje prstena polinoma zajedno sa njegovim osnovnim osobinama i poređenje školske nastave o polinomima sa formalnim algebarskim pristupom.

Prvi deo posvećen je prstenu polinoma i njegovim osobinama. Kako bismo uopšte došli do pojma prstena i prstena polinoma, najpre ćemo definisati prostije algebarske strukture i algebarske operacije. S obzirom na to da polinomi predstavljaju prosta raširenja prstena, pažnju ćemo posvetiti upravo njima, nakon čega ćemo uvesti i pojam polinoma na nešto višem nivou, a zatim definisati stepen polinoma i euklidsko deljenje.

U okviru ove teme bavićemo se i faktorizacijom polinoma, gde ćemo definišati euklidsko deljenje, najveći zajednički delilac i najmanji zajednički sadržalac. Obradićemo Euklidov algoritam za pronalaženje najvećeg zajedničkog delioca datih polinoma, i potkrepiti ga primerima. Bavićemo se izvodom, nulama polinoma i njihovom višestukošću, kao i polinomima sa više neodređenih.

U drugom delu ćemo analizirati školsku nastavu o polinomima, najpre uvodeći pojam polinoma i podelu polinoma prema broju članova na monome, binome i trinome, i za svaku vrstu neke specifičnosti. Zatim ćemo obraditi operacije sa polinomima: sabiranje, oduzimanje i množenje polinoma, i osnovne polinomijalne identitete – razliku kvadrata i kvadrat binoma. Sledeća bitna tema jeste faktorizacija, to jest rastavljanje polinoma na proste činioce, nakon čega ćemo akcenat staviti na najčešće greške koje učenici prave radeći sa polinomima. Na samom kraju osvrnućemo se na primenu polinoma pri rešavanju jednačina, dokazivanju Pitagorine teoreme.

2 Prsten polinoma i njegove osobine

2.1 Algebarske operacije i strukture

Da bismo upošte došli do pojma prstena, i prstena polinoma, potebno je definisati prostije algebarske strukture od njega. Pored algebarskih struktura, u ovom delu definisemo i algebraska operacije.

2.1.1 Algebarske operacije

Definicija 1. *Neka je A neprazan skup i n nenegativan broj.*
a) Definišemo $n-$ti stepen skupa A, u oznaci A^n:
$A^0 := \{\emptyset\}$ *i*
$A^n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1, a_2, \ldots, a_n \in A\}$*, ako* $n > 0$.
b) ***Algebarska operacija skupa A, dužine n*** *ili* $n-$***arna operacija skupa A****, je ma koja funkcija $f : A^n \to A$. Za n kažemo da je* ***dužina*** *ili* ***arnost*** *operacije f, u oznaci $ar(f)$.*

Definicija 2. ***Binarna operacija****. Pod binarnom operacijom u nepraznom skupu A podrazumevamo svako preslikavanje $f : A^2 \to A$, kojim se proizvoljnom paru (a, b) njegovih elemenata a i b pridružuje određeni element $f(a, b)$ tog istog skupa A. Kažemo još i da je binarna operacija, operacija dužine* 2.

Neki znaci, kao na primer, $+$, $\cdot$, $\cap$, $\cup$, $\wedge$, $\vee$, $\triangle$, kao i $\circ$ i $*$ koriste se za označavanje binarnih operacija, pri čemu se rezultat njihove primene piše u infiksnom obliku. Na primer: $(a + b)$, $(a \cdot b)$, ... , $(a * b)$.

Definicija 3. ***Unarna operacija****. Pod unarnom operacijom u nepraznom skupu A podrazumevamo njegove transformacije, to jest svako preslikavanje $f : A \to A$ koje taj skup preslikava u samog sebe. Kažemo još i da je unarna operacija, operacija dužine* 1*, i nazivamo je i* ***operatorom*** *u tom skupu.*

Za označavanje unarnih operacija, često koristimo znake $-$, $^{-1}$, $'$, ^{c}, ^{T}, i tada rezultat primene tih operacija na a pišemo na sledeći način: $(-a)$, (a^{-1}), (a'), (a^c), (a^T).

Definicija 4. ***Nularna operacija****. Pod nularnom operacijom u nepraznom skupu A podrazumevamo same elemente skupa A. Kažemo još i da je nularna operacija, operacija dužine* 0.

2.1.2 Algebarske strukture

Definicija 5. ***Algebarska struktura****, kažemo kraće i* ***algebra****, je uređeni par $\mathbb{A} := (A, \Omega)$, gde je A neprazan skup, tj.* ***domen algebre*** *$\mathbb{A}$, i Ω neka familija algebarskih operacija iz skupa A.* ***Signatura*** *ili* ***tip*** *algebre $\mathbb{A} = (A, \Omega)$ je Ω-familija $(ar(f))_{f\in\Omega}$.*

Tako, na primer, sve algebarske strukture tipa (2,2,0) imaju tačno po dve binarne i jednu nularnu operaciju. Kao primer takve algebarske strukture možemo navesti $(N, +, \cdot, 1)$ gde su $+$ i $\cdot$ operacije sabiranja i množenja, a 1 je fiksan element u skupu prirodnih brojeva N.

U osnovne algebarske strukture ubrajamo: grupoide, semigrupe (polugrupe), monoide, grupe, prstene i polja.

Definicija 6. ***Grupoid***, *je uređeni par $(G, *)$, gde je $*$ binarna operacija skupa $G \neq \emptyset$.*

Definicija 7. *Neka je $(G, *)$ grupoid:*
*a) $e \in G$ je **levi neutral grupoida G** akko $(\forall x \in G)\, e * x = x$.*
*b) $e \in G$ je **desni neutral grupoida G** akko $(\forall x \in G)\, x * e = x$.*
*a) $e \in G$ je **neutral grupoida G** akko $(\forall x \in G)\, e * x = x = x * e$.*
*Umesto reči **neutral** koristimo još i **neutralni element, identiteta**, ako je u pitanju binarna operacija $\cdot$ kažemo **jedinica**, a ako je u pitanju binarna operacija $+$ kažemo **nula**.*

Lema 1. *Grupoid ima najviše jedan neutral.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $e, f \in G$ neutrali. Tada $f = e * f = e$. □

Definicija 8. ***Podgrupa (semigrupa)***, *je grupoid $(S, *)$, u kome je binarna operacija $*$ asocijativna. Ekvivalentno, grupoid $(S, *)$ je **semigrupa** akko*

$$(\forall x, y, z \in S)(x * y) * z = x * (y * z).$$

Definicija 9. ***Monoid*** *je semigrupa sa neutralom. Drugim rečima semigrupa $(M, *)$ je **monoid** ako i samo ako $(\exists z \in M)(\forall x \in M)\ z * x = x = x * z$.*

Definicija 10. *Neka je $(M, *, e)$ monoid, $x \in M$:*
*a) $y \in M$ je **levi inverz elementa x** akko $y * x = e$.*
*b) $y \in M$ je **desni inverz elementa x** akko $x * y = e$.*
*a) $y \in M$ je **inverz elementa x** akko $y * x = e = x * y$.*

*Umesto reči **inverz** koristimo još i **inverzni, inverzibilan ili regularan element**, a ako je u pitanju binarna operacija $+$ kažemo **suprotan broj**.*

Lema 2. *Neka je $(M, *, e)$ monoid. Tada $x \in M$ ima najviše jedan inverz. (Ako element $x \in M$ ima inverz, označavamo ga sa $\overline{x}$).*

Dokaz. Pretpostavimo da su $y, z \in M$ inverzi elementa x.
Tada je $y = y * e = y * (x * z) = (y * x) * z = e * z = z$. □

Lema 3. *Neka je $(M, *, e)$ monoid. Ako su a, $b \in M$ inverzibilni, onda su e, $a * b$, $\overline{a}$ takođe inverzibilni i važi:.*
a) $\overline{e} = e$,
b) $\overline{a * b} = \overline{b} * \overline{a}$,
c) $\overline{\overline{a}} = a$.

Dokaz. a) Sledi iz $e * e = e$.
b) Zaista $(\overline{b}*\overline{a})*(a*b) = \overline{b}*(\overline{a}*(a*b)) = \overline{b}*((\overline{a}*a)*b) = \overline{b}*(e*b) = \overline{b}*b = e$.
Slično je $(a*b)*(\overline{b}*\overline{a}) = e$. Odatle je $\overline{b}*\overline{a}$ inverz elementa $a*b$.
c) Sledi iz $a*\overline{a} = e = \overline{a}*a$.

□

Definicija 11. ***Grupa*** *je monoid u kome svaki element ima inverz. To jest, monoid je* ***grupa*** *akko* $(\forall x \in G)(\exists y \in G)\ y*x = e = x*y$.

Definicija 12. *Grupa (semigrupa, grupoid)* $(G,*)$ *je* ***komutativna*** *akko*
$$(\forall x, y \in G)\ x*y = y*x.$$

Videli smo da se **grupa** može definisati na sledeće načine:
a) $(G,*)$ je grupa akko $(G,*)$ je semigrupa i
$(\exists z \in G)(\forall x \in G)\,(z*x = x = x*z \wedge (\exists y \in G)\, y*x = z = x*y)$.
b) $(G,*,^{-},e)$ je grupa akko $(G,*)$ je semigrupa,
$(\forall x \in G)\, e*x = x = x*e$, i $(\forall x \in G)\, \overline{x}*x = e = x*\overline{x}$.

Lema 4. *Neka je* $(G,*)$ *je semigrupa. Tada:*
a) $(G,*)$ *je grupa akko i* $(\exists z \in G)(\forall x \in G)(z*x = x \wedge (\exists y \in G)\, y*x = z)$,
b) $(G,*,^{-},e)$ *je grupa akko* $(\forall x \in G)\, e*x = x$ *, i* $(\forall x \in G)(\overline{x}*x = e)$.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da desna strana povlači levu.
b) Prvo dokazujemo $(\forall x \in G)\ x*\overline{x} = e$, a zatim $(\forall x \in G)\ x*e = x$. Imamo da je $(x*\overline{x}) = (e*x)*\overline{x} = ((\overline{\overline{x}}*\overline{x})*x)*\overline{x}) = (\overline{\overline{x}}*(\overline{x}*x))*\overline{x}) = ((\overline{\overline{x}}*e)*\overline{x}) = \overline{\overline{x}}*(e*\overline{x}) = \overline{\overline{x}}*\overline{x} = e$, onda je $x*e = x*(\overline{x}*x) = (x*\overline{x})*x = e*x = x$.
a) Dovoljno je da neutral z označimo slovom e, inverz y elementa x slovom $\overline{x}$, a inverz elementa $\overline{x}$ slovom $\overline{\overline{x}}$ pa da ponovimo prethodni dokaz. □

Stav 1. *Neka je* $(M,*,e)$ *monoid. Posmatramo skup invertibilnih elemenata* $G := \{x \in M \,|\, (\exists y \in M)\, y*x = e = x*y\}$. *Tada* $e \in G$, G *je zatvoren za binarnu operaciju* $*$ *i monoid* $(G,*,e)$ *je grupa.*

Definicija 13. *Algebarska struktura* $P = (P,+,\cdot,-,0)$ *je* ***prsten*** *ako i samo ako je* $(P,+,-,0)$ *komutativna grupa,* $(P,\cdot)$ *je semigrupa i važe oba zakona distributivnosti, to jest* $(\forall x,y,z \in P)(x(y+z) = xy+xz \wedge (x+y)z = xz+yz)$. *Prsten* P *je* ***komutativan*** *akko je* $\cdot$ *komutativna, tj. akko je* $(\forall x,y \in P)xy = yx$. P *je* ***prsten sa jedinicom 1*** *akko je* $(\forall x \in P)\ 1\cdot x = x = x\cdot 1$.

Lema 5. *Neka je* $P = (P,+,\cdot,-,0)$ *prsten. Tada:*
a) $x0 = 0 = 0x$
b) $x(-y) = -xy = (-x)y$, $(-x)(-y) = xy$,
c) Ako $x - y := x + (-y)$, *onda* $x(y-z) = xy - xz$, $(x-y)z = xz - yz$,
d) $(x_1 + \cdots + x_n)y = x_1y + \cdots + x_ny$, $x(y_1 + \cdots + y_n) = xy_1 + \cdots + xy_m$,
e) $(x_1 + \cdots + x_n)(y_1 + \cdots + y_m) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_iy_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_iy_j$.

Dokaz. a) Iz $x0 = x(0+0) = x0 + x0$ sledi $x0 = x0 + x0$.
Onda je $x0 + (-x0) = (x0 + x0) + (-x0) = x0 + (x0 + (-x0))$,
a ovo povlači $0 = x0$. Slično $0 = 0x$.
b) Iz $0 = x0 = x(-y+y) = x(-y) + xy$ sledi $0 = x(-y) + xy$.
Onda je $0 + (-xy) = (x(-y) + xy) + (-xy) = x(-y) + (xy + (-xy))$,
a ovo povlači $-xy = x(-y)$. Slično $-xy = (-x)y$.
Iz prethodnih jednakosti imamo: $(-x)(-y) = -(-x)y = -(-xy) = xy$.
c) $(x-y)z = (x + (-y))z = xz + (-y)z = xz + (-yz) = xz - yz$.
d) Indukcijom, koristeći distributivnost.
e) Sledi iz d).

□

Definicija 14. *Definišemo **karakteristiku prstena P**, u oznaci* char P.

$$\text{char P} = \begin{cases} 0, & \textit{ako je } C := \{n \in \mathbb{N} \mid (\forall x \in P)\ nx = 0\} = \emptyset; \\ \min C, & \textit{ako je } C \neq \emptyset. \end{cases}$$

Ako je P prsten sa jedinicom 1, onda je $C = C_1 := \{n \in \mathbb{N} \mid n1 = 0\} \subseteq \mathbb{N}$. Neposredno imamao $C \subseteq C_1$. Za $C_1 \subseteq C$: ako je $n \in C_1$, onda za svako $x \in P$ imamo $nx = n(1x) = (n1)x = 0x = 0$, znači $n \in C$.

Definicija 15. *Prsten P je **bez delitelja nule** akko*
$(\forall x, y \in P)\,(xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0)$.

Lema 6. *Ako je P prsten sa jedinicom 1, bez delitelja nule onda je njegova karakteristika nula ili neki prost broj p.*

Dokaz. Neka je charP$= m = kl$, gde su $k, l < m$. tada iz $0 = m1 = (kl)1 = (kl)(11) = (k1)(l1)$ sledi $k1 = 0$ ili $l1 = 0$. Kontradikcija. □

Definicija 16. *K^*je skup svih inverzibilnih elemenata prsetena K.*

Relacija $a \in K^*$ znači da je $a \in K$ i da jednačine $a \cdot x = 1$ i $x \cdot a = 1$ imaju barem jedno, a samim tim i tačno jedno zajedničko rešenje u K. Zovemo ga **inverzom** od a u tom prstenu i označavamo sa a^{-1}.

Definicija 17. ***Polje** je komutativan prsten sa jedinicom, $1 \neq 0$ u kome svaki ne-nula element ima multiplikativni inverz. To jest, komutativni prsten sa jedinicom 1 je **polje** akko $(\forall x \in F)(x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in F)xy = 1)$ i $1 \neq 0$. Inverz ne-nula elementa $x \in F$ označavamo sa x^{-1}.*

Lema 7. *U svakom polju važi $(\forall x, y)(xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0)$.*

Dokaz. Dokazujemo ekvivalentnu formulu $(\forall x, y)(xy = 0 \wedge x \neq 0 \Rightarrow y = 0)$.
Ako je $xy = 0$ i $x \neq 0$, onda je $y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0$. □

Modul je komutativna grupa čije elemente možemo množiti elementima nekog prstena. Na primer, polinomi s koeficijentima u prstenu K čine modul nad K, jer takve polinome možemo množiti elementima prstena K.

Definicija 18. *Neka je K prsten, i neka je $(M,+)$ komutativna grupa. Kažemo da je M levi K-modul ako postoji preslikavanje $K \times M \to M$, $(\alpha, m) \mapsto \alpha m$, sa svojstvima:*
(1) $\alpha(m_1 + m_2) = \alpha m_1 + \alpha m_2$,
(2) $(\alpha_1 + \alpha_2)m = \alpha_1 m + \alpha_2 m$,
(3) $(\alpha_1 \alpha_2)m = \alpha_1(\alpha_2 m)$,
(4) $1m = m$ *ako je* $1 \in K$,
za sve $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in K$ *i* $m, m_1, m_2 \in M$.

Ako je K polje, tada M nazivamo **vektorski prostor** nad poljem K. Operacija $(\alpha, m) \mapsto \alpha m$ naziva se **množenje skalarom** α, a prsten K se naziva **prsten skalara**. Svojstva (1) i (2) su zakoni distributivnosti u odnosu na sabiranje u M i K, a svojstvo (3) je zakon asocijativnosti. Modul M se naziva **levi K-modul**, jer je množenje αm definisano sleva. Na sličan način se definiše **desni K-modul**.

Ako je K komutativan prsten i M je levi K-modul, tada M postaje desni K-modul ako definišemo

$$m\alpha = \alpha m, \quad \alpha \in K, m \in M.$$

U ovom slučaju levi K-modul je identičan desnom K-modulu pa ih ne razlikujemo i nazivamo **K-moduli** ili kraće **moduli** nad prstenom K.

Primer 1. *Svaki prsten K je levi i desni K-modul.*

Primer 2. *Ako je G aditivna Abelova (komutativna) grupa, tada je G levi $\mathbb{Z}$-modul jer važi:*

(1) $k(g_1 + g_2) = kg_1 + kg_2$,
(2) $(k_1 + k_2)g = k_1 g + k_2 g$,
(3) $(k_1 k_2)g = k_1(k_2 g)$,
(4) $1g = g$,
za sve $k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ *i* $g, g_1, g_2 \in G$.

Neka je M bilo koji modul nad prstenom K. Za njegov element m kažemo da je **linearna kombinacija** nad datim sistemom $e = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ od n elemenata $e_r \in M$, ako je

$$m = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

za bar jednu n-torku $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ skalara iz K. Pri tom, za dato m sistem skalara α_r sa tim svojstvom, ne mora biti jednoznačno određen.

Skup svih skalara nad pomenutim sistemom e zovemo njegovim **linearnim omotačem** i označavamo sa $\Omega(e) = \Omega(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Ako je i $n \in \Omega$, i $n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n$, $\beta_r \in K$ važi

$$m + n = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + (\alpha_2 + \beta_2)e_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)e_n \text{ i}$$
$$\lambda m = \lambda\alpha_1 e_1 + \lambda\alpha_2 e_2 + \cdots + \lambda\alpha_n e_n.$$

Za neki sistem $e = [e_1, e_2, \ldots, e_n]$ elemenata K-modula M kažemo da je **linearno nezavisan**, ako za proizvoljne skalare $\lambda_r \in K$ važi:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Algebarske podstrukture

Ako je A algebarska struktura, i ako je $B \subseteq A$, B je **algebarska podstruktura** algebarske strukture A ako i samo ako:

1° $B \neq \emptyset$,
2° B je zatvoren za operacije iz A,
3° B je zatvoren za konstante iz A.

Definicija 19. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten, i neka je S neprazan podskup od P. Kažemo da je S **potprsten** prstena P u oznaci $S \subseteq P$, ako je $(S, +, \cdot)$ prsten.*

Binarne operacije u S su iste kao u P. Svaki prsten P ima trivijalne potprstene: 0 i P.

Teorema 1. *Neka je $(P, +, \cdot)$ prsten i neka je $S \subseteq R$, $S \neq \emptyset$. S je potprsten od R ako i samo ako za svako $a, b \in S$ važi $a - b \in S$ i $ab \in S$.*

Dokaz. Ako je $a - b \in S$ za svako $a, b \in S$, tada je $(S, +)$ aditivna podgrupa grupe $(P, +)$. Zatim, ako je $ab \in S$ za svako $a, b \in S$, tada je S zatvoren za množenje, dok se asocijativnost i distributivnost množenja nasleđuju iz P. □

Presek konačnog broja potprstena od P takođe je potprsten od P.

Definicija 20. *Neka je P prsten. Skup $Z(P) = \{a \in P \mid xa = ax \text{ za svako } x \in P\}$ naziva se **centar** prstena P.*

Centar $Z(P)$ je neprazan skup jer je $0 \in Z(P)$.

Teorema 2. *Centar prstena je potprsten.*

Dokaz. Neka su $a, b \in Z(P)$ i $x \in P$. Tada je $(a - b)x = ax - bx = xa - xb = x(a - b)$, što pokazuje da je $ab \in Z(R)$. Zatim, $(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = x(ab)$, pa sledi da je $ab \in Z(P)$. Prema teoremi 1 S je podprsten od P. □

Primer 3. $(2Z, +, \cdot) \leq (Z, +, \cdot)$

Prethodni primer pokazuje da jedinica prstena ne mora pripadati potprstenu, za razliku od nule koja mora pripadati potprstenu.

Svi prsteni imaju jedinicu.

2.2 Prsten polinoma

2.2.1 Prosta raširenja prstena

Neka je K potprsten prstena L. Svaki potprsten A koji sadrži K i neki fiksiran element $\lambda \in L$ mora sadržati i skup $K[\lambda]$ svih elemenata $a \in L$ oblika

$$a = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \cdots + \alpha_n\lambda^n,\ \alpha_r \in K \text{ i } n \in N_0.$$

Ako je $b = \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2 + \cdots + \beta_m\lambda^m$ i $k = \max\{m,n\}$, $\alpha_r = \beta_s = 0$ za svako $r > n$ i za svako $s > m$ tada u prstenu L važi

$$a + b = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)\lambda + \cdots + (\alpha_k + \beta_k)\lambda^k, \text{ tada je i } a + b \in K[\lambda].$$

U opštem slučaju skup $K[\lambda]$ ne mora biti potprsten prstena L.

Ukoliko važi $\alpha\lambda = \lambda\alpha$ za svako $\alpha \in K$, to jest, ako λ komutira sa svakim elementom iz K, onda je $K[\lambda]$ potprsten prstena L. Tada je i $\alpha\lambda^r = \lambda^r\alpha$. A ako su $a = \sum \alpha_r\lambda^r$ i $b = \sum \beta_s\lambda^s$ već pomenuti elementi skupa $K[\lambda]$, sledi da je i $ab \in K[\lambda]$, gde je $ab = \sum \delta_k\lambda^k$, za $\delta = \alpha_0\beta_k + \alpha_1\beta_{k-1} + \cdots + \alpha_k\beta_0$. Sledi da je skup $K[\lambda]$ minimalni potprsten od L koji sadrži λ i uočeni prsten K.

Specijalno ako je $L = K[\lambda]$ za bar jedno $\lambda \in L$ koje komutira sa svim elementima iz K, za sam prsten L kažemo da je **prosto raširenje prstena K sa generatrisom** λ. U tom slučaju i $K[\lambda]$ je jedan $K - modul$ sa genertrisom

$$e = \left[1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^n, \ldots\right].$$

Ukoliko je familija e linearno nezavisna nad prstenom K, to jest, ako za svako $n \in N_0$ i proizvoljne α_r-ove iz K važi

$$\alpha_0 + \cdots + \alpha_n\lambda^n = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$$

za samo to λ kažemo da je **transcedentno nad** K, inače je λ **algebarski nad** K.

Primer 4. *Polje $C = R[i]$ je jedno prosto raširenje polja R.*

Primer 5. *Prsten $Q\left[\sqrt{2}\right]$ je jedno prosto raširenje polja Q, ali je i polje.* ($\sqrt{2} \in R \setminus Q$)

Primer 6. *Prsten $Q\left[\sqrt{3}\right]$ je jedno prosto raširenje polja Q, ali je i polje.* ($\sqrt{3} \in R \setminus Q$)

Primer 7. *Prsten $Q[i]$ je jedno prosto raširenje polja Q, ali je i polje.*

Primer 8. *Za realan broj $\pi \approx 3.14$, prsten $Q[\pi]$ je prosto raširenje polja racionalnih brojeva Q, ali samo polje R nije prosto raširenje polja Q, to jest, ne postoji realan broj λ za koji je $R = Q[\lambda]$.*

2.2.2 Pojam polinoma, prsten polinoma

Dokažimo da svaki prsten K ima bar jedno prosto raširenje $K[\lambda]$ u kome je to λ transcedentno nad K. Pokazaćemo da su sva takva njegova raširenja i uzajamno izomorfna.

Svako prosto raširenje $K[\lambda]$ od K u tesnoj je vezi sa podskupom skupa L svih nizova $(\alpha_0, \alpha_1, \dots)$, sa α_r-ovima iz K, pri čemu je L potpuno određeno sa K. Takođe ako su a i b nizovi iz L, gde je

$$a = (\alpha_0, \alpha_1, \dots) \qquad \text{i} \qquad b = (\beta_0, \beta_1, \dots),$$

zbog $a_r, b_r \in K$ skup L sadrži i njihovu sumu i njihov proizvod:

$$a + b = (\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \dots) \ ;$$

$$a \cdot b = (\delta_0, \delta_1, \delta_2 \dots),\ \delta_k = \textstyle\sum_{r=0}^{k} \alpha_r \beta_{k-r} = \alpha_0\beta_k + \alpha_2\beta_{k-1} + \dots + \alpha_k\beta_0.$$

Samim tim u skupu L definisane su dve binarne operacije $(a, b) \to a + b$ i $(a, b) \to a \cdot b$.

Struktura $(L, +, \cdot)$ je prsten sa jedinicom $e = (1, 0, 0, \dots)$, pri čemu je sa $\alpha \mapsto (\alpha, 0, 0, \dots)$ definisan i jedan monomorfizam prstena K u taj prsten L, čija je slika

$$K_0 = \{(\alpha, 0, 0, \dots) : \alpha \in K\}$$

potprsten od L izomorfn sa K. K i K_0 možemo izjednačiti pri čemu bi $\alpha \in K$ bilo izjednčeno sa nizom $(\alpha, 0, 0, \dots) \in L$ što zapisujemo $K = K_0$ i

$$\alpha = (\alpha, 0, 0, \dots) \qquad (\alpha \in K).$$

Najprostiji oblik u prstenu L ima niz $X = (0, 1, 0, 0, \dots)$ pri čemu iz proizvoda $a \cdot b$ neposredno sledi da za svako $a = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ iz L važi $aX = (0, \alpha_0, \alpha_1, \dots)$. Takođe je $X\alpha = \alpha X$, kao i $\alpha a = (\alpha\alpha_0, \alpha\alpha_1, \dots)$ za svako $\alpha \in K$. S obzirom da su $a = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ i $b = (\beta_0, \beta_1, \dots)$ bilo koji nizovi iz L, time je skup

$$K[X] = \{\alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_n X^n : \alpha_r \in K, n \in \mathbb{N}_0\}$$

minimalan potprsten prstena L koji sadrži uočeni element X i sam prsten $K = K_0$. Tu je $X^2 = X \cdot X = (0, 0, 1, 0, \dots)$, zatim $X^3 = X^2 \cdot X = (0, 0, 0, 1, \dots)$

i tako dalje, odakle sledi

$$\alpha_0 + \cdots + \alpha_n X^n = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots) \text{ za } n \in \mathbb{N}_0 \text{ i } \alpha_r \in K.$$

To znači da je X transcedentno nad prstenom K, jer je taj niz nula, ako i samo ako je $a_r = 0$ za svako r.

Tako određen prsten $K[X]$ zovemo i **prstenom polinoma**, dok njegove elemente zovemo **polinomima** po neodređenoj X nad datim prstenom K.

Članove niza $p = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ zovemo i **koeficijentima polinoma** $p = \sum \alpha_r X^r$. Dva polinoma su **jednaka**, ako i samo ako su im jendnaki i odgovarajći koeficijenti. Polinom $p = \sum \alpha_r X^r$ je **nula**, ako i samo ako je i $a_r = 0$ za svako r.

Ako je prsten K potprsten nekog prstena L , odgovarajući prsteni polinoma imaju istu neodređenu, recimo X, tada je i prsten polinoma $K[X]$ potprsten prstena $L[X]$.

2.2.3 Stepen polinoma

Neka je $K[X]$ prsten polinoma sa neodređenom X nad datim prstenom K. Polinome oblika αX^n, gde je $\alpha \in K$ i $n \in \mathbb{N}_0$, zovemo **monomima**, a same elemente iz K, **konstantama ili skalarima** u tom prstenu $K[X]$.

Svaki polinom p iz $K[X]$ je suma konačno mnogo monoma. Pri tom, ako je $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ niz njegovih koeficijenata, tada je, ili $p = 0$ to jest $\alpha_r = 0$ za svako $r \in \mathbb{N}_0$, ili postoji tačno jedno $n \in \mathbb{N}_0$ za koje je

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n,\ a_n \neq 0,$$

a samim tim i $a_r = 0 (r > n)$. U drugom slučaju, ceo broj n sa naznačenim svojstvom zovemo i **stepenom**, a $n - ti$ koeficijent a_n **vodećim koeficijentom** uočenog polinoma $p \neq 0$. Za polinome sa vodećim koeficijentom 1 kažemo da su **monični**, a za polinome stepena 1 da su **linearni**, to su ustvari polinomi $\alpha X + \beta$ sa $\alpha, \beta \in K$ i $\alpha \neq 0$.

Stepen polinma p označavaćemo sa $d^\circ p$, gde ćemo stepen nula-polinoma definisati kao simbol $d^\circ 0 = -\infty$, pri čemu važe uobičajena svojstva

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty < n \quad \text{ i } \quad (-\infty) + n = n + (-\infty) = -\infty.$$

Polinom p je **konstanta**, to jest, $p = \alpha \in K$, ako i samo ako je $d^\circ p \leq 0$, pri čemu za proizvoljne polinome p i q iz $K[X]$ važi :

$$d^\circ (p + q) \leq \max \{d^\circ p, d^\circ q\}, \qquad d^\circ pq \leq d^\circ p + d^\circ q.$$

Ako vodeći koeficijent bar jednog od polinoma p i q nije delitelj nule u prstenu K, ili ako je neki od njih nula, tada u drugoj od tih relacija mora biti i

$$d^\circ pq = d^\circ p + d^\circ q.$$

Neka je $p = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n$, $a_n \neq 0$ i $q = \beta_0 + \beta_1 X + \cdots + \beta_m X^m$, gde je $b_m \neq 0$, a samim tim i $d^\circ p = n$, $d^\circ q = m$. Ako je $k = \max\{m, n\}$ i $\alpha_r = \beta_s = 0$ $(r > n, s > m)$, i biće

$$p + q = \textstyle\sum_{r=0}^{k} (\alpha_r + \beta_r) X^r, \qquad pq = \sum_{r=0}^{m+n} \delta_r X^r,$$

sa $\delta_r = \sum_{r=0}^{k} \alpha_s \beta_{r-s}$, pa je tako $d^\circ(p+q) \leq k$ kao i da $d^\circ pq \leq m + n$. Uz to, kako je $\delta_{m+n} = \alpha_n \beta_m$, ako α_n nije delitelj nule u prstenu K, tu δ_{m+n} nije nula, pa je tada i $d^\circ pq = m + n$.

Posebno ako je $q = \alpha$ bilo koji regularan ili inverzibilan element prstena K, iz $d^\circ pq = d^\circ p + d^\circ q$ sledi da je $d^\circ \alpha p = d^\circ p$. Imamo da $d^\circ pq = d^\circ p + d^\circ q$ važi za svako $p, q \in K[X]$ ako i samo ako prsten K nema pravih delitelja nule.

Tvrđenje 1. *Ako prsten K nema pravih delitelja nule, onda ih nema ni prsten polinoma $K[X]$, i ti prsteni imaju iste inverzibilne elemente.*

Dokaz. Kako prsten K nema pravih deitelja nule, ako za neke polinome p i q važi $pq = 1$, iz $d^\circ pq = d^\circ p + d^\circ q$ sledi da u tom slučaju mora biti $d^\circ p + d^\circ q = 0$, odnosno $d^\circ p = d^\circ q = 0$, pa je tako $p \in K[X]^* \Leftrightarrow p \in K^*$. Slično ako je $pq = 0$, biće $d^\circ p + d^\circ q = -\propto$, čime je i $p = 0$ ili $q = 0$. $\square$

Posebno ako je K bilo koje polje, prema prethodnoj teoremi, prsten $K[X]$ je oblast celih u kome polinom p ima inverz jedino ako je $p \in K$ i $p \neq 0$, pa je tada $K[X]^* = K^* = K \setminus \{0\}$.

S druge strane, kao i u svakom prstenu, za polinom p kažemo da je pridružen ili ekvivalentan polinomu q i pišemo $p \sim q$, ako je $p = uqv$ za bar jedan par inverzibilnih polinoma u i v. Pri tome je i $d^\circ p = d^\circ q$.

U slučaju kada je K polje i $p \neq 0$, relacija $p \sim q$ u prstenu $K[X]$ znači da je $p = \alpha q$ za tačno jedno α iz K^*. Takođe, ako je polinom p određen $p = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_n X^n$, $\alpha_n \neq 0$, za $\alpha = \alpha_n$ i $\epsilon_r = \alpha_r / \alpha_n$ važi

$$p = \alpha\,(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 X + \cdots + X^n),$$

pa je tada svaki polinom $p \neq 0$ iz $K[X]$ ekvivalentan tačno jednom moničnom polinomu $\bar{p}$.

2.3 Faktorizacija

2.3.1 Euklidsko deljenje

U prstenu $\mathbb{Z}$, za proizvoljne cele brojeve m i $n \neq 0$ postoje celi brojevi q i r, takvi da je $m = nq + r$ i $|r| < |n|$. Slično svojstvo ima i prsten polinoma $K[X]$ nad bilo kojim poljem K.

Teorema 3. *Neka je K polje, za proizvoljne polinome a i $b \neq 0$ iz $K[X]$ postoji tačno jedan par plinoma q i p za koje važi*

$$a = bq + r, \qquad d^\circ r < d^\circ b.$$

Ako pretpostavimo da je vodeći koeficijent polinoma b inverzibilan, to važi i u slučaju kada je K bilo koji prsten.

Dokaz. Najpre ćemo pokazati da postoji bar jedan par polinoma q i r sa traženim svojstvom. Ako je $d^\circ a < d^\circ b$, to vaǐzi za $q = 0$ i $p = a$. Pretpostavimo da je $d^\circ a \geq d^\circ b$. Ako si αX^m i βX^n vodeći monomi polinoma a i b iz $\beta \in K^*$ sledi da je

$$\alpha X^m = \beta X^n \cdot f \quad \Leftrightarrow \quad f = \beta^{-1} \alpha X^{m-n}.$$

Za tako određen monom f, polinomi a i bf imaju isti vodeći monom αX^m, pa je $d^\circ (a - bf) < m$. Uz induktivnu pretpostavku da tvrđenje važi za sve polinome a stepena $< m$, iz ovog poslednjeg sledi da postoje polinomi h i r za koje je $a - bf = bh + r$ i $d^\circ r < d^\circ b$, a time i $a = bq + r$, za $q = f + h$.

Pretpostavimo sada da postojei još neki par polinoma $p, s \in K[X]$ za koje je $a = bp + s$ i $d^\circ s < d^\circ b$. Kako je u tom slučaju $b(q-p) = s - r$ i

$$d^\circ (s - r) < \max\{d^\circ r, d^\circ s\} < d^\circ b,$$

biće da je $d^\circ b (q - p) < d^\circ b$, odnosno $d^\circ b + d^\circ (q - p) < d^\circ b$. Odatle i tvrđenje u celini, jer je to moguće samo ako je $p = q$, to jest, $r = s$. $\square$

Slično se dokazuje da, uz te pretpostavke, postoji i tačno jedan par polinoma q_0 i r_0 takvih da je $a = q_0 b + r_0$ i $d^\circ r_0 < d^\circ b$. Pri tom, ako prsten K nije komutativan, za dato a i b ne mora biti i $q_0 = q$, $r_0 = r$.

Određivanje polinoma q i r sa pomenutim svojstvom nazivamo **levim euklidskim deljenjem** polinoma a polinomom b, a same te polinome $q = \chi(a, b)$ i $r = \rho(a, b)$, odgovarajućim **količnikom** i **ostatkom**. Analogno za njihovo **desno euklidsko deljenje**.

Ako je L bilo koji **natprsten** prstena K i $a, b \in K[X]$, zbog njihove jednoznačnosti, količnik q i ostatak r pri euklidskom deljenju polinoma a polinomom b u prstenu $L[X]$ su isti kao u prstrnu $K[X]$. To specijalno važi za polje $\mathbb{C}$ i njegova potpolja $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$.

Ideal u prstenu $F = K[X]$ je svaki njegov neprazan deo U koji zadovoljava uslove:
$1^\circ \quad u, v \in U \quad \Rightarrow \quad u + v \in U,$
$2^\circ \quad u \in U, a \in F \quad \Rightarrow \quad ua \in U.$

To svojstvo ima svaki od skupova $pF = \{pa : a \in F\}$, gde je p fiksiran polinom iz F. Zovemo ih i **glavnim idealima** u tom prstenu.

Teorema 4. *Ako je K polje, svaki ideal U prstena $K[X]$ je glavni. Uz to je ili $U = \{0\}$ ili postoji tačno jedan moničan polinom μ za koji je*

$$U = \{\mu a : a \in K[X]\}.$$

Dokaz. Neka je $U \neq \{0\}$ i u bilo koji ne-nula polinom iz ideala U, čiji je stepen minimalan. Ako je α vodeći koeficijent polinoma u iz $u \in U, a \in F \Rightarrow ua \in U$ sledi da U sadrži i njegov monik $\mu = \alpha^{-1} u$. Pri tome je $d^\circ \mu \leq d^\circ r$ za svaki ne-nula polinom $r \in U$.

S druge strane, za svako $p \in U$ postoje polinomi a i r, takvi da je $p = \mu a + r$ i $d^\circ r < d^\circ \mu$. Odatle i sledi relacija $U = \{\mu a : a \in K[X]\}$, jer zajedno sa p i μ, taj ideal U sadrži i polinom $p - \mu a = r$, pa tu mora biti $r = 0$, a samim tim i $p = \mu a$.

Ako to važi i za neki moničan polinom $\mu_0 \in S$, tada postoje polinomi p i q za koje je $\mu_0 = \mu q$ i $\mu = \mu_0 p$. Odatle sledi da ti monični polinomi μ i μ_0 imaju iste stepene, pa mora biti $\mu_0 = \mu$. $\square$

Ovakav polinom μ zovemo i **minimalnim polinomom** samog ideala $U \neq 0$. To je zapravo moničan polinom minimalnog stepena koji pripada tom idealu, i on je **faktor** svakog od polinoma iz U.

2.3.2 NZD i NZS, Euklidov algoritam

Neka je K polje, odgovarajući prsten polinomma $F = K[X]$ je komutativan i bez pravih delitelja nule. Svaki njegov ideal je glavni, odnosno oblika je aF, sa $a \in F$ i jedini inverzibilni polinomi su ne-nula konstante $K[X]^* = K^0 = K \setminus \{0\}$.

Polinom b zovemo deliocem ili faktorom polinoma a u prstenu $F = K[X]$ i pišemo $b \mid a$, ako je $a = bq$ za bar jedno $q \in F$. U tom slučaju kažemo i da b deli a, kao i da je polinom a deljiv polinomom b.

Tako definisana relacija deljivosti $\mid$ u prstenu $K[X]$ je refleksivna i tranzitivna, ali ne mora da znači da je i simetrična. Zapravo za svako a i b važi: $b \mid a \quad \Leftrightarrow \quad aF \subset bF$, kao i

$$a \mid b \wedge b \mid a \quad \Leftrightarrow \quad a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad aF = bF,$$

gde $\sim$ označava **pridruženost** u prstenu $F = K[X]$. Ako je $a = bq$ tada je i $ap = bqp$ $(p \in F)$ to jest $aF \subset bF$. Takođe, ako je $a = bq$ i $b = ap$ iz $a = apq$ sledi da mora biti $a = b = 0$ ili $pg = 1$, a time je $a \sim b$.

S druge strane, za polinom $d \in F$ kažemo da je **najveći zajednički delilac**, kraće NZD, datih polinoma a i b u prstenu $F = K[X]$, ako za svaki polinom $p \in F$ važi

$$p \mid a \ \wedge \ p \mid b \quad \Leftrightarrow \quad p \mid d.$$

Ako postoji polinom d sa tim svojstvom, on je prema $b \mid a \wedge a \mid b \Leftrightarrow a \sim b \Leftrightarrow aF = bF$, određen do na pridruženost, pa je

$$NZD\,(a,b) = \left\{\alpha d : \alpha \in K^0\right\}$$

upravo skup svih najvećih zajedničkih delilaca αd polinoma a i b. Za $d \neq 0$, među njima je i tačno jedan moničan. Sa $NZD\,(a,b)$ označavaćemo bilo koji od njih. Zapravo, ako postji, to je polinom iz $K[X]$, najvećeg stepena, koji deli a i b. Ako sa $\rho\,(a,b)$ označimo ostatak pri euklidskom deljenju polinoma p i q, u vezi sa tim važi sledeća teorema.

Teorema 5. *Za svaka dva ne-nula polinoma a i b postoji tačno jedan sistem $E\,(a,b) = [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k]$ ne-nula polinoma iz prstena $K[X]$, takav da je $a_0 = a$, $a_1 = b$,*

$$a_r = \rho(a_{r-2}, a_{r-1}), \qquad (2 \leq r \leq k)$$

i $\rho(a_{k-1}, a_k) = 0$. Pri tom je $d = a_k$ i najveći zajednički delitelj od a i b , i postoje polinomi p i q za koje je $ap + bq = d$.

Uz uslov da je $d^\circ dp < d^\circ b$, polinomi p i q sa tim svojstvom su jednoznačno određeni.

Dokaz. Pre svega, jasno je da ne postoje dva različita sistema polinoma sa naznačenim svojstvom. Ako je $a_2 = \rho(a_0, a_1)$ znač i da postoji polinom q_2 za koji je

$$a_0 = a_1 q_2 + a_2, \qquad d^\circ a_2 < d^\circ a_1.$$

Svaki zajednički delitelj od a_0 i a_1 (odnosno a_1 i a_2) je delitej i od a_2 (odnosno a_0), pa je $NZD\,(a_0, a_1) = NZD\,(a_1, a_2)$. Uz to, ako je tu $a_2 = 0$, biće $E\,(a, b) = [a_1, a_2]$, a samim tim i $a_1 = b$ najveći zajednički delilac polinoma a i b.

U slučaju da je $a_2 \neq 0$, na isti način zaključujemo da postoje polinomi q_3 i $a_3 = \rho(a_1, a_2)$ za koje je

$$a_1 = a_2 q_3 + a_3, \qquad d^\circ a_3 < d^\circ a_2,$$

kao i $NZD\,(a_1, a_2) = NZD\,(a_2, a_3)$. I tako dalje, uz napomenu da tu, zbog $d^\circ a_1 > \cdots > d^\circ a_k$, mora biti $k \leq d^\circ b$. Onda je i prvi deo tvrđenja, jer je $a_0 = a$, $a_1 = b$ i $NZD\,(a_0, a_1) = \cdots = NZD\,(a_k, 0) = a_k$.

S druge strane, zamenjujući a_2 iz $a_0 = a_1 q_2 + a_2$, $d^\circ a_2 < d^\circ a_1$ u $a_1 = a_2 q_3 + a_3$, $d^\circ a_3 < d^\circ a_2$, zatim to a_2 i a_3 iz tako dobijene relacije u narednu relaciju $a_2 = a_3 q_4 + a_4$ i tako dalje, na kraju dobijemo i jednu relaciju oblika $ap + bq = d$, gde je $d = a_k$.

Neka je sada $a = gd$ i $b = hd$, ako je $p = hc + u$, sa $d^\circ u < d^\circ h$, iz relacije $ap + bq = d$ sledi da je $au + bv = d$, gde je $v = gc + q$, kao i $d^\circ ud < d^\circ hd = d^\circ b$. Ako u $ap + bq = d$ važi $d^\circ pd < d^\circ b$, tada je $du - dp = b(qu - pv)$ i $d^\circ(du - dp) < d^\circ b$. Jasno je da je to moguće jedino ako je $qu - pv = 0$, odnosno $du - dp = 0$, a time i $u = p$, $v = q$.

□

Sistem polinoma $E(a, b)$ sa naznačenim svojstvima i simbolikom iz prethodne teoreme zovemo **euklidskim algoritmom** za određivanje najvećeg zajedničkog delioca datog para polinoma (a, b).

Zadatak 1. *Primenom Euklidovog algoritma, odredi najveći zajednički delilac polinoma a i b - NZD(a,b).*

$a = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3\ ,\quad b = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3,\quad NZD(a,b) = ?$
Konstanta ne utiče na delilac, pa možemo a da pomnožimo sa 3*, i delimo* $3a$ *sa* b*.*

$$
\begin{aligned}
3\,a\,:\,b\ &= 3\cdot(x^4 + 3\,x^3 - \ x^2\ -\ 4x - 3) : (3x^3 + 10x^2 + 2x - 3)\\
&= (3x^4 + 9\,x^3 - 3x^2\ -\ 12x - 9) : (3x^3 + 10x^2 + 2x - 3) = \underbrace{x - \frac{1}{3}}_{q_1(x)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
\ \ 3x^4 + 10x^3 + 2x^2\ -\ 3x\\
\underline{-\quad -\qquad -\qquad +\qquad}\\
\qquad -\ x^3\ -\ 5x^2 - 9x\ - 9\\
\qquad -\ x^3\ -\tfrac{10}{3}x^2 - \tfrac{2}{3}x\ + 1\\
\qquad \underline{+\qquad +\qquad +\qquad -}\\
\qquad\qquad \underbrace{-\frac{5}{3}x^2\ -\frac{25}{3}x - 10}_{r_1(x)}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
5b : 3r_1 &= 5\cdot(\ 3x^3 + 10x^2\ \ +\ \ 2x\ \ - 3) : [3\cdot(-\tfrac{5}{3}x^2 - \tfrac{25}{3}x - 10)]\\
&= (15x^3 + 50\,x^2\ +\ 10x\ \ - 15) :\ (-5x^2 - 25x - 30) = \underbrace{-3x + 5}_{q_2(x)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
\ \ 15x^3 + 75\,x^2\ +\ 90x\\
\underline{-\qquad -\qquad -\qquad}\\
\qquad -25\,x^2\ -\ 80x\ - 15\\
\qquad -25\,x^2\ - 125x\ - 150\\
\qquad \underline{+\qquad\quad +\qquad +\quad}\\
\qquad\qquad \underbrace{+\ 45x\ \ + 135}_{r_2(x)}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
3r_1 : \tfrac{r_2}{45} &= (-5x^2 - 25x - 30) : [(45x\ \ + 135) : 45]\\
&= (-5x^2\ - 25x - 30) : (\ x\ \ +\ 3) = \underbrace{-5x - 10}_{q_3(x)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
\ \ -5x^2\ - 15x\\
\underline{\ \ +\qquad +\qquad}\\
\qquad - 10x\ - 30\\
\qquad - 10x\ - 30\\
\qquad \underline{+\qquad +\qquad}\\
\qquad\qquad \underbrace{0}_{r_3(x)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
a = b\cdot q_1 + r_1 & (3a = b\cdot q_1 + r_1)\\
b = r_1\cdot q_2 + r_2 & (5b = 3r_1\cdot q_2 + r_2)\\
r_1 = r_2\cdot q_3 + r_3 & (3r_1 = \tfrac{r_2}{45}\cdot q_3 + r_3)
\end{array}
$$

$r_3 = 0 \Rightarrow NZD(a,b) = r_2$

$NZD(a,b) = NZD(b,r_1) = NZD(r_1,r_2)$
$r_2 \mid r_1 \rightarrow NZD(r_1,r_2) = r_2 = x + 3.$

Zadatak 2. *Neka je* $p(x) = 2x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x - 8$, $q(x) = x^3 + x^2 + 4$. *Za polinome* $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, *odredićemo* NZD.

$$\begin{array}{l}
p(x) : q(x) = (2x^4 + 4x^3 + x^2 - 2x - 8) : (x^3 + x^2 + 4) = \underbrace{2x + 2}_{q_1(x)} \\
\qquad \underline{\begin{array}{rrrr} 2x^4 & +2x^3 & & +8x \\ - & - & & - \end{array}} \\
\qquad\qquad 2x^3 + x^2 - 10x - 8 \\
\qquad\qquad \underline{\begin{array}{rrrr} 2x^3 & +2x^2 & & +8 \\ - & - & & - \end{array}} \\
\qquad\qquad\quad \underbrace{-x^2 - 10x - 16}_{-r_1(x)}
\end{array}$$

Dobijamo da je $p(x) = (2x+2)q(x) - (x^2 + 10x + 16)$.

Uzmimo sada da je $r_1(x) = x^2 + 10x + 16$ *(pomnoženo sa* -1*) i podelimo* $q(x)$ *sa* $r_1(x)$. *Dakle,*

$$\begin{array}{l}
q(x) : r_1(x) = (x^3 + x^2 + 4) : (x^2 + 10x + 16) = \underbrace{x - 9}_{q_2(x)} \\
\qquad \underline{\begin{array}{rrr} x^3 & +10x^2 & +16x \\ - & - & - \end{array}} \\
\qquad\qquad -9x^2 - 16x + 4 \\
\qquad\qquad \underline{\begin{array}{rrr} -9x^2 & -90x & -144 \\ + & + & + \end{array}} \\
\qquad\qquad\qquad \underbrace{74x + 148}_{74\, r_2(x)}
\end{array}$$

Sada dobijamo da je $q(x) = (x-9)\, r_1(x) + 74x + 148$.

Uzmimo da je $r_2(x) = x + 2$ *(pomnoženo sa* $\frac{1}{74}$ *) i podelimo* $r_1(x)$ *sa* $r_2(x)$.

$$\begin{array}{l}
r_1(x) : r_2(x) = (x^2 + 10x + 16) : (x + 2) = \underbrace{x + 8}_{q_3(x)} \\
\qquad \underline{\begin{array}{rr} x^2 & +2x \\ - & - \end{array}} \\
\qquad\qquad 8x + 16 \\
\qquad\qquad \underline{\begin{array}{rr} 8x & +16 \\ - & - \end{array}} \\
\qquad\qquad\qquad \underbrace{0}_{r_3(x)}
\end{array}$$

Kako je $r_1(x) = (x+8)\, r_2(x)$, *tj. kako je* $r_3(x) = 0$ *zaključujemo da je*

$$NZD(p(x), q(x)) = r_2(x) = x + 2.$$

Na sličan način se definiše i pojam **najmanjeg zajedničkog sadržaoca** datih polinoma a i b u prstenu $F = K[X]$. To je zapravo svaki od polinoma f iz F koji zadovoljava uslov

$$a \mid p \ \wedge \ b \mid p \quad \Leftrightarrow \quad f \mid p,$$

to jest $aF \cap bF = fF$. Sama egzistencija polinoma f sa tim svojstvom sledi iz toga što je i skup $aF \cap bF$ jedan glavni ideal prstena F.

Tvrđenje 2. *Ako je d najveći zajednički delilac ne-nula polinoma a i b u prstenu $K[X]$ i f polinom za koji je $ab = df$, tada je f njihov najmanji zajednički sadržalac.*

Dokaz. Polinomi a i b dele polinom p, ako i samo ako njihov proizvod ab deli polinome ap i bp, a time je njihov zajednički delilac pd. Pri tome je $ab = df$, pa je tako i $a, b \mid p$ ekvivalentno sa $f \mid p$. □

Ako je najveći zajednicki delilac za polinome $p(x)$ i $q(x)$ konstanta, za te polinome kazemo da su **uzajamno prosti**.

2.3.3 Faktorizacija polinoma

Za polinome a i b iz prstena $K[X]$ kažemo da su **uzajamno prosti** ili **koprosti**, ako su svi njihovi zajednički delioci ekvivalnentni sa 1, a time i $NZD(a, b) = K^* = K^0$. Prema teoremi 5, tada postoji i tačno jedan par polinoma p i q iz $K[X]$, takvih da je:

$$ap + bq = 1, \qquad d^\circ p < d^\circ b, \qquad d^\circ q < d^\circ a.$$

I obrnuta, ako je $ap + bq = 1$, svaki od zajedničkih delitelja polinoma a i b je delilac i od 1, pa su tada polinomi a i b uzajamno prosti.

Tvrđenje 3. *Ako je polinom a prost sa polinomima b i c, onda je prost i sa njihovim proizvodom bc, i za svako $f \in K[X]$ važi:*

1° $\quad a \mid bf \quad \Rightarrow \quad a \mid f$
2° $\quad a \mid f \quad i \quad b \mid f \quad \Rightarrow \quad ab \mid f.$

Dokaz. Neka su p, q i u, v bilo koji polinomi za koje je $ap + bq = 1$ i $au + cv = 1$. Kako je proizvod tih relacija oblika $ap_0 + bcq_0 = 1$ tu je a prosti i sa bc. S druge strane je

$$apf + bqf = f,$$

pa zajedno sa $a \mid bf$ mora biti i $a \mid f$, i slično za implikaciju 2°, jer tada ab deli i af i bf. □

Za polinom $p \neq 0$ iz prstena $A = K[X]$ kažemo i da je prost u tom prstenu ili nad poljem K, ako nije inverzibilan, i ako za proizvoljne polinome $a, b \in A$ važi:

$$p \mid ab \Rightarrow p \mid a \lor p \mid b.$$

Za ne-nula polinom $p \in A \backslash A^*$ kažemo da je **nerastavljiv** ili **atom** u prstenu A, ako zadovoljva uslov

$$p = ab \Rightarrow a \in A^* \lor b \in A^*,$$

odnosno ako je svaki od njegovih delitelja ekvivalentan sa 1 ili p. Samim tim, ako atom p ne deli polinom a, onda je sa njim uzajamno prost.

Tvrđenje 4. *Polinom p u prstenu $K[X]$ je prost ako i samo ako je nerastavljiv. Posebno, svaki polinom stepena 1 nad poljem K je prost.*

Dokaz. Ako je polinom p prost i $p = ab$ iz $p \mid ab \Rightarrow p \mid a \lor p \mid b$ sledi da mora biti $a = pu$ ili $b = pv$. Samim tim je i $p = pub$ ili $p = apv$, to jest $1 = ub$ ili $1 = av$, pa tada važi i $p = ab \Rightarrow a \in A^* \land b \in A^*$.

Obratno, ako je p atom i $p \mid ab$, polinom p ili deli polinom a, ili je sa njim uzajamno prost. U ovom drugom slučaju, iz $p \mid ab$ i tvrđenja 3 sledi da tada $p \mid b$. Odatle i tvrđenje u celini, jer ako je $1 = d^\circ(ab)$, biće $1 = d^\circ a + d^\circ b$, što je moguće jedino ako je $a \in K^*$ ili $b \in K^*$. $\square$

Nerastavljivost polinoma u $K[X]$ zavisi od samog polja K. Ako je K potpolje polja L, polinom p može biti atom u $K[X]$, a da to nije i u prstenu $L[X]$.

Primer 9. *Polinom $p = X^2 - 1$ je atom nad poljem $\mathbb{R}$, dok je nad poljem $\mathbb{C}$ rastavljiv i važi $p = (X - i)(X + i)$.*

Neka je K bilo koje polje i $\mathbf{A}$ skup svih moničnih polinoma iz $F = K[X]$. Samim tim za svaki od atoma $q \in \mathbf{A}$ postoji i tačno jeda atom $p \in \mathbf{A}$ takav da je $q = \alpha p$ za neko α iz $F^* = K \setminus 0$. Uz to je α i vodeći koeficijent od q, i svaka dva od atoma iz $\mathbf{A}$ su uzajamno prosta.

Teorema 6. *Za svaki polinom $a \in K[X]$ stepena $n > 0$ postoji tačno jedna kombinacija $\langle p_1, p_2, \ldots, p_m \rangle = \boldsymbol{P}$ atoma iz $\boldsymbol{A}$ i $\alpha \in K^*$, takvih da je*

$$a = \alpha p_1 p_2 \cdots p_m.$$

Dokaz. Jasno je da to važi ako je polinom a nerastavljiv, a time i za svaki polinom stepena $n = 1$. S druge strane, ako a nije atom, tada postoje polinomi b i c za koje je $a = bc$ i $1 \leq d^\circ b, d^\circ c < n$. Uz induktivnu pretpostavku da tvrđenje važi za polinome stepena $< n$, ti polinomi su proizvodi nekih atoma, pa je to i njihov proizvod $bc = a$.

To specijalno znači da postoji bar jedna kombinacija $\langle p_1, p_2, \ldots, p_m\rangle$ atoma iz $\mathbf{A}$ sa naznačenim svojstvom. Ako pretpostavimo da to svojstvo ima i kombinacija $\langle q_1, q_2, \ldots, q_k\rangle$, to jest da je i

$$a = \alpha q_1, q_2, \ldots, q_k$$

sa $\alpha \in K^*$ i q_s- ovima iz $\mathbf{A}$. Kako su atomi i prosti, iz $p_1 \mid a$ sledi da $p_1 \mid q_s$ za bar jedno s. Neka, na primer, $p_1 \mid q_1$, uz to su p_1 i q_1 atomi iz $\mathbf{A}$, pa mora biti $p_1 = q_1$. Samim tim, ako je $c = a/p_1 = a/q_1$, biće

$$c = \alpha p_2 p_3 \cdots p_m = \alpha q_2 q_3 \cdots q_k$$

kao i $d^\circ c < n$. Prema induktivnoj prepostavci, to je moguće jedino ako je $\langle p_2, \ldots, p_m\rangle = \langle q_2, \ldots, q_k\rangle$. Posebno je $m-1 = k-1$, odnosno $m = k$. Odatle sledi i celo tvrđenje, jer je i $p_1 = q_1$. $\square$

Jasno je da u $a = \alpha p_1 p_2 \cdots p_m$ mora biti i $m \leq d^\circ a$. Time je svaki polinom a stepena $n > 1$ proizvod najviše m atoma u prstenu $K[X]$.

Kako su dva monična atoma ili jednaka ili uzajamno prosta, ako su $p_1, p_2, \ldots p_k$ svi različiti monični atomi koji dele polinom a sa vodećim koeficijentom α, relacija $a = \alpha p_1 p_2 \cdots p_m$ se svodi na

$$a = \alpha p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k},$$

gde je $r_s \geq 1$ broj komponenata kombinacije $\mathbf{P}$ koje su jednake atomu p_s. Na taj način je tom polinomu pridružena i tačno jedna kombinacija

$$E(a) = \langle p_1^{r_1}, p_2^{r_2}, \ldots, p_k^{r_k}\rangle,$$

u kojoj su p_s-ovi različiti monični atomi i r_s-ovi prirodni brojevi, i za koju važi $a = \alpha p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$.

Ovu relaciju zovemo **elementarnom faktorizacijom** uočenog polinoma, a komponente $p_s^{r_s}$ zovemo **elementarnim deliteljima**. Specijalno, ako je

$$a = \alpha(X-\alpha_1)^{r_1}(X-\alpha_2)^{r_2} \cdots (X-\alpha_k)^{r_k},$$

to jest, ako su svi njegovi atomi $p_s = X - \alpha_s$ stepena 1, za taj polinom kažemo da je **razdvojiv** nad poljem K ili da ima **linearnu faktorizaciju**.

2.4 Izvod polinoma

Ako je $p = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \cdots + \alpha_n X^n$ bilo koji polinom iz $K[X]$, sa nizom koeficijenata $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ iz prstena K, tada polinom

$$p' = \alpha_1 + 2\alpha_2 X + 3\alpha_3 X^2 + \cdots + n\alpha_{n-1} X^{n-1},$$

sa nizom koeficijenata $(\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3, \dots)$, zovemo **izvodom polinma p**, a tako određeno preslikavanje $p \mapsto p'$, zovemo **diferenciranjem** u prstenu $K[X]$.

Ovde je $1' = 0$, $X' = 1$, $(X^2)' = 2X$, kao i $(\alpha X^n)' = \alpha n X^{n-1}$ za svako $\alpha \in K$. Lako se proveri da za proizvoljne polinome p i q važi:

1° $(p+q)' = p' + q'$,
2° $(\alpha\, p)' = \alpha\, p'$,
3° $(p\, q)' = p'q + q'p$,
4° $p\,(q)' = p'(q)\, q'$.

Ako zamenimo p sa q^{r-1}, iz 3° sledi da je $(q^r)' = r\, q^{r-1} q'$. Na osnovo toga i 1° i 2°, ako je $p = \sum \alpha_r X^r$, biće $p(q) = \sum \alpha_r q^r$, a samim tim sledi 4°.

S druge strane, ako je prsten K karakteristike 0 i αX^n vodeći monom polinoma $p \in K[X]$, iz $n\alpha \neq 0$ sledi da je i $n\alpha X^{n-1}$ vodeći monom u polinomu p', pa je tada i $d^\circ p = 1 + d^\circ p'$.

U opštem slučaju važi samo $d^\circ p \geq 1 + d^\circ p'$. Pa, na primer, ako je $K = \mathbb{Z}_3$ polje ostataka po modulu 3, polinom $p = 2 + X^3$ je stepena 3, ali je $p' = 0$.

S obzirom na to da jei p' polinom, njegov izvod zovemo **drugim izvodom** polinoma p i označavamo sa $(p')' = p'' = p^{(2)}$. Analogno drugom izvodu, indukciiom po $n \in \mathbb{N}_0$, definišemo i n-ti izvod $p^{(n)} = [p^{(n-1)}]'$ polinoma p. Ako je $n > d^\circ p$ mora biti $p^{(n)} = 0$, pri čemu važi sledeća teorema.

Teorema 7. *Ako je K bilo koji komutativan prsten i $\alpha \in K$, za svaki polinom $p \in K[X]$ postoji tačno jedan niz $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$ elemenata iz K, takav da za bar jedan ceo broj $n \geq 0$ važi*

$$p = \lambda_0 + \lambda_1 (X - \alpha) + \lambda_2 (X - \alpha)^2 + \cdots + \lambda_n (X - \alpha)^n$$

i $\lambda_r = 0$ za svako $r > n$. Pri tome je $n \geq d^\circ p$, kao i $\lambda_n \neq 0 \Leftrightarrow n = d^\circ p$. Posebno ako je tu K polje karakteristike 0 i $d^\circ p = n$, tada je $\lambda_n \neq 0$ i

$$\lambda_r = \tfrac{p^{(r)}(\alpha)}{r!} \qquad (0 \leq r \leq n).$$

Dokaz. Prvi deo tvrđenja sledi direktno jer, zamenjujući X sa $X + \alpha$ relacija $p = \lambda_0 + \lambda_1(X-\alpha) + \lambda_2(X-\alpha)^2 + \cdots + \lambda_n(X-\alpha)^n$ znači da su λ_r-ovi koeficijenti polinoma $p(X+\alpha) = \sum \lambda_r X^r$, koji je istog stepena kao polinom p. Iz nje sledi i da je r-ti izvod polinoma p oblika

$$p^{(r)} = r!\, \lambda_r + (X-\alpha) \cdot Q_r$$

za neko $Q_r \in K[X]$, pa tu mora biti i $p^{(r)}(\alpha) = r!\, \lambda_r$. Odatle sledi tvrđenje u celini, jer ako je K polje karakteristike 0, u njemu je $r! = r! 1_K \neq 0$, a time je i $\lambda_r = p^{(r)}(\alpha)/r!$ za svako r. □

Relaciju $\quad p = \lambda_0 + \lambda_1(X-\alpha) + \lambda_2(X-\alpha)^2 + \cdots + \lambda_n(X-\alpha)^n$

zovemo **Tejlorovim razvojem** polinoma p u tački α prstena K. Kako je u njoj $\lambda_0 = p(\alpha)$, za svaki od polinoma p iz $K[X]$ postoji tačno jedan polinom Q za koji je

$$p = p(\alpha) + (X-\alpha)Q.$$

To takođe znači da je $p(\alpha) = 0$, to jest da α poništava polinom p, ako i samo ako je $p = (X-\alpha)Q$ za neko $Q \in K[X]$.

2.5 Nule polinoma i njihova višestrukost

Ako je $L = K^K$ algebra svih preslikavanja komutativnog prstena K u njega samog, ona sadrži i svako preslikavanje $p_k : K \to K$ oblika

$$p_k(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n, \quad (x \in K)$$

sa unapred zadatim α_r-ovima iz K. Samo to preslikavanje p_k zovemo **polinomnom funkcijom** na K, koja je **pridružena** polinomu $p = \sum \alpha_r X^r$.

Neka je p fiksiran polinom iz $K[X]$. Nulu ili koren polinoma p u polju K predstavlja svaki element $\alpha \in K$ za koji je $p(\alpha) = 0$.

Možemo reći da su nule polinoma p u polju njegovih koeficijenata K upravo nule odgovarajuće polinomne funkcije $p_k : K \to K$. Takođe za svako $\alpha \in K$ važi

$$p(\alpha) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X - \alpha \mid p,$$

pa je α nula polinoma p u polju K, ako i samo ako je $X - \alpha$ njegov atom u prstenu $K[X]$. Ne-nula polinom ne može imati više od $n = d^\circ p$ različiih nula u K.

Samim tim, ako je α nula polinoma $p \neq 0$ iz $K[X]$, taj polinom ima i elementarni delitelj oblika $(X-\alpha)^r$ izvesnog sepena r. To r je, zapravo, najveći prirodan broj za koji polinom $(X-\alpha)^r$ deli p, to jest za koji postoji polinom Q takav da je

$$p = (X-\alpha)^r Q \quad \text{i} \quad Q(\alpha) \neq 0.$$

To što je $Q(\alpha) \neq 0$ upravo znači da $X-\alpha$ ne deli Q. Broj r koji ima pomenute osobine zovemo **višestrukošću** nule $\alpha \in K$ polinoma p, uz napomenu da za njegove nule višestrukosti $r=1$ kažemo još i da su **proste**.

Teorema 8. *Uzajamno različiti elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ polja K su nule polinoma p iz $K[X]$ i $r_1, r_2, \ldots, r_k$ njihove višestrukosti, ako i samo ako postoji bar jedan polinom Q takav da je*

$$p=(X-\alpha_1)^{r_1}(X-\alpha_2)^{r_2}\cdots(X-\alpha_k)^{r_k}Q$$

i $Q(\alpha_s) \neq 0$ za svako $s \leq k$. Takođe, ako je polje K karakteristike 0, njegov element α je nula polinoma p višestrukosti r ako i samo ako je

$$p(\alpha)=p^{'}(\alpha)=\cdots=p^{(r-1)}(\alpha)=0, \quad p^{(r)}(\alpha) \neq 0.$$

Dokaz. Prvi deo tvrđenja sledi direktno iz jednoznačnosti elementarne faktorizacije polinoma p. Dalje, ako je polje K karakteristike 0, prema Tejlorovom razvoju polinoma p u tački α, prethodna relacija znači da je

$$p=\lambda_r(X-\alpha)^r+\cdots+\lambda_n(X-\alpha)^n, \quad \lambda_r \neq 0,$$

sa $\lambda_s=p^{(s)}(\alpha)/s!$. Otuda i drugi deo tvrđenja, jer $p=\lambda_r(X-\alpha)^r+\cdots+\lambda_n(X-\alpha)^n, \lambda_r \neq 0$, tačno znači da postoji polinom Q za koji je $p=(X-\alpha)^rQ$ i $Q(\alpha)=\lambda_r \neq 0$. □

Nula polinoma p nad poljem K karakteristike 0 je i višestruka, višestrukosti $r>1$, ako i samo ako je nula njegovog izvoda $p^{'}$, a time i polinoma $d=NZD(p,p^{'})$.

Iz $p=(X-\alpha_1)^{r_1}(X-\alpha_2)^{r_2}\cdots(X-\alpha_k)^{r_k}Q$ možemo zaključiti da suma višestrukosti svih nula polinoma p nije veća od njegovog stepena n, kao i da je $\sum r_s=n=d^\circ p$ ako i samo ako taj polinom ima i linearnu faktorizaciju nad K.

Tvrđenje 5. *Ako polinomi p i q iz $K[X]$ imaju iste vrednosti u više od n tačaka polja K ($n=d^\circ(p-q)$) , tada je $p=q$.*

Posebno, polinomne funkcije p_k i q_k na bilo kom beskonačnom polju K su jednake ako i samo ako su im jednaki i odgovarajući koeficijenti.

Dokaz. Kako $p(\alpha)=q(\alpha)$ znači da je α nula polinoma $c=p-q$, iz naznačene pretpostavke sledi da taj polinom ima više od $n=d^\circ c$ nula u polju K, pa mora biti $c=0$, a time i $p=q$. Otuda i tvrđenje u celini, jer $p_k=q_k$ upravo znači da je $p(\alpha)=q(\alpha)$ za svako $\alpha \in K$.

Drugi deo prethodnog tvrđenja ne mora da važi i u slučaju kada je polje K konačno.

Na primer, ako su $p = X^5 + 1$ i $q = X + 1$ polinomi iz $\mathbb{Z}_5[X]$, odmah sledi da je $p(r) = q(r)$ za svako r iz polja $\mathbb{Z}_5 = K$, pa je tako $p_k = q_k$, ali ne i $p = q$. Takođe je i

$$X^6 - X = X(X^5 - 1^5) = X(X-1)^5,$$

a time je $\alpha = 1$ nula polinoma $P = X^6 - X$ višestrukosti 5. To posebno znači da u opštem slučaju ne važi ni drugi deo prethodne teoreme, jer je jasno da je tu $P^{(r)}(1) = 0$ i za svako r. □

Polinome sa koeficijentima iz polja $\mathbb{R}$ zovemo **realnim**, a one sa koeficijentima iz polja $\mathbb{C}$ **kompleksnim** polinomima, uz napomenu da je svaki od relanih polinoma i kompleksan.

S obzirom na to, da su koeficijenti kompleksnih polinoma oblika $\alpha + i\beta$, $a, b \in \mathbb{R}$ za svaki kompleksan polinom p postoji jednoznačno određeni realni polinomi a i b, takvi da je $p = a + ib$, a time je i $\mathbb{C}[x] = \{a + ib : \ a, b \in \mathbb{R}[X]\}$. Sledi da za svako $p \in \mathbb{C}$, polinom $p\overline{p}$ realan i da p deli P akko $\overline{p}$ deli P.

Polinom $a - ib$ zovemo **konjugatom** uočenog polinoma $p = a + ib$ i označavamo sa $\overline{p} = a - ib$.

Za proizvoljne kompleksne polinome p i q važi:

$(*)$ $\quad \overline{pq} = \overline{p}\,\overline{q}, \quad \overline{p+q} = \overline{p} + \overline{q}, \quad \overline{\overline{p}} = p,$ kao i : $\quad \overline{p} = p \Leftrightarrow p \in \mathbb{R}[X].$

Tvrđenje 6. *Polinom p je delilac realnog polinoma P u prstenu $\mathbb{C}$, ako i samo ako je i njegov konjugat delilac realnog polinoma P.*

Specijalno, ako je kompleksan broj α nula relanog polinoma P onda je to i njegov konjugat $\overline{\alpha}$, i te nule su iste višestrukosti.

Dokaz. Kako je $\overline{P} = P$ na osnovu $(*)$ sledi da je $P = pq$ ekvivalentno sa $P = \overline{pq}$. Odatle sledi dokaz tvrđenja jer iz $(*)$ sledi da je $p = (X - u)^r$ ekvivalentno sa e $\overline{p} = (X - \overline{u})^r$. □

Na osnovu ovog možemo zaključiti da realan polinom može imati realne nule i/ili parove konjugovano-kompleksnih nula.

Zadatak 3. *Odredi višestukost nule $-\frac{1}{2}$ u polinomu $p(x) = 4x^3 + 8x^2 + 5x + 1$. Potrebno je odrediti $p\left(-\frac{1}{2}\right)$, $p^{'}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $p^{''}\left(-\frac{1}{2}\right)$, ...*

$p(x) = 4x^3 + 8x^2 + 5x + 1,$
$p\left(-\frac{1}{2}\right) = -4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 1 = -\frac{1}{2} + 2 - \frac{5}{2} + 1 = 3 - 3 = 0,$

$p^{'}(x) = 3 \cdot 4x^2 + 2 \cdot 8x + 5 \cdot 1 = 12x^2 + 16x + 5,$
$p^{'}(-\frac{1}{2}) = 12 \cdot \frac{1}{4} - 16 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 3 - 8 + 5 = 0,$

$p^{''}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot 12x + 16 \cdot 1 = 24x + 16,$
$p^{''}(-\frac{1}{2}) = -24 \cdot \frac{1}{2} + 16 = -12 + 16 = 4.$

$-\frac{1}{2}$ *je nula drugog reda, to jest, nula višestrukosti* 2.

Zadatak 4. *Ako su* $P = X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3r+2}$ *i* $Q = 1 + X + X^2$ *polinomi iz* $K[X]$*, dokazati da polinom* Q *deli* P*.* $(m, n, r \in N)$

$P(X) = X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3r+2}$,
$Q(X) = X^2 + X + 1$,
$X_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad X_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad X_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Dovoljno je proveriti za jednu nulu, jer je druga njoj konjugovana.
Neka je $X_0 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} {X_0}^3 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= \frac{1}{8}(-1+i\sqrt{3})^3 = \frac{1}{8}(1 - 2i\sqrt{3} - 3)(-1+i\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{8}(-2-2i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3}) = \frac{1}{4}(-1-i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{4}((-1)^2 - (i\sqrt{3})^2) = \frac{1}{4}(1+3) = 1. \end{aligned}$$

Drugi način da nadjemo X_0*:*
$X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$ *Pošto znamo da je* X_0 *nula polinoma* X^2+X+1, *sledi da je* X_0 *i nula polinoma* $X^3 - 1$ *. U tom slučaju jasno je da je* $X_0^3 = 1$.

$$\begin{aligned} P(X_0) &= {X_0}^{3m} + {X_0}^{3n+1} + {X_0}^{3r+2} \\ &= ({X_0}^3)^m + ({X_0}^3)^{n+1} + ({X_0}^3)^{r+2} \\ &= ({X_0}^3)^m + ({X_0}^3)^n \cdot X_0 + ({X_0}^3)^r \cdot {X_0}^2 \\ &= 1^m + 1^n \cdot X_0 + 1^r \cdot {X_0}^2 \\ &= 1 + X_0 + {X_0}^2 = 0, \end{aligned}$$

$$P(X_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{X_0}) = 0 \quad \Rightarrow \quad X^2 + X + 1 \mid P(X).$$

Zadatak 5. *Odrediti polinom* $p(x) \in R[X]$ *četvrtog stepena, ako je* $1 - 2i$ *jednostruka, a* -2 *dvostruka nula tog polinoma, i ako važi* $p(-3) = 20$.

$p(-3) = 20$
$(x+2)^2 \mid p$
$(x - (1-2i)) \mid p \quad \rightarrow$ *Nula je i* $(1+2i)$*, jer je to konjugat od* $(1-2i)$*, pa i*
$(x - (1+2i)) \mid p$

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha \cdot (x+2)^2 \cdot (x - (1-2i)) \cdot (x - (1+2i)) \\ &= \alpha \cdot (x^2 + 4x + 4) \cdot (x^2 - (1-2i)x - (1+2i)x + (1-2i)(1+2i)) \\ &= \alpha \cdot (x^2 + 4x + 4) \cdot (x^2 - (1 - 2i + 1 + 2i)x + 1 - 4i^2) \\ &= \alpha \cdot (x^2 + 4x + 4) \cdot (x^2 - 2x + 5) \\ &= \alpha \cdot (x^4 + 2x^3 + x^2 + 12x + 20). \end{aligned}$$

Kako znamo da je $p(-3) = 20$ *imamo :*

$$\begin{aligned} p(-3) &= \alpha \cdot ((-3)^4 + 2 \cdot (-3)^3 + (-3)^2 + 12 \cdot (-3) + 20) \\ &= \alpha \cdot (81 - 54 + 9 - 36 + 20) = \alpha \cdot 20 \qquad \Rightarrow 20 = \alpha \cdot 20 \qquad \Rightarrow \alpha = 1. \end{aligned}$$

$p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 12x + 20$.

2.6 Algebarski brojevi

Neka je $K \leq L$ i $\alpha \in L \setminus K$. Ako postoji $f \in K[X] \setminus 0$ tako da je $f(\alpha) = 0$, onda kažemo da je α ***algebarski element*** *nad poljem K.*

Drugim rečima ***algebarski broj*** *je realan ili kompleksan broj koji može biti rešenje (koren) polinomne jednačine*

$$\alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \alpha_n X^n = 0, \qquad \alpha_k \in Q, k = 0, \ldots, n \text{ i } \alpha_n \neq 0.$$

Primer 10. *Algebarski elementi nad poljem Q bili bi $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$, i, $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$, $\sqrt[5]{7}$, ...*

a) Pošto je $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$ $\quad \rightarrow$ polinom $x^2 - 2$ poništava $\sqrt{2}$,
b) Analogno je $(\sqrt{3})^2 - 3 = 0$ $\quad \rightarrow$ polinom $x^3 - 3$ poništava $\sqrt{3}$,
c) Slično je $(\sqrt{3})^3 - 3 = 0$ $\quad \rightarrow$ polinom $x^3 - 3$ poništava $\sqrt[3]{3}$,
d) Pošto je $i^2 = -1, i^2 + 1 = 0$ $\quad \rightarrow$ polinom $x^2 + 1$ poništava i,
e) Neka je $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$, $\alpha^3 = 6 + 3 \cdot 2\sqrt[3]{2} + 3 \cdot 2\sqrt[3]{4} = 6 + 6(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) + 6\alpha$
$\quad \rightarrow$ polinom $x^3 - 6x - 6$ poništava $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$,
f) Kako je $(\sqrt[5]{7})^5 - 7 = 0$ $\quad \rightarrow$ polinom $x^5 - 7$ poništava $\sqrt[5]{7}$.

Primer 11. *Transcedentni elementi nad poljem Q bili bi π, e, $\pi + e$, ...*
(Nisu algebarski - ne postoji polinom koji se anulira za ove vrednosti).

2.7 Polinomi sa više neodređenih

2.7.1 Prsten polinoma sa više neodređenih

Neka je K bilo koj prsten. Ako je $L = K[X]$ prsten polinoma sa neodređenom X i koeficijentima iz K, tada postoji i prsten polinoma $F = L[Y]$, po neodređenoj Y i sa koeficijentima u L. To znači da za svako $p \in L[Y]$ postoje polinomi $a_s = \sum \alpha_{rs} X^r$ iz $L = K[X]$, takvi da je $a_s \neq 0$ za najviše konačno mnogo s-ova iz $\mathbb{N}_0$ i $p = \sum a_s Y^s$. Tada je

$$p = \sum \alpha_{rs} X^r Y^s,$$

za $\alpha_{rs} \in K$ i $\alpha_{rs} \neq 0$ za najviše konačno mnogo parova (r, s) iz $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Za dato $p \in F$, a_r-ovi i α_{rs}-ovi a tim svojsvom su jednoznačno određeni.

Tako određen prsten $L[Y]$, to jest $K[X][Y]$ u oznaci $K[X, Y]$ zovemo **prsten polinoma po neodređenim X i Y** nad datim prstenom K. Napominjemo da te neodređene međusobno komutiraju, kao i da komutiraju sa svakim elementom iz K.

Analogno definišemo i $F = K[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ **prsten polinoma sa n neodređenih** $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nad datim prstenom K. Ako je za neko $n > 1$ prsten $K[X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}]$ već definisan, tada je

$$K[X_1, X_2, \ldots, X_n] = K[X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}][X_n]$$

upravo prsten polinoma po neodređenoj X_n i sa koeficijentima iz tog prstena $K[X_1, X_2, \dots, X_{n-1}]$. Indukcijom po n, sledi da za svako od polinoma p postoje i jednoznačno određeni elementi $\alpha_{r_1 \cdots r_n}$ $(r_s \in \mathbb{N}_0)$ samog prstena K, takvi da je i $\alpha_{r_1 \cdots r_n} \neq 0$ za najviše konačno mnogo n-torki $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ i

$$p = \sum \alpha_{r_1 \cdots r_n} X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}$$

kao i da svaka od neodređenih $X_1, X_2, \dots, X_n$ komutira sa onim preostalim i svim elementima iz K.

Upravo zbog ovog poslednjeg, elemente prstena $F = K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ zovemo **polinomima** po neodređenim $X_1, \dots, X_n$ i sa koeficijentima iz prstena K.
Ne-nula polinome, oblika

$$\alpha X^{(r)} = \alpha X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}$$

zovemo monomima sa eksponentom $(r_1, r_2, \dots, r_n) = (r)$, a sam ceo broj $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = |r|$, njihovim **stepenom**. Nula polinom tretiramo kao nula monom stepena $d^\circ 0 = -\infty$. Uz to je jasno da i monomi različitih eksponenata mogu imati jednake stepene.

Svaki ne-nula polinom $p \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ može se na tačno jedan način predstaviti kao suma konačno mnogo monoma sa različitim eksponentima. Najveći među stepenima tih monoma zovemo **stepenom polinoma** p. Ako su svi ne-nula monomi polinoma p istog stepena k, taj polinom zovemo **homogen** i sa **stepenom homogenosti** k, ili kažemo da je to **forma stepena k** u prstenu $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$. Polinomi oblika $p = aX^2 + bXY + cY^2$ predstavljaju **kvadratne forme** to jest, **forme stepena 2** u prstenu $K[X, Y]$.

Ako u polinomu p određenom sa $p = \sum \alpha_{r_1 \cdots r_n} X_1^{r_1} \cdots X_n^{r_n}$ operacije i neodređene iz prstena $F = K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ zamenimo odgovarajućim operacijama i bilo kojim elementima $c_1, c_2, \dots, c_n$ iz nekog komutativnog natprstena L prstena K tako dobijen element prstena L označavamo sa

$$p(c_1, \dots, c_n) = \sum \alpha_{r_1 \cdots r_n} c_1^{r_1} \cdots c_n^{r_n},$$

i zovemo **vrednošću polinoma** p u tački $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ skupa L^n.

Ako je $L = K$, svaki polinom $p \in K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ indukuje i jedno preslikavanje $p_k : c \mapsto p(c)$ skupa K^n u K. Ovakvo preslikavanje zovemo **polinomnom funkcijom sa n promenljivih** na prstenu K, koja je pridružena polinomu p.

2.7.2 Faktorizacija razlike i zbira n-tih stepena za neparno n

Za bilo koji pozitivan ceo broj n, faktorizacija razlike i zbira stepenova ima sledeći oblik:

$$X^n - Y^n = (X - Y)(X^{n-1} + YX^{n-2} + Y^2X^{n-3} + \cdots + Y^{n-2}X + Y^{n-1}).$$

Odogovarajuća formula za zbir dva n-ta stepena zavisi od toga da li je n paran ili neparan broj. Ako je n neparan broj, Y se u prethodnom obrascu može zameniti sa $-Y$, čime dobijamo zbir n-tih stepena za neparno n.

$$X^n-(-Y)^n = (X-(-Y))(X^{n-1}+(-Y)X^{n-2}+\cdots+(-Y)^{n-2}X+(-Y)^{n-1})$$

$$X^n + Y^n = (X + Y)(X^{n-1} - YX^{n-2} + Y^2X^{n-3} + \cdots - Y^{n-2}X + Y^{n-1}).$$

Za male vrednosti neparnog n obrasci bi imali sledeći oblik:

$X^5 - Y^5 = (X - Y)(X^4 + X^3Y + X^2Y^2 + XY^3 + Y^4),$
$X^5 + Y^5 = (X + Y)(X^4 - X^3Y + X^2Y^2 - XY^3 + Y^4),$

$X^7 - Y^7 = (X - Y)(X^6 + X^5Y + X^4Y^2 + X^3Y^3 + X^2Y^4 + X^3Y^5 + Y^6),$
$X^7 + Y^7 = (X + Y)(X^6 - X^5Y + X^4Y^2 - X^3Z^3 + X^2Y^4 - X^3Y^5 + Y^6).$

Za male vrednosti parnog n obrasci bi imali sledeći oblik:

$X^6 - Y^6 = (X^2 + Y^2)(X^4 - X^2Y^2 + Y^4),$
$X^6+Y^6 = (X^3+Y^3)(X^3-Y^3) = (X+Y)(X-Y)(X^2-XY+Y^2)(X^2+XY+Y^2).$

2.7.3 Binomna formula

Binomna formula važi za svaki prirodan broj n i glasi:

$$(X + Y)^n = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k}Y^k.$$

Dokaz. Dokaz vršimo matematičkom indukcijom po n.

Najpre proverimo da li dato tvrđenje važi za $n = 0$.
Imamo da je $(X + Y)^0 = 1 = \sum_{k=o}^{0} \binom{0}{k}(X^{0-k}Y^k)$, pa je baza indukcije zadovoljena.
Pretpostavimo da važi $(X + Y)^n = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k}(X^{n-k}Y^k)$.
Dokažimo da tvrđenje važi za $n+1$, odnosno da je $(X+Y)^{n+1} = \sum_{k=o}^{n+1} \binom{n+1}{k} X^{n+1-k}Y^k$.

$$(X+Y)^{n+1} = (X+Y)\,(X+Y)^n$$

$$= (X+Y)\ \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k} Y^k$$

$$= \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} X^{n+1-k} Y^k + \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k} Y^{k+1}$$

$$= X^{n+1}\ +\ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X^{n+1-k} Y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} X^{n-k+1} Y^k$$

$$= X^{n+1}\ +\ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} X^{n+1-k} Y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} X^{n-k+1} Y^k\ +\ Y^{n+1}$$

$$= X^{n+1}\ +\ \sum_{k=1}^{n} (\binom{n}{k}\ +\ \binom{n}{k-1}) X^{n-k+1} Y^k\ +\ Y^{n+1}$$

$$= X^{n+1}\ +\ \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} X^{n-k+1} Y^k\ +\ Y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} X^{n-k+1} Y^k.$$

Ovim smo dokazali da binomna formula važi za svaki prirodan broj n.

$\square$

3 Polinomi u školskoj nastavi

3.1 Uvođenje polinoma u osnovnoj školi

3.1.1 Algebarski izrazi

Učenici se pre polinoma upoznaju sa brojevnim izrazima i vrednošću brojevnih izraza. Najpre na tabli napišem $(3,5+\cdot\sqrt{7}:\frac{3}{7}$, pa postavim pitanje da li je navedeni primer, primer brojevnog izraza, i da li ima smisla? Isto proverimo i za sledeće primere $52:4+\frac{3}{7}\cdot 7$, $2\sqrt{3}+1,5\cdot\frac{2}{5}$... Zatim učenici sami zapisuju brojevne izraze, pe neke od njih zapišemo na tabli i izračunamo njihovu vrednost. Na primer
$(8,2-9:1,5)+4,2=(8,2-6)+4,2=2,2+4,2=6,4$,
$6,5-(3,4+\frac{3}{5})\cdot(-3)=6,5-(3,4+0,6)\cdot(-3)=6,5-4\cdot(-3)=6,5+4=10,5$.

Najjednostavniji tj. osnovni brojevni izrazi su konstante (5, $-\frac{3}{5}$, $\sqrt{2}$, $-2,58$) i promenljive (a, b, c, x, y, z, $\dots$). Složene brojevne izraze dobijamo od osnovnih, povezujući ih znacima četiri računske operacije $+$ (sabiranje), $-$ (oduzimanje), $\cdot$ (množenje), $:$ (deljenje).

Primeri složenih brojevnih izraza bili bi recimo: $4+\frac{1}{7}$, $\sqrt{3}-2$, $23,5:(-5)$, $23,5:(-5)$. Povezivanjem složenih, dobijamo nove, još složenije izraze, čime se od izraza $23,5:(-5)$, $23,5:(-5)$ može dobiti $(23,5:(-5))+(23,5:(-5))$ ili $(23,5:(-5))-(23,5:(-5))$. Ovakve izraze nazivamo **brojevnim izrazima**, dok izraze u kojima učestvuju nepoznate zovemo **izrazi sa nepoznatom to jest promenljivom** $x+3$, $2y-4$, $(3a-3)\cdot(-\frac{1}{5})$. Izraze sa promenljivom nazivamo još i **algebarski izrazi**.

Kad se promenljivim u algebarskom izrazu dodele konkretne brojevne vrednosti, taj izraz se transformiše u **brojevni izraz** i možemo da odredimo njegovu **brojevnu vrednost**.

Računske operacije $+$, $-$, $\cdot$ i $:$ su zatvorene u skupu Q, pa izraze dobijene njihovom primenom nazivamo **racionalni algebarski izrazi**. Računske operacije $+$, $-$ i $\cdot$ su zatvorene u skupu Z, pa izraze dobijene njihovom primenom nazivamo **celi algebarski izrazi**. U većini udžbenika uvodi se podela algebarskih izraza upravo na ove dve grupe, ali je za učenike pomalo zbunjujuća, pa se može i izbeći.

Prema jednoj podeli algebarske izraza delimo na:
cele (kad imenilac ne sadrži promenljivu, npr. $\frac{2xy^2}{5}$),
razlomljene (kad imenilac sadrži i promenljivu, npr. $\frac{2a}{a+3}$),
racionalne (kad ne sadrže promenljivu ispod znaka za koren, npr. $5x+\sqrt{5}$),
iracionalne (kad se pod znakom korena nalaze i promenljive, npr. $a+\sqrt{x}+5$).

3.1.2 Pojam polinoma

Polinomi su algebarski izrazi dobijeni pomoću znakova brojeva, znakova promenljivih i znakova operacija sabiranja, oduzimanja i množenja (+, - , ·). Na primer, izrazi 4, $\frac{1}{8}$, $5m$, $3-3a$, $5x^2-3x+\frac{2}{5}$, $x^2y^3-4x^5+\sqrt{3}$ predstavljaju polinome, dok $\frac{1}{x}$, $\frac{2x+3}{3+2x}$ nisu polinomi iz razloga što operacija deljena kod polinoma nije zastupljena.

Zadatak 6. *Odredi koji od navedenih algebarskih izraza su polinomi!*
a) $a-\frac{1}{2a-1}$,
b) $(2-3x)(3-2x)$,
c) $\frac{5x-2}{3}=\frac{1}{3}\cdot(5x-3)$,
d) $4x^2+12xy$,
e) $\sqrt{3}x^2+12xy$,
f) $-\frac{3x}{5-2x}$,
g) $\frac{x^2-7}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x^2-7)$.

Odgovor: Polinomi su: b), c), d), e), g).

Polinome možemo podeliti na polinome sa jednom i sa više promenljivih.
Sa jednom promenjivom: $2x$, $3x-2$, $x^2-4x+\frac{2}{3}$, x^3+2x^2-3x+5,
sa dve: $3a-4b$, $3a^2b+2ab^2-3ab$, x^3-y, x^2y-xy^2+1,
sa tri promeljive: xyz, $2a+3b-c-1$, $3a^2bc-2abc^2-ac+7$, ...

Ako u polinomu učestvuje više promenljivih, da bismo izračunali njegovu brojevnu vrednost treba da bude zadata konkretna vrednost za svaku promenljivu.

3.1.3 Vrste polinoma

Monomi su polinomi koje dobijamo od znakova brojeva, znakova promenljivih i znaka za množenje (·). Primeri: 5, x, $-2a$, $3x^3$, $-2xy$, $\sqrt{5}a^2$, $-7a^3bc^2$.

Brojevna konstanta u monomu naziva se koeficijent monoma. Sve promenljive određenog stepena koje učestvuju u monomu predstavljaju promenljivi deo. Zbir izložilaca promenljivih koje učestvuju u monomu nazivamo stepen tog monoma. Ako je monom ne-nula konstanta, kažemo da je njegov stepen nula. Za monome koji se razlikuju samo u koeficijentu (imaju jednak promenljivi deo) kažemo da su slični.

Ako je M neki monom, a α i β realni brojevi, onda su monomi αM i βM međusobno slični.

Slični monomi sa jednom promenljivom: $2x$, $-x$, $\frac{1}{5}x$, $-\sqrt{2}x$.
Slični monomi sa dve promenljive: $3a^6b^2$, $-\frac{3}{5}a^6b^2$, $\sqrt{5}a^6b^2$.

Zadatak 7. *Odredi koeficijent, promenljivi deo i stepen datih monoma.*

a) $-3a^2$ *Koeficijent je* -3*, promenljivi deo je* a^2*, stepen je* 2.

b) $7a^2bc^3$ *Koeficijent je* 7*, promenljivi deo je* a^2bc^3*, stepen je* $2{+}1{+}3 = 6$.

c) $-\frac{1}{11}xz^4z^7$ *Koeficijent je* $-\frac{1}{11}$*, promenljivi deo je* xz^4z^7*,*
stepen je $1+4+7 = 12$.

d) a^3b^4 *Koeficijent je* 1*, promenljivi deo je* a^3b^4*, stepen je* $3+4 = 7$.

Zadatak 8. *Napisati po tri monoma koja su slična datim monomima.*

a) $4a^4$ *Slični monomi su:* $-2a^4$, $-\sqrt{2}a^4$, $\frac{2}{3}a^4$.

b) x^2y *Slični monomi su:* $-\frac{3}{7}x^2y$, $-x^2y$, $\sqrt{5}x^2y$.

c) $-3a^3bc$ *Slični monomi su:* $-11a^3bc$, a^3bc, $\frac{1}{5}a^3bc$.

Ako su A i B dva neslična monoma, onda izraz $A+B$ nazivamo **binomom**, a za monome A i B kažemo da su članovi binoma $A+B$. Za binom se kaže da je dvočlani polinom.
Primeri binoma:
$x+2$, $x+y$, $-2a+b$, $a+2b-3c = a+2b+(-3c)$, $3x^2 - \frac{2}{7} = 3x^2 + (-\frac{2}{7})$,
gde su x, y, a, b, c promenljive.

Ako su A, B i C tri neslična monoma, onda izraz $A+B+C$ nazivamo **trinomom**, a za monome A, B i C kažemo da su članovi trinoma $A+B+C$. Za trinom se kaže da je tročlani polinom.

Primeri trinoma:
$x+y+1$, $\quad x^2+2x+1$, $\quad 3x^2y + x^3z - \frac{3}{5}yz^3$, $\quad 2a-3b+5$,
gde us x, y, z, a, b promenljive.

Za polinome sa više od tri člana ne postoji poseban naziv. Polinom po promenljivoj x je izraz $P = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ pri čemu je $n \in N$ i $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Ako je $a_n \neq 0$ broj n se naziva **stepenom polinoma**, koeficijent a_n je **najstariji** ili **vodeći koeficijent**, sabirak a_nx^n je **najstariji član** tog polinoma ili **vodeći monom**, a sabirak a_0 **slobodan član** tog polinoma. Ako je $a_n = 1$ polinom se naziva **monični polinom**. Polinom je **linearan** ako je $n = 1$.

Izračunati vrednost polinoma P u datoj tački znači za konkretnu vrednost promenljive x odrediti brojevnu vrednost tog izraza.

Zadatak 9. *Odredi vrednosti datih polinoma:*

a) $5a^2 - 2a + 3$, $\quad$ *za* $a \in \left\{-4, 2, \frac{2}{5}\right\}$.
$5\cdot(-4)^2 - 2\cdot(-4) + 3 = 5\cdot 16 + 8 + 3 = 80 + 8 + 3 = 91$
$5\cdot(0)^2 - 2\cdot(0) + 3 = 5\cdot 0 + 0 + 3 = 0 + 3 = 3$
$5\cdot(\frac{2}{5})^2 - 2\cdot(\frac{2}{5}) + 3 = 5\cdot\frac{4}{25} - \frac{4}{5} + 3 = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} + 3 = 0 + 3 = 3.$

b) $z^{99} - z^{100} - z^{101}$, $\quad$ *za* $a \in \{1, -1\}$.
$1^{99} - 1^{100} - 1^{101} = 1 - 1 - 1 = -1$
$(-1)^{99} - (-1)^{100} - (-1)^{101} = -1 - 1 - (-1) = -1 - 1 + 1 = -1.$

c) $x^3 + 3xy - 5y, \qquad za\ x = -2\ i\ y = 6.$
$(-2)^3 + 3 \cdot (-2) \cdot 6 - 5 \cdot 6 = -8 - 6 \cdot 6 - 30 = -8 - 36 - 30 = -74.$

Napomena: Ako u polinomu učestvuje više promenljivih, da bismo izračunali njegovu brojevnu vrednost treba da bude zadata konkretna vrednost za svaku promenljivu.

3.2 Operacije nad polinomima

Operacije koje se definišu nad polinomima jesu operacija sabiranja i operacija množenja. Svojstva ovih operacija definisana u skupu realnih brojeva važe i za polinome.

3.2.1 Sabiranje polinoma

Zbir dva ili više sličnih monoma određujemo primenom svojstva distributivnosti množenja prema sabiranju.

Primer 12. *Zbir sličnih monoma:*
a) $2x + 5x = (2 + 5)x = 7x,$
b) $8a - 12,5a = (8 - 12,5)a = -4,5a,$
c) $-5xy + 3xy - 9xy = (-5 + 3 - 9)xy = -11xy,$
d) $-\frac{1}{2}xy^2z + \frac{3}{4}xy^2z = (-\frac{1}{2} + \frac{3}{4})xy^2z = (-\frac{2}{4} + \frac{3}{4})xy^2z = \frac{1}{4}xy^2z.$

Zbir sličnih monoma je njima sličan monom čiji je koeficijent jednak zbiru koeficijenata datih monoma ili nula ako je zbir koeficijenata datih monoma nula. Zapravo, ako je M monom, a α i β realni brojevi, tada je $\alpha M + \beta M = (\alpha + \beta)M$.

Napomena: Iako su 3 i $\sqrt{3}$ slični monomi njihov zbir ne možemo uprostiti, jer je 3 racionalan, a $\sqrt{3}$ iracionalan broj.

Da bismo definisali oduzimanje monoma potrebano je uvesti pojam suprotnog monoma. Za dati monom M **suprotan monom** je $-M$.
Važi da je $M + (-M) = 0$. Koeficijenti dva uzajamno suprotna monoma su uzajamno suprotni brojevi, pa je zbir ovakva dva monoma jedank nuli. **Razlika dva monoma** jednaka je zbiru prvog monoma i monoma suprotnog drugom.

Zbir nesličnih monoma je polinom, ali nije monom.

Polinomi mogu biti u sređenom i nesređenom obliku.
Sređeni oblik: $2x - 5$, $x^4 +^2 x^3 + 3x$, $\frac{1}{4}a^2 - 2a + 1$, $3a^4 + 2a^2b - 2ab^2 - 2$
Nesređeni oblik: $2x^2+3x-5x+3x^2$, $3ab+4b-7ab+3a$, $4a^2b-3ab+10-5ab-2a^2b$.
Polinom je u sređenom obliku ukoliko je zapisam kao zbir nesličnih monoma.

Polinom sređujemo tako što saberemo sve slične monome. Kako ne bismo izostavili neki od monoma, slične monome ćemo označiti na isti način - istom vrstom podvlačenja, ili istom bojom, a neslične na različite načine. Polinom sređujemo primenjujući zakon komutativnosti i asocijativnosti za operaciju sabiranja.

$$\mathbf{3a^2} - 5a + \mathbf{2a^2} + 3 = 3a^2 + 2a^2 - 5a + 3 = (3+2)a^2 - 5a + 3 = 5a^2 - 5a + 3$$
$$\mathbf{3xy^2} + xy - \mathbf{xy^2} - xy = 3xy^2 - xy^2 + xy - xy = (3-1)xy^2 + 0 = 2xy^2$$

Stepen polinoma u sređenom obliku određuje se prema najvećem stepenu monoma koji čine dati polinom.
Najbolje je polinom zapisati počevši od monoma sa najvećim stepenom, pa tako redom do monoma sa njmanjim stepenom.

Zadatak 10. *Odredi stepene datih polinoma.*

a) $3\sqrt{3} + x^3$ *stepen polinoma je 3,*
b) $2a^2 + 3a - 4a^5$ *stepen polinoma je 5,*
c) $-4a^2b + 3ab^3 + a^3b^4$ *stepen polinoma je* $3+4=7$.

Polinome sabiramo primenom zakona komutativnosti i asocijativnosti operacije sabiranja. Pre sabiranja preporučuje se da polinome napišemo u sređenom obliku. Zbir dva ili više polinoma dobijamo sabiranjem sličnih monoma, pri čemu preostale monome iz datih polinoma samo prepišemo.

Primer 13. *Zbir polinoma* $A = 3x^2 + 2x - 5$ *i* $B = -2x^2 + 2$ *je polinom*

$$\begin{aligned} A + B &= (3x^2 + 2x - 5) + (-2x^2 + 2) \\ &= 3x^2 + 2x - 5 - 2x^2 + 2 && \textit{oslobađanje od zagrada} \\ &= 3x^2 - 2x^2 + 2x + (-5) + 2 && \textit{komutativnost} \\ &= (3x^2 - 2x^2) + 2x + (-5 + 2) && \textit{asocijativnost} \\ &= (3-2)x^2 + 2x + (-3) && \textit{distributivnost} \\ &= x^2 + 2x - 3. \end{aligned}$$

Primer 14. *Zbir polinoma* $M = 3x^3 + 3x$ *i* $N = -x^2 - 5x$ *je polinom*

$$\begin{aligned} M + N &= (3x^3 + 3x) + (-x^2 - 5x) \\ &= 3x^3 + 3x - x^2 - 5x && \textit{oslobaanje od zagrada} \\ &= 3x^3 - x^2 + 3x - 5x && \textit{komutativnost} \\ &= 3x^3 - x^2 + (3-5)x && \textit{distributivnost} \\ &= 3x^3 - x^2 - 2x. \end{aligned}$$

Primer 15. *Zbir polinoma* $P = 2x^4 + 3x^2 + x - 5$ *i* $Q = 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 2x - 1$ *je polinom*

$$\begin{array}{rrrrrrr} P + Q = & & 2x^4 & & +3x^2 & +\ x & -5 \\ & +3x^5 & -\ x^4 & +3x^3 & & +2x & -1 \\ \hline = & 3x^5 & +\ x^4 & +3x^3 & +3x^2 & +3x & -6 \end{array}$$

Prilikom upotrebe ove metode neophodno je da se pri potpisivanju polinoma vodi računa da se slični monomi zapišu jedan ispod drugog. Za dati polinom P

njemu suprotan polinom je $-P$. Važi da je $P+(-P)=0$. Parovi odgovarajućih koeficijenata (koeficijenti sličnih monoma iz ova dva polinoma) dva uzajamno suprotna polinoma su međusobno suprotni brojevi. Razlika dva polinoma jednaka je zbiru prvog polinoma i polinoma suprotnog drugom.

Razlika polinoma $S=2x^4+3x^2+x-5$ i $T=3x^5-x^4+3x^3+2x-1$ je polinom

$$\begin{aligned} S-T &= (2x^4+3x^2+x-5)-(3x^5-x^4+3x^3+2x-1) \\ &= 2x^4+3x^2+x-5-3x^5+x^4-3x^3-2x+1 \\ &= -3x^5+2x^4+x^4-3x^3+3x^2+x-2x-5+1 \\ &= -3x^5+3x^4-3x^3+3x^2-x-4\ . \end{aligned}$$

Znamo da je $M-L=M+(-L)$, ali nije neophodno da računamo suprotan polinom polinomu L, pa da ga sabiramo sa polinomom M, već odmah možemo računati razliku polinoma M i L, vodeći računa kod oslobađanja zagrada (kad je ispred zagrade znak $(-)$ svim članovima u zagradi moramo da promenimo znak).

Zadatak 11. *Dati su polinomi* $A=2x^5-3x^3+2x$, $B=5x^5-2x^4-7x$ *i* $C=9x^4-7x^3+3x$. *Zapiši u sređenom obliku polinome:* $a)A+B-C$, $b)A-B-C$ *i* $c)-A-(B-C)$.

$$\begin{aligned} a)\ A+B-C &= (2x^5-3x^3+2x)+(5x^5-2x^4-7x)-(9x^4-7x^3+3) \\ &= 2x^5-3x^3+2x+5x^5-2x^4-7x-9x^4+7x^3-3 \\ &= 2x^5+5x^5-2x^4-9x^4-3x^3+7x^3+2x-7x-3 \\ &= 7x^5-11x^4+4x^3-5x-3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b)\ A-B-C &= (2x^5-3x^3+2x)-(5x^5-2x^4-7x)-(9x^4-7x^3+3) \\ &= 2x^5-3x^3+2x-5x^5+2x^4+7x-9x^4+7x^3-3 \\ &= 2x^5-5x^5+2x^4-9x^4-3x^3+7x^3+2x+7x-3 \\ &= -3x^5-7x^4+4x^3+9x-3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c)\ -A-(B-C) &= -(2x^5-3x^3+2x)-((5x^5-2x^4-7x)-(9x^4-7x^3+3)) \\ &= -(2x^5-3x^3+2x)-(5x^5-2x^4-7x-9x^4+7x^3-3) \\ &= -2x^5+3x^3-2x-(5x^5-2x^4-9x^4+7x^3-7x-3) \\ &= -2x^5+3x^3-2x-(5x^5-11x^4+7x^3-7x-3) \\ &= -2x^5+3x^3-2x-5x^5+11x^4-7x^3+7x+3 \\ &= -2x^5-5x^5+11x^4+3x^3-7x^3-2x+7x+3 \\ &= -7x^5+11x^4-4x^3+5x+3. \end{aligned}$$

Zadatak 12. *Dati su polinomi* $A=5a^2+3a-2$, $B=-2a^2+9$ *i* $C=5a-3$. *Izračunaj* $A+B$, $B+A$, $(A+B)+C$ *i* $A+(B+C)$.

$A+B=(5a^2+3a-2)+(-2a^2+9)=\ 5a^2+3a-2-2a^2+9=3a^2+3a+7,$
$B+A=(-2a^2+9)+(5a^2+3a-2)=-2a^2+9+5a^2+3a-2=3a^2+3a+7$
Primećujemo da je $A+B=B+A$, *tj. da važi zakon komutativnosti.*

$$
\begin{aligned}
(A+B)+C &= ((5a^2+3a-2)+(-2a^2+9))+(5a-3)\\
&= 3a^2+3a+7+5a-3 = 3a^2+8a+4,\\
A+(B+C) &= (5a^2+3a-2)+((-2a^2+9))+(5a-3))\\
&= 5a^2+3a-2+(-2a^2+9+5a-3)\\
&= 5a^2+3a-2-2a^2+5a+6 = 3a^2+8a+4.
\end{aligned}
$$

Primećujemo da je $(A+B)+C = A+(B+C)$, to jest da važi zakon asocijativnosti.

3.2.2 Množenje polinoma

Množenje monoma

Proizvod dva monoma određujemo primenjujući komutativni i asocijativni zakon operacije množenja i svojstva stepena.

Primer 16. $3x \cdot 4x^3 = 3 \cdot 4 \cdot x \cdot x^3 = 12x^4$,
$3x^2yz \cdot (-5)xy^2z^3 = 3 \cdot (-5) \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y^2 \cdot z \cdot z^3 = -15x^3y^3z^4$.

Proizvod monoma je monom čiji je koeficijent jednak proizvodu koeficijenata, a promenljivi deo proizvodu promenljivih delova činilaca. Proizvod proizvoljnog broja monoma je novi monom.

Zadatak 13. *Odredi proizvod $A \cdot B \cdot C$ ako su A, B i C dati monomi:*

a) $A = \frac{5}{6}a^4, \quad B = 15a^2, \quad C = 12a.$
$A \cdot B \cdot C = \frac{5}{6}a^4 \cdot 15a^2 \cdot 12a = \frac{5}{6} \cdot 15 \cdot 12 \cdot a^4 \cdot a^2 \cdot a = 150 \cdot a^{4+2+1} = 150a^7.$

b) $A = 2x^2y, \quad B = 3x^2y^3, \quad C = -7xy^5z^2.$
$$
\begin{aligned}
A \cdot B \cdot C &= 2x^2y \cdot 3x^2y^3 \cdot (-7xy^5z^2) = 2 \cdot 3 \cdot (-7) \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y^3 \cdot y^5 \cdot z^2\\
&= -42 \cdot x^{2+2+1} \cdot y^{1+3+5} \cdot z^2 = -42x^5y^9z^2.
\end{aligned}
$$

S obzirom da smo definisali množenje monoma, možemo računati kvadrat, kub i bilo koji stepen datog monoma. Dobijeni rezultat biće takođe monom. Stepen monoma prirodnim brojem predstavlja proizvod datog monoma samim sobom, onaj broj puta koji se nalazi u eksponentu. Primenjujemo svojstva stepenovanja kako bismo izračunali traženi proizvod.

Primer 17. *a)* $(a^3)^6 = a^{3\cdot 6} = a^{18}$,
b) $(-2a^2b)^5 = (-2)^5 \cdot (a^2)^5 \cdot b^5 = -32 \cdot a^{2\cdot 5} \cdot b^5 = -32a^{10}b^5$,
c) $(\frac{2}{3}x^3y^2z^5)^4 = (\frac{2}{3})^4 \cdot (x^3)^4 \cdot (y^2)^4 \cdot (z^5)^4 = \frac{16}{81} \cdot x^{3\cdot 4} \cdot y^{2\cdot 4} \cdot z^{5\cdot 4} = \frac{16}{81}x^{12}y^8z^{20}$.

Množenje polinoma monomom

Množenje polinoma monomom primenom zakona distributivnosti, svodimo na množenje monoma.

Neka je polinom $P = A_1 + A_2 + \cdots + A_k$, $k \in N$, zapisan u obliku zbira nesličnih monoma, onda je na osnovu distributivnosti množenja prema sabiranju $P \cdot M = (A_1 + A_2 + \cdots + A_k) \cdot M = A_1 \cdot M + A_2 \cdot M + \cdots + A_k \cdot M$.
Polinom P množimo monomom M tako što svaki član polinoma P pomnožimo monomom M, pa dobijene proizvode saberemo.

Primer 18. *Proizvod polinoma $P = 2x^3 + 4x^2 - 3x - 7$ i monoma $M = -2x$ je polinom*

$$
\begin{aligned}
P \cdot M &= (2x^3 + 4x^2 - 3x - 7) \cdot (-2x) \\
&= 2x^3 \cdot (-2x) + 4x^2 \cdot (-2x) - 3x \cdot (-2x) - 7 \cdot (-2x) && \textit{distributivnost} \\
&= -4x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 14x. && \textit{množenje monoma}
\end{aligned}
$$

Množenje polinoma polinomom

Ako u jednakosti $P \cdot M = (A_1 + A_2 + \cdots + A_k) \cdot M = A_1 \cdot M + A_2 \cdot M + \cdots + A_k \cdot M$ monom M zamenimo polinomom koji je zapisan u obliku zbira nesličnih monoma B_1, B_2, $\ldots B_l$, $l \in N$, $M = B_1 + B_2 + \cdots + B_l$, dobijamo proizvod dva polinoma. Primenom zakona distributivnosti važi sledeće:

$$
\begin{aligned}
&P \cdot M = (A_1 + A_2 + \cdots + A_k) \cdot M = A_1 \cdot M + A_2 \cdot M + \cdots + A_k \cdot M \\
&= A_1 \cdot (B_1 + B_2 + \cdots + B_l) + A_2 \cdot (B_1 + B_2 + \cdots + B_l) + \cdots + A_k \cdot (B_1 + B_2 + \cdots + B_l) \\
&= A_1 \cdot B_1 + A_1 \cdot B_2 + \cdots + A_1 \cdot B_l \\
&+ A_2 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2 + \cdots + A_2 \cdot B_l \\
&+ \cdots + \\
&+ A_k \cdot B_1 + A_k \cdot B_2 + \cdots + A_k \cdot B_l.
\end{aligned}
$$

Primer 19. *Proizvod polinoma $A = 3a^2 - 5a + 7$ i polinoma $B = 3a - 2$ je polinom*

$$
\begin{aligned}
A \cdot B &= (3a^2 - 5a + 7) \cdot (3a - 2) \\
&= 3a^2 \cdot (3a - 2) - 5a \cdot (3a - 2) + 7 \cdot (3a - 2) && \textit{distributivnost} \\
&= 9a^3 - 6a^2 - 15a^2 + 10a + 21a - 14 && \textit{distributivnost} \\
&= 9a^3 - 21a^2 + 31a - 14. && \textit{sređeni oblik polinoma}
\end{aligned}
$$

Primer 20. *Proizvod polinoma $M = -2x^2 + 3x - 1$ i polinoma $N = 5x^2 + 4x + 2$ je polinom*

$$
\begin{aligned}
M \cdot N &= (-2x^2 + 3x - 1) \cdot (5x^2 + 4x + 2) \\
&= -2x^2 \cdot (5x^2 + 4x + 2) + 3x \cdot (5x^2 + 4x + 2) - 1 \cdot (5x^2 + 4x + 2) \\
&= -2x^2 \cdot 5x^2 - 2x^2 \cdot 4x - 2x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 5x^2 + 3x \cdot 4x + 3x \cdot 2 - 1 \cdot 5x^2 - 1 \cdot 4x - 1 \cdot 2 \\
&= 10x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 15x^3 + 12x^2 + 6x - 5x^2 - 4x - 2 \\
&= 10x^4 + 7x^3 + 3x^2 + 2x - 2.
\end{aligned}
$$

Zadatak 14. *Dati su polinomi* $A = m^2 + 2m - 3$, $B = -3m^2 + 5$ *i* $C = 4m + 2$ *odredi sledeće proizvode:* $A \cdot B$, $B \cdot A$, $(A \cdot B) \cdot C$ *i* $A \cdot (B \cdot C)$.

a) $$\begin{aligned} A \cdot B &= (m^2 + 2m - 3) \cdot (-3m^2 + 5) \\ &= -3m^4 + 5m^2 - 6m^3 + 10m + 9m^2 - 15 \\ &= -3m^4 - 6m^3 + 14m^2 + 10m - 15, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} B \cdot A &= (-3m^2 + 5) \cdot (m^2 + 2m - 3) \\ &= -3m^4 - 6m^3 + 9m^2 + 5m^2 + 10m - 15 \\ &= -3m^4 - 6m^3 + 14m^2 + 10m - 15. \end{aligned}$$

Primećujemo da je $A \cdot B = B \cdot A$, *tj. da važi zakon komutativnosti.*

c) $$\begin{aligned} (A \cdot B) \cdot C &= ((m^2 + 2m - 3) \cdot (-3m^2 + 5)) \cdot (4m + 2) \\ &= (-3m^4 - 6m^3 + 14m^2 + 10m - 15) \cdot (4m + 2) \\ &= -12m^5 - 6m^4 - 24m^4 - 12m^3 + 56m^3 \\ &\quad + 28m^2 + 40m^2 + 20m - 60m - 30 \\ &= -12m^5 - 30m^4 + 44m^3 + 68m^2 - 40m - 30, \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} A \cdot (B \cdot C) &= (m^2 + 2m - 3) \cdot ((-3m^2 + 5) \cdot (4m + 2)) \\ &= (m^2 + 2m - 3) \cdot (-12m^3 - 6m^2 + 20m + 10) \\ &= -12m^5 - 6m^4 + 20m^3 + 10m^2 \\ &\quad - 24m^4 - 12m^3 + 40m^2 + 20m \\ &\quad + 36m^3 + 18m^2 - 60m - 30 \\ &= -12m^5 - 30m^4 + 44m^3 + 68m^2 - 40m - 30. \end{aligned}$$

Primećujemo da je $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, *tj. da važi zakon asocijativnosti.*

3.3 Polinomijalni identiteti

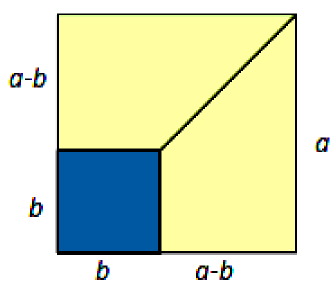
3.3.1 Razlika kvadrata

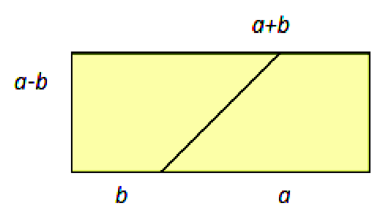
Izraz oblika $A^2 - B^2$ predstavlja razliku kvadrata monoma. Množenjem polinoma dobijamo da za bilo koje monome A i B važi:

$$(A - B) \cdot (A + B) = A^2 + AB - BA + B^2 = A^2 - B^2.$$

Razlika kvadrata dva neslična monoma jednaka je proizvodu njihovog zbira i njihove odgovarajude razlike, to jest $A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$.

Geometrijsko objašnjenje razlike kvadrata: Neka je a^2 površina kvadrata stranice a, a b^2 površina kvadrata stranice b i neka je $a > b$. Sa slike levo vidimo da je razlika površina kvadrata stranice a i kvadrata stranice b jednaka dvostrukoj površini pravouglog trapeza čije su osnovice a i b, a visina $a - b$.





$$a^2 - b^2 = 2 \cdot \tfrac{a+b}{2} \cdot (a - b) = (a + b) \cdot (a - b)$$

Sa slike desno vidimo da je površina dva pravougla trapeza čije su osnovice a i b, a visina $a - b$ jednaka površini pravougaonika čije su stranice $a + b$ i $a - b$.

Zadatak 15. *Razliku kvadrata napiši u obliku proizvoda.*

a) $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$,
b) $9a^2 - 2 = (3a)^2 - (\sqrt{2})^2 = (3a + \sqrt{2}) \cdot (3a - \sqrt{2})$,
c) $25x^2 - 64y^2 = (5x)^2 - (8y)^2 = (5x + 8y) \cdot (5x - 8y)$.

Zadatak 16. *Primenom razlike kvadrata date proizvode napiši u obliku sređenih polinoma.*

a) $(x + 5) \cdot (x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$,
b) $(2x - 3) \cdot (2x + 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$,
c) $(3a + 4b) \cdot (3a - 4b) = (3a)^2 - (4b)^2 = 9a^2 - 16b^2$.

3.3.2 Kvadrat binoma

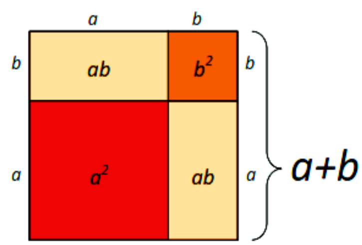
Izraz oblika $(A+B)^2$ predstavlja kvadrat binoma $A+B$. Obzirom da ćemo često računati kvadrate binoma, želeli bismo da pojednostavimo rad sa njima. Zato izvodimo opšti obrazac za kvadrat binoma koji ćemo koristiti kad nam bude potrebno (bez ponovnog izvođenja). Primenom pravila za množenje binoma, dolazimo do željenog obrasca.

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A\cdot A + A\cdot B + B\cdot A + B\cdot B = A^2 + 2AB + B^2$$

Kvadrat binoma jednak je zbiru kvadrata prvog člana, dvostrukog proizvoda prvog i drugog člana i kvadrata drugog člana tog binoma.

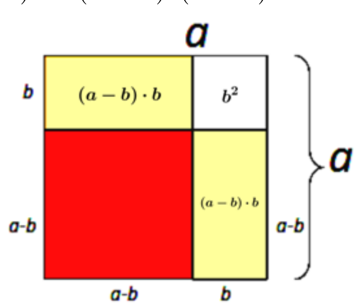
Prethodno navedeni obrazac za kvadrat binoma može se interpretirati i geometrijski. Neka su vrednosti monoma A i B merni brojevi a i b dužina neke dve duži, tada je:

∗ $(A+B)^2$
površina kvadrata stranice $a+b$,
∗ A^2 površina kvadrata stranice a,
∗ B^2 površina kvadrata stranice b,
∗ AB površina pravougaonika čije su stranice dužina a i b.



U Euklidovim Elementima, u drugoj knjizi, može da se nađe interpretacija pravila za kvadrat binoma: "Ako se data duž proizvoljno podeli, kvadrat nad celom duži jednak je zbiru kvadrata nad odsečcima i dvostrukog pravougaonika obuhvaćenog odsečcima." Formula za kvadrat binoma važi i ako su A i B bilo koji polinomi. Izraz oblika $(A-B)^2$ predstavlja kvadrat razlike monoma A i B. Takođe izvodimo opšti obrazac koji ćemo koristiti kad nam bude potrebno (bez ponovnog izvođenja):

$(A-B)^2 = (A-B)\cdot(A-B) = A\cdot A - A\cdot B - B\cdot A + B\cdot B = A^2 - 2AB + B^2$.



$(a-b)^2 = a^2 - 2(a-b)b - b^2 = a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Kvadrat binoma često zapisujemo: $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$.

Zadatak 17. *Odredi kvadrat datih binoma:*

a) $A = a + 3$, $\quad A^2 = (a+3)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9$,

b) $M = 2a - 1$, $\quad M^2 = (2a-1)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 1 + 1^2 = 4a^2 - 4a + 1$,

c) $N = \frac{1}{2}x + 4$, $\quad N^2 = (\frac{1}{2}x + 4)^2 = (\frac{1}{2}x)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot 4 + 4^2 = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 16$,

d) $P = -5x - 6y$, $\quad P^2 = (-5x-6y)^2 = (-5x)^2 + 2 \cdot (-5x) \cdot (-6y) + (-6y)^2$
$= 25x^2 + 60xy + 36y^2$.

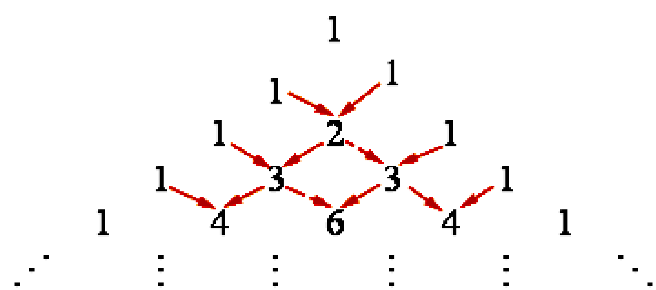
Za naprednije učenike: Pored jednakosti za kvadrat binoma, poznate su i formule za kub binoma, kao i za više stepene binoma.
Kub binoma:

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B)\cdot(A+B)\cdot(A+B) = (A+B)^2\cdot(A+B)\\ &= (A^2+2AB+B^2)\cdot(A+B) = A^3+A^2B+2A^2B+2AB^2+AB^2+B^3\\ &= A^3+3A^2B+3AB^2+B^3.\end{aligned}$$

Četvrti stepen binoma:

$$\begin{aligned}(A+B)^4 &= (A+B)^3\cdot(A+B)\\ &= (A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)\cdot(A+B)\\ &= A^4+A^3B+3A^3B+3A^2B^2+3A^2B^2+3AB^3+AB^3+B^4\\ &= A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^4.\end{aligned}$$

Uočava se pravilnost u tim formulama. U članovima na desnoj strani, zbir stepena monoma A i stepena monoma B je stalan i u slučaju $(A+B)^3$ jednak je 3, a u slučaju $(A+B)^4$ jednak je 4. Pri tom iz člana u član stepeni monoma A opadaju za 1, dok stepeni monoma B rastu za 1. Koeficijenti koji se javljaju u ovim formulama dobijaju se iz Paskalovog trougla.



Slika 2: Paskalov trougao

U svakom redu ove šeme na prvom i poslednjem mestu se nalazi broj 1, dok ostala polja popunjavamo tako što u njih upišemo zbir brojeva iz dva polja iznad. U trećem redu se nalaze brojevi $1, 2, 1$ koji su koeficijenti u izrazu za kvadrat binoma, u četvrtom redu se nalaze brojevi $1, 3, 3, 1$ koji su koeficijenti u izrazu za kub binoma, u petom redu se nalaze brojevi $1, 4, 6, 4, 1$ koji su koeficijenti u izrazu za $(A+B)^4$ i tako dalje.

3.4 Rastavljanje - faktorizacija polinoma na činioce

Rastaviti polinom na proste faktore (činioce) znači napisati ga u obliku proizvoda polinoma koji se ne mogu dalje rastavljati, takozvanih prostih polinoma. Za polinom koji je predstavljen u obliku proizvoda drugih polinoma kažemo da je rastavljen (razložen) na činioce. Prilikom rastavljanja polinoma koristimo svojstvo distributivnosti, kao i obrasce za kvadrat binoma i razliku kvadrata.

Primer 21. *Sledeće polinome rastaviti na proste činioce:*

a) Monom $3ab^2 = 3 \cdot a \cdot b \cdot b$ *rastavljen je na činioce* 3, a, b *i* b.
b) Binom $3x + 6 = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 = 3 \cdot (x + 2)$ *se primenom distributivnog zakona rastavlja na činioce* 3 *i* $(x + 2)$.
c) Binom $9a^2 - 4b^2 = (3a)^2 - (2b)^2 = (3a - 2b) \cdot (3a + 2b)$*se primenom formule za razliku kvadrata rastavlja na činioce* $(3a - 2b)$ *i* $(3a + 2b)$.
d) Trinom $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = (x + 4)^2$ *se primenom formule za kvadrat binoma rastavlja načinioce* $(x + 4)$ *i* $(x + 4)$.

Ako za polinom$P = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ važi da se svaki od sabiraka A_1, A_2, $\ldots$,A_n, $n \in N$, može napisati u obliku $A_1 = B_1 \cdot C$, $A_2 = B_2 \cdot C$, $\ldots A_n = B_n \cdot C$, pri čemu je C polinom, tada se primenom distributivnog zakona, polinom P može rastaviti na činioce na sledeći način $P = (B_1 + B_2 + \cdots + B_n) \cdot C$ ili $P = C \cdot (B_1 + B_2 + \cdots + B_n)$. Za ovaj postupak kažemo i da "izvlačimo zajednički činilac ispred zagrade".

Zadatak 18. *Primenom zakona distributivnosti date polinome rastavi na proste činioce:*

a) $21a - 7a^2 = 7a \cdot 3 - 7a \cdot a = 7a \cdot (3 - a)$,
b) $10a^2bc^3 - 25ac^2 = 5ac^2 \cdot 2abc - 5ac^2 \cdot 5 = 5ac^2 \cdot (2abc - 5)$,
c) $3ab^2c^3 + 18a^3bc^2 + 12ab^3c^2 = 3abc^2 \cdot bc + 3abc^2 \cdot 6a^2 + 3abc^2 \cdot 4ab^2$
$= 3abc^2 \cdot (bc + 6a^2 + 4ab^2)$,
d) $a \cdot (x + 5) + 5 \cdot (x + 5) = (x + 5) \cdot (a + 5)$,
e) $(x^3 + x^2) - (x + 1) \cdot x = x^2 \cdot (x + 1) - (x + 1) \cdot x = x \cdot x \cdot (x + 1) - (x + 1) \cdot x \cdot 1$
$= x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$.

Zadatak 19. *Primenom formula za kvadrat binoma i razliku kvadrata date polinome rastavi na proste činioce:*

a) $0,81x^2 - 0,25y^2 = (0,9x - 0,5y) \cdot (0,9x + 0,5y)$,
b) $(a + 2)^2 - 49 = (a + 2)^2 - 7^2 = (a + 2 - 7) \cdot (a + 2 + 7) = (a - 5) \cdot (a + 9)$,
c) $16x^2 - 24xy + 9y^2 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3y + (3y)^2 = (4x - 3y)^2$,
d) $(a - b)^2 + 4ab = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$,
e) $(a+2)^2-(a-1)^2 = (a+2-(a-1))\cdot(a+2+(a-1)) = (a+2-a+1)\cdot(a+2+a-1)$
$= 3 \cdot (2a + 1)$,

f) $a^4 - 8a^2 + 16 = (a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 4 + 4^2 = (a^2-4)^2,$
g) $x^4 - 16z^4 = (x^2)^2 - (4z^2)^2 = (x^2-4z^2)\cdot(x^2+4z^2) = (x^2-(2z)^2)\cdot(x^2+4z^2)$
$= (x-2z)\cdot(x+2z)\cdot(x^2+4z^2).$

Napomena: Binom $x^2+4z^2 = (x^2+(2z)^2)$ predstavlja zbir kvadrata, a on se ne može rastaviti na činioce u skupu realnih brojeva.

U slučaju da polinom nema takozvani zajednički monom, koji se može izvući pred zagradu, ali ga grupisanjem elemnata možemo dovesti na oblik u kojem se neki binom, trinom (polinom) može "izvući ipred zagrade", dolazimo do rešenja. Ovaj metod nazivamo **metod grupisanja**.

Zadatak 20. *Primenom metoda grupisanja date polinome rastavi na proste činioce:*

a) ***3x-3y-ax+ay***

I način, grupišemo prvi i drugi, i treći i četvrti član:

$$\begin{aligned}(3x-3y)+(-ax+ay) &= 3\cdot(x-y)+a\cdot(-x+y)\\ &= 3\cdot(x-y)-a\cdot(x-y)\\ &= (x-y)\cdot(3-a).\end{aligned}$$

II način, grupišemo prvi i treći, i drugi i četvrti član:

$$\begin{aligned}(3x-ax)+(-3y+ay) &= x\cdot(3-a)+y\cdot(-3+a)\\ &= x\cdot(3-a)-y\cdot(3-a)\\ &= (3-a)\cdot(x-y).\end{aligned}$$

b) ***6ax-9bx+8ay-12by***

I način, grupišemo prvi i drugi, i treći i četvrti član:

$$\begin{aligned}(6ax-9bx)+(8ay-12by) &= (3\cdot2\cdot a\cdot x-3\cdot3\cdot b\cdot x)+(2\cdot4\cdot a\cdot y-3\cdot4\cdot b\cdot y)\\ &= 3x\cdot(2a-3b)+4y\cdot(2a-3b)\\ &= (2a-3b)\cdot(3x+4y).\end{aligned}$$

II način, grupišemo prvi i treći, i drugi i četvrti član:

$$\begin{aligned}(6ax+8ay)+(-9bx-12by) &= (3\cdot2\cdot a\cdot x+2\cdot4\cdot a\cdot y)+(-3\cdot3\cdot b\cdot x-3\cdot4\cdot b\cdot y)\\ &= 2a\cdot(3x+4y)-3b\cdot(3x+4y)\\ &= (3x+4y)\cdot(2a-3b).\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}14xy+15xz-10x^2-21yz &= 2\cdot7\cdot x\cdot y+3\cdot5\cdot x\cdot z-2\cdot5\cdot x\cdot x-3\cdot7\cdot y\cdot z\\ &= 7y\cdot(2x-3z)+5x\cdot(3z-2x)\\ &= 7y(2x-3y)-5x\cdot(2x-3y)\\ &= (2x-3y)\cdot(7y-5x).\end{aligned}$$

U narednom delu ćemo razmotriti rastavljanje trinoma oblika $ax^2 + bx + c$. Potrebno je razmotriti i opisati rastavljanje trinoma $ax^2 + bx + c$ na činioce, u slučaju kada dati trinom ne predstavlja kvadrat nekog binoma.

Primer 22. *Rastaviti trinom $x^2 + 4x + 3$ na činioce.*

I način: *Pokušaćemo da od datog trinoma napravimo kvadrat binoma. U tom postupku zadržavamo najstariji i srednji član, a slobodan član modifikujemo prema potrebi.*

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + \boldsymbol{3} &= x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + \boldsymbol{4} \textbf{ - } \boldsymbol{1} \\ &= (x+2)^2 - 1^2 \\ &= (x+2-1) \cdot (x+2+1) \\ &= (x+1) \cdot (x+3). \end{aligned}$$

II način: *Prvilo za rastavljanje trinoma može se uočiti posmatrajući kako je taj trinom dobijen od proizvoda dva binoma. Zapravo krenućemo unazad. Na primeru $(x+1) \cdot (x+3) = x^2 + 3x + x + 3 = x^2 + 4x + 3$ možemo zaključiti da slobodan član 3, dobijamo množenjem slobodnih članova u proizvodu dva binoma 3 i 1 , dok srednji član trinoma $4x$ dobijamo sabiranjem članova $3x$ i x. Zaključujemo da su nam za rastav potrebna dva broja koja pri množenju daju vrednost slobodnog člana $(3 \cdot 1 = 3)$, a pri sabiranju daju kojeficijent uz srednji član $(3 + 1 = 4)$.*

Već smo zaključili da su u našem primeru traženi brojevi 3 i 1, pa član $4x$ predsravljamo u obliku zbira $3x + 1x$.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + \boldsymbol{3} &= x^2 + 3x + x + 3 \\ &= (x^2 + 3x) + (x+3) \\ &= x \cdot (x+3) + 1 \cdot (x+3) \\ &= (x+3) \cdot (x+1). \end{aligned}$$

III način: *Rastavljanjem polinoma drugog stepena, koji ima rastav u skupu celih brojeva, dobijamo proizvod oblika $(\square x \quad \square) \cdot (\square x \quad \square)$.*

Ponovo posmatramo isti polinom $x^2 + 4x + 3 = \boldsymbol{1} \cdot x^2 + 4x + \boldsymbol{3}$, i rastavljamo koeficijent uz njegov najstariji i slobodan član. $1 = 1 \cdot 1$ i $3 = 3 \cdot 1$. Prazna mesta u zagradama popunjavamo odgovarajućim činiocima, ali i dalje ostavljamo prazno mesto za znak broja. Ovaj primer čini jednostavnim to što su 1 i 3 prosti brojevi i imaju jedinstvenu faktorizaciju.

$(x \quad 1) \cdot (x \quad 3)$	*Množimo članove svaki, sa svakim ostavljajući mesto za znak.*
$x^2 \quad 3x \quad x \quad 3$	*Posmatramo član $4x$ i razmišljamo kako ga možemo dobiti od $3x$ i x. Zaključujemo da do njega dolazimo sabiranjem $3x$ i x pa će samim tim ispred oba člana stajati $+$.*
$x^2 + 3x + x + 3$	*Vratimo se na zagrade, i stavimo odgovarajući znak.*
$(x+1) \cdot (x+3)$	

U sledećim primerima razmotrićemo rastavljanje trinoma koji ne predstavljaju kvadrat nekog binoma i kod kojih koeficijent uz x^2 nije 1. Ovaj deo u osnovnom obrazovanju namenjen je naprednijim učenicima.

Primer 23. *Rastaviti na činioce trinom* $2x^2 + 7x + 6$.

Kao u prethodnom primeru, potrebno je da rastavimo koeficijent uz najstariji i slobodan član. Krećemo od

$$2x^2 + 7x + 6 = (\Box x \quad \Box) \cdot (\Box x \quad \Box),$$

pri čemu je neophodno popuniti praznine tako da proizvod prvih članova u binomima bude $2x^2$*, a proizvod poslednjih članova u binomima bude 6. Obzirom da se* 2 *rastavlja samo kao* $2 \cdot 1$ *imaćemo proizvod oblika*

$$(2x \quad \Box) \cdot (x \quad \Box).$$

Da bismo dobili pozitivan proizvod 6, činioci moraju biti, ili oba pozitivna, ili oba negativna. Budući da nam treba i pozitivan srednji član razmotrićemo pozitivne faktore broja 6*. U tom slučaju* 6 *možemo faktorisati kao* $1\cdot 6$, $6\cdot 1$, $2\cdot 3$ *i* $3\cdot 2$.

$$\begin{aligned}
&(2x+1)(x+6) = 2x^2 + 12x + 1x + 6 = 2x^2 + 13x + 6,\\
&(2x+6)(x+1) = 2x^2 + 2x + 6x + 6 = 2x^2 + 8x + 6,\\
&(2x+2)(x+3) = 2x^2 + 6x + 2x + 6 = 2x^2 + 8x + 6,\\
&(2x+3)(x+2) = 2x^2 + 4x + 3x + 6 = 2x^2 + 7x + 6.
\end{aligned}$$

U prva tri slučaja ne dobijamo odgovarajući srednji član, pa je jedino moguća poslednja fakrorizacija to jest $2x^2 + 7x + 6 = (2x+3)(x+2)$.

Primer 24. *Rastaviti na činioce trinom* $10x^2 - 9x - 1$.

Rastavimo koeficijent uz najstariji i slobodan član. Krećemo od

$$10x^2 - 9x - 1 = (\Box x \quad \Box) \cdot (\Box x \quad \Box),$$

i neophodno je popuniti praznine tako da proizvod prvih članova u binomima bude $10x^2$*, a proizvod poslednjih članova u binomima bude* -1*. Pošto se* -1 *rastavlja samo kao* $1 \cdot (-1)$ *što će uticati na znak srednjeg člana i imaćemo proizvod oblika*

$$(\Box x + 1) \cdot (\Box x - 1).$$

Da bismo dobili koeficijent 10 *uz* x^2, 10 *možemo faktorisati kao* $5 \cdot 2$, $2 \cdot 5$, $1 \cdot 10$ *i* $10 \cdot 1$.

$$\begin{aligned}
&(5x+1)(2x-1) = 10^2 - 5x + 2x - 1 = 10x^2 - 3x - 1,\\
&(2x+1)(5x-1) = 10x^2 - 2x + 5x - 1 = 10x^2 + 3x - 1,\\
&(1x+1)(10x-1) = 10x^2 - 1x + 10x - 1 = 10x^2 + 9x - 1,\\
&(10x+1)(1x-1) = 10x^2 - 10x + 1x - 1 = 10x^2 - 9x - 1.
\end{aligned}$$

Ako bismo razmotrili negativne faktore broja 10, $(-5) \cdot (-2)$, $(-2) \cdot (-5)$, $(-1) \cdot (-10)$ *i* $(-10) \cdot (-1)$ *izvlačenjem minusa ispred oba binoma u proizvodu, sveli bismo sve primere na prethodna* 4.

U prva tri slučaja ne dobijamo odgovarajući srednji član, pa je jedino moguća poslednja fakrorizacija tj. $10x^2 - 9x - 1 = (10x+1)(x-1)$.

Napomena: Primećujemo da u prethodnim primerima imamo faktorizaciju nad $\mathbb{Z}$. Navedeni polinomi su stepena 2 i imaju racionalne nule, pa ih je bilo moguće rastaviti ovom metodom.

Primer 25. *Rastaviti na činioce trinom* x^2+2x-1.

Ako bismo razmotrili ovaj primer, primetili bismo da pomenuti metod na njemu ne radi, jer on nema racionalne nule, pa se ne može faktorisati nad $\mathbb{Z}$ *i* $\mathbb{Q}$, *ali se može faktorisati nad* $\mathbb{R}$

Zadatak 21. *Kombinovanjem različitih metoda rastavi na proste činioce date polinome.*
Napomena: *Najpre pogledamo da li za sve monome postoje zajednički činioci koje možemo da izvučemo ispred zagrade, pa tek onda koristimo ostale metode.*

a) $5ab-5ab^3 = 5ab\cdot 1 - 5ab\cdot b^2 = 5ab\cdot(1^2-b^2) = 5ab\cdot(1-b)\cdot(1+b)$,

b)
$$\begin{aligned} 32a^2c-48abc+18b^2c &= 2c\cdot(16a^2-24ab+9b^2)\\ &= 2c\cdot((4a)^2-2\cdot 4a\cdot 3b+(3b)^2)\\ &= 2c\cdot(4a-3b)^2, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3a^3\ -a^2\ -27a\ +\ 9\ &= (3a^3-27a)+(-a^2+9)\\ &= 3a\cdot(a^2-9)-1\cdot(a^2-9)\\ &= (a^2-9)\cdot(3a-1)\\ &= (a^2-3^2)\cdot(3a-1)\\ &= (a-3)\cdot(a+3)\cdot(3a-1), \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 9\ -9a^2+12ab-\ 4b^2 &= 9-(9a^2-12ab+4b^2)\\ &= 9-((3a)^2-2\cdot 3a\cdot 2b+(2b)^2) = 3^2-(3a-2b)^2\\ &= (3-(3a-2b))\cdot(3+(3a-2b))\\ &= (3-3a+2b)\cdot(3+3a-2b). \end{aligned}$$

3.4.1 Faktorizacija zbira i razlike kubova

*** Faktorizacija zbira kubova ***

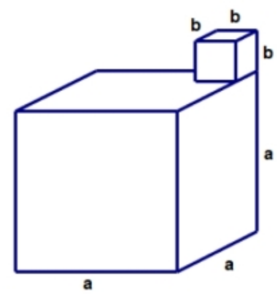
U prethodnom delu rastavljali smo na činioce kvadratne polinome. U ovom delu ćemo opisati, a samim tim i proširiti znanje na neke kubne polinome, to jest polinome trećeg stepena. Zbir kubova $a^3 + b^3$ predstavlja zbir dva broja podignuta na kub, odnosno treći stepen.

Obrazac za zbir kubova ima sledeći oblik:

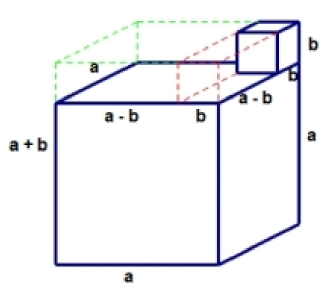
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Kao što smo formule za kvadrat binoma dokazai geometrijski, i ovde ćemo se poslužiti geometrijom kako bismo pokazali da formula za zbir kubova zaista važi. Prva asocijacija u geometrijskom smislu jeste zbir zapremina dve kocke.

$*$ $V = a^3 + b^3$
$*$ a^3 zapremina kocke stranice a,
$*$ b^3 zapremina kocke stranice b.



Da li se ova zapremina može izračunati na drugi način?



$*$ Od celokupne zapremine oduzećemo zapreminu dve docrtane prizme:

$V = a^2(a + b) - [ab(a - b) + b^2(a - b)]$
$V = a^2(a + b) - b(a - b)(a + b)$
$V = (a + b)(a^2 - b(a - b))$
$V = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Zadatak 22. *Primenom formule za zbir kubova rastavi polinom* $x^3 + 8$.

$$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - x \cdot 2 + 2^2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4).$$

Zadatak 23. *Primenom formule za zbir kubova rastavi polinom* $8x^3 + 27$.

$$8x^3 + 27 = (2x)^3 + 3^3 = (2x + 3)((2x)^2 - 2x \cdot 3 + 3^2) = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9).$$

Zadatak 24. *Primenom formule za zbir kubova rastavi polinom* $125x^3 + 64y^6$.

$$\begin{aligned}125x^3 + 64y^6 &= (5x)^3 + (4y^2)^3\\ &= (5x + 4y^2)[(5x)^2 - (5x) \cdot (4y^2) + (4y^2)^2]\\ &= (5x + 4y^2)(25x^2 - 20xy^2 + 16y^4).\end{aligned}$$

*** Faktorizacija razlike kubova ***

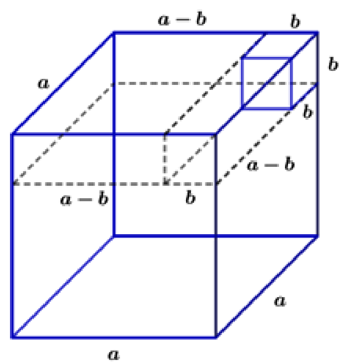
Koristeći izvedenu formulu za zbir kubova, algebarski vrlo lako dolazimo i do obrasca za razliku kubova.

$$a^3 - b^3 = a^3 + (-b^3) = (a + (-b))(a^2 - a \cdot (-b) + (-b)^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Obrazac za razliku kubova ima oblik:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Analogno dokazu za zbir kubova i ovo se može dokazati geometrijskim putem.



$*$ $V_1 = a^3$ zapremina kocke stranice a,
$*$ $V_2 = b^3$ zapremina kocke stranice b,
$*$ $V_1 - V_2$ jednaka je zbiru preostale tri zapremine sa slike.

$$\begin{aligned}V_1 - V_2 &= a^2(a-b) + ab(a-b) + b^2(a-b)\\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2).\end{aligned}$$

Zadatak 25. *Primenom formule za raliku kubova rastavi polinom* $125x^3 - 27$.

$$125x^3 - 27 = (5x)^3 - 3^3 = (5x-3)((5x)^2 + 5x \cdot 3 + 3^2) = (5x-3)(25x^2 + 15x + 9).$$

Zadatak 26. *Primenom formule za raliku kubova rastavi polinom* $x^5 - 64x^2$.

$$\begin{aligned}x^5 - 64x^2 &= x^2(x^3 - 64) = x^2(x^3 - 4^{3)}\\ &= x^2(x - 4)(x^2 + x \cdot 4 + 4^2)\\ &= x^2(x - 4)(x^2 + 4x + 16).\end{aligned}$$

Zadatak 27. *Primenom formule za raliku kubova rastavi polinom* $24x^4 - 3x$.

$$\begin{aligned}24x^4 - 3x &= 3x \cdot (8x^3 - 1) = 3x \cdot ((2x)^3 - 1^3)\\ &= 3x(2x - 1)((2x)^2 + 2x \cdot 1 + 1^2)\\ &= 3x(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1).\end{aligned}$$

3.5 Problemi u razumevanju pojma polinoma kod učenika

Učenici se sa nepoznatim vrednostima susreću u nižim razredima osnovne škole, ali i pored toga, upotreba nepoznatih u matematici kod njih stvara veliku konfuziju. Ukoliko im uvedemo i koeficijente polinoma pomoću slova a,b,c,. . . , a promenljive pomoću x,y,z..., tek tada postaju potpuno zbunjeni. Iz tog razloga im za koeficijente uvodimo realne brojeve, a promenljive označavamo malim latiničnim slovima engleske abecede.

Prva i česta greška koju učenici prave je sabiranje nesličnih monoma kao na primer $2x^3 + 4x^2 = 6x^5$. U velikom broju slučajeva ne shvataju da ne mogu sabirati različite pojmove, i baš iz tog razloga im je potrebno zadavati primere u kojima je dat zbir nesličnih monima, i naglasiti da se to dalje ne može sabirati.

Drugi veliki problem nastaje kada u sabiranju monoma i u rastavljanju datih polinoma na činioce, treba da primene zakon distributivnosti. Iako se i sa ovim zakonom sreću i u nižim razredima, njegova primena zadaje probleme.

Primer pogrešno sabiranih sličnih monoma: $3x^4 + 4x^4 = 7x^8$.
Tada proverimo koliko je $3 + 4$, za šta oni znaju da je 7. Zatim proverimo koliko je $3\bullet + 4\bullet$, na šta takođe daju tačan odgovor $7\bullet$. Zatim na istom primeru primenimo zakon distributivnosti $3\bullet + 4\bullet = (3 + 4)\bullet = 7\bullet$.

Sada se vratimo na prvobitni problem i primenimo distibutivni zakon na date monome. $3x^4 + 4x^4 = (3 + 4) \cdot x^4 = 7x^4$.

Treći problem predstavlja rastavljanje polinoma na činioce. Zato problem, kako rastaviti polinom $6a^2 + 9b$, svodimo na neki zadatak u realnom kontekstu. Na primer: "Na koliko najviše dece možemo podeliti 6 čokolada i 9 bombona, tako da svako dete dobije isti broj čokolada i bombona?"Grupisanjem slatkiša lako se dolazi do zaključka da se postojeći slatkiši mogu ravnopravno podeliti na tri deteta, i da će svako dete dobiti po 2 čokolade i 3 bombone. Crtamo na tabli radi još lakšeg razumevanja i zapisujemo odgovor:

6 čokolada + 9 bombona = $3 \cdot$ (2 čokolade + 3 bombone),

Vratimo se na naš problem kako rastaviti dati polinom, i rešavamo ga na isti način: $6a^2 + 9b = 3 \cdot (2a + 3b)$.

Još jedan čest primer pogrešnog rastavljanja polinoma:
$$2x^2y + 3xy + x = x \cdot (2xy + 3y).$$

U ovakvim primerima veoma je bitno da učenici proverom utvrde da ova jednakost nije tačna, tj. da njena leva i desna strana nisu jednake. Proverom, i množenjem polinoma na desnoj strani dobijaju $x \cdot (2xy + 3y) = 2x^2y + 3xy$ i uočavaju da na desnoj strani nedostaje član x. Nakon toga im treba postaviti pitanje: "Koji broj pomnožen brojem x daje rezultat x?"Učenici dolaze do zaključka da je to broj 1 i ispravljaju zadatak. U postavci zadatka, uz x nije stajao koeficijent, što podrazumeva koeficijent 1, njegovo dopisivanje učenicima u mnogome olakšava rešavanje zadatka.

$2x^2y + 3xy + \mathbf{1}x = x \cdot (2xy + 3y + 1)$.

Napomena: U zadacima u kojima primenjujemo zakon distributivnosti često kažemo da "izvlačimo zajednički činilac ispred zagrade". Obzirom da važi zakon komutativnosti svejedno je da li zajednički činilac pišemo ispred, ili iza zagrade.

Još jedan problem pri uočavanju sličnih monoma nastaje ukoliko promenljive nisu napsane istim redosledom.

Primer 26. *Među datim polinomima izdvoji one koji su slični!*
$3ab^2c^4$, $3abc$, $-7b^2ac^4$, $11ac^4$, $-0,5ab^2c^4$, $-2b^2c^4$.

Učenici odmah, i gotovo bez greške uoče da su $3ab^2c^4$ i $-0,5ab^2c^4$ slični monomi, ali za $-7b^2ac^4$ kažu da im nije sličan. Tada ih je neophodno podsetiti da važi zakon komutativnosti i da se $-7b^2ac^4$ može zapisati u obliku $-7ab^2c^4$, odakle je jasno da su slični monomi zapravo $3ab^2c^4$, $-0,5ab^2c^4$ i $-7ab^2c^4$.

3.6 Primena polinoma

Poznato je da polinomi imaju veoma značajnu primenu u svim oblastima matematike, u hemiji, fizici, astronomiji, meteorologiji, ekonomiji i informatici.

3.6.1 Izračunavanje brojevne vrednosti izraza

Koristeći polinomijalne identite, odnosno razliku kvadrata i kvadrat binoma, kao i distributivni zakon, vrlo često na lakši način možemo doći do vrednosti datog izraza.

Primer 27. *Izračunaj brojevnu vrednost izraza primenom zakona distributivnosti.*

a) $13,35 \cdot 16,58 + 3,42 \cdot 13,35 = 13,35 \cdot (16,58 + 3,42) = 13,35 \cdot 20 = 267$,
b) $214,8 \cdot 11,8 + 214,8 \cdot 3,2 - 5 \cdot 214,8 = 214,8 \cdot (11,8 + 3,2 - 5) = 214,8 \cdot 10 = 2148$.

Primer 28. *Izračunaj brojevnu vrednost izraza primenom razlike kvadrata.*

a) $225^2 - 75^2 = (225 - 75) \cdot (225 + 75) = 150 \cdot 200 = 30000$,
b) $775,35^2 - 224,65^2 = (775,35 - 224,65) \cdot (775,35 + 224,65)$
$= 550,7 \cdot 1000 = 550700$,
c) $(3\sqrt{5} - 6) \cdot (3\sqrt{5} + 6) = (3\sqrt{5})^2 - 6^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{5})^2 - 36 = 9 \cdot 5 - 36 = 45 - 36 = 9$.

Primer 29. *Izračunaj brojevnu vrednost izraza primenom kvadrata binoma.*

a) $102^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$,
b) $97^2 = (100-3)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10000 - 600 + 9 = 9409$,
c) $123^2 - 2 \cdot 123 \cdot 43 + 43^2 = (123-43)^2 = 80^2 = 6400$.

3.6.2 Primena rastavljanja polinoma pri rešavanju jednačina

Bitno je napomenuti šta su koreni, to jest nule nekog polinoma. Nula polinoma P je vrednost promenljive x za koju je $P = 0$, drugim rečima rešavanjem jednačine $P = 0$ dobijamo nule tog polinoma.

Zadatak 28. *Reši jednačine:*

a) $3x^3 + 2x^2 = 0$
$3x^3 + 2x^2 = x^2 \cdot (3x+2)$
$x^2 \cdot (3x+2) = 0$
$x^2 = 0$ *ili* $3x + 2 = 0$
$x = 0$ *ili* $x = -\frac{2}{3}$.

b) $16x^2 - 5 = 0$
$16x^2 - 5 = (4x)^2 - (\sqrt{5})^2 = (4x - \sqrt{5}) \cdot (4x + \sqrt{5})$
$(4x - \sqrt{5}) \cdot (4x + \sqrt{5}) = 0$
$(4x - \sqrt{5}) = 0$ *ili* $(4x + \sqrt{5}) = 0$
$x = \frac{\sqrt{5}}{4}$ *ili* $x = -\frac{\sqrt{5}}{4}$.

c) $a^2 - a + 0,25 = 0$
$a^2 - a + 0,25 = a^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot a + (0,5)^2 = (a - 0,5)^2$
$(a - 0,5)^2 = 0$
$a = 0,5$.

d) $x^2 - 6x - 7 = 0$
$$x^2 - 6x - 7 = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 - 7 = (x^2 - 6x + 3^2) - 9 - 7 = (x-3)^2 - 16$$
$$= (x-3)^2 - 4^2 = (x-3-4) \cdot (x-3+4) = (x-7) \cdot (x+1)$$
$(x-7) \cdot (x+1) = 0$
$(x-7) = 0$ *ili* $(x+1) = 0$
$x = 7$ *ili* $x = -1$.

e) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

Najpre moramo rastaviti na činioce polinom $4x^2 - 3x - 1$. *Primenjujemo već opisan postupak, polazeći od:*
$$4x^2 - 3x - 1 = (\Box x \quad \Box) \cdot (\Box x \quad \Box),$$

Popunjavamo praznine tako da proizvod prvih članova u binomima bude $4x^2$*, a proizvod poslednjih članova u binomima bude* -1*. Obzirom da se* -1 *rastavlja samo kao* $1 \cdot (-1)$ *imaćemo proizvod oblika*

$$(\square x + 1) \cdot (\square x - 1).$$

Da bismo dobili koeficijent 4 *uz* x^2*,* 4 *možemo faktorisati kao* $2 \cdot 2$*,* $1 \cdot 4$ *i* $4 \cdot 1$*.*

$$(2x + 1)(2x - 1) = 4x^2 - 2x + 2x - 1 = 4x^2 - 1,$$
$$(1x + 1)(4x - 1) = 4x^2 - 1x + 4x - 1 = 4x^2 + 3x - 1,$$
$$(4x + 1)(1x - 1) = 4x^2 - 4x + 1x - 1 = 4x^2 - 3x - 1.$$

Ako bismo razmotrili negativne faktore broja 4*,* $(-2) \cdot (-2)$*,* $(-1) \cdot (-4)$ *i* $(-4) \cdot (-1)$ *izvlačenjem minusa ispred oba binoma u proizvodu, sveli bismo sve primere na prethodna* 3*.*

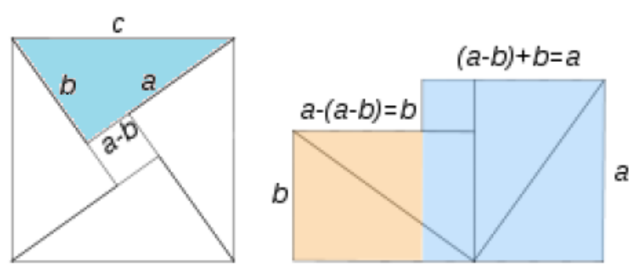
U prva dva slučaja ne dobijamo odgovarajući srednji član, pa je jedino moguća poslednja fakrorizacija to jest $4x^2 - 3x - 1 = (4x + 1)(x - 1)$*.*

Sada se vraćamo na rešavanje polazne jednačine:

$$(4x + 1) \cdot (x - 1) = 0$$
$$(4x + 1) = 0 \quad \textit{ili} \quad (x - 1) = 0$$
$$x = -\tfrac{1}{4} \quad \textit{ili} \quad x = 1.$$

3.6.3 Primena polinoma u dokazivanju Pitagorine teoreme

Jedan od dokaza Pitagorine teoreme potiče iz XII veka, od čuvenog indijskog matematičara Bhaskara, koji je sastavio četiri podudarna trougla. Hipotenuza tih trouglova jednaka je stranici c, dok duže katete b tih trouglova obrazuju unutrašnji kvadrat čija je stranica dužine $a - b$.



$$c^2 = 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b + (a - b)^2$$
$$c^2 = 2 \cdot a \cdot b + a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

4 Zaključak

Imajući u vidu da polinomi zauzimaju mnogo veći prostor za razmatranje, u ovom radu predstavljeno je njihovo zasnivanje, uvedeni su osnovni pojmovi algebre. Definisani su i obrađeni prsteni polinoma sa svojim bitnim osobinama, a zatim je izvršena analiza školske nastavu o polinomima (pojam, operacije, polinomijalni identiteti, faktorizacija, kvadratne jednačine i primene) po sadržaju, obimu, redosledu i metodičkom pristupu u poređenju sa sadržajem koji je opisan u prvom delu rada.

Posebna pažnja posvećena je školskoj nastavi o polinomima, gde je sistematično za svaku operaciju nad njima predloženo nekoliko načina rada i data mogućnost izbora metode koja je čitaocu najprihvatljivija.Time bi ovaj rad mogao biti koristan u savladavanju pojma polinoma i njegovih osnvnih operacija. Osvrćući se na nastavu bitno je omogućiti učenicima da predlažu i razvijaju svoje ideje za rešavanje problema. Potrebno je uraditi što veći broj različitih tipova zadataka i učenicima predočiti nekoliko načina rešavanja. Iako je neophodno zapamtiti veliki broj činjenica, nipošto ne treba insistirati na pukom usvajanju šablona, već podsticati učenike na razmišljanje i samostalno donošenje zaključaka. Važno je od samog početka podsticati učenike na induktivno mišljenje, to jest na uopštavanje postupaka iz konkretnih primera.

Proučavanjem polinoma na višem nivou, njihovih zakonitosti, njima odgovarajućih nejednakosti, postepeno ulazeći u suštinu različitih dokaza, kao i rešavanjem problema, svaki učenik može pored stečenog znanja, poneti i iskustvo koje je svojstveno algebri – saznanje da je ova oblast predivna kompozicija koju harmonično izvodi čitav orkestar algebarskih zakonitosti.

Ako napravimo paralelu između prvog i drugog dela rada, možemo uočiti da je u delu o školskoj nastavi definisan pojam polinoma, uvedene su vrste polinoma i osnovne operacije nad njima, a sve to potkrepljeno je primerima. Stvorena je predstava i osnov o temi kojom se bavimo, na nivou prihvatljivom uzrastu kome je namenjena. U prvom delu rada, delu o visokoškolskom obrazovanju o polinomima, navodimo konkretnije definicije, tvrđenja i teoreme koje i dokazujemo. Iste pojmove preciznije definišemo, takodje potkrepljujemo primerima, ali i ilustrujemo njihov dokaz.

U oba dela bavili smo se faktorizacijom polinoma, gde smo u prvom delu akcenat stavili na Euklidov algoritam, za pronalaženje najvećeg zajedničkog delioca datih polinoma, dok smo u drugom delu vršili faktorizaciju polinoma na proste činioce, sada stavljajući akcenat na polinome drugog i trećeg stepena, jer se to gradivo obrađuje u školskoj nastavi. U prvom delu obradili smo faktorizaciju razlike n-tih stepena i zbira n-tih stepena za neparno n, kao i Binomnu formulu sa njenim dokazom, a u drugom delu smo to radili na nešto nižem nivou. Tu smo dali obrasce za polinomijalne identitete - razliku kvadrata, zbir i razliku kubova, kvadrat binoma. Ilustorvali smo ih i dokazali uz pomoć geometrije.

U delu o školskoj nastavi rađeno je nad $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Z}$, dok je u prvom delu opštije prikazano i rađeno nad K - komutativnim prstenom sa jedinicom. Prsten koeficijenata igra važnu ulogu i utiče na pitanje faktorizacije kao i na nule datog polinoma. Tako smo u radu mogli primetiti primere koji se ne mogu faktorisati nad $\mathbb{Z}$ i/ili $\mathbb{Q}$, a mogu nad $\mathbb{R}$.

Ako još malo analiziramo paralelizam koji smo istakli u radu, možemo doći do zaključka da postoji analogija sa rešavanjem konstruktivnih zadataka iz geometrije, prolazeći kroz sve četiri faze konstrukcije. Ono što se u školi radi o polinomima bi bila analiza, a ono što se radi na fakultetu su konstrukcija, dokaz i diskusija. U ovom paralelizmu pitanje jedinstvenosti možemo poistovetiti sa četvrtom fazom konstrukcije, to jest diskusijom.

Literatura

[1] Udžbenik iz matematike za sedmi razred Osnovne škole - Nebojša Ikodinović, Sladjana Dimitrijević. Klett, Beograd, 2016.

[2] Zbirka zadataka iz matematike sa rešenjima, za sedmi razred Osnovne škole- Sanja Milojević, Nenad Vulović, Klett, Beograd, 2015.

[3] Matematika za sedmi razred Osnvne škole - Branko Jevremović, Svetozar Milić, Jovan Ćuković, Škola plus, Beograd 2009.

[4] Beginning and Intermediate Algebra Third Edition - Julie Miller, Molly O'Neill, Nancy Hyde, McGraw-Hil Publishing Company 2011.

[5] Intermediate Algebra Second Edition - Julie Miller, Molly O'Neill, Nancy Hyde, McGraw-Hil Publishing Company, 2008.

[6] Algebra, Gojko Kalajdžic, Matematički fakultet, Beograd 2004.

[7] Linearna algebra i analitička geometrija, Aleksandar Lipkovski, Zavod za udžbenike, Beograd 2007.