Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Master rad

Tema: Primena rekurzivnih relacija u rešavanju kombinatornih problema

Student: Milica Savić

Mentor: dr Tanja Stojadinović

Beograd,
2020.

Master rad

Milica Savić

8. jun 2020.

Sadržaj

1 Uvod

Jedna važna i vrlo primenljiva metoda u kombinatorici su rekurzivne relacije. Rekurzivna relacija je formula pomoću koje se izražava n-ti član nekog niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ pomoću nekoliko prethodnih članova. Rešavajući razne kombinatorne probleme, primećujemo da se pojedine rekurzivne relacije pojavljuju veoma često. Zbog toga su rešenja tih relacija važni brojevi u kombinatorici i imaju posebna imena.

U drugom poglavlju ovog rada data je definicija i nekoliko jednostavnih primera rekurzivnih relacija.

Treće poglavlje sadrži par primera koji ilustruju kako se rekurzivne relacije mogu koristiti u rešavanju kombinatornih problema, među njima su podela ravni pravama i Hanojska kula.

U četvrtom poglavlju opisan je način kojim se rešavaju linearne homogene i nehomogene rekurzivne relacije sa konstantnim koeficijentima.

U petom poglavlju definisana je triangulacija poligona i rekurzivna relacija koja je opisuje.

Šesto poglavlje sadrži Fibonačijeve brojeve, rekurzivnu relaciju koja ih opisuje, identitete vezane za ove brojeve i njihovo pojavljivanje u svetu oko nas.

U sedmom poglavlju data je rekurzivna relacija za Katalanove brojeve, i primeri u kojima se ti brojevi pojavljuju kao rešenja.

Osmo poglavlje sadrži Stirlingove brojeve prve i druge vrste, rekurzivne relacije koje zadovoljavaju ti brojevi i zadatke u kojima se oni pojavljuju kao rešenja.

U devetom poglavlju su definisani Belovi brojevi i rekurzivna relacija koju zadovoljavaju.

Deseto poglavlje opisuje particije broja.

2 O rekurzivnim relacijama

Osnovni zadatak enumerativne kombinatorike je odrediti broj elemenata svakog skupa iz posmatrane familije konačnih skupova $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, odnosno, potrebno je odrediti niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (gde je $a_n = |A_n|$).
Često je prvi korak u rešavanju tog problema pronalaženje formule koja opisuje vezu između broja a_n i nekoliko njegovih prethodnika $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$. Ako takva formula važi za sve $n \geq k$, dobili smo ***rekurzivnu (rekurentnu) relaciju*** kojom smo opisali niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Formalno, ako je $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ i ako za sve $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$ važi

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$$

kažemo da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rešenje rekurzivne relacije k-tog reda.

Rekurzivne relacije koristimo da odredimo broj svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, da prebrojimo sve podskupove skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ sa tačno k elemenata i u rešavanju mnogih drugih problema.

Primer 2.1. Faktorijel broja n, u oznaci $n!$, definišemo kao proizvod prvih n prirodnih brojeva, tj. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (uzima se da je $0! = 1$). Posmatrajmo niz faktorijela, $a_n = n!$

$$0!\,, 1!\,, 2!\,, 3!\,, \ldots$$

Ovaj niz zadovoljava rekurzivnu relaciju

$$a_n = n \cdot a_{n-1},$$

za $n \geq 1$. Možemo i obratno, ako imamo ovu relaciju i početni uslov $a_0 = 1$ da nađemo sve članove niza ponavljajući postupak iteracije:

$$a_n = n \cdot a_{n-1} = n \cdot (n-1) \cdot a_{n-2} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_{n-3} = \ldots$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_0 = n!$$

$\diamond$

Primer 2.2. *Broj k-točlanih podskupova.* Broj svih k-točlanih podskupova skupa od n elemenata je
$$\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Dokaz. Neka je S proizvoljan skup sa n elemenata. Skup svih k-točlanih podskupova od S označimo sa $\binom{S}{k}$. Kako svi n-točlani skupovi imaju isti broj k-točlanih podskupova, taj broj označimo sa
$$\binom{n}{k} = \binom{|S|}{k} = \left|\binom{S}{k}\right|.$$

Prazan skup je jedini podskup od S koji ima 0 elemenata, a celi skup S je jedini podskup sa n elemenata. Zato je $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$.

Da bismo odredili broj $\binom{n}{k}$ za svaki k, posmatrajmo skup
$$P = \{(x, A) : A \in \binom{S}{k}, x \in A\}.$$
Broj elemenata u skupu P prebrojimo na dva načina:

- Ako prvo odaberemo $x \in S$ (to možemo uraditi na n načina), skup A koji sadrži x treba dopuniti sa $k-1$ elementom od $n-1$ preostalih iz $S\backslash\{x\}$. To možemo uraditi na $\binom{n-1}{k-1}$ način.

- Ako prvo biramo skup A, to možemo uraditi na $\binom{n}{k}$ načina. Sada, jedan element $x \in A$ možemo odabrati na k načina.

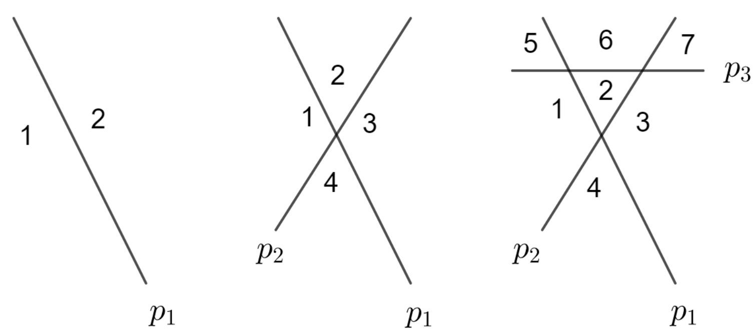
Tako smo dobili da je
$$n\binom{n-1}{k-1} = |P| = k\binom{n}{k},$$
pa važi sledeća rekurzivna relacija:
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$
Ako ovu relaciju primenimo k puta, dobijamo da je:
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\binom{n-k}{0} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$
$\square$

3 Primeri rekurzivnih relacija

Sa nekoliko primera ilustrovaćemo kako se rekurzivne relacije mogu koristiti u rešavanju kombinatornih problema.
One su korisne i u zadacima iz kombinatorne geometrije. Evo jednog od najjednostavnijih primera.

Primer 3.1. Na koliko oblasti n $(n \geq 0)$ komplanarnih pravih u "opštem položaju" dele ravan kojoj pripadaju? Napomenimo da se pod "opštim položajem" pravih podrazumeva da među njima nema paralelnih i nikoje tri prave se ne seku u istoj tački.

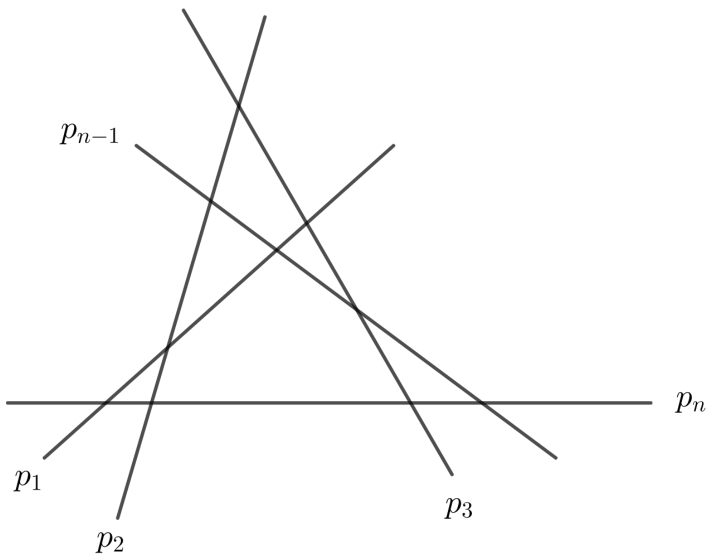
Rešenje. Označimo sa a_n broj oblasti na koje n pravih u "opštem položaju" dele ravan. Jasno je da kad nema nijedne prave, cela ravan čini jednu oblast, a da jedna prava deli ravan na dve oblasti.



Slika 1: Podela ravni sa jednom, dve i tri prave

Prema tome, uzećemo da je $a_0 = 1$ i $a_1 = 2$. Isto tako jasno je da je $a_2 = 4$ i $a_3 = 7$ (slika 1).
Primećujemo da kada dodamo pravu p_2 ona deli pravu p_1 na dve poluprave, a svaka od ovih polupravih deli svaku od dve postojeće oblasti na dva dela (dobijamo četiri oblasti, odnosno dve nove oblasti), tako da je $a_2 = a_1 + 2$.
Vidimo da kad se doda prava p_3 ona seče dve postojeće prave u različitim tačkama (jer sve prave moraju biti u "opštem položaju") tako da je prava p_3 podeljena ovim presečnim tačkama na tri dela i svaki od ovih delova deli neku od postojećih oblasti na dve nove oblasti. To znači da nova prava dodaje tri nove oblasti (sa slike 1 to su oblasti 5, 6 i 7), što znači da je $a_3 = a_2 + 3$.

Uopšteno, pretpostavimo da imamo $n-1$ pravu u "opštem položaju" i da one dele ravan na a_{n-1} oblasti.



Slika 2: Podela ravni sa n pravih

Dodavanjem još jedne, n-te prave, ta dodata prava ima $n-1$ presečnu tačku sa postojećim pravim, i na taj način je podeljena na n delova (slika 2). Kako svaki od tih delova deli postojeću oblast u kojoj se nalazi na dva dela, dobili smo n novih oblasti.
Ukupno, $a_n = a_{n-1} + n, \qquad a_0 = 1, a_1 = 2.$
Ispisujući rekurzivnu relaciju $a_n = a_{n-1}+n$ redom za $n, n-1, n-2, \ldots$, imamo:

$$\left.\begin{array}{l}
a_n = \cancel{a_{n-1}} + n \\
\cancel{a_{n-1}} = \cancel{a_{n-2}} + n - 1 \\
\cancel{a_{n-2}} = \cancel{a_{n-3}} + n - 2 \\
\qquad . \\
\qquad . \\
\qquad . \\
\cancel{a_3} = \cancel{a_2} + 3 \\
\cancel{a_2} = \cancel{a_1} + 2 \\
\cancel{a_1} = a_0 + 1
\end{array}\right\} +$$

Znajući da je $a_0 = 1, a_1 = 2$, izjednačujući zbir levih i desnih strana, dobijamo da je

$$a_n = 1 + (1 + 2 + \ldots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Za postupak iteracije koji smo upravo pomenuli koristi se i termin *teleskopiranje.* $\diamond$

Primer 3.2. Permutacija $a_1 a_2 \ldots a_n$ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ naziva se deranžman ako je $a_i \neq i$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$.

Označimo sa D_n broj deranžmana skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Neka je

$$a_1 a_2 \ldots a_n$$

deranžman skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, gde je $n \geq 2$. Mesto a_1 u $a_1 a_2 \ldots a_n$ može zauzeti bilo koji od gornjih brojeva izuzev broja 1, pa ima $n - 1$ mogućnosti za popunu prvog mesta. Neka je $a_1 = k$ $(k \neq 1)$.Tada postoje dve vrste deranžmana: Oni kod kojih je $a_k = 1$ i oni kod kojih je $a_k \neq 1$. Ako je $a_k = 1$, onda ostaje $n - 2$ elementa od kojih treba napraviti deranžmane, a takvih ima D_{n-2}.
Ako je $a_k \neq 1$, onda treba permutovati elemente $1, 2, ..., k-1, k+1, ..., n$ tako da je $a_k \neq 1$ i nijedan od ostalih elemenata nije na svom mestu. k-to mesto možemo za trenutak smatrati da je prirodno mesto elementa 1, pa je jasno da je reč o broju deranžmana od $n - 1$ elemenata, a taj broj je D_{n-1}.
Došli smo do rekurzivne relacije za deranžmane

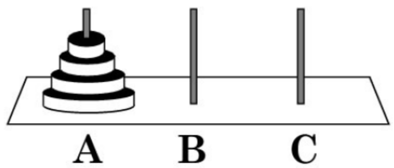
$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

uz početne uslove $D_2 = 1$ i $D_3 = 2$.
Koristeći ovu relaciju indukcijom se dokazuje da je

$$D_n = n!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!}).$$

$\diamond$

Primer 3.3. Zagonetka poznata pod imenom Hanojska kula pominje se prvi put 1883. godine. Sastoji se u sledećem: na jedan štap nanizano je n diskova različite veličine, tako da je prvi odozdo najveći, a svaki sledeći je manji od onog ispod njega. Na raspolaganju su nam još dva štapa (slika 3).



Slika 3: Hanojska kula

Treba da premestimo sve diskove sa štapa A na štap C, pri tome možemo koristiti i štap B. Jedan korak sastoji se u premeštanju jednog diska sa jednog štapa na neki drugi. Pri tome ni u jednom trenutku, ni na jednom štapu ne sme da se nađe veći disk iznad manjeg. Sa koliko najmanje koraka možemo ostvariti premeštanje svih diskova?

Rešenje. Označimo traženi minimalan broj koraka sa h_n. Očigledno je $h_1 = 1$ i $h_2 = 3$. Da bismo premestili najveći disk sa štapa A na štap C, moramo prethodno složiti Hanojsku kulu od preostalih $n-1$ diskova na štap B, koristeći pri tome štap C. Minimalan broj koraka potrebnih za to premeštanje je h_{n-1}. Posle toga potreban je jedan korak za premeštanje najvećeg diska na štap C i najmanje h_{n-1} koraka za premeštanje $n-1$ diskova sa štapa B na štap C, koristeći štap A. Traženi broj zadovoljava rekurzivnu relaciju

$$h_n = 2h_{n-1} + 1.$$

Ispišimo rekurzivnu relaciju redom za $n, n-1, n-2, ...$ i pomnožimo redom sa $1, 2, \ldots, 2^{n-2}, 2^{n-1}$, imamo da je:

$$\left.\begin{array}{l}
h_n = 2h_{n-1} + 1 / \cdot 1 \\
h_{n-1} = 2h_{n-2} + 1 / \cdot 2 \\
h_{n-2} = 2h_{n-3} + 1 / \cdot 2^2 \\
\qquad \cdot \\
\qquad \cdot \\
\qquad \cdot \\
h_3 = 2h_2 + 1 / \cdot 2^{n-3} \\
h_2 = 2h_1 + 1 / \cdot 2^{n-2} \\
h_1 = 1 / \cdot 2^{n-1}
\end{array}\right\} +$$

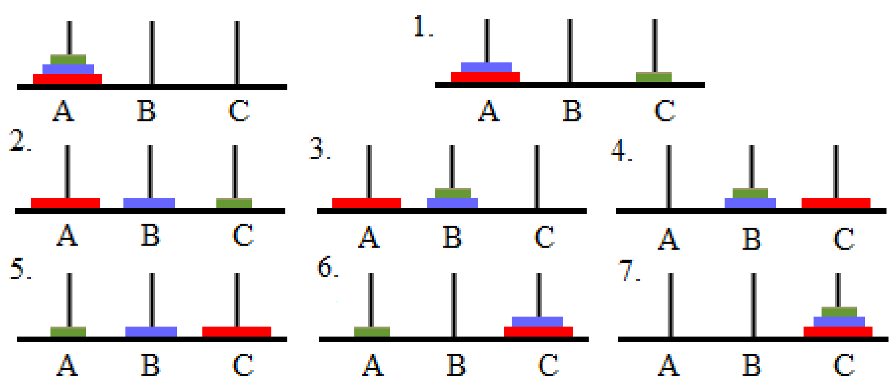
Teleskopirajući dobijamo da je

$$h_n = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-3} + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

$\diamond$

Zanimljivost: Poznati matematičar i popularizator matematike Rouz Bol[1] u svojoj knjizi *Mathematicall Recreations and Essays* navodi legendu, prema kojoj je Bog pri stvaranju sveta, postavio u jednom hramu u Benaresu Hanojsku kulu sa 64 zlatna diska, a kaluđeri su istog trenutka počeli da premeštaju diskove, prema pravilima koje smo gore naveli. Prema legendi, završetak premeštanja značiće i kraj sveta, koji će u istom trenutku iščeznuti, uz strašnu grmljavinu i ostalu scenografiju primerenu tom događaju.
Na osnovu gore izvedene opšte formule, broj prebacivanja zlatnih diskova u hramu u Benaresu je $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615\; s \approx 585\,000\,000\,000$ godina.

Sledeća slika prikazuje korake koji su potrebni za premeštanje tri diska sa štapa A na štap C.



Slika 4: Premeštanje tri diska sa štapa A na štap C

[1]Walter William Rouse Ball (1850-1925) - britanski matematičar i pravnik

4 Linearne rekurzivne relacije sa konstantnim koeficijentima

Nažalost, ne postoji algoritam koji opisuje kako se rešava proizvoljna rekurzivna relacija. Postoje rekurzivne relacije koje uopšte nije moguće rešiti, odnosno, nije moguće naći eksplicitnu formulu za n-ti član posmatranog niza.

4.1 Linearne homogene rekurzivne relacije sa konstantnim koeficijentima

Pokazaćemo da za jednu klasu rekurzivnih relacija postoji jednostavan algoritam kojim se dobijaju sva rešenja tih relacija.

Definicija 4.1. Linearna homogena rekurzivna relacija k-tog reda sa konstantnim koeficijentima je relacija oblika

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}, \tag{4.1}$$

gde je $n \geq k$, konstante $c_1, c_2, ..., c_k$ su realni brojevi[2] i važi $c_k \neq 0$, jer se u suprotnom (4.1) svodi na rekurzivnu relaciju nižeg reda.

Napomena 4.1. Objasnićemo zašto se ovakve rekurzivne relacije nazivaju ovako "jednostavno".

a) Reč *linearna* znači da se u relaciji (4.1) pojavljuju samo prvi stepeni brojeva a_n. Ne pojavljuju se stepeni a_n^k za $k > 1$, niti proizvodi $a_n a_m$. Posledica linearnosti je činjenica:

Ako su nizovi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rešenja relacije (4.1), tada je i niz $(a_n + a'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rešenje te relacije.

b) Reč *homogena* u imenu znači da za relaciju važi:
Ako je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rešenje relacije (4.1), tada je za sve $\lambda \in \mathbb{R}$ i niz $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ takođe rešenje te relacije.

c) Kažemo da je relacija (4.1) *rekurzivna relacija k-tog reda* zato što je, za

[2] U svim primerima koje budemo posmatrali koeficijenti su realni brojevi. Ovakve relacije u kojima su koeficijenti kompleksni rešavaju se na sličan način.

sve $n \geq k$, član a_n određen vrednostima k prethodnih članova.

d) Koeficijenti uz $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$ u relaciji (4.1) su realni brojevi, dakle *konstante* koje ne zavise od n.

Napomena 4.2. Ako su dva niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rešenja relacije (4.1) i ako za sve $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ važi $a_i = b_i$ tada su ti nizovi jednaki. Dva rešenja relacije (4.1) koja se podudaraju na prvih k mesta su jednaka.

Sada ćemo opisati kako se mogu odrediti sva rešenja relacije (4.1).

Napomena 4.3. Pretpostavimo da je rešenje te relacije niz oblika $a_n = \alpha^n$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Uvrštavanjem $a_n = \alpha^n$ u (4.1) dobijamo

$$\alpha^n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\alpha^{n-2} + \ldots + c_k\alpha^{n-k} /: \alpha^{n-k}$$

$$\alpha^k = c_1\alpha^{k-1} + c_2\alpha^{k-2} + \ldots + c_k,$$

zaključujemo da je broj α rešenje jednačine

$$x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \ldots - c_{k-1}x - c_k = 0. \tag{4.2}$$

Jednačina (4.2) se naziva *karakteristična jednačina* polazne rekurzivne relacije (4.1). To je jednačina k-tog stepena, koja ima k korena. Za te korene kažemo da su *karakteristični koreni* rekurzivne relacije (4.1). Ti koreni ne moraju svi biti različiti, ali su svi različiti od nule (jer je $c_k \neq 0$).

Primetimo da važi i obrnuto:
Ako je λ rešenje karaktristične jednačine, tada je niz $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rešenje jednačine (4.1).
Ako su λ i μ rešenja jednačine (4.2), na osnovu a) i b) iz napomene 4.1, možemo zaključiti da je i niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definisan sa $a_n = A \cdot \lambda^n + B \cdot \mu^n$ rešenje[3] polazne rekurzivne relacije (4.1).

Slučajeve kad su koreni različiti i kada među njima ima jednakih razmatraćemo odvojeno.

[3]Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je linearna kombinacija rešenja $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

4.1.1 Različiti koreni

Teorema 4.1. *Neka je data homogena linearna rekurzivna relacija sa konstantnim koeficijentima*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

i neka je

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

njena karakteristična jednačina. Ako ta jednačina ima k različitih korena $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, sva rešenja date rekurzivne relacije su oblika:

$$a_n = C_1 \cdot \alpha_1^n + C_2 \cdot \alpha_2^n + ... + C_k \cdot \alpha_k^n. \tag{4.3}$$

Dokaz. Već smo u napomeni 4.3 pokazali da su nizovi dati sa

$$a_n^{(1)} = \alpha_1^n, a_n^{(2)} = \alpha_2^n, ..., a_n^{(k)} = \alpha_k^n,$$

i sve njihove linearne kombinacije $C_1 \cdot \alpha_1^n + C_2 \cdot \alpha_2^n + ... + C_k \cdot \alpha_k^n$ rešenja posmatrane rekurzivne relacije.

Pokažimo još da su baš sva rešenja posmatrane rekurzivne relacije tog oblika. Neka je niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ proizvoljno rešenje, tj. za sve $n \in \mathbb{N}, n \geq k$ važi

$$f_n = c_1 f_{n-1} + c_2 f_{n-2} + \cdots + c_k f_{n-k}.$$

Mi tražimo koeficijente $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ tako da za sve $n \in \mathbb{N}_0$ važi

$$f_n = \lambda_1 \cdot \alpha_1^n + \lambda_2 \cdot \alpha_2^n + \ldots + \lambda_k \cdot \alpha_k^n.$$

Uslov da se f_n i $\lambda_1 \cdot \alpha_1^n + \lambda_2 \cdot \alpha_2^n + \ldots + \lambda_k \cdot \alpha_k^n$ podudaraju za $n = 0, 1, 2, ..., k-1$ se može zapisati kao sistem linearnih jednačina:

$$\left.\begin{array}{lllll}
\lambda_1 & + \lambda_2 & + ... + \lambda_k & = f_0 \\
\lambda_1 \cdot \alpha_1 & + \lambda_2 \cdot \alpha_2 & + ... + \lambda_k \cdot \alpha_k & = f_1 \\
\lambda_1 \cdot \alpha_1^2 & + \lambda_2 \cdot \alpha_2^2 & + ... + \lambda_k \cdot \alpha_k^2 & = f_2 \\
\vdots & \vdots & \qquad \vdots & \quad \vdots \\
\lambda_1 \cdot \alpha_1^{k-1} & + \lambda_2 \cdot \alpha_2^{k-1} & + ... + \lambda_k \cdot \alpha_k^{k-1} & = f_{k-1}
\end{array}\right\} (*)$$

Realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ koje tražimo su rešenja ovog sistema jednačina.

Sistem (*) će imati jedinstveno rešenje akko $D \neq 0$. Determinanta ovog sistema je dobro poznata Vandermondova determinanta.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Kako su sva rešenja karakteristične jednačine različita važi $D \neq 0$, pa posmatrani sistem jednačina ima jedinstvena rešenja $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$.
Zbog toga su $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ i $(\lambda_1 \cdot \alpha_1^n + \lambda_2 \cdot \alpha_2^n + ... + \lambda_k \cdot \alpha_k^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dva rešenja posmatrane rekurzivne relacije, koja se podudaraju za $n = 0, 1, ..., k-1$.
Na osnovu napomene 4.2 zaključujemo da je

$$f_n = \lambda_1 \cdot \alpha_1^n + \lambda_2 \cdot \alpha_2^n + ... + \lambda_k \cdot \alpha_k^n$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Zadatak 4.1. Rešiti rekurzivnu relaciju

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$$

ako je

$$a_1 = 1, a_2 = 7.$$

Rešenje. Karakteristična jednačina ove rekurzivne relacije je

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1, x_2 = \frac{4+2}{2} = 3,$$

a karakteristični koreni su $x_1 = 1, x_2 = 3$, pa na osnovu teoreme 4.1 rešenje tražimo u obliku

$$a_n = C_1 + C_2 \cdot 3^n.$$

Na osnovu datih početnih uslova formiramo sistem jednačina

$$\begin{array}{c}
a_1 = C_1 + C_2 \cdot 3^1 \\
\underline{a_2 = C_1 + C_2 \cdot 3^2} \\
\left.\begin{array}{l} C_1 + 3C_2 = 1 / \cdot (-1) \\ \underline{C_1 + 9C_2 = 7} \end{array}\right\} + \\
C_1 + 3C_2 = 1 \\
\underline{\qquad 6C_2 = 6} \\
C_1 + 3C_2 = 1 \\
\underline{\qquad C_2 = 1} \\
C_1 + 3 = 1 \Rightarrow C_1 = -2 \\
C_2 = 1
\end{array}$$

Rešavanjem sistema dobijamo konstante: $C_1 = -2, C_2 = 1$. Prema tome, traženo rešenje je

$$a_n = -2 + 3^n.$$

◇

Zadatak 4.2. Glavni kuvar u studentskoj menzi pravi meni za ručak za naredih n dana. Svakog dana za ručak su u ponudi dva jela sa sledeće liste: pasulj, paprikaš, slatki kupus i riba sa krompir-salatom. Pasulj je uvek na meniju dva dana uzastopno, a paprikaš i slatki kupus nisu nikada istog dana na meniju. Na koliko načina je moguće organizovati meni?

Rešenje. Označimo sa a_n broj načina da se organizuje meni za n dana. Analizu vršimo po meniju za prvi dan:

- Ako je prvog dana na meniju pasulj, onda je on na meniju i drugog dana, a za drugo jelo imamo za svaki dan po 3 mogućnosti. Meni za preostalih $n-2$ dana može se organizovati na a_{n-2} načina, pa je u ovom slučaju ukupan broj načina jednak $3 \cdot 3 \cdot a_{n-2} = 9 \cdot a_{n-2}$.

- Ako prvog dana nema pasulja na meniju, mogućnosti su: paprikaš i riba sa krompir–salatom ili slatki kupus i riba sa krompir–salatom, za ptreostalih $n-1$ dana organizujemo meni na a_{n-1} načina, odnosno, na ukupno $2a_{n-1}$ načina.

Ovim putem dobijamo rekurzivnu relaciju

$$a_n = 2a_{n-1} + 9a_{n-2},$$

uz početne uslove $a_0 = 1$ i $a_1 = 2$. Karakteristična jednačina je $x^2 - 2x - 9 = 0$, njena rešenja su $x_1 = 1 + \sqrt{10}$ i $x_2 = 1 - \sqrt{10}$, a opšte rešenje rekurzivne relacije je

$$a_n = A \cdot (1 + \sqrt{10})^n + B \cdot (1 - \sqrt{10})^n.$$

Iz početnih uslova dobijamo

$$a_n = \frac{\sqrt{10}+1}{2\sqrt{10}} \cdot (1 + \sqrt{10})^n + \frac{\sqrt{10}-1}{2\sqrt{10}} \cdot (1 - \sqrt{10})^n.$$

◇

Zadatak 4.3. U redu pred studentskom službom stoje studenti, studentkinje i kućni ljubimci. Za red ćemo reći da je *podnošljiv* ako u njemu ne stoje dve studentkinje jedna do druge (jer ako se dve studentkinje nađu jedna do druge u redu, odmah počinju da pričaju). Koliko ima podnošljivih redova dužine n?

Rešenje. Ako studente označimo slovom a, studentkinje slovom b i kućne ljubimce slovom c, zadatak se svodi na problem prebrojavanja svih reči dužine n nad azbukom $\{a, b, c\}$ u kojima se ne pojavljuje podreč bb. Takve reči ćemo isto nazivati podnošljivim.
Označimo broj svih podnošljivih reči dužine n sa a_n. U zavisnosti od početnog slova reči, razlikujemo sledeće slučajeve:

- Reč počinje slovom a. Tada je ostatak reči podnošljiva reč dužine $n-1$. Takvih ima a_{n-1}.

- Reč počinje slovom b. Tada je sledeće slovo ili a ili c, a ostatak reči podnošljiva reč dužine $n-2$. Takvih ima $2a_{n-2}$.

- Reč počinje slovom c. Tada je ostatak reči podnošljiva reč dužine $n-1$. Takvih ima a_{n-1}.

Primenom principa zbira[4] dobijamo rekurzivnu relaciju

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2},$$

uz početne uslove $a_0 = 1$ i $a_1 = 3$. Karakteristična jednačina je $x^2-2x-2 = 0$, njena rešenja su $x_1 = 1+\sqrt{3}, x_2 = 1-\sqrt{3}$, opšte rešenje rekurzivne relacije je

$$a_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n.$$

Iz početnih uslova dobijamo

$$a_n = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n - \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n.$$

◇

Zadatak 4.4. Pravougaonik veličine 2 x n izdeljen je na $2n$ jediničnih kvadratića. Raspolažemo sa dovoljnim brojem domina pravougaonog oblika veličine 2 x 1 i 2 x 2. Na koliko načina se ceo pravougaonik 2 x n može prekriti sa ovim dominama?

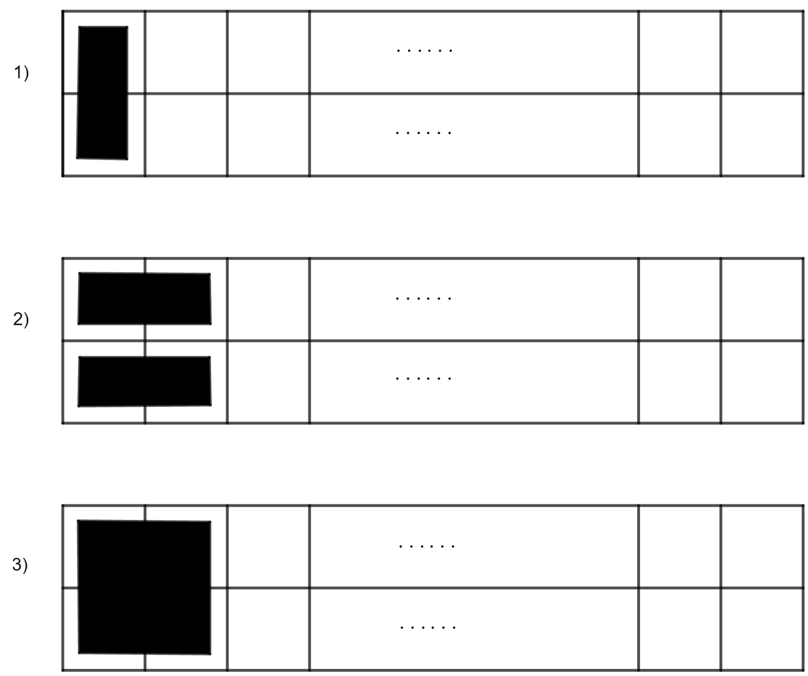
Rešenje. Neka je a_n broj načina da se pravougaonik 2 x n poploča na opisani način. Na osnovu toga kako je postavljena prva domina na početku ploče, razlikujemo sledeća tri slučaja:

1. Prva domina je veličine 2 x 1 i postavljena je vertikalno. Ostatak ploče se tada može popločati na a_{n-1} načina.

2. Prva domina je veličine 2 x 1 i postavljena je horizontalno. Tada sledeća mora biti isto postavljena horizontalno ispod nje, a ostatak ploče se tada može popločati na a_{n-2} načina.

3. Prva domina je veličine 2 x 2. Ostatak ploče se tada može popločati na a_{n-2} načina.

[4] Princip zbira: Ako su A i B disjunktni konačni skupovi, tada je $|A \cup B| = |A| + |B|$.



Slika 5: Popločavanje dominama

Primenom principa zbira dobijamo rekurzivnu relaciju

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2},$$

uz početne uslove $a_1 = 1$ i $a_2 = 3$.
Karakteristična jednačina je $x^2 - x - 2 = 0$, a njena rešenja su $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$, a opšte rešenje rekurzivne relacije je

$$a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 2^n.$$

Iz početnih uslova dobijamo

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot (-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n.$$

$\diamond$

4.1.2 Višestruki koreni

Sada ćemo opisati rešenja homogene linearne rekurzivne relacije kada se u njenoj karakterističnoj jednačini pojave višestruki koreni.

Definicija 4.2. Broj α je nula polinoma $f(x)$ višestrukosti (multipliciteta) m ako je $f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0$, a $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Teorema 4.2. *Neka je data homogena linearna rekurzivna relacija sa konstantnim koeficijentima*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k},$$

i neka je

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_k = 0$$

njena karakteristična jednačina. Ako ta jednačina ima r različitih korena $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$, i ako je v_i višestrukost korena α_i, tada korenu α_i odgovara v_i rešenja

$$\alpha_i^n, n \cdot \alpha_i^n, n^2 \cdot \alpha_i^n, ..., n^{v_i - 1} \cdot \alpha_i^n.$$

Sva rešenja date rekurzivne relacije su oblika:

$$C_{1,1}\alpha_1^n + C_{1,2} n \alpha_1^n + \ldots + C_{1,v_1} n^{v_1 - 1}\alpha_1^n + \ldots + C_{r,1}\alpha_r^n + \ldots + C_{r,v_r} n^{v_r - 1}\alpha_r^n.$$

Skica dokaza. Kao i u slučaju kada su koreni karakteristične jednačine različiti (teorema 4.1), prvo ćemo pokazati da su za sve $i = 1, 2, 3, \ldots, r$ i za sve $m = 0, 1, 2, \ldots, v_i - 1$ nizovi $(n^m \alpha_i^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rešenja posmatrane rekurzivne relacije.

Neka je α_i nula polinoma $P(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_k$ višestrukosti $v_i > 1$. Tada je α_i takođe rešenje jednačina $P'(x) = 0$ i $xP'(x) = 0$. Sada možemo primetiti da je $(n\alpha_i^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rešenje date relacije. Na sličan način računamo i dalje.

Neka je m prirodan broj manji od v_i. Ako m puta naizmenično u $P(x) = 0$ izračunamo izvod pa pomnožimo sa x dobićemo da je α_i rešenje jednačine

$$k^m x^k - c_1 (k-1)^m x^{k-1} - c_2 (k-2)^m x^{k-2} - \ldots - c_{k-2} 2^m x^2 - c_{k-1} x = 0.$$

Tako smo pokazali da su za $i = 1, 2, \ldots, r$ i $m = 0, 1, 2, \ldots, v_i - 1$ svi nizovi $(n^m \alpha_i^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zaista rešenje posmatrane rekurzivne relacije.

Skup svih rešenja relacije koju posmatramo je potprostor dimenzije k. Da bismo dokazali teoremu, dovoljno je još pokazati da su sva posmatrana rešenja linearno nezavisna.

Ako su svi različiti koreni karakteristične jednačine $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ različiti po modulu, tada rešenja $(n^m \alpha_i^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rastu "različitim brzinama" pa nije moguće da neko od tih rešenja bude linearna kombinacija ostalih.

Ukoliko među $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ postoje brojevi istog modula, tada moramo imitirati dokaz teoreme 4.1.

Nažalost, determinanta koja se posmatra da bi pokazali linearnu nezavisnost uočenih rešenja je dosta komplikovanija nego u teoremi 4.1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1 & \cdots & \alpha_k & \alpha_k & \cdots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1^2 & \cdots & 2^{v_1-1}\alpha_1^2 & \cdots & \alpha_k^2 & 2\alpha_k^2 & \cdots & 2^{v_k-1}\alpha_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & (k-1)\alpha_1^{k-1} & \cdots & (k-1)^{v_1-1}\alpha_1^{k-1} & \cdots & \alpha_k^{k-1} & (k-1)\alpha_k^{k-1} & \cdots & (k-1)^{v_k-1}\alpha_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

Ta determinanta je jedno od uopštenja Vandermondove determinante [5]. Naš cilj je da dokažemo da je i ta determinanta različita od nule.

Pretpostavimo da je α_1 koren višestrukosti veće od jedan. Izvlačeći α_1 iz odgovarajućih kolona, elementarnim operacijama na kolonama, i ponavljanjem tog postupka $v_1 - 1$ put, dobićemo da je blok koji odgovara α_1 u posmatranoj determinanti oblika

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \alpha_1^3 & 3\alpha_1^2 & 3\alpha_1 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \alpha_1^{v_1-1} & (v_1-1)\alpha_1^{v_1-2} & \binom{v_1-1}{2}\alpha_1^{v_1-3} & \cdots & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \alpha_1^{k-1} & (k-1)\alpha_1^{k-2} & \binom{k-1}{2}\alpha_1^{k-3} & \cdots & \binom{k-1}{v_1-1}\alpha_1^{k-m} & \cdots \end{vmatrix}$$

[5] Ako je $v_1 = v_2 = \cdots = v_r = 1$ dobija se obična Vandermondova determinanta.

Iz posmatrane determinante smo izvukli $2!\,3!\cdots(v_1-2)!\,\alpha_1^{1+2+\ldots+(v_1-1)}$.

Ako isti postupak primenimo na sve korene α_i višestrukosti veće od jedan, još nam je preostalo da izračunamo determinantu $D_{\alpha_1,v_1;\alpha_2,v_2;\ldots;\alpha_r,v_r}$:

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\
\alpha_1 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_r & 1 & \cdots \\
\alpha_1^2 & 2\alpha_1 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_r^2 & 2\alpha_r & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
\alpha_1^{v_1-1} & (v_1-1)\alpha_1^{v_1-2} & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_r^{v_1-1} & (v_1-1)\alpha_r^{v_1-2} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
\alpha_1^{k-1} & (k-1)\alpha_1^{k-2} & \cdots & \binom{k-1}{v_1-1}\alpha_1^{k-m} & \cdots & \alpha_r^{k-1} & (k-1)\alpha_r^{k-2} & \cdots
\end{vmatrix}$$

Sada redom, za sve $i = n-1, n-2, \ldots, 1$, pomnožimo i-tu vrstu determinante $D_{\alpha_1,v_1;\alpha_2,v_2;\ldots;\alpha_r,v_r}$ sa α_1 i dodamo je vrsti ispod nje. Posle odgovarajućih operacija na kolonama, dobijamo da je

$$D_{\alpha_1,v_1;\alpha_2,v_2;\ldots;\alpha_r,v_r} = \prod_{j=2}^{r}(\alpha_j-\alpha_1)^{v_j}\cdot D_{\alpha_1,v_1-1;\alpha_2,v_2;\ldots;\alpha_r,v_r}.$$

Ako ovu relaciju primenimo potreban broj puta na sve α_i višestrukosti veće od jedan, problem se svodi na računanje obične Vandermondove determinante.

Tako smo dobili da je determinanta sistema proizvod nekog broja različitog od nule i

$$\prod_{i=1}^{r}\alpha_i^{\binom{v_i}{2}}\prod_{1\le i<j\le r}(\alpha_j-\alpha_i)^{v_iv_j}.$$

Dakle, determinanta koja nas zanima nije nula, pa se i u ovom slučaju sva rešenja posmatrane rekurzivne relacije mogu dobiti kao linearna kombinacija rešenja koja odgovaraju korenima karakteristične jednačine.

□

Zadatak 4.5. Rešiti rekurzivnu relaciju

$$a_{n+3} = 5a_{n+2} - 8a_{n+1} + 4a_n$$

uz početne uslove $a_0 = 5, a_1 = 1, a_2 = 23$.

Rešenje. Karakteristična jednačina je

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0,$$

a njena rešenja su $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 2$.

Na osnovu teoreme 4.2 rešenje rekurzivne relacije tražimo u obliku

$$a_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n + nC_3 \cdot 2^n.$$

Koeficijente C_1, C_2 i C_3 dobićemo iz početnih uslova, kao rešenje sistema jednačina:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 \qquad\quad &= 5 \\ C_1 + 2C_2 + 2C_3 &= 1 \\ C_1 + 4C_2 + 8C_3 &= 23 \end{aligned}$$

Ta rešenja su

$$C_1 = 39, C_2 = -34, C_3 = 15,$$

pa je rešenje date rekurzivne relacije

$$a_n = 39 - 34 \cdot 2^n + 15n \cdot 2^n.$$

◇

Zadatak 4.6. Izračunati vrednost determinante reda n

$$D_n = \begin{vmatrix} 10 & -5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & -5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -5 & 10 \end{vmatrix}$$

Rešenje. Datu determinantu razvijemo prvo po elementima prve vrste, a zatim po elementima prve kolone

$$D_n = \begin{vmatrix} 10 & -5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & -5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -5 & 10 \end{vmatrix} = 10\cdot(-1)^{1+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 10 & -5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -5 & 10 \end{vmatrix}}_{D_{n-1}}$$

$$+(-5)\cdot(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -5 & -5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -5 & 10 \end{vmatrix} = 10D_{n-1}+5 \begin{vmatrix} -5 & -5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 10D_{n-1} + 5(-5)(-1)^{1+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 10 & -5 & \cdots & 0 & 0 \\ -5 & 10 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -5 & 10 & -5 \\ 0 & \cdots & 0 & -5 & 10 \end{vmatrix}}_{D_{n-2}} = 10D_{n-1} - 25D_{n-2}$$

Dobili smo rekurzivnu relaciju $D_n = 10D_{n-1} - 25D_{n-2}$ (D_{n-1} i D_{n-2} predstavljaju determinante istog oblika samo manjih redova $n-1$ i $n-2$). Odgovarajuća karakteristična jednačina je $x^2 - 10x + 25 = 0$, ona ima dvostruko realno rešenje $x_1 = x_2 = 5$, pa je opšte rešenje

$$D_n = C_1 \cdot 5^n + C_2 \cdot n \cdot 5^n.$$

Nepoznate konstante C_1 i C_2 tražimo iz početnih uslova: $D_1 = 10, D_2 = \begin{vmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = 100 - 25 = 75.$

$$\left.\begin{array}{l} 5C_1 + 5C_2 \;\; = 10 / \cdot (-5) \\ \underline{25C_1 + 50C_2 = 75} \end{array}\right\} +$$

$$5C_1 + 5C_2 = 10$$

$$\underline{25C_2 = 25}, \text{ tj. } C_2 = 1$$

$$5C_1 + 5 = 10, \text{ tj. } C_1 = 1$$

Odatle imamo da je

$$D_n = 5^n(1 + n).$$

$\diamond$

4.2 Linearne nehomogene rekurzivne relacije sa konstantnim koeficijentima

Definicija 4.3. Neka je $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija. **Nehomogena linearna rekurzivna relacija k-tog reda** je relacija oblika

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k} + f(n), \tag{4.4}$$

gde je $n \geq k$, konstante $c_1, c_2, ..., c_k$ su realni brojevi i važi $c_k \neq 0$.

Primetimo da izostavljanjem $f(n)$ iz relacije (4.4) dobijamo homogenu linearnu relaciju.

Napomena 4.4. Ako su nizovi $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ i $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rešenja relacije (4.4), tada je niz $(b_n - b'_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ rešenje odgovarajuće homogene rekurzivne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}. \tag{4.5}$$

Dakle, svaka dva rešenja polazne rekurzivne relacije (4.4) se razlikuju za neko rešenje homogene relacije (4.5). Zato je svako rešenje posmatrane nehomogene relacije (4.4) oblika

$$a_n = a_n^H + a_n^P,$$

gde je a_n^H rešenje odgovarajuće homogene rekurzivne relacije (4.5), a a_n^P jedno (**partikularno**) rešenje polazne nehomogene relacije.

Sva rešenja linearne nehomogene rekurzivne relacije dobijamo tako što:

- Nađemo sva rešenja odgovarajuće homogene relacije (4.5).
- Nađemo jedno (partikularno) rešenje nehomogene relacije (4.4).
- Sva rešenja tražene relacije su oblika $a_n = a_n^H + a_n^P$.

Linearnu rekurzivnu relaciju (4.5) znamo da rešimo, jedini problem je kako da "pogodimo" jedno rešenje relacije (4.4).

Ideja je da partikularno rešenje tražimo u obliku u kojem je i funkcija $f(n)$ koja "kvari" homogenost. U tabeli je "spisak" partikularnih rešenja za neke tipove funkcije f.

$f(n)$	pretpostavljeno partikularno rešenje a_n^p
$const$	A
$c \cdot n + r$	$A \cdot n + B$
$c_k \cdot n^k + \ldots + c_1 \cdot n + c_0$	$A_k \cdot n^k + \ldots + A_1 \cdot n + A_0$
c^n	$A \cdot c^n$

Slika 6: Partikularna rešenja za neke tipove funkcije f

Nepoznate koeficijente u pretpostavljenom partikularnom rešenju a_n^P odredićemo iz uslova da je to jedno rešenje relacije (4.4).

Zadatak 4.7. Rešiti nehomogenu linearnu rekurzivnu relaciju:

$$h_n = 2h_{n-1} + 1, \quad h_0 = 0.$$

Rešenje. Opšte rešenje možemo predstaviti kao

$$h_n = h_n^H + h_n^P,$$

pri čemu je h_n^H opšte rešenje rekurzivne relacije

$$h_n - 2h_{n-1} = 0,$$

dok je h_n^P partikularno rešenje koje odgovara nehomogenom delu.
Pomoću karakteristične jednačine $x - 2 = 0$, čije je rešenje $x = 2$, dobijamo

$$h_n^H = A \cdot 2^n.$$

Partikularno rešenje je oblika $h_n^P = B$. Uvrštavanjem ovog rešenja u datu rekurzivnu relaciju dobijamo da je $B = -1$, pa je

$$h_n = A \cdot 2^n - 1.$$

Iz početnih uslova određujemo A, znamo da je $h_0 = 0$,

$$h_0 = A \cdot 2^0 - 1$$

$$0 = A \cdot 1 - 1$$

$$A = 1,$$

iz toga sledi da je

$$h_n = 2^n - 1.$$

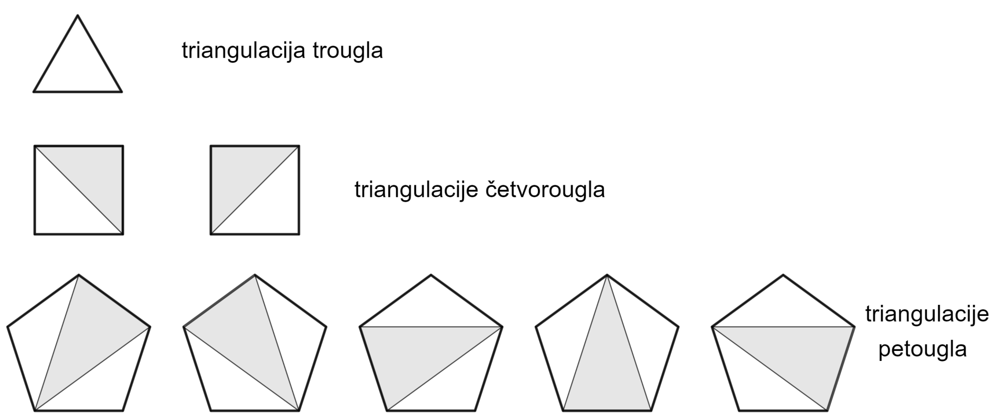
◇

5 Broj triangulacija konveksnog poligona

Triangulacija poligona je istorijski veoma star problem. Pri određivanju svih triangulacija poligona mora biti razmotren i oblik poligona. Ovo čini problem izračunavanja veoma teškim. Problem može biti smanjen tako što se ograničavamo na proračune vezane za konveksne poligone. Za konveksne poligone sve dijagonale su unutrašnje dijagonale. U ovom slučaju broj triangulacija konveksnog poligona je nezavisan od oblika i može biti jedinstveno okarakterisan brojem temena n.

Neka je $P_n = A_1A_2 \cdots A_n$ konveksan n-tougao u ravni. **Triangulacija bez dodatnih temena** tog n-tougla je podela P_n na trouglove pomoću dijagonala, tako da za svaka dva trougla u toj podeli važi

- ili su disjunktni,
- ili imaju samo jedno zajedničko teme,
- ili dele jednu zajedničku ivicu.



Slika 7: Triangulacije trougla, četvorougla i petougla

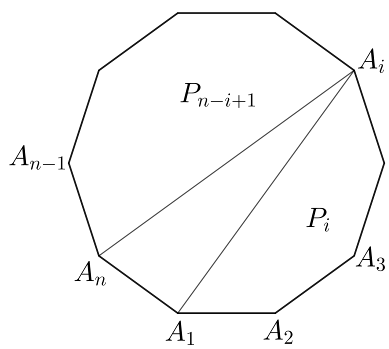
Sa T_n označimo broj takvih triangulacija u n-touglu. Lako je izbrojati da je $T_3 = 1, T_4 = 2, T_5 = 5$.
Po dogovoru se uzima da je $T_1 = 0$ i $T_2 = 1$.

Sada ćemo opisati rekurzivnu relaciju koju zadovoljavaju brojevi T_n.

Teorema 5.1. *Ako je $T_n (n \geq 3)$ broj triangulacija označenog konveksnog n-tougla, tada je:*

$$T_n = T_{n-1} + T_3 T_{n-2} + \ldots + T_{n-2} T_3 + T_{n-1}.$$

Dokaz. Neka je $P_n = A_1 A_2 \ldots A_n$ konveksan n-tougao. Svaka stranica n-tougla se nalazi u tačno jednom trouglu triangulacije (ne može biti u dva trougla, jer bi se dijagonale presekle).



Slika 8: "Razbijanje" n-tougla na trougao i dva manja mnogougla

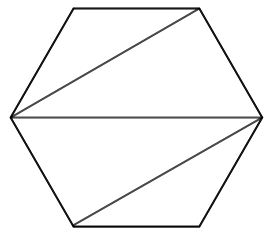
Fiksiramo stranicu $A_1 A_n$, pa brojimo triangulacije u kojima učestvuje svaki od trouglova podignutih nad tom stranicom. Ako ta stranica leži u $\triangle A_1 A_i A_n$, $i = 2, \ldots, n-1$, onda smo "razbili" P_n na taj trougao i dva nova mnogougla. Dalja triangulacija se svodi na dve nezavisne triangulacije P_i koji ima T_i triangulacija i P_{n-i+1} koji ima T_{n-i+1} triangulacija. Dakle, $\triangle A_1 A_i A_n$ se pojavljuje u tačno $T_i T_{n-i+1}$ triangulacija. Kako svaka stranica učestvuje u tačno jednom trouglu triangulacije i u svakoj triangulaciji učestvuje tačno jedan od $\triangle A_1 A_i A_n$, $i = 2, \ldots, n-1$, prema principu zbira imamo da je ukupan broj triangulacija

$$\begin{aligned} T_n = \sum_{i=2}^{n-1} T_i T_{n-i+1} &= T_2 T_{n-2+1} + T_3 T_{n-3+1} + \ldots + T_{n-2} T_{n-(n-2)+1} \\ &+ T_{n-1} T_{n-(n-1)+1} = T_2 T_{n-1} + T_3 T_{n-2} + \ldots + T_{n-2} T_3 + T_{n-1} T_2 \\ &= T_{n-1} + T_3 T_{n-2} + \ldots + T_{n-2} T_3 + T_{n-1}. \end{aligned}$$

□

Lema 5.1. *U svakoj triangulaciji konveksnog n-tougla nastaje $n-2$ trouglova.*

Dokaz. Neka je t_n broj trouglova u triangulaciji n-tougla P_n.



Slika 9: Triangulacija šestougla

$$\begin{aligned} t_n \cdot 180^\circ &= \text{ zbir uglova } P_n \\ &= (n-2) \cdot 180^\circ \end{aligned}$$

Kada izrazimo t_n iz prethodne jednakosti, dobijamo da je $t_n = n - 2$.

□

Lema 5.2. *U svakoj triangulaciji konveksnog n-tougla učestvuje $n-3$ dijagonala.*

Dokaz. Fiksirajmo triangulaciju T n-tougla P_n. Prema lemi 5.1 u njoj učestvuje $n-2$ trouglova. Neka je k broj dijagonala P_n koje učestvuju u triangulaciji T i neka su to dijagonale $d_1, \cdots, d_k$.

Svaka stranica P_n se nalazi u tačno jednom trouglu iz T (5.1)

Svaka od dijagonala $d_1, \cdots, d_k$ je u tačno dva trougla iz T (5.2)

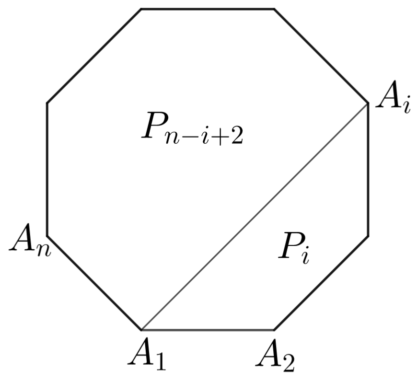
Iz (5.1) i (5.2) imamo da je ukupan broj stranica trouglova koji učestvuju u T jednak $(n-2) \cdot 3 = n + 2k$ (svaka stranica je brojana po jednom za svaki trougao u kom učestvuje). Odakle dobijamo da je $k = n - 3$.

□

Teorema 5.2. *Ako je T_n broj triangulacija konveksnog n-tougla, $n \geq 4$, tada je*

$$T_n = \frac{n}{2(n-3)}(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3).$$

Dokaz. Uočimo dijagonalu A_1A_i, pa gledamo broj triangulacija u kojima ona učestvuje. Ta dijagonala deli n-tougao na dva mnogougla, P_i i P_{n-i+2}. Triangulaciju dobijamo tako što uradimo triangulaciju P_i i triangulaciju P_{n-i+2}.

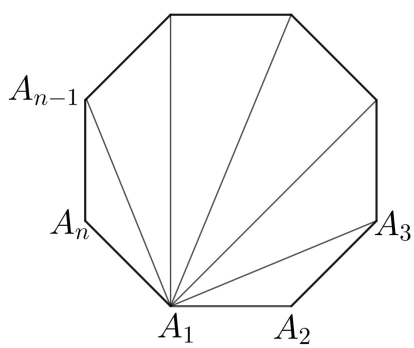


Slika 10: Podela n-tougla na dva mnogougla

Dakle, broj triangulacija u kojima učestvuje dijagonala A_1A_i je T_iT_{n-i+2} za $i = 3, \ldots, n-1$. Sabirajući, imamo da je za dijagonale iz temena A_1 ukupan broj triangulacija u kojima one učestvuju

$$T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3. \tag{5.3}$$

triang. sa $A_1A_3 +$ triang. sa $A_1A_4 + \ldots +$ triang. sa A_1A_{n-1}



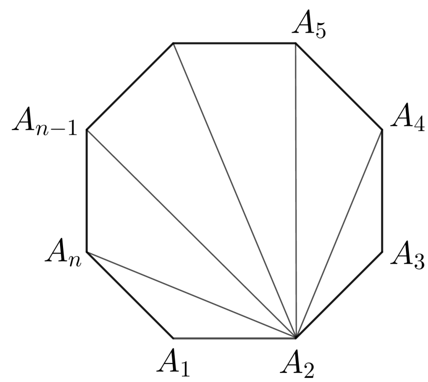
Slika 11: Dijagonale iz A_1

U (5.3) imamo dupliranja (preklapanja). Svaka triangulacija je uračunata onoliko puta koliko se u njoj pojavljuje dijagonala iz temena A_1.

Slično radimo i za dijagonale iz A_2. Ukupan broj triangulacija u kojima one učestvuju je

$$T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3.$$

triang. sa $A_2A_4 +$ triang. sa $A_2A_5 + \ldots +$ triang. sa A_2A_n



Slika 12: Dijagonale iz A_2

Ako isto uradimo i za dijagonale iz $A_3, \ldots, A_n$, i saberemo sve do sada, dobijamo zbir

$$n(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3), \qquad (5.4)$$

u kome je svaka triangulacija ubrojana za svako teme po onoliko puta koliko dijagonala iz tog temena učestvuje u njoj. Fiksiramo triangulaciju T, neka u njoj učestvuju dijagonale $A_{i_1}A_{j_1}, A_{i_2}A_{j_2}, \ldots, A_{i_{n-3}}A_{j_{n-3}}$ (lema 5.2).

U (5.4) je triangulacija T ubrojana $2(n-3)$ puta (za svaku njenu dijagonalu po jedanput iz oba njena temena). Zato je

$$n(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3) = 2(n-3)T_n,$$

odakle sledi da je

$$T_n = \frac{n}{2(n-3)}(T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-2}T_4 + T_{n-1}T_3).$$

$\square$

Teorema 5.3. *Ako je T_n broj triangulacija konveksnog n-tougla, $n \geq 4$, tada je*

$$T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}.$$

Dokaz.

Iz teoreme 5.1 je

$$T_n = T_{n-1} + \underbrace{T_3T_{n-2} + \ldots + T_{n-2}T_3}_{(**)} + T_{n-1} \tag{5.5}$$

Iz teoreme 5.2 je

$$T_{n-1} = \frac{n-1}{2(n-4)} \underbrace{(T_3T_{n-2} + T_4T_{n-3} + \ldots + T_{n-3}T_4 + T_{n-2}T_3)}_{(**)} \tag{5.6}$$

Iz (5.6) izrazimo (**), pa dobijamo

$$T_3T_{n-2} + T_4T_{n-3} + \ldots + T_{n-3}T_4 + T_{n-2}T_3 = \frac{2(n-4)}{n-1}T_{n-1}. \tag{5.7}$$

Sada iz (5.5) i (5.7) imamo da je

$$\begin{aligned}
T_n &= T_{n-1} + \frac{2(n-4)}{n-1}T_{n-1} + T_{n-1} \\
&= T_{n-1}\left(1 + \frac{2(n-4)}{n-1} + 1\right) \\
&= T_{n-1}\left(2 + \frac{2(n-4)}{n-1}\right) \\
&= T_{n-1}\left(\frac{2(n-1) + 2(n-4)}{n-1}\right) \\
&= T_{n-1}\left(\frac{2n-2+2n-8}{n-1}\right) \\
&= T_{n-1}\left(\frac{4n-10}{n-1}\right) = T_{n-1}\left(\frac{2(2n-5)}{n-1}\right), \text{tj. } T_n = \frac{2(2n-5)}{n-1}T_{n-1}.
\end{aligned}$$

Sada radimo teleskopiranje prema dobijenoj formuli:

$$\left.\begin{aligned}
T_n &= \frac{2(2n-5)}{n-1}\cancel{T_{n-1}}\\[2ex]
\cancel{T_{n-1}} &= \frac{2(2(n-1)-5)}{n-1-1}\cancel{T_{n-2}}\\[2ex]
\cancel{T_{n-2}} &= \frac{2(2(n-2)-5)}{n-2-1}\cancel{T_{n-3}}\\
&\;\;\vdots\\
\cancel{T_4} &= \frac{2(2\cdot 4-5)}{3}\cancel{T_3}\\[2ex]
\cancel{T_3} &= \frac{2(2\cdot 3-5)}{2}\cancel{T_2}\\[2ex]
\cancel{T_2} &= 1
\end{aligned}\right\}\times$$

Množeći sve leve i desne strane i izjednačavajući ih, dobijamo da je

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{2^{n-2}(2n-5)(2n-7)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{(n-1)!}\\[2ex]
&= \frac{2^{n-2}(2n-4)(2n-5)(2n-6)(2n-7)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-1)!\,(2n-4)(2n-6)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}\\[2ex]
&= \frac{\cancel{2^{n-2}}(2n-4)!}{(n-1)!\,\cancel{2^{n-2}}(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!\,(n-2)!}\\[2ex]
&= \frac{1}{n-1}\cdot\frac{(2n-4)!}{(n-2)!\,(n-2)!} = \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2},\ \text{što je i trebalo dokazati.}
\end{aligned}$$

$\square$

6 Fibonačijevi brojevi

Jedan od najvećih matematičara Evrope u predrenesansno doba bio je Leonardo iz Pize, poznatiji pod imenom Fibonači (*filius Bonacci* - sin Bonačijev). Rodio se oko 1175. godine, a obrazovanje je stekao na arapskim univerzitetima u Alžiru. Tu se upoznao sa dostignućima arapske i indijske naučne misli - algebrom i pozicionim brojnim sistemom. Po povratku u Italiju objavio je 1202. godine knjigu *Liber abaci*. U toj knjizi Leonardo je prvi uveo u evropsku matematiku arapsko - indijski pozicioni sistem i predložio i rešio niz kombinatornih problema.
Razmotrimo poznati Fibonačijev problem zečeva opisan u knjizi *Liber abaci*.

Pretpostavimo da je tek rođen par zečeva, ženka i mužjak, stavljen u polje i da su zečevi sposobni da se razmnožavaju kada su starosti od jednog meseca, tako da na kraju drugog meseca ženka može roditi novi par zečeva. Pretpostavimo da naši zečevi nikada ne umiru i da ženke svakog meseca rađaju jedan novi par zečeva (i to jednu ženku i jednog mužjaka), počevši od drugog meseca pa nadalje. Pitanje koje je Fibonači postavio bilo je: Koliko parova zečeva će biti nakon jedne godine?

1. Na kraju prvog meseca zečevi se pare, ali još uvek postoji samo jedan par zečeva,

2. na kraju drugog meseca, ženka rađa novi par zečeva, tako da tada postoje dva para zečeva u polju (od kojih je jedan par sposoban za dalju reprodukciju narednog meseca, a jedan nije),

3. na kraju trećeg meseca, ženka iz prvo uočenog para zečeva rađa novi par zečeva, što daje tri para zečeva u polju (od kojih su dva sposobna za dalju reprodukciju narednog meseca, a jedan nije),

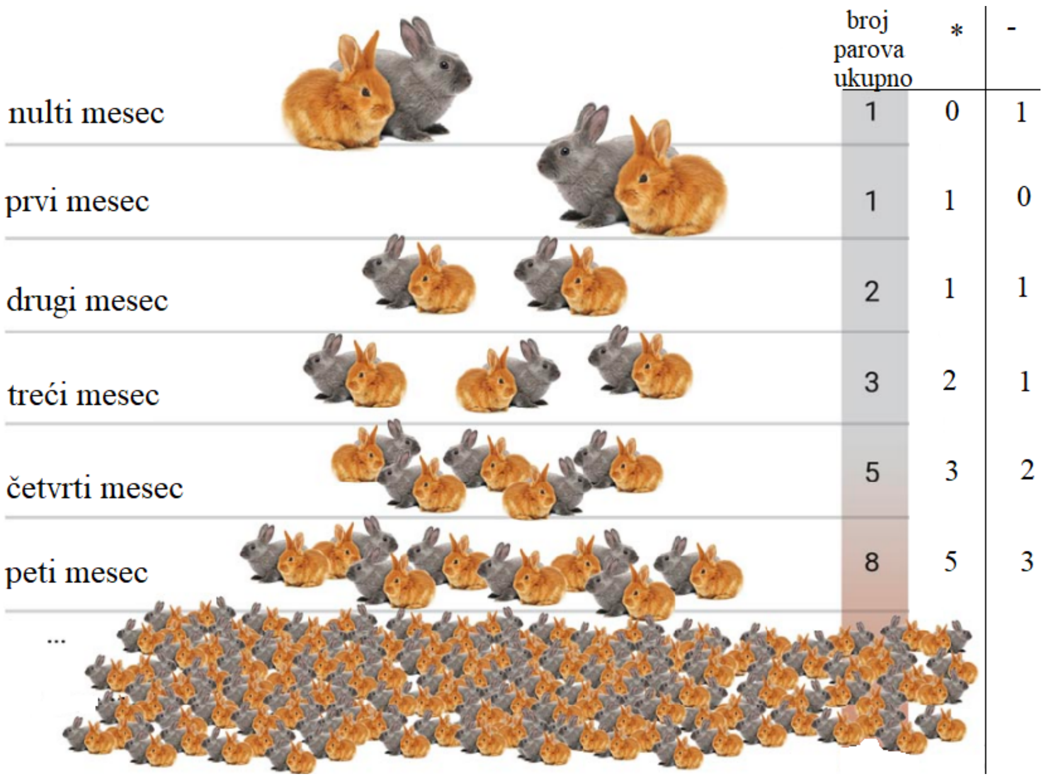
4. na kraju četvrtog meseca, ženka iz prvo uočenog para zečeva, i ženka rođena pre dva meseca, rađaju po jedan par novih zečeva, što daje pet parova zečeva (od kojih su tri para sposobna za dalju reprodukciju narednog meseca, a dva nisu), ...

Neka je f_n broj parova mužjak-ženka posle n meseci, tj. tokom $(n+1)$-og meseca od početka godine. Prema pretpostavci je $f_0 = 1$ i $f_1 = 1$ (jer taj par još nije zreo za razmnožavanje), a f_n, $n \geq 2$ dobijamo kada broju parova

f_{n-1} iz prethodnog meseca dodamo novorođene parove koji se dobijaju od f_{n-2} parova koji su postojali pre dva meseca. Zato je za sve $n \geq 2$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},$$

pa će nakon godinu dana biti $f_{12} = 233$ parova zečeva.
Na slici označimo sa:
" * " - par zečeva koji je reproduktivno sposoban,
" - " - par zečeva koji još nije reproduktivno sposoban.



Slika 13: Razmnožavanje zečeva

Brojeve f_n zovemo Fibonačijevim brojevima, pretpostavlja se da im je ime dao francuski matematičar Lukas[6]. Najčešće se koriste "pomereni" Fibonačijevi brojevi, $F_n := f_{n-1}$. Oni zadovoljavaju istu rekurzivnu relaciju kao i brojevi f_n, razlika je samo u početnim uslovima (tabela 1).

[6] François Édouard Anatole Lucas (1842–1891) - francuski matematičar

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Tabela 1: Nekoliko početnih vrednosti za Fibonačijeve brojeve

Fibonačijev niz $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ najčešće se definiše na sledeći način:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad (n \geq 2).$$

Teorema 6.1. *Ako je $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1$, tada je*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Dokaz. Karakteristična jednačina rekurzivne relacije $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ je

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

a njena rešenja su

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Zato je opšte rešenje rekurzivne relacije

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Na osnovu početnih uslova $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$, dobijamo sistem jednačina

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1,$$

odakle dobijamo konstante C_1 i C_2

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Dakle, opšti član Fibonačijevog niza je

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n . \tag{6.1}$$

Formula (6.1) naziva se *Bineova formula*, po francuskom matematičaru Bineu[7].

$\square$

Sada ćemo dokazati neke identitete koji važe za Fibonačijeve brojeve.

Lema 6.1. *$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$.*

Dokaz. U računu koji sledi koristićemo jednakost $F_k = F_{k-2} + F_{k-1}$, $k = 3, \ldots, n+2$.

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = \cancel{F_3} - F_2 \\ F_2 = \cancel{F_4} - \cancel{F_3} \\ F_3 = \cancel{F_5} - \cancel{F_4} \\ \quad\vdots \\ F_{n-1} = \cancel{F_{n+1}} - \cancel{F_n} \\ F_n = F_{n+2} - \cancel{F_{n+1}} \end{array}\right\} +$$

Saberemo sve leve i desne strane i izjednačimo,

$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - F_2$, koristimo da je $F_2 = 1$, pa dobijamo

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

$\square$

[7]Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856) - francuski matematičar, fizičar i astronom

Lema 6.2. $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

Dokaz. Znamo da je $F_1 = F_2$, pa koristeći jednakost $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, $k \in \{2t|t \in \{2, \ldots, n\}\}$, imamo da je

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = \cancel{F_2} \\ F_3 = \cancel{F_4} - \cancel{F_2} \\ F_5 = \cancel{F_6} - \cancel{F_4} \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ \quad\quad . \\ F_{2n-1} = F_{2n} - \cancel{F_{2n-2}} \end{array}\right\} +$$

Saberemo sve leve i desne strane i izjednačimo,

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

□

Lema 6.3. $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, *za* $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Dokazaćemo matematičkom indukcijom.
Za $n = 1$ imamo da je $F_2F_0 - F_1^2 = -1$, odnosno identitet $-1 = -1$.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za $n = k$, tj. $F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 = (-1)^k$, $k \geq 1$.

Sada proveravamo da za $n = k + 1$ važi $F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$.

$$F_{k+2}F_k - F_{k+1}^2 = (F_{k+1} + F_k)F_k - F_{k+1}^2 = F_{k+1}F_k + F_k^2 - F_{k+1}^2 =$$

$$F_{k+1}F_{k+1} - F_{k+1}F_{k-1} + F_k^2 - F_{k+1}^2 = (-1)(F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2) = (-1)^{k+1}.$$

Po principu matematičke indukcije tvrđenje važi za svaki prirodan broj n.

□

Fibonačijevi brojevi se mogu povezati sa mnogim pojmovima u matematici i svetu oko nas. Navešćemo neke primere.

- **Zlatni presek**

U matematici, arhitekturi i umetnosti on predstavlja podelu neke celine na dva dela različitih veličina tako da je

"odnos većeg dela prema manjem jednak odnosu celine prema većem delu".

Taj odnos se označava sa ϕ, i nije ga teško izračunati. Iz uslova

$$\frac{\text{veći}}{\text{manji}} = \phi = \frac{\text{veći} + \text{manji}}{\text{veći}} = 1 + \frac{1}{\phi}$$

lako se dobija da je broj ϕ pozitivno rešenje kvadratne jednačine $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, odnosno $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Vezu između Fibonačijevih brojeva i zlatnog preseka pronašao je Johan Kepler[8]. On je pokazao da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Prethodni limes možemo dobiti ako Fibonačijev broj F_n zapišemo kao

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^n - \left(\frac{-1}{\phi} \right)^n \right).$$

Odatle se dobija da je Fibonačijev broj F_n ceo broj koji je najbliži $\dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}}$, ili precizno $F_n = \left\lfloor \dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$.

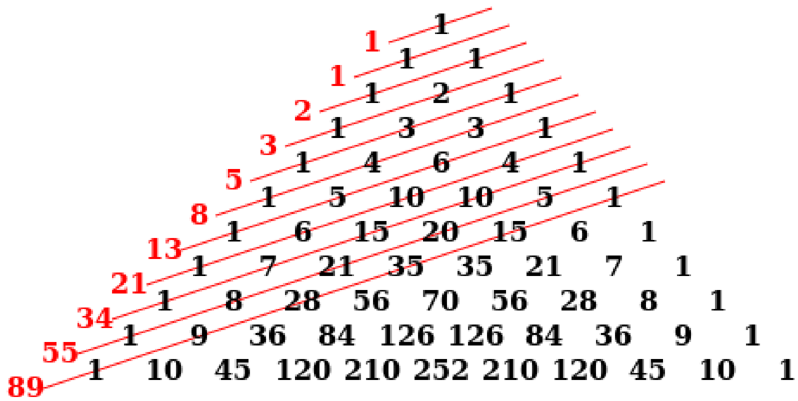
- **Fibonačijev niz u Paskalovom[9] trouglu**

Na narednoj slici je opisano pojavljivanje Fibonačijevog niza u Paskalovom trouglu[10].

[8] Johannes Kepler (1571-1630) - nemački astronom, matematičar i astrolog

[9] Blaise Pascal (1623-1662) - francuski matematičar, fizičar i filozof

[10] Definisan je koeficijentima binomnih razvoja: u n-tom redu, k-ti element ima vrednost $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Npr. u trećem redu drugi element ima vrednost $\binom{3}{2} = 3$.

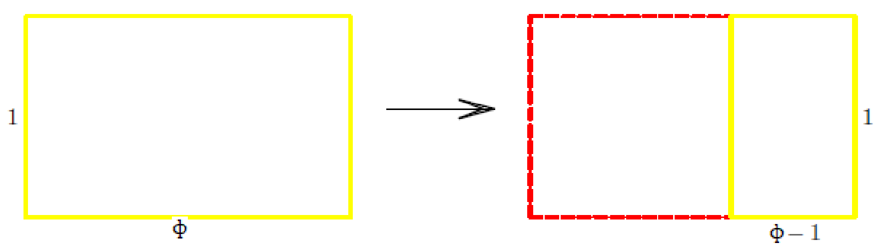


Slika 14: Fibonačijevi brojevi u Paskalovom trouglu

Primetimo da zbirovi vrednosti "po dijagonali" Paskalovog trougla čine Fibonačijev niz.

• Zlatni pravougaonik

Za pravougaonik čije su stranice u odnosu $1 : \phi$ kažemo da je zlatni pravougaonik. Deljenjem takvog pravougaonika na kvadrat i novi pravougaonik, stranice novodobijenog pravougaonika će biti u odnosu $(\phi - 1) : 1$.



Slika 15: Zlatni pravougaonik

Kao što smo ranije videli, ϕ zadovoljava jednačinu $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, odakle sledi da je $\phi - 1 - \frac{1}{\phi} = 0$, tj. $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$, odnosno $\frac{\phi - 1}{1} = \frac{1}{\phi}$, odakle sledi da je i novodobijeni pravougaonik zlatni pravougaonik, jer su pomenuti pravougaonici slični, odnosno, jer su i stranice novodobijenog pravougaonika u odnosu $1 : \phi$.

• **Ljudski mozak**

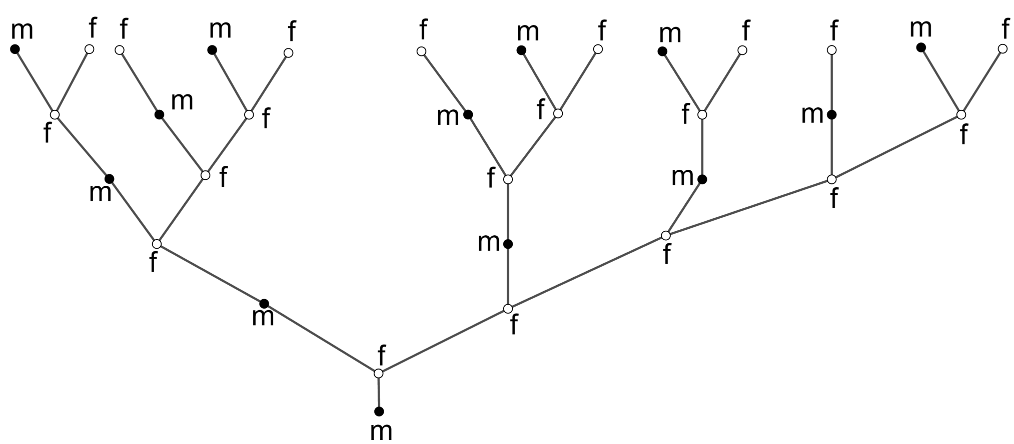
Eksperimentalno je utvrđeno postojanje različitih ritmova ljudskog mozga, od kojih svaki odgovara određenom stanju mozga (i čoveka) i okarakterisan je dijapazonom električnih oscilacija. U stanju umnog rada (β- ritam) frekvencija električnih oscilacija mozga kreće se u granicama od 14 do 35 Hz, pri tome vrhunac spektralne moći, koji odgovara maksimalnoj aktivnosti, najčešće se zapaža na frekvenciji oko 22 Hz, koja deli opseg frekvencija β-ritma (21 Hz) u odnosu zlatnog preseka:

$$\frac{21}{12,87} = \frac{12,87}{8,13} = 1,618,$$

tj. invarijanta glavne frekvencije β-ritma jednaka je zlatnom preseku.

• **Genealoško stablo truta**

Koja zivotinja ima dedu, a nema oca? Iz biologije je poznato da se matica i pčele radilice legu iz oplođenih, a trutovi iz neoplođenih jaja. Dakle, trut je životinja koja nema oca ali ima dedu. Na osnovu te životne činjenice, genealoško stablo truta, koje predstavlja pretke truta kroz nekoliko generacija, izgleda kao na slici. Ako sa m_n, f_n i t_n redom označimo broj muških, ženskih i



Slika 16: Genealoško stablo truta

ukupan broj predaka truta, u n-toj generaciji unazad, vidimo da je, za $n \geq 2$,

$$m_n = f_{n-1}, \tag{6.2}$$

$$f_n = f_{n-1} + m_{n-1}, \tag{6.3}$$

uz početne uslove: $f_0 = 0 = F_0, f_1 = 1 = F_1, m_1 = 0 = F_0$.
Na osnovu (6.2) i (6.3), dobijamo

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},$$

tj. $f_n = F_n$, odakle je, za $n \geq 1$, $m_n = F_{n-1}$, tj.

$$t_n = m_n + f_n = F_{n-1} + F_n = F_{n+1}.$$

• Ritam i metrika

Osvrnimo se sada na vezu metrike i ritma u poeziji sa Fibonačijeviim brojevima, odnosno zlatnim presekom. Kao primer razmotrimo poslednju strofu Disove pesme "Možda spava".

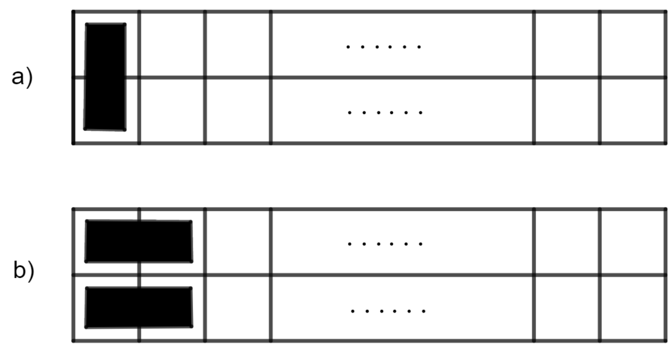
Možda spava sa očima izvan svakog zla,
Izvan stvari, iluzija, izvan života,
I s njom spava, neviđena, njena lepota;
Možda živi i doći će posle ovog sna.
Možda spava sa očima izvan svakog zla.

Jednostavna matematička analiza ove strofe pokazuje da je broj slogova u svakom stihu Fibonačijev broj 13. Svaki stih se deli na dva polustiha sa brojem slogova 8 i 5, a to su susedni Fibonačijevi brojevi. Prvi polustih je podeljen dihotomijski (4+4), dok je drugi cezurom podeljen na dva dela čije su dužine, 2 i 3, takodje, susedni Fibonačijevi brojevi. Primetimo da je i broj stihova u svakoj strofi pesme Fibonačijev broj 5.

Navešćemo nekoliko kombinatornih zadataka u kojima se kao rešenja javljaju Fibonačijevi brojevi.

Zadatak 6.1. Pravougaonik veličine $2 \times n$ izdeljen je na $2n$ jediničnih kvadratića. Raspolažemo sa n domina pravougaonog oblika veličine 2×1. Na koliko načina se ceo pravougaonik $2 \times n$ može prekriti sa ovim dominama?

Rešenje. Neka je f_n broj načina da se data ploča poploča sa n domina. Na osnovu toga kako je postavljena prva domina na početku ploče, razlikujemo sledeća dva slučaja:



Slika 17: Prekrivanje dominama

- Prva domina je postavljena vertikalno (slika (a)). Ostatak ploče se tada može popločati na f_{n-1} načina.
- Prva domina je postavljena horizontalno (slika (b)). Tada sledeća mora biti isto postavljena horizontalno ispod nje, a ostatak ploče se tada može popločati na f_{n-2} načina.

Primenom principa zbira dobijamo rekurzivnu relaciju

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},$$

uz početne uslove $f_1 = 1, f_2 = 2$. Ovo je rekurzivna relacija Fibonačijevog tipa, sa početnim uslovima "pomerenim" za jedno mesto (tj. $f_1 = F_2$ i $f_2 = F_3$), pa zaključujemo da je rešenje $f_n = F_{n+1}$.

$\diamond$

Zadatak 6.2. Na koliko načina se broj n može predstaviti kao zbir brojeva iz skupa $\{1,2\}$? Dva predstavnika sa istim sabircima smatraju se različitim ako redosled sabiraka nije isti. Npr. $1 + 2 \neq 2 + 1$.

Rešenje. Označimo sa f_n broj načina da predstavimo traženi broj n. Posmatrajmo dva slučaja:

- Ako je prva cifra 1, tada ostalih mogućnosti ima f_{n-1}.
- Ako je prva cifra 2, tada ostalih mogućnosti ima f_{n-2}.

Početni uslovi su $f_1 = 1, f_2 = 2$. Ukupno, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, tj. $f_n = F_{n+1}$.

$\diamond$

Zadatak 6.3. Za podskup skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ kažemo da je *redak* ako ne sadrži dva uzastopna broja. Odrediti broj retkih podskupova skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Rešenje.

$n = 1:$	$\varnothing, \{1\}$	$f_1 = 2$
$n = 2:$	$\varnothing, \{1\}, \{2\}$	$f_2 = 3$
$n = 3:$	$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}$	$f_3 = 5$

Neka je f_n broj retkih podskupova skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
Podelimo ih sve u dve klase:

- Oni koji ne sadrže broj n. To su ustvari svi retki podskupovi skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, a njih ima f_{n-1}.
- Oni koji sadrže broj n. Oni tada ne smeju da sadrže $n-1$. Tada ostaju retki podskupovi skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n-2\}$, a njih ima f_{n-2}.

Ukupno, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, tj. $f_n = F_{n+2}$. $\diamond$

Zadatak 6.4. Ana je dobila n dinara i odlučila je da ih potroši isključivo na kupovinu čokolade i sladoleda, tako što svaki dan kupi sebi tačno jedan od navedenih slatkiša. Ako sladoled košta 1 dinar, a čokolada 2 dinara, na koliko načina Ana može da potroši svoj novac?

Rešenje. Označimo sa f_n broj načina da Ana potroši n dinara na kupovinu čokolade i sladoleda pod datim uslovima. Prvog dana Ana može da kupi

- ili sladoled, pri čemu potroši 1 dinar, pa ostatak novca može da potroši na f_{n-1} načina,
- ili čokoladu, pri čemu potroši 2 dinara, pa ostatak novca može da potroši na f_{n-2} načina.

Dobijamo rekurzivnu relaciju $f_n = f_{n-1}+f_{n-2}$, uz početne uslove $f_0 = 1, f_1 = 1$, pa je $f_n = F_{n+1}$.

$\diamond$

Zadatak 6.5. Naći vrednost d_n, koja je zadata sistemom rekurzivnih relacija:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= b_n + c_n \\
b_{n+1} &= c_n \\
c_{n+1} &= a_n + b_n \\
d_n &= a_n + b_n + c_n
\end{aligned}$$

uz početne uslove $a_1 = b_1 = c_1 = 1$.

Rešenje. Eliminišemo na pogodan način a_n, b_n, c_n iz poslednje formule.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= b_n + c_n, \ \text{ tj. } \ a_n = b_{n-1} + c_{n-1} \\
b_{n+1} &= c_n, \ \text{ tj. } \ b_n = c_{n-1} \\
c_{n+1} &= a_n + b_n, \ \text{ tj. } \ c_n = a_{n-1} + b_{n-1} \\
d_n &= a_n + b_n + c_n = b_{n-1} + c_{n-1} + c_{n-1} + a_{n-1} + b_{n-1} \\
&= \underbrace{a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}}_{d_{n-1}} + \underbrace{c_{n-1}}_{a_{n-2}+b_{n-2}} + \underbrace{b_{n-1}}_{c_{n-2}} = d_{n-1} + d_{n-2}
\end{aligned}$$

Dobili smo da je $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$. Iz početnih uslova imamo da je

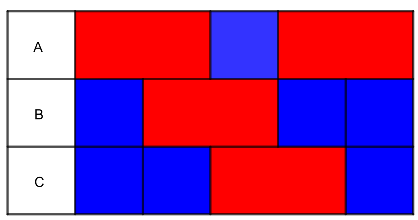
$$\begin{aligned}
a_1 &= b_1 = c_1 = 1, \ \text{ odakle dobijamo da je } \ d_1 = 3 \\
a_2 &= b_1 + c_1 = 1 + 1 = 2 \\
b_2 &= c_1 = 1 \\
c_2 &= a_1 + b_1 = 2 \\
d_2 &= a_2 + b_2 + c_2 = 2 + 1 + 2 = 5, \ \text{ tj. } \ d_2 = 5
\end{aligned}$$

Iz $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$ i početnih uslova $d_1 = 3$ i $d_2 = 5$, dobijamo $d_n = F_{n+3}$.

$\diamond$

Zadatak 6.6. U redu u bioskopskoj sali ima $5n$ mesta za sedenje, nakon svakih 5 mesta nalazi se prolaz. Stolica može biti standardna (1 mesto) ili *love box* (2 mesta). Na koliko načina je moguće postaviti standardne stolice i *love box*-ove u red, tako da nikoja dva *love box*-a nisu susedna i ne postoje tri standardne stolice za redom (stolice se smatraju susednim i u slučaju da je prolaz izmedju njih). Napomena: *love box* naravno ne može prelaziti preko prolaza.

Rešenje. Posmatramo grupe od po 5 mesta (grupe između dva prolaza). Primetimo prvo da, uz gore navedene uslove, standardna i *love box* mesta mogu da se rasporede u grupu od 5 mesta samo na 3 načina. Definišimo promenljive a_n, b_n i c_n koje označavaju broj načina na koje je moguće postaviti stolice, u zavisnosti od toga kako izgleda poslednja grupa od 5 mesta.
Označimo sa A, B i C tri načina za postavljanje stolica u grupi od 5 mesta. Označimo crvenom bojom *love box* mesta, a plavom standardnu stolicu.



Slika 18: Raspored standardnih stolica i *love box*

Na sledećoj slici je prikazano da posle reda tipa A možemo staviti red tipa B ili C, ali ne i red tipa A, slično za druga dva tipa.

	A	B	C
A	x	√	√
B	√	x	x
C	√	√	x

Slika 19: Dozvoljeni rasporedi

Sada, koristeći prethodnu tablicu dobijamo rekurzivne relacije
Ako je A na prvom mestu imamo: $a_n = b_{n-1} + c_{n-1}$
Ako je B na prvom mestu imamo: $b_n = a_{n-1}$
Ako je C na prvom mestu imamo: $c_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

Ukupno,
$d_n = a_n + b_n + c_n = \underbrace{b_{n-1} + c_{n-1} + a_{n-1}}_{d_{n-1}} + \underbrace{a_{n-1}}_{b_{n-1}+c_{n-1}} + \underbrace{b_{n-1}}_{a_{n-1}} = d_{n-1} + d_{n-2}$
Odredimo početne uslove:
$a_1 = 1,\ b_1 = 1,\ c_1 = 1,\ d_1 = a_1 + b_1 + c_1 = 3$
$a_2 = 1 + 1 = 2,\ b_2 = 1,\ c_2 = 1 + 1 = 2,\ d_2 = 2 + 1 + 2 = 5$

Rešenje se svodi na rešenje prethodnog zadatka, pa dobijamo $d_n = F_{n+3}$.
$\diamond$

7 Katalanovi brojevi

Katalanove brojeve prvi su otkrili Leonard Ojler[11] i Johan Segner[12], gotovo čitav vek pre Katalana[13]. Proučavajući problem triangulacije konveksnog n-tougla, Segner je postavio rekurzivnu relaciju, a Ojler prvi uspešno rešio i 1760. godine došao do opšteg izraza za broj triangulacija. Ipak, u čast Katalanu koji je izveo i dokazao mnoga svojstva i identitete vezane za ove brojeve, oni se danas zovu njegovim imenom. Katalanovi brojevi javljaju se u mnoštvu naizgled nepovezanih kombinatornih problema.

Katalanovi brojevi $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ su rešenja rekurzivne relacije

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-1}C_0, \qquad C_0 = C_1 = 1.$$

Prvih nekoliko Katalanovih brojeva dato je u tablici:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430

Tabela 2: Prvih nekoliko Katalanovih brojeva

U petom poglavlju smo pokazali da je C_n jednak broju triangulacija konveksnog $(n+2)$-tougla, pa je opšta formula za ove brojeve

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Problem zagrada. Pretpostavimo da u nekoj strukturi operacija množenja nije asocijativna. Ako želimo da pomnožimo $n+1$ element $x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_nx_{n+1}$ u toj strukturi, redosled množenja se odredi postavljanjem $(n-1)$-og para zagrada. Sa a_n označimo broj različitih postavljanja zagrada u množenju $x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_nx_{n+1}$.

[11] Leonhard Euler(1707-1783) - švajcarski matematičar i fizičar
[12] János András Segner(1704-1777) - mađarski naučnik
[13] Eugène Charles Catalan (1814–1894) - francuski i belgijski matematičar

Lako se proveri da je $a_0 = a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5$.
Na primer, za $n = 3$, postoji pet mogućih rasporeda zagrada:

$$((x_1x_2)x_3)x_4, (x_1(x_2x_3))x_4, (x_1x_2)(x_3x_4), x_1((x_2x_3)x_4), x_1(x_2(x_3x_4)).$$

Dokazati da za svaki prirodan broj n važi $a_n = C_n$.

Rešenje. Primetimo da je svaki od posmatranih proizvoda oblika

$$(x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_i) \cdot (x_{i+1}x_{i+2} \cdot \ldots \cdot x_{n+1})$$

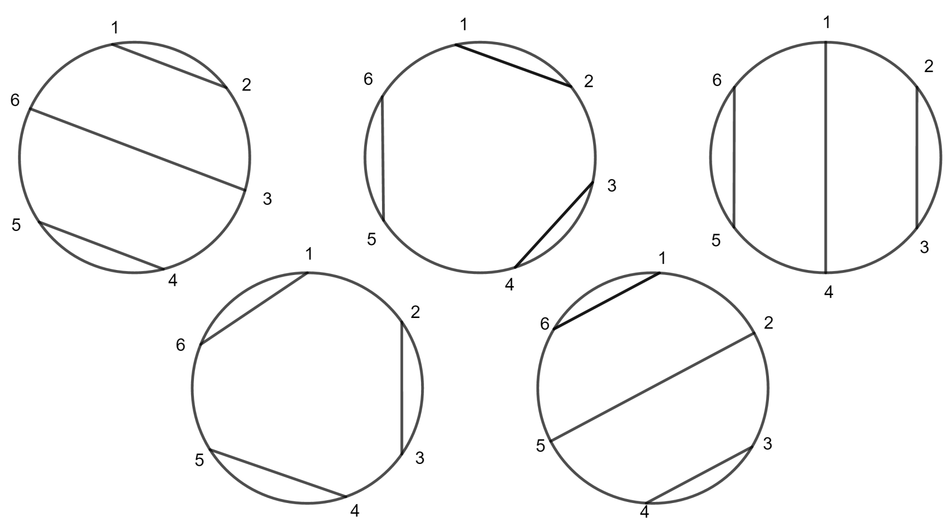
za neko $i = 1, 2, \ldots, n$. Još je potrebno rasporediti zagrade u proizvode $x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_i$ i $x_{i+1}x_{i+2} \cdot \ldots \cdot x_{n+1}$. Kako je to moguće uraditi na a_{i-1}, odnosno a_{n-i} načina, možemo zaključiti da važi

$$a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0.$$

Dakle, brojevi a_n zadovoljavaju istu rekurzivnu relaciju i imaju iste početne uslove kao i Katalanovi brojevi, pa je $a_n = C_n$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$.

$\diamond$

Problem tetiva. Na kružnici je dato $2n$ tačaka. Na koliko se načina te tačke mogu razbiti na n parova tako da među n tetiva određenih tim parovima tačaka ne postoje dve koje se seku? (Na slici su predstavljene sve mogućnosti za $n = 3$.)



Slika 20: Problem tetiva za $n = 3$

Rešenje. Označimo sa a_n traženi broj, a tačke na kružnici sa $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$, onim redom kojim su razmeštene na kružnici.
Tačku A_1 ne smemo spojiti sa tačkom A_k za neparno k, jer bi tada sa obe strane te tetive bio neparan broj tačaka, pa bi se neke dve tetive sekle.
Posmatramo slučajeve u zavisnosti sa kojom tačkom je spojena tačka A_1:

• A_1 spojena sa A_2. Takvih povlačenja ima $a_0 a_{n-1}$.
.
.
.
• A_1 spojena sa A_{2k}. Sa jedne strane tetive $A_1 A_{2k}$ ima još $2(k-1)$ tačaka, a sa druge strane ima $2(n-k)$ tačaka, pa se one mogu spojiti na $a_{k-1}a_{n-k}$ načina.

Dakle,

$$a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_0, \qquad a_0 = a_1 = 1,$$

Odakle vidimo da je $a_n = C_n$.

$\diamond$

Uz malo računanja, možemo dobiti još jedan zapis za Katalanove brojeve. Primetimo da važi:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{n+1-n}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Kako je

$$\frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{2n}{n+1}\binom{2n-1}{n-1} = \frac{2n}{n+1}\binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n+1},$$

dobijamo da je

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

Dobri nizovi. Za niz nula i jedinica dužine $2n$ ($2n$-niz) nad azbukom $\{0,1\}$ kažemo da je *uravnotežen* ako sadrži n nula i n jedinica.
Za uravnotežen $2n$-niz nad azbukom $\{0,1\}$ kažemo da je *dobar* ako ni u jednom njegovom početnom komadu nema više nula nego jedinica. U suprotnom kažemo da je $2n$-niz *loš*.

Na primer, niz 110001 nije dobar, jer u njegovom početnom komadu 11000 ima više nula nego jedinica.
Pokažimo da je broj dobrih $2n$-nizova nad azbukom $\{0, 1\}$ jednak C_n.

Rešenje. Da bismo odredili broj dobrih $2n$-nizova, primetimo da je ukupan broj uravnoteženih $2n$-nizova jednak $\binom{2n}{n}$. Odredićemo prvo broj loših nizova među njima (kod kojih se u nekom početnom komadu pojavljuje više nula nego jedinica). U svakom lošem nizu može se uočiti prva nula kod koje se narušava uslov dobrote (u početnom komadu koji se završava tom nulom ima više nula nego jedinica). Ako u tom početnom komadu zamenimo nule jedinicama, a jedinice nulama, a ostatak niza ne menjamo, dobija se $2n$-niz sa $n+1$ jedinica i $n-1$ nula. S druge strane, za svaki $2n$-niz sa $n+1$ jedinica i $n-1$ nula može se izvršiti obrnuti postupak zamene i naći loš niz iz kojeg je on dobijen. Na primer, niz 001011101101 dobijen je od niza 110100001101 zamenom nula i jedinica u početnom komadu dužine 7. Na osnovu opisane bijekcije sledi da je broj loših $2n$-nizova jednak $\binom{2n}{n-1}$, tj. da je broj dobrih $2n$-nizova jednak

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n.$$

◇

Navešćemo neke zadatke gde se kao rešenja pojavljuju Katalanovi brojevi.

Zadatak 7.1. Klovn stoji na ivici bazena i drži džak u kom se nalazi n plavih i n crvenih kuglica. Iz džaka nasumično izvlači kuglicu po kuglicu. Kada izvuče plavu kuglicu pravi korak ka bazenu, a kad izvuče crvenu pravi korak od bazena (pretpostavljamo da su svi koraci iste dužine). Na koliko načina klovn može da izvuče kuglice, a da ostane suv?

Rešenje. Uspostavimo bijekciju između izvlačenja kuglica i dobrih nizova. Budući da klovn ne sme da upadne u bazen, to znači da broj plavih kuglica ne sme biti veći od broja crvenih, pa izvlačenje plave kuglice označimo nulom, a crvene jedinicom. Sledi da je broj načina da klovn ne upadne u bazen jednak Katalanovom broju C_n.

◇

Zadatak 7.2. Boban i Deki su kandidati za predsednika razreda u jednoj školi. Izbori su održani tako da je svaki učenik iz razreda (uključujući Bobana i Dekija) na papiriću napisao ime i ubacio ga u kutiju. Kada su svi učenici glasali, učiteljica je prebrojala glasove. Kako u razredu ima $2n$, $n \geq 1$ učenika, ispostavilo se da Boban i Deki imaju isti broj glasova (svako po n). Učiteljica je predložila da se situacija razreši na sledeći način: brojaće glasove opet izvlačeći jedan po jedan papirić, posle svakog izvučenog papirića zapisaće trenutan rezultat na tabli i ako u svakom trenutku Boban bude imao bar isto glasova kao i Deki on pobeđuje, u suprotnom pobeđuje Deki. U koliko slučajeva pobeđuje Boban?

Rešenje. Uspostavimo bijekciju između izvlačenja papirića i dobrih nizova. Boban pobeđuje ako bude imao bar isto glasova kao Deki, pa papirić na kome piše Dekijevo ime označimo nulom, a na kom piše Boban jedinicom, jer ni u jednom trenutku ne sme biti više nula nego jedinica, pa je broj slučajeva u kojima Boban pobeđuje jednak Katalanovom broju C_n.

◇

Zadatak 7.3. Nastavnik fizičkog poređao je u sali za fizičko 30 učenika, tako da obrazuju temena pravilnog tridesetougla. Na koliko načina je moguće izabrati 15 parova koji će se dodavati odbojkaškom loptom (pretpostavljamo da je kretanje lopte pravolinijsko), tako da budemo sigurni da se nikoje dve lopte neće sudariti.

Rešenje. Ovaj problem je ekvivalentan problemu razbijanja 30 tačaka na kružnici na parove koji određuju 15 tetiva koje se međusobno ne seku, pa je rešenje Katalanov broj $C_{15} = \frac{1}{16}\binom{30}{15}$.

◇

8 Stirlingovi brojevi

Sa $c(n,k)$ označavamo broj permutacija u simetričnoj grupi $\mathbb{S}_n$ koje imaju tačno k ciklusa. Taj broj se naziva i **Stirlingov**[14] **broj prve vrste bez znaka**.

Teorema 8.1. *Brojevi $c(n,k)$ zadovoljavaju sledeću rekurzivnu relaciju*

$$c(n,k) = (n-1)c(n-1,k) + c(n-1,k-1),$$

uz početne uslove $c(n,k) = 0$ za $n \leq 0$ ili $k \leq 0$ (osim za $k = n = 0$ kada je $c(0,0) = 1$).

Dokaz. Kada permutaciji iz $\mathbb{S}_{n-1}$ sa $k-1$ ciklusa dopišemo ciklus (n) dužine jedan, dobija se permutacija iz $\mathbb{S}_n$ sa k ciklusa. Na taj način dobijamo sve permutacije skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ sa k ciklusa kod kojih je n fiksna tačka, njih je ukupno $c(n-1, k-1)$.

Sada pretpostavimo da n nije fiksna tačka permutacije π iz $\mathbb{S}_n$ koja ima tačno k ciklusa. Možemo uočiti da je takva permutacija π dobijena dopisivanjem n iza nekog od elemenata iz $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ u neki od k ciklusa permutacije skupa $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Svakoj od $c(n-1,k)$ permutacija iz $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ broj n se može dopisati na $n-1$ način. Zato je broj svih permutacija iz $\mathbb{S}_n$ sa tačno k ciklusa kojima n nije fiksna tačka jednak $(n-1) \cdot c(n-1,k)$.

Sada se rekurzivna relacija iz teoreme dobija pomoću principa zbira. $\square$

Stirlingov broj prve vrste definišemo sa

$$s(n,k) = (-1)^{n-k} c(n,k).$$

Na osnovu prethodne teoreme imamo da je

$$\begin{aligned} s(n,k) =& (-1)^{n-k}\left((n-1)c(n-1,k) + c(n-1,k-1)\right) \\ =& (-1)^{n-k}(n-1)c(n-1,k) + (-1)^{n-k}c(n-1,k-1) \\ =& -1(n-1)(-1)^{n-1-k}c(n-1,k) + s(n-1,k-1) \\ =& -(n-1)s(n-1,k) + s(n-1,k-1). \end{aligned}$$

[14] James Stirling (1692-1770) - škotski matematičar

Dakle, Stirlingovi brojevi $s(n,k)$ zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k).$$

Stirlingovi brojevi prve vrste imaju sledeću osobinu:

$$s(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,, \quad s(n,n) = 1.$$

U sledećoj tablici se nalaze Stirlingovi brojevi $s(n,k)$ za neke vrednosti parametara n i k:

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	0	1							
2	0	-1	1						
3	0	2	-3	1					
4	0	-6	11	-6	1				
5	0	24	-50	35	-10	1			
6	0	-120	274	-255	85	-15	1		
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1	
8	0	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1

Tabela 3: Vrednosti za Stirlingove brojeve prve vrste

Particija skupa X u k delova je podela svih elemenata X u k nepraznih, disjunktnih podskupova od X. Drugim rečima, particija skupa X u k blokova (delova) je k-točlana familija $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ podskupova od X tako da je

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k, A_i \neq \emptyset, A_i \cap Aj = \emptyset,\ 1 \leq i < j \leq k.$$

Za sve $k \leq n$ **Stirlingov broj druge vrste** $S(n,k)$ je broj particija skupa od n elemenata u tačno k blokova.

Teorema 8.2. *Stirlingovi brojevi druge vrste zadovoljavaju sledeću rekurzivnu relaciju*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k).$$

Dokaz. Sve particije skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ u k blokova podelimo u dve grupe:

1. Prvu grupu čine particije u kojima je $\{n\}$ jednočlan blok. Kako ostalih $n-1$ elemenata treba rasporediti u $k-1$ blokova, ovih particija ima $S(n-1,k-1)$.

2. U drugoj grupi su particije u kojima broj n nije "sam" u bloku. Te particije nastaju dodavanjem broja n u jedan od k blokova neke od $S(n-1,k)$ particija skupa $\{1,2,\ldots,n-1\}$ u k blokova.

Rekurzivnu relaciju za $S(n,k)$ dobijamo koristeći princip zbira.

□

Stirlingovi brojevi druge vrste imaju sledeću osobinu:

$$S(n,1) = S(n,n) = 1.$$

Neke vrednosti za Stirlingove brojeve druge vrste su date u sledećoj tablici:

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Tabela 4: Vrednosti za Stirlingove brojeve druge vrste

Napomena 8.1. Srpski matematičar Jovan Karamata[15] uveo je notaciju za Stirlingove brojeve pomoću uglastih i vitičastih zagrada

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = c(n,k) = (-1)^{n-k}s(n,k), \quad \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = S(n,k).$$

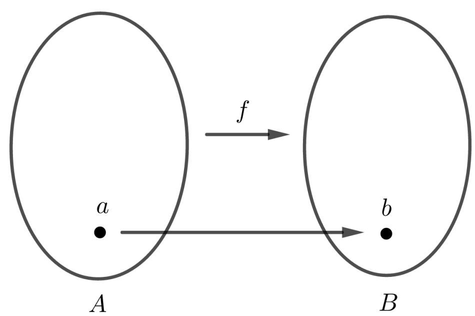
[15]Jovan Karamata (1902-1967) - srpski matematičar

Rekurzivne relacije za ovako zapisane Stirlingove brojeve podsećaju na relacije za binomne koeficijente:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}, \text{ za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Za Stirlingov broj druge vrste $S(n,k)$ možemo naći tačnu formulu. Taj broj se pojavljuje pri prebrojavanju surjekcija iz skupa $\{1,2,\dots,n\}$ u skup $\{1,2,\dots,k\}$.



Slika 21: Preslikavanje skupa A u skup B

Podsetimo se, $f\colon A \to B$ je surjektivno ("na") preslikavanje akko je $f(A) = B$, tj. akko $(\forall b \in B)(\exists a \in A)\ f(a) = b$.

Teorema 8.3. *Ako je $|A| = n$ i $|B| = k$, tada je broj surjektivnih preslikavanja $f\colon A \to B$ jednak*

$$k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}1^n = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n.$$

Dokaz. Neka je skup $A = \{1,2,\dots,n\}$ i skup $B = \{1,2,\dots,k\}$.
Označimo sa $P = \{f | f\colon A \to B\}$ skup svih preslikavanja iz skupa A u skup B, a sa $P' = \{f | f\colon A \to B, f-\text{ "na"}\}$ skup svih surjektivnih preslikavanja iz skupa A u skup B.

Za $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ definišimo skup $P_i = \{f \colon f \in P, i \notin f(A)\}$, to je dakle skup svih preslikavanja iz A u B gde i nije u slici skupa A.
Da bi preslikavanje iz A u B bilo surjekcija, svaki element iz skupa B mora biti u slici skupa A, pa je

$$P' = \overline{P}_1 \cap \overline{P}_2 \cap \ldots \cap \overline{P}_k = \overline{P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_k}$$

Sada posmatramo kardinalnost P' i koristimo princip uključenja-isključenja

$$\begin{aligned} |P'| =& |\overline{P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_k}| = |P| - |P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_k| = |P| - \sum_{1 \le i_1 \le k} |P_{i_1}| \\ &+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le k} |P_{i_1} \cap P_{i_2}| - \ldots + (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le k} |P_{i_1} \cap \ldots \cap P_{i_k}| \end{aligned} \tag{8.1}$$

Ukupan broj preslikavanja iz n-elementnog skupa u k-elementan skup je k^n (za svaki od n elemenata imamo k izbora za sliku), pa je $|P| = k^n$.
Preostaje nam još da odredimo kardinalnosti skupova iz jednakosti (8.1).
Za $i_1 \in \{1, 2, \ldots, k\}$ je $|P_{i_1}|$ broj preslikavanja iz n-elementnog skupa u $(k-1)$-elementni skup (jer i_1 nije u slici), pa je $|P_{i_1}| = (k-1)^n$.
Slično za $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ je $|P_{i_1} \cap \ldots \cap P_{i_r}|$ broj preslikavanja iz n-elementnog skupa u $(k-r)$-elementni skup (jer $i_1, \ldots, i_r$ nisu u slici), pa je $|P_{i_1} \cap \ldots \cap P_{i_r}| = (k-r)^n$, za $r \le k$.
Sada u (8.1) imamo da je

$$\begin{aligned} |P'| =& k^n - k(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}(k-(k-1))^n \\ &+ (-1)^k \binom{k}{k}(k-k)^n = k^n - k(k-1)^n + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}1^n \\ =& \binom{k}{0}(k-0)^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}(k-(k-1))^n \\ &+ (-1)^k \binom{k}{k}(k-k)^n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i}(k-i)^n. \end{aligned}$$

□

Navešćemo gore pomenuti princip uključenja-isključenja.

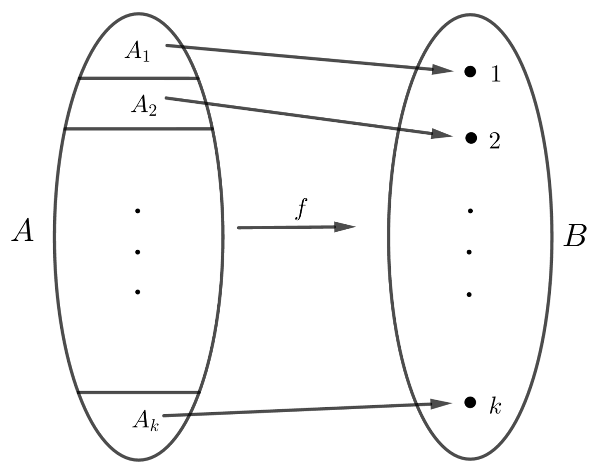
Teorema 8.4. *Neka su dati konačni skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Broj elemenata u uniji tih skupova je :*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} (-1)^{k-1} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| =$$

$$(|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|) - (|A_1 \cap A_2| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Sada ćemo iskoristiti teoremu 8.3 da nađemo tačnu formulu za $S(n,k)$.

Neka je $|A| = n$, $|B| = k$ i preslikavanje f surjekcija.



Slika 22: Preslikavanje klasa ekvivalencije skupa A u skup B

Svaka surjekcija daje jednu particiju A na k nepraznih podskupova. Sa druge strane, jedna particija A na k nepraznih podskupova daje $k!$ surjekcija (svi elementi skupa A_1 mogu se preslikati u bilo koji od 1 do k).

Dakle, na osnovu prethodnog razmatranja i teoreme 8.3 sledi da je

$$k!\, S(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n,$$

odnosno

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Navešćemo par zadataka u kojima se kao rešenja javljaju Stirlingovi brojevi.

Zadatak 8.1. Radionica za izradu nakita je dobila porudžbinu za izradu četiri ogrlice. Od materijala je na raspolaganju četiri komada žice i sedamnaest različitih perli. Na koliko načina se mogu napraviti ogrlice, ako je potrebno potrošiti sve perle i svaka ogrlica ima bar jednu perlu?

Rešenje. Svaka ogrlica se može posmatrati kao jedan ciklus u permutaciji, pa se dati problem svodi na određivanje broja permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, 17\}$ sa tačno četiri ciklusa, koji iznosi $\left[{17 \atop 4}\right]$.

◇

Zadatak 8.2. Milan je kupio šest različitih razglednica koje treba da pošalje prijateljima na četiri adrese. Na koliko načina može to da uradi, ako svaki prijatelj treba da dobije bar jednu razglednicu?

Rešenje. Na svakoj adresi mora biti bar jedna razglednica, pa moramo napraviti particiju skupa razglednica na četiri neprazne klase, a to se može učiniti na $\left\{{6 \atop 4}\right\}$ načina. Klase na adrese možemo rasporediti na 4! načina. Ukupno, $\left\{{6 \atop 4}\right\} \cdot 4!$

◇

Zadatak 8.3. Na koliko načina se u dve grupe može rasporediti sedam žena i osam muškaraca, ako u svakoj grupi moraju biti bar jedna žena i bar jedan muškarac?

Rešenje. Kako u svakoj grupi mora biti bar jedna žena, moramo napraviti particiju skupa žena na dve neprazne klase, a to se može učiniti na $\left\{{7 \atop 2}\right\}$ načina. Slično, muškarci se mogu podeliti na $\left\{{8 \atop 2}\right\}$ načina. Konačno, svakoj podeli žena odgovara svaka podela muškaraca, pri čemu se klase u podeli mogu upariti na 2 načina, pa je ukupan broj načina da se naprave dve grupe pod datim uslovima jednak

$$\left\{{7 \atop 2}\right\} \cdot \left\{{8 \atop 2}\right\} \cdot 2.$$

◇

9 Belovi brojevi

Belov[16] broj B_n, za $n \in \mathbb{N}_0$ definišemo kao broj particija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u nekoliko blokova. Po definiciji je $B_0 = 1$. Možemo primetiti da je B_n broj različitih relacija ekvivalencije na skupu sa n elemenata (jer svaka relacija ekvivalencije daje particiju skupa na blokove i obrnuto).
Prvih nekoliko Belovih brojeva je dato u sledećoj tablici:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

Tabela 5: Prvih nekoliko Belovih brojeva

Iz kombinatorne interpretacije Stirlingovih brojeva druge vrste i definicije Belovih brojeva primetimo da važi

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$

Lema 9.1. *Belovi brojevi zadovoljavaju sledeću rekurzivnu relaciju*

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i.$$

Dokaz. Posmatrajmo blok u kojem se nalazi broj $n+1$. Ako se u tom bloku još nalazi $n-i$ brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, te brojeve možemo odabrati na $\binom{n}{i}$ načina. Od preostalih i brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ može se napraviti još B_i particija.

□

Zadatak 9.1. Odrediti broj relacija ekvivalencije na skupu od 10 elemenata.

Rešenje. Broj relacija ekvivalencije na skupu od 10 elemenata jednak je

$$B_{10} = 115975.$$

◇

[16]Eric Temple Bell (1883-1960) - škotski matematičar i pisac naučne fantastike

10 Particije broja

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ prirodni brojevi, takvi da je

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n, \quad a_1 \geq a_2 \cdots \geq a_k.$$

Uređena k-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ je **particija broja** n u k delova. Broj svih particija broja n označavamo sa p_n, a broj particija n u k delova označavamo sa $p_{n,k}$. Po dogovoru uzimamo da je $p_0 = 1$. Nekoliko početnih vrednosti niza $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ dato je u sledećoj tablici:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_n	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

Tabela 6: Prvih nekoliko početnih vrednosti niza $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

Brojevi p_n rastu veoma brzo. Na primer, zna se da je $p_{100} = 190\,569\,292$, a $p_{200} = 3\,972\,999\,029\,388$.

Brojevi $p_{n,k}$ zadovoljavaju rekurzivnu relaciju

$$p_{n,k} = p_{n-1,k-1} + p_{n-k,k}.$$

Naime, particija n u k delova u kojima se pojavljuje broj 1 ima $p_{n-1,k-1}$ (jer brisanje te jedinice daje particiju $(n-1)$ u $(k-1)$ delova). Ako su svi sabirci particije n u k delova veći od jedan, kada se od svakog sabirka oduzme jedan, dobijemo particiju broja $n-k$ u k sabiraka.

Ne postoji jednostavna rekurzivna relacija za brojeve p_n. Rekurzivna relacija kojom se p_n izražava preko nekoliko prethodnih koristi petougaone brojeve. To je još jedan od veličanstvenih rezultata Leonarda Ojlera.

Petougaoni brojevi su brojevi oblika $\frac{k(3k-1)}{2}$, gde je k proizvoljan ceo broj. Primetimo da su ti brojevi uvek pozitivni.

Za $k = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ dobijamo sledeće petougaone brojeve

$$0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, \ldots$$

Teorema 10.1. *Za proizvoljan prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, veći od jedan, važi*

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} - p_{n-5} - p_{n-7} + p_{n-12} + p_{n-15} - p_{n-22} - p_{n-26} + \dots$$

ili preciznije

$$p_n = \sum_{k=1} (-1)^{k-1} \left(p_{n-\frac{k(3k-1)}{2}} + p_{n-\frac{k(3k+1)}{2}} \right).$$

Na primer,
$p_{18} = p_{17} + p_{16} - p_{13} - p_{11} + p_6 + p_3 = 297 + 231 - 101 - 56 + 11 + 3 = 385.$

11 Zaključak

Rekurzije susrećemo svakodnevno. Osim pojavljivanja u matematici, one se javljaju u programiranju, fizici (za izračunavanje starosti nekog predmeta korišćenjem perioda poluraspada radioaktivnog ugljenika), ekonomiji i drugim naukama.
Naime, čak i u skupu prirodnih brojeva, koji dobro poznajemo još od prvog razreda osnovne škole, možemo uociti rekurziju: prvi član je 1, a svaki sledeći dobijamo tako što prethodni uvećamo za 1.

U ovom radu smo se bavili raznim kombinatornim problemima koji se rešavaju primenom rekurzivnih relacija. Među njima su podela ravni pravama (od kojih nikoje dve nisu paralelne i nikoje tri ne prolaze kroz istu tačku), određivanje broja triangulacija konveksnog poligona, određivanje broja particija datog skupa u nekoliko delova i mnogi drugi. Na taj način smo došli do Fibonačijevih, Katalanovih, Stirlingovih i Belovih brojeva, kao i raznih identiteta koji važe za njih.

Literatura

[1] Dragan Stevanović, Marko Milošević, Vladimir Baltić, *Diskretna matematika, osnove kombinatorike i teorije grafova zbirka rešenih zadataka*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2004.

[2] Dragan Stevanović, Miroslav Ćirić, Slobodan Simić, Vladimir Baltić, *Diskretna matematika, osnove kombinatorike i teorije grafova*, Prirodno-matematički fakultet u Nišu, Niš, 2007.

[3] Duško Jojić, *Elementi enumerativne kombinatorike*, Naša knjiga, Beograd, 2011.

[4] Jelena Milojković, *Zlatni presek*, Master rad, Beograd, 2009.

[5] Maja Cvitković, *Kombinatorika (zbirka zadataka)*, Element, Zagreb, 1994.

[6] Maja Pech, Dragan Mašulović, *Zbirka zadataka iz kombinatorike*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2015.

[7] Muzafer H. Saračević, *Metode za rešavanje problema triangulacije poligona i njihova implementacija*, Doktorska disertacija, Niš, 2013.

[8] Pavle Mladenović, *Kombinatorika*, III izdanje, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2001.

[9] Rade Dacić, *Elementarna kombinatorika*, Matematički institut, Beograd, 1977.

[10] Ratko Tošić, *Kombinatorika*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1999.

[11] Ispitni zadaci iz kombinatorike, dostupno na `https://www.dropbox.com/sh/ztj1eqpz5fqkq65/AABOGZFBjOD6WayiG9Dusg1qa?dl=0`

[12] Predavanja iz kombinatorike, dostupno na `https://people.dmi.uns.ac.rs/~vojpet/`