

Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Politopi i Kirkman-Kejlijeva formula

Master rad

Student:
Valentina Pavlović 1072/2017

Mentor:
Dr Tanja Stojadinović

Beograd, 2020.

SADRŽAJ

1	Uvod	2
2	Politopi	3
2.1	Definicije i osobine politopa	3
2.1.1	Primeri nekih politopa	6
2.2	Suma Minkovskog i proizvod politopa	7
2.3	Konstrukcije za dobijanje novih politopa	9
3	Kombinatorna svojstva politopa	11
3.1	Poseti-parcijalno uređeni skupovi	11
3.2	Polarni, simplicijalni i prosti politopi	14
3.3	Grafovi, drveta i gradeći skupovi	15
3.3.1	Asociedar K_n , Permutoedar Π_{n-1} i Cikloedar C_{n-1} . .	18
4	Kirkman-Kejlijeva teorema	21

1 UVOD

U ovom radu, upoznaćemo se sa važnim objektima kako u geometriji tako i u kombinatorici. Objekti, od velikog značaja, kojima sam se bavila, se zovu politopi. Iz ovog master rada, naučićemo kako se oni zadaju kombinatorno i geometrijski i pokazati njihovu ulogu. Prvo poglavlje je uvodnog karaktera i tu ćemo se upoznati sa osnovnim pojmovima vezanim za politope. Navešćemo neke od osnovnih svojstava politopa i definisaćemo neke operacije koje se mogu iskoristiti za generisanje čitavih familija ovih figura. Drugo poglavlje je posvećeno kombinatornim svojstvima politopa i pojmovima kao što su uređeni skupovi, grafovi i gradeći skupovi. Nakon toga ćemo spomenuti neke poznate familije prostih politopa i načine njihovog zadavanja. Posebno izdvojamo familiju asociedara za koju, pomoću Kirkman-Kejljeve formule koja je izvedena u poslednjem delu ovog rada, dajemo broj strana u proizvoljnoj dimenziji (f -vektor). Tu se detaljnije okrećemo kombinatorici i dajemo različite mogućnosti prebrojavanja strana asociedara. Ovaj rad je u velikoj meri inspirisan Gaifijevim člankom [4].

2 POLITOPI

2.1 DEFINICIJE I OSOBINE POLITOPA

Pre svega, želim da naglasim, da ću u celom radu, pod pojmom *politopi*, podrazumevati da se radi o konveksnim politopima. Za početak, pre nego što uvedemo pojam *politopa*, podsetićemo se definicija poznatih od ranije.

Definicija 1 Skup $C \subset \mathbb{R}^d$ nazivamo **konveksnim** ako za sve $x, y \in C$ i sve $\lambda \in [0, 1]$ važi $(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$.

Geometrijski, ako konveksan skup sadrži tačke a i b , onda sadrži i celu tu duž.

Teorema 1 Presek familije konveksnih skupova je konveksan skup.

Definicija 2 **Konveksni omotač** skupa $S \subseteq \mathbb{R}^d$ je najmanji konveksni podskup od $\mathbb{R}^d$ koji sadrži S .

Definicija 3 Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nenegativni realni brojevi, takvi da je $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Izraz $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ nazivamo **konveksnom kombinacijom** tačaka $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Postoje dva ekvivalentna načina za definisanje politopa (dokaz da su oni ekvivalentni nije trivijalan):

Definicija 4 (V-politop) Politop P je konveksni omotač konačnog skupa tačaka $v_1, v_2, \dots, v_n$ u Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} P = \text{conv} \{v_1, \dots, v_n\} &= \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1\} \\ &= \text{presek svih konveksnih skupova koji sadrže } v_1, \dots, v_n \end{aligned}$$

Definicija 5 (H-politop) Politop P je ograničen presek konačno mnogo poluprostora u Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^d$:

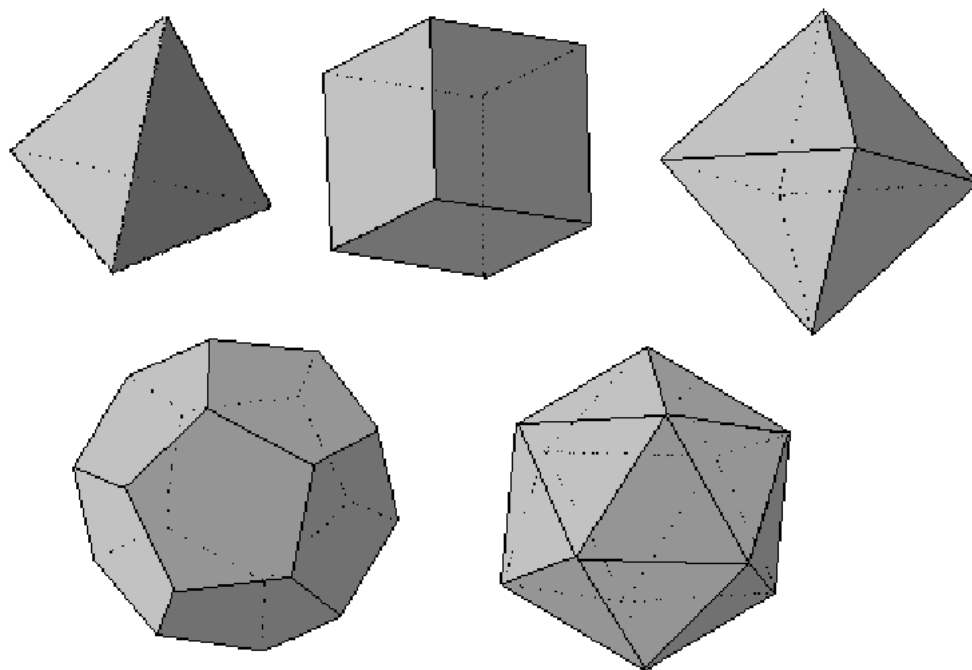
$$\begin{aligned} P &= \{x \in \mathbb{R}^d : a_1 x \leq b_1, \dots, a_m x \leq b_m\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq b\} \end{aligned}$$

gde je $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^d$ i $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$. Ovde je x vektor kolona, A je matrica dimenzije $m \times d$ sa vrstama $a_1, \dots, a_m$ i b je vektor kolona sa vrednostima $b_1, \dots, b_m$.

Zbog teorijskih i praktičnih razloga, korisno je znati obe ove definicije politopa. Na primer, iz definicije ***H*-politopa** jasno je da je presek dva politopa, politop, a iz definicije ***V*-politopa** jasno je da je projekcija politopa, politop. Dimenzija politopa je dimenzija njegovog afinog omotača.

Dvodimenzionalni politopi se nazivaju **poligoni** ili **mnogouglovi**. Prema broju temena, nazivamo ih ***n*-touglovi**. Pravilni poligoni su poligoni sa jednakim stranama: jednakostranični trougao, kvadrat, pravilni petougao,....

Trodimenzionalni politopi se nazivaju **poliedri**. Pravilni politopi u dimenziji 3 su Platonova tela ili pravilni poliedri: tetraedar, kocka, oktaedar, dodekaedar i ikosaedar.



Slika 1: Platonova tela

Teorema 2 *Neka je H politop i L afini potprostor, tada je $H \cap L$ takode politop.*

Teorema 3 *Neka su P i Q politopi u $\mathbb{R}^d$, tada je $P \cap Q$ takode politop.*

Dokaz: Kako su P i Q zadovoljeni sistemom nejednakosti, presek je skup tačaka koje zadovoljavaju sve nejednakosti u P i u Q . Taj presek je ograničen jer su i P i Q ograničeni. Zbog toga je $P \cap Q$ politop.

Hiperravan H u Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^d$ je afini podskup dimenzije $d - 1$ koji je zadat linearnom jednačinom

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d : ax = b\},$$

gde $a \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$. Hiperravan razdvaja $\mathbb{R}^d$ u dva poluprostora data nejednakostima $ax \leq b$ i $ax \geq b$.

Neka je $P \subset \mathbb{R}^d$ politop dimenzije d . Afina hiperravan H se naziva *nosač politopa* ukoliko preseca P i ceo politop P je sadržan u jednom od dva zatvorena poluprostora određena ovom hiperravni.

Definicija 6 *Presek politopa i nosača politopa naziva se **strana politopa**.*

Dimenzija strane politopa je jednaka dimenziji njenog afinog omotača. Ako je dimenzija strane politopa jednaka k , onda za nju kažemo da je to k -strana politopa i najčešće je obeležavamo sa F_i^k . Strane dimenzije 0 ili 1 se nazivaju temena ili ivice politopa. Skup svih strana politopa P čini mrežu $L(P)$ u odnosu na inkluziju. Najveći element u $L(P)$ je sam politop P , a najmanji je prazan skup (strana svakog politopa). Strane politopa, osim P i $\emptyset$, se nazivaju *pravim stranama* politopa P .

Neka je $V(P)$ skup temena politopa P . Navešćemo neke očigledne činjenice vezane za politope i njihove strane:

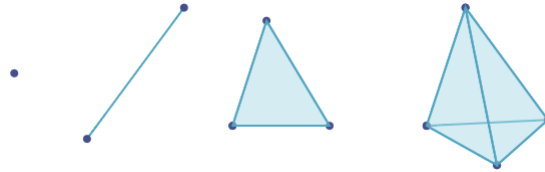
- Politop je konveksan omotač svojih temena: $P = \text{conv}(V(P))$
- Temena strane F od politopa P su temena politopa P sadržana u F :
 $V(F) = V(P) \cap F$
- Presek dve strane politopa P je strana politopa P
- Ako je F strana politopa P , onda je svaka strana strane F strana politopa P
- Strana F je jednaka preseku politopa P i afinog omotača strane F , to jest $F = P \cap \text{aff}(F)$

2.1.1 PRIMERI NEKIH POLITOPA

Primer 1 (Standardni d-simpleks) Δ_d je konveksan omotač vektora $e_1, e_2, \dots, e_{d+1}$ (standardne baze) u $\mathbb{R}^{d+1}$.

$$\begin{aligned}\Delta_d &= \text{conv}(e_1, e_2, \dots, e_{d+1}) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_1 + \dots + x_{d+1} = 1, x_1, \dots, x_{d+1} \geq 0\}\end{aligned}$$

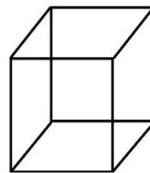
Simpleks dimenzije 0 je tačka, dimenzije 1 je duž, dimenzije 2 je trougao, a dimenzije 3 je tetraedar.



Slika 2: Simpleksi $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$

Primer 2 (Standardna d-kocka) C_d ili **hiperkocka** je politop koji predstavlja konveksan omotač 2^d tačaka u $\mathbb{R}^d$ čije su koordinate -1 ili 1 . Ovaj politop je zadat nejednačinama $-1 \leq x_i \leq 1$, za $i = 1, \dots, d$.

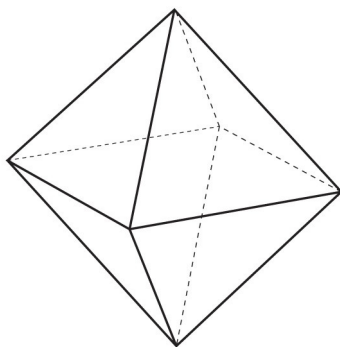
$$\begin{aligned}C_d &= \text{conv}(\{-1, 1\}^d) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, d\}\end{aligned}$$



Slika 3: Kocka C_3

Primer 3 (Kros-politop) $\diamond_d$ ili **d-hipersimpleks** je konveksni omotač tačaka $\{e_1, -e_1, e_2, -e_2, \dots, e_d, -e_d\}$ u $\mathbb{R}^d$ gde je $\{e_1, \dots, e_d\}$ standardna baza u $\mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned}\diamond_d &= \text{conv}(e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d) \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid ax \leq 1, a \in \{-1, 1\}^d\right\}\end{aligned}$$



Slika 4: Trodimenzionalni kros-politop (oktaedar)

2.2 SUMA MINKOVSKOG I PROIZVOD POLITOPA

Definicija 7 *Suma Minkovskog* dva politopa P i Q u $\mathbb{R}^d$ je skup

$$P + Q = \{p + q : p \in P, q \in Q\} \subset \mathbb{R}^d$$

Teorema 4 *Suma Minkovskog dva konveksna omotača nekih skupova tačaka je konveksni omotač nekog skupa tačaka:*

$$\text{conv}(v_1, \dots, v_k) + \text{conv}(w_1, \dots, w_l) = \text{conv}(v_1 + w_1, \dots, v_i + w_j, \dots, v_k + w_l)$$

Dokaz: Neka je $P = \text{conv}(v_1, \dots, v_k)$ i $Q = \text{conv}(w_1, \dots, w_l)$.

Tada $v_i + w_j \in P + Q$ za svako $1 \leq i \leq k$ i $1 \leq j \leq l$. Uzmimo proizvoljne tačke $x_1 \in P$, $x_2 \in Q$, tada je

$$x_1 = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i, \quad x_2 = \sum_{j=1}^l \mu_j w_j,$$

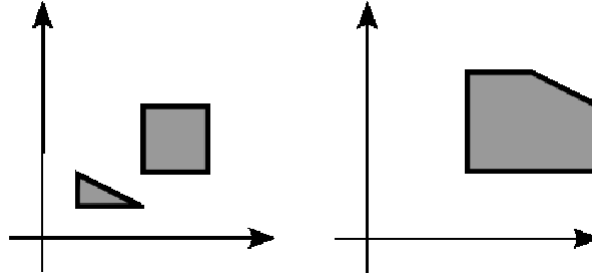
za neke $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ i $\sum_{j=1}^l \mu_j = 1$, $\mu_j \geq 0$. Imamo da je

$$x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(\sum_{j=1}^l \mu_j \right) v_i + \sum_{j=1}^l \mu_j w_j$$

$$= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \varepsilon_{ij} (v_i + w_j),$$

gde je $\varepsilon_{ij} = \lambda_i \mu_j \geq 0$ i $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \varepsilon_{ij} = 1$. Ovim smo dokazali teoremu.

Posledica 1 *Suma Minkovskog dva politopa je politop.*



Slika 5: Suma Minkovskog za dva dvodimenzionalna politopa

Teorema 5 (Proizvod dva politopa) *Ako su $P \subset \mathbb{R}^d$ i $Q \subset \mathbb{R}^e$ politopi (dimenzije d i e , respektivno), onda je $P \times Q$ takode politop, dimenzije $d + e$.*

Dokaz: Posmatramo H -politope. Neka je $P = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax \leq \alpha\}$ i $Q = \{y \in \mathbb{R}^e : By \leq \beta\}$. Neka je $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d+e} : \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\}$. Odatle sledi da je

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d+e} : \begin{bmatrix} Ax \\ By \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{d+e} : x \in P, y \in Q \right\} = P \times Q \end{aligned}$$

2.3 KONSTRUKCIJE ZA DOBIJANJE NOVIH POLITOPA

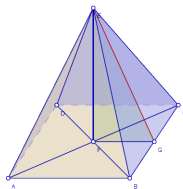
Pored operacija sa politopima, postoje još neke konstrukcije za dobijanje novih politopa. Navešćemo ih:

1. Piramida

Ako je P d -politop i x_0 tačka van afinog omotača. Onda je konveksni omotač

$$\text{pyr}(P) := \text{conv}(P \cup \{x_0\})$$

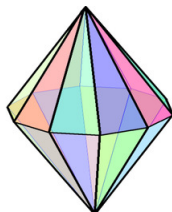
politop dimenzije $(d + 1)$. Zovemo ga *piramida iznad* P .



Slika 6: Piramida nastala od poligona

2. Bipiramida

Slično kao kod piramida, bipiramidu konstruišemo tako što ćemo izabrati dve tačke x i y , sa različitih strana afinog omotača skupa temena od P i duž $[xy]$ seče unutrašnjost politopa P .

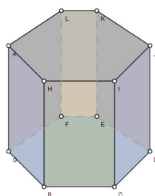


Slika 7: Bipiramida nastala od poligona

3. Prizma

Prizma nad politopom P je politop

$$\text{prism}(P) = P \times \Delta_1$$



Slika 8: Prizma nastala od poligona

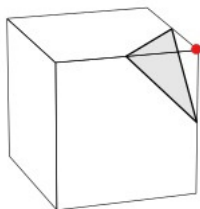
4. Odsečak temena

Odsečak temena je politop koji se dobija sečenjem politopa pomoću hiperravni koja sa jedne strane ima to teme, dok se sva ostala nalaze sa njene druge strane. Posmatramo politop P , gde je $V = V(P)$ i teme $v \in V$. Neka je $cx \leq c_0$ nejednakost za koju je

$$\{v\} = P \cap \{x : cx = c_0\}$$

Dalje, biramo neko $c_1 < c_0$, gde je $cv' < c_1$ za sve $v' \in V(P) \setminus \{v\}$. Definišemo temeni odsečak temena v kao politop:

$$P/v = P \cap \{x : cx = c_1\}$$



Slika 9: Kocka bez jednog temena

3 KOMBINATORNA SVOJSTVA POLITOPA

3.1 POSETI-PARCIJALNO UREĐENI SKUPOVI

Parcijalno uređen skup-poset $(S, \leq)$ je skup S uređen binarnom relacijom $\leq$ koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. To jest, važi:

- za svako $x \in S$, $x \leq x$
- za svako $x, y \in S$, ako je $x \leq y$ i $y \leq x$, onda je $x = y$
- za svako $x, y, z \in S$, ako je $x \leq y$ i $y \leq z$, onda je $x \leq z$

Primeri poseta kojima ćemo se baviti u ovom radu su poseti strana nekog politopa P , pa zbog toga skup S smatramo konačnim.

Za elemente $x, y \in S$, gde je $x \leq y$, označimo sa

$$[x, y] = \{w \in S : x \leq w \leq y\}$$

interval između x i y . Ako je $[x, y] = \{x, y\}$, onda kažemo da y pokriva x i označavamo $x \prec y$.

Za poset S kažemo da je **ograničen** ako postoje jedinstveni elementi $\hat{0} \in S$ i $\hat{1} \in S$, takvi da za sve $x \in S$ važi $\hat{0} \leq x \leq \hat{1}$.

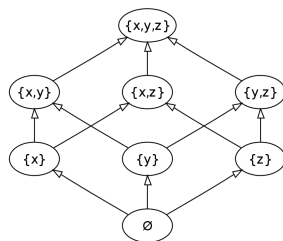
Podskup C od S u kojem je za sve $x, y \in C$, $x \leq y$ ili $y \leq x$, naziva se **lanac** u posetu S . Dužina lanca C je $|C| - 1$. U posetu S lanac C je maksimalan, ako ne postoji veći lanac koji ga sadrži. Ograničen poset S je **graduisan**, ako za bilo koje $a < b$, svi maksimalni lanci od a do b , imaju istu dužinu, odnosno, ako postoji **rang funkcija** $r : S \rightarrow \mathbb{N}$, takva da je $r(x) = 0$ za minimalan element x i $r(y) = r(x) + 1$, za $x \prec y$. Rang graduisanog poseta S je $r(\hat{1})$. Za sve $0 < k < r(S)$ definiše se k -ti nivo poseta S sa

$$S_k = \{x \in S : r(x) = k\}.$$

Parcijalno uređeni skupovi se šematski prikazuju **Haseovim dijagramom**. Na početku rada, smo spomenuli pojam mreže, a sada ćemo dati i definiciju.

Definicija 8 Poset S je **mreža**, ako svaka dva elementa $a, b \in S$ imaju najmanju gornju granicu $a \vee b$ i najveću donju granicu $a \wedge b$. Konačne mreže imaju najveći element $\hat{1}$ i najmanji element $\hat{0}$.

Primer 4 *Bulovski poset* $\mathbf{B}_n = P(\{x, y, z\}, \subseteq)$ je mreža.



Slika 10: Hase dijagram bulovskog poseta

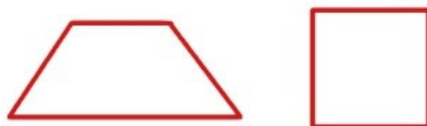
Sada kada smo se podsetili pojmova, mahom poznatih od ranije, pokaz ćemo kakva je njihova veza sa politopima.

Definicija 9 Poset (mreža) strana politopa P je skup $L(P)$ svih strana politopa koji je parcijalno uređen inkluzijom.

Kombinatorni tip je potpuno određen mrežom strana politopa.

Definicija 10 Dva politopa P i Q su **kombinatorno ekvivalentna** ako su im poseti strana izomorfni, to jest, ako je $L(P) \cong L(Q)$.

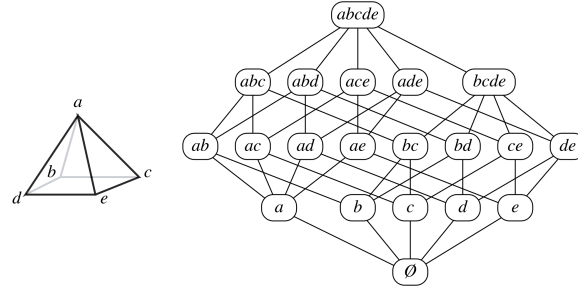
Takvi politopi imaju isti broj temena, ivica, strana, ... Primeri kombinatorno ekvivalentnih politopa su kocka i zarubljena četvorostrana piramida, kvadrat i trapez, romb i kvadrat, ... i još mnogi drugi.



Slika 11: Kombinatorno ekvivalentni dvodimenzionalni politopi

Kao što smo rekli, poseti se predstavljaju Haseovim dijagramom, pa se tako predstavlja i poset strana politopa. Haseov dijagram politopa je graf, čija su temena strane politopa, uključujući prazan skup i sam politop, a svaka ivica grafa povezuje neku k -stranu F_i^k i neku $(k+1)$ -stranu F_j^{k+1} takvu da je $F_i^k \subset F_j^{k+1}$.

Primer 5 Na slici je prikazana mreža strana četvorostране piramide. Na najnižem nivou je prazan skup, zatim temena, onda strane i na najvišem nivou sama piramida.



Slika 12: Hase dijagram za piramidu

Teorema 6 *Neka je P politop, tada:*

1. *Poset strana $L(P)$ je graduisana mreža dužine $\dim(P) + 1$, sa rang funkcijom $r(F) = \dim(F) + 1$.*
2. *Svaki interval $[G, F]$ od $L(P)$ je takođe mreža strana politopa, dimenzije $r(F) - r(G) - 1$.*
3. *(svojstvo romba) Svaki interval dužine dva ima tačno četiri elementa. Odnosno, ako je $G \subseteq F$, gde je $r(F) - r(G) = 2$, onda postoje tačno dve strane H , gde je $G \subset H \subset F$ i interval $[G, F]$ izgleda poput romba.*

Dokaz:

1. Da bismo pokazali da je $L(P)$ mreža, dovoljno je pokazati da ima jedinstven maksimalan elemenat $\hat{1} = P$, jedinstven minimalan elemenat $\hat{0} = \emptyset$ i da za bilo koje dve strane njihova najveća donja granica postoji, gde je $F \wedge G = F \cap G$. To je tačno, jer je $F \cap G$ strana od F i G , a time i od P , a svaka strana politopa P koja je sadržana u F i G , mora biti sadržana i u $F \cap G$.

(Sada ćemo se ubaciti sa dokazom druge tačke, kako bi se pozvali na nju u nastavku dokaza prve tačke)

2. Ako je $F = P$, a $G = \emptyset$, onda je to mreža strana polaznog politopa. Kada je $G = \emptyset$, a $F \neq P$ dobijamo mrežu strana strane F , a strana F je politop. Ako je $G \neq \emptyset$, onda postoji neko teme $v \in G$, koje je i teme politopa P i sada posmatramo odsečak od tog temena P/v . Time dobijamo mrežu strana politopa koji je manji od polaznog politopa i ta mreža strana je interval $[\{v\}, P]$. U G možemo da imamo još nekih temena, ali u svakom slučaju imamo ih manje nego na početku, jer smo jedno teme izbacili. Induktivno, možemo zaključiti da će ceo interval $[G, P]$ biti mreža strana nekog politopa, koji dobijamo tako što otkidamo jedno po jedno teme i tako pravimo odsečke

temena. Dokazali smo da je $[G, P]$ mreža strana nekog politopa, pa kako je $[G, F]$ manje nego polazni, ovo će biti mreža strana politopa. Dimenzija politopa, čija mreža strana odgovara intervalu $[G, F]$, je dobijena svakim otkidanjem temena, jer smo time i dimenziju smanjivali za po jedan (odsečak temena ima za jedan manju dimenziju od samog politopa). Iz toga sledi formula za dimenziju navedena u teoremi.

Vrat ćemo se na dokaz prve tačke i dokazati da je $L(P)$ graduisana mreža. Ako su $G \subset F$ strane od P , onda je $\text{aff}(G) \subset \text{aff}(F)$ i zbog toga je i $\dim(G) < \dim(F)$. Pa je dovoljno pokazati da ako je $\dim(F) - \dim(G) \geq 2$ onda postoji strana $H \in L(P)$, gde je $G \subset H \subset F$. Ali iz dokaza druge tačke, interval $[G, F]$ je mreža strana politopa dimenzije bar 1, tako da, postoji teme koje je u H .

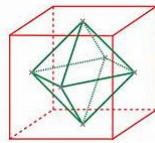
3. Ovo sledi trivijalno iz druge tačke, jer ako je ispunjeno $\dim([G, F]) = r(F) - r(G) - 1$, a $r(F) - r(G) = 2$, onda sledi da je $\dim([G, F]) = 1$, što znači da je taj politop ivica, a mreža strana ivice izgleda poput romba.

3.2 POLARNI, SIMPLICIJALNI I PROSTI POLITOPI

Definicija 11 Neka je $P \subset \mathbb{R}^d$ politop. **Polarni ili dualni politop** politopa P je

$$P^\Delta = \left\{ a \in (\mathbb{R}^d)^* : ax \leq 1 \quad \text{za sve} \quad x \in P \right\}$$

Primer 6 Politop polaran kocki je oktaedar i uopšteno, u dimenziji d , politop polaran d -dimenzionalnoj kocki je kros-politop.



Slika 13: Polarni politopi

Primer 7 Dodekaedar i ikosaedar su jedan drugom polarni politopi.

Primer 8 Polarni politop od simpleksa je takode simpleks.

Teorema 7 Neka su P i Q politopi. Tada važi:

1. ako je $P \subseteq Q$ onda $P^\Delta \supseteq Q^\Delta$
2. $P \subseteq P^{\Delta\Delta}$
3. ako $0 \in P$ onda $P = P^{\Delta\Delta}$
4. ako $0 \in \text{int}P$ i $P = \text{conv}(V)$ onda je $P^\Delta = \{a : av \leq 1, \text{ za svako } v \in V\}$

Treba još napomenuti da kada okrenemo naopačke mrežu strana nekog politopa dobijamo mrežu strana njegovog polarnog politopa.

Sada ćemo objasniti šta su to simplicijalni, a šta prosti politopi.

Definicija 12 *Simplicijalni politopi su politopi kod kojih su sve prave strane simpleksi.*

Primer 9 *Simpleks i kros-politop su primeri simplicijalnih politopa.*

Definicija 13 *Politop dimenzije d je **prost** kada mu je svako teme incidentno sa tačno d ivica.*

Najpoznatiji prosti politopi su poligoni i kub. Postoje i familije prostih politopa koji se dobijaju gradećim skupovima o kojima će biti reč nešto kasnije.

Teorema 8 *Jedini politopi koji su i simplicijalni i prosti su poligoni i simpleksi.*

Teorema 9 *Politop P je simplicijalan ako i samo ako je P^Δ prost.*

3.3 GRAFOVI, DRVETA I GRADEĆI SKUPOVI

U ovom poglavlju, navešćemo definiciju grafova i neke osnovne pojmove vezane za njih. Nakon toga ćemo uvesti pojam gradećeg skupa i objasniti njegovu ulogu među politopima.

Definicija 14 *Graf $\Gamma = (V, E)$ je ureden par, gde je V neprazan skup, čiji su elementi čvorovi grafa, a skup grana E je simetrična, irefleksivna relacija na V . Broj elemenata skupa V se naziva **red grafa**.*

Definicija 15 *Dve grane su **susedne**, ako dele isti čvor.*

Definicija 16 *Kompletan ili potpun graf* je onaj graf kod koga su svaka dva čvora povezana granom.

Definicija 17 *Staza* je graf $(V = \{v_1, \dots, v_n\}, E = \{(v_i, v_j) \mid |i - j| = 1\})$.

Definicija 18 *Put* u grafu je niz grana od kojih su svake dve uzastopne susedne.

Definicija 19 *Graf je povezan* ako između svaka dva čvora postoji put.

Definicija 20 *Put je prost* ako ne prolazi više od jednom kroz isti čvor.

Definicija 21 *Ciklus* u grafu je prost put koji počinje i završava se u istom čvoru.

Definicija 22 *Graf je cikličan* ako sadrži bar jedan ciklus. Graf bez ciklusa se naziva *acikličnim* grafom.

Definicija 23 *Drvo* se definiše kao acikličan, povezan graf. Takvo drvo ima više važnih svojstava: nema ciklusa, između svaka dva čvora postoji jedinstven put, broj grana je za jedan manji nego broj čvorova, ako se doda grana između bilo koja dva nesusedna čvora, onda nastaje ciklus u grafu i ako se bilo koja grana ukloni, graf postaje nepovezan.

Neka je B kolekcija nepraznih podskupova skupa $[n] = \{1, \dots, n\}$ i neka su $e_i, i = 1, \dots, n$ vektori standardne baze u R^n . Za svako $I \in B$ neka je $\Delta_I = \text{conv}(e_i \mid i \in I)$ i $P_B = \sum_{I \in B} \Delta_I$ suma Minkovskog. Opisaćemo jednu klasu kolekcija B za koje je politop P_B prost.

Definicija 24 *Kolekcija B nepraznih podskupova skupa $[n]$ se naziva **gradeći skup** kada važi:*

1. Ako $I, J \in B$ i $I \cap J \neq \emptyset$, onda $I \cup J \in B$
2. $\{i\} \in B$ za sve $i \in [n]$.

Definicija 25 *Ograničenje grafa, u oznaci $\Gamma|_I$, na neki podskup I njegovih temena, ima za skup temena baš I , a grane su mu one grane iz polaznog grafa čija su oba kraja u I .*

Definicija 26 *Neka je Γ graf na skupu temena $[n] = \{1, \dots, n\}$. **Grafofski gradeći skup** $B(\Gamma)$ je skup svih nepraznih podskupova $I \subset [n]$ takvih da je graf $\Gamma|_I$ povezan.*

Teorema 10 *Grafovski gradeći skup $B(\Gamma)$ je gradeći skup.*

U nastavku ćemo koristiti $P(\Gamma)$ kao skraćenicu za $P_{B(\Gamma)}$. Navešćemo neke važne primere familija prostih politopa koje ćemo detaljnije razmatrati.

Primer 10 *Ako je graf Γ staza sa $n - 1$ čvorova, onda je $P(\Gamma)$ $(n - 2)$ -dimenzionalni asociedar K_n . Svakoj strani tog asociedra odgovara jedna reč napravljena sa n slova i $n - 1$ operacijskim simbolom, što će se videti kasnije na strani 18.*

Primer 11 *Ako je graf Γ kompletan graf sa n čvorova, $P(\Gamma)$ je $(n - 1)$ -dimenzionalni permutoedar Π_{n-1} .*

Primer 12 *Ako je graf Γ cikl sa n čvorova, $P(\Gamma)$ je $(n - 1)$ -dimenzionalni cikloedar C_{n-1} .*

Podsetićemo se još i šta je triangulacija politopa.

Definicija 27 *Triangulacija politopa P je konačna kolekcija T politopa, takva da:*

- P je unija politopa u T
- ako $Q \in T$ onda je svaka strana politopa P u T
- ako $Q, R \in T$ onda $Q \cap R \in T$
- svi elementi u T su simpleksi

Sledeće tvrđenje dajemo bez dokaza.

Teorema 11 *Svaki politop ima triangulaciju.*

Još ćemo uvesti pojam **trunkacije**, koji će nam omogućiti alternativnu geometrijsku realizaciju asociedara, permutoedara i cikloedara. Naime, ove familije smo definisali pomoću suma Minkovskog koje se teško daju vizuelizovati—geometrijske realizacije pomoću trunkacija simpleksa će nam dati mnogo bolju sliku o ovim familijama prostih politopa.

Definicija 28 *Trunkacija strane F_i^k nekog d -politopa za $0 \leq k \leq d - 2$ je presek tog politopa i poluprostora u čijoj se unutrašnjosti nalaze sva temena politopa osim temena strane F_i^k .*

3.3.1 ASOCIEDAR K_n , PERMUTOEDAR Π_{n-1} I CIKLOEDAR C_{n-1}

Asociedar K_n se kombinatorno može zadati kao $(n - 2)$ -politop kome svako teme odgovara načinu korektnih postavljanja parova zagrada koje odgovaraju binarnoj operaciji u reči. Uopšteno, k -strana ovog politopa odgovara reči sa n slova u kojoj fali k pari zagrada. Takođe, možemo tumačiti i ovako: temena asociedra odgovaraju triangulaciji konveksnog poligona sa $n + 1$ strana, ivica asociedra odgovara jednoj triangulaciji konveksnog poligona sa $n + 1$ strana u kojoj je obrisana jedna dijagonala, dvodimenzionalna strana odgovara triangulaciji u kojoj su obrisane dve dijagonale i ovo je put koji će nas dovesti do Kirkman-Kejlijevih brojeva. Asociedri se takođe zovu i Staševljevi politopi, po Jim Stasheff-u koji je ovu kombinatornu definiciju realizovao kao konveksno telo ranih šezdesetih godina prošlog veka.

Sada ćemo videti koliko temena ima asociedar K_n za $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Ako imamo datu reč sa samo dva slova, onda imamo samo jedan način za postavljanje zagrada i to su spoljašnje zagrade. Ako imamo datu reč sa tri slova, broj načina da postavimo zagrade (takvih da svaka zagrada uključuje najmanje dva slova) je dva. Ako imamo datu reč sa četiri slova, broj načina da postavimo zagrade je pet. Ako imamo datu reč koja ima pet slova, broj načina da postavimo zagrade je četrnaest. Ako imamo datu reč koja ima šest slova, broj načina da postavimo zagrade je četrdesetdva. Brojevi 1, 2, 5, 14, 42 predstavljaju prvi, drugi, treći, četvrti i peti **Katalanov broj**, to jest ukupan broj svih mogućih triangulacija poligona sa 3, 4, 5, 6 i 7 strana. Katalanovi brojevi se računaju po formuli $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Ova formula nam daje mogućnost da izračunamo broj temena proizvoljnog asociedra. Jedna od najvažnijih kombinatornih invarijanti politopa je njegov f -vektor. Ako za d -politop, sa f_k , $0 \leq k \leq d$ označimo broj njegovih k -strana, onda "vektor" $(f_0, \dots, f_d)$ predstavlja f -vektor tog politopa. Znači, za određivanje f -vektora proizvoljnog asociedra, pored Katalanovih brojeva koji nam daju f_0 ostaje nam da odredimo i brojeve strana ostalih dimenzija. Sekcija [4] u kojoj ćemo dati jedan noviji dokaz Kirkman-Kejlijeve formule je posvećena tom problemu.

Kako je prazan skup strana svakog politopa, imamo da je $f_{-1} = 1$. Takođe, $f_d = 1$, jer je politop P jedina strana politopa P dimenzije d . Za neke politope, možemo zaključiti koliko imaju i -dimenzionih strana. Na primer, za simpleks Δ_d , važi $f_i(\Delta_d) = \binom{d+1}{i+1}$, a za d -kocku imamo da je

$$f_i(C_d) = 2^{d-i} \binom{d}{i}.$$

Postavlja se pitanje, da li možemo znati kako izgleda f -vektor za svaki politop dimenzije d ?

Za $d = 2$, očigledno je da je $f_2 = 1$ i $f_1 = f_0$, dok za $d = 3$ važi sledeća teorema:

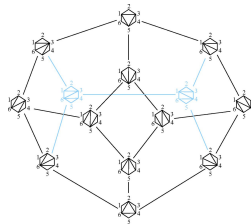
Teorema 12 (Štajnicova teorema) *Za svaki trodimenzionalni politop f -vektor zadovoljava sledeće (ne)jednakosti:*

- $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ (Ojlerova relacija)
- $f_0 \leq 2f_2 - 4$
- $f_2 \leq 2f_0 - 4$

Međutim, ova teorema nam ne govori ništa o politopima dimenzije $d > 3$. Zato ćemo se skoncentrisati na proste d -dimenzionalne politope, politope kod kojih je svako teme incidentno sa tačno d ivica.

Primer 13 *Neka je $abcd$ reč sa četiri slova, postoji pet načina za postavljanje zagrada. Tih pet načina odgovara broju triangulacija pentagona.*

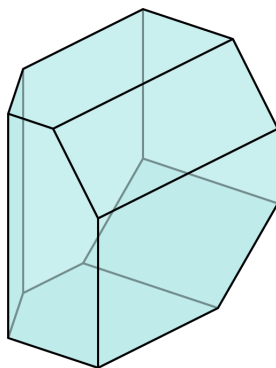
Primer 14 *Ako posmatramo reči sa pet slova, onda imamo 14 načina da pravilno postavimo zagrade. Na taj način dobijemo politop koji ima 14 temena, gde svako teme odgovara jednoj triangulaciji šestougla, 21 ivica i 9 strana.*



Slika 14: Trodimenzionalni asociedar određen triangulacijama

Još, za kraj, da vidimo kako se pomoću gradećeg skupa i trunkacija simpleksa može geometrijski realizovati asociedar. Kao što smo napomenuli u uvodu, gradeći skup koji odgovara trodimenzionalnom asociedru je nastao iz staze $1 - 2 - 3 - 4$. Toj stazi odgovara gradeći skup B dat sa $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$.

Kada nacrtamo simpleks dimenzije 3, to jest tetraedar, označićemo njegove pljosni brojevima 1, 2, 3 i 4. Na osnovu ovako zadatog gradećeg skupa B trunkiramo prvo teme koje je zajedničko pljosnima 1, 2 i 3, kao i teme koje je zajedničko pljosnima 2, 3 i 4. Zatim trunkiramo ivicu koja se nalazi između pljosni 1 i 2, zatim ivicu koja se nalazi između pljosni 2 i 3 i ivicu koja se nalazi između pljosni 3 i 4. Dakle, trunkiraćemo dva temena i tri ivice i na taj način dobiti trodimenzionalni asociedar K_5 .



Slika 15: Primer kako se trunkacijom dobija trodimenzionalni asociedar

Permutoedar Π_{n-1} je $(n-1)$ -dimenzionalni politop u $\mathbb{R}^n$ sa temenima koji odgovaraju permutacijama vektora $(1, 2, \dots, n)$ i čije ivice odgovaraju transpoziciji između dveju koordinata. Permutoedar dimenzije $n-1$ ima $n!$ temena, jer je $n!$ broj permutacija n -točlanog skupa. Svako teme je vezano ivicom sa $n-1$ preostalih temena, pa je ukupan broj ivica $\frac{n!(n-1)}{2}$ dva temena koji se razlikuju zamenom mesta dve koordinate. Broj k -strana permutoedra Π_{n-1} , to jest k komponentu f -vektora ovog permutoedra, ćemo dobiti pomoću formule

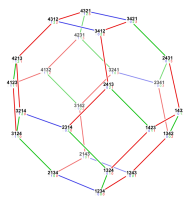
$$f_k = (n-k)! S(n, n-k),$$

za $0 \leq k \leq n-1$, gde je $S(n, n-k)$ -Stirlingov broj druge vrste (broj particija skupa od n elemenata u $n-k$ nepraznih delova).

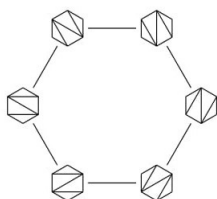
Primer 15 *Permutoedar dimenzije 3 koji ima $4!$ temena.*

Cikloedar C_n je n -dimenzionalni politop, sličan asociedru. Temena su označena centralno-simetričnim triangulacijama pravilnog $(2n+2)$ -poligona.

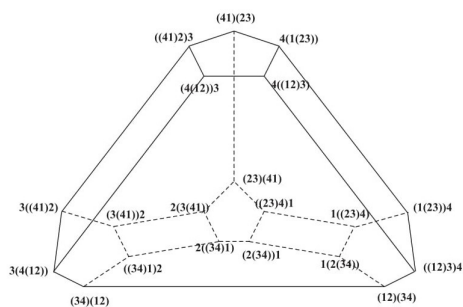
Politop C_n se kombinatorno opisuje analogno asociedru. Njegova temena odgovaraju pravilno postavljenim zgradama u cikličnoj reči od $n+1$ slova. Svaka k -strana odgovara brisanju k parova zgrada iz takve reči.



Slika 16: Trodimenzioni permutoedar



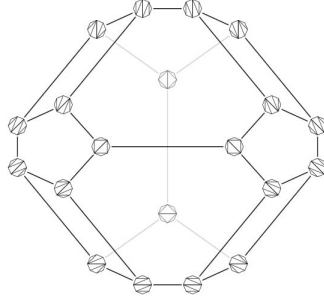
Slika 17: Centralno-simetrične triangulacije šestougla



Slika 18: Cikloedar čija su temena predstavljena pravilno postavljenim za-gradama u cikličnoj reči sa četiri slova

4 KIRKMAN-KEJLIJEVA TEOREMA

Neka je $D_{n+1,k-1}$ broj disekcija konveksnog poligona sa $n + 1$ označenih strana i $k - 1$ dijagonala, tako da se nikoje dve ne seku u unutrašnjosti. Formula za broj takvih disekcija dolazi od Kirkmana i Kejlja (koji su dali



Slika 19: Cikloedar čija su temena triangulacije opisane u definiciji

prvi potpuni dokaz)

$$D_{n+1,k-1} = \frac{1}{k} \binom{n-2}{k-1} \binom{n+k-1}{k-1}$$

Ovde ćemo prikazati dokaz Kirkman-Kejlijeve formule dat u [4] u kome se uspostavlja bijekcija između skupa disekcija poligona i nekih drugih skupova čiju kardinalnost je lakše odrediti.

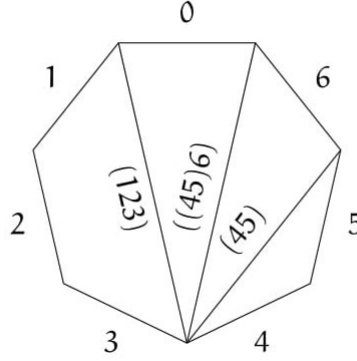
Definicija 29 $S_2((a_1, \dots, a_n), k)$ je skup svih reči koje nastaju od reči $a_1 \dots a_n$ uvođenjem k parova zagrada, takvih da je:

- Cela reč u jednom paru zagrada
- Svaki par zagrada sadrži bar dva slova

Kroz sledeći primer, objasnićemo šta nam ovaj pojam znači za asociedre i dalje izvođenje dokaza.

Primer 16 Neka je $n = 6$ i $k = 4$. Posmatrajmo $(n + 1)$ -poligon (sedmougao), u kojem jednu stranu označimo sa 0, a sve ostale strane označimo sa $a_1 = 1, \dots, a_n = n$. Element skupa $S_2((a_1, \dots, a_n), k)$ će biti jedna reč koja se sastoji od šest slova i to baš u ovom redosledu 1 2 3 4 5 6 i u koju je uneto k parova zagrada ($k = 4$), takvih da su ispunjeni gornji uslovi. Jedan par zagrada smo potrošili na najspoljašnije i još imamo pravo na 3 para zagrada, s tim što svaki par sadrži bar dva slova. Na primer, $((123)((45)6))$. Ove reči izjednačavamo sa dijagonalnom podelom sedmougla. U tom sedmouglu, kao i u svakom $(n + 1)$ -poligonu o kom se radi, imamo $k - 1$ nepresecajućih dijagonala, jer je ova jedna spoljašnja zagrada obavezna. Takva jedna reč je element našeg skupa

$$((123)((45)6)) \in S_2((1, \dots, 6), 4).$$



Slika 20: Disekcija koja odgovara $((123)((45)6))$

Kako ove reči lako dovodimo u bijekciju sa crtežima $(n+1)$ -poligona sa $k-1$ nepresecajućih dijagonala, zaključujemo da je

$$|S_2((a_1, \dots, a_n), k)| = D_{n+1, k-1}.$$

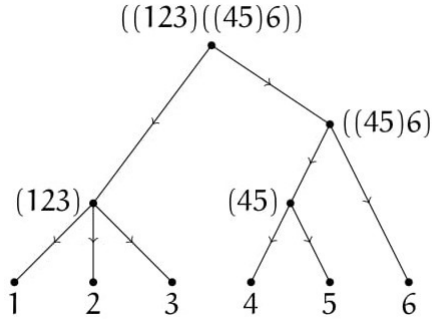
Pogledaćemo kakva je veza između skupa $S_2((a_1, \dots, a_n), k)$ i drвета. Imamo skup čiji elementi su nizovi koji sadrže brojeve $1, \dots, n$ i k parova uparenih zagrada. One mogu biti predstavljene drvetom orijentisanim od korena ka n listova (spoljašnjih čvorova). Svaki čvor koji nije list predstavlja podniz koji počinje otvorenim zagradaama i završava se odgovarajućim zatvorenim zagradaama (koren predstavlja čitav niz). Postoji grana od čvora i do čvora j ako je j sadržan u nizu i ne postoji drugi niz takav da je $j \subset l \subset i$. Sledeća slika prikazuje primer ovakvog predstavljanja terma sa zagradaama. Kako svaka zagrada sadrži najmanje dva člana, svaki unutrašnji čvor se račva u bar dve grane.

Definicija 30 $T_2(n+k-1, k)$ je skup particija skupa $\{1, 2, \dots, n+k-1\}$ u k delova, kardinalnosti veće ili jednake dva. Svaka takva particija može da se predstavi kao drvo čiji su svi čvorovi označeni na gornji način, sa n listova i k unutrašnjih čvorova, od kojih se svaki račva bar u dve grane.

Sada, pomoću pojma iz definicije 29, definisaćemo sledeći, glavni pojam.

Definicija 31 Ako su $a_1, \dots, a_n$ međusobno različiti onda je $S_2((a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}), k) \cap S_2((a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(n)}), k) = \emptyset$ za $\sigma \neq \tau$ i tada definišemo pojam

$$\mathcal{O}S_2((a_1, \dots, a_n), k) = \bigcup_{\sigma \in S_n} S_2((a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}), k),$$



Slika 21: Drvo koje odgovara $((123)((45)6))$

čija je unija disjunktna i S_n je simetrična grupa, to jest grupa permutacija n -točlanog skupa.

Napomena: Znajući da je unija iz prethodne definicije disjunktna, možemo zaključiti da je

$$|\mathcal{OS}_2((a_1, \dots, a_n), k)| = n! |S_2((a_1, \dots, a_n), k)| = n! D_{n+1, k-1}.$$

Definicija 32 Neka je X konačan skup. **Unutrašnje uređena k -particija** skupa X je zadata sa:

1. Običnom particijom $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$

- $P_i \cap P_j = \emptyset, i \neq j$
- $P_i \neq \emptyset$
- $P_1 \cup \dots \cup P_k = X$

2. Linearnim uređenjem na P_i za svako i . Ako je još za svako i , $|P_i| \geq 2$, onda je ta unutrašnje uređena k -particija **prihvatljiva**.

Od posebnog značaja nam je prihvatljiva unutrašnje uređena k -particija, pa ćemo zato, kad god nam je potrebna, koristiti skraćenicu PUUKP.

Definicija 33 $IT_2(n + k - 1, k)$ je skup svih PUUKP skupa $[1, n + k - 1]$, za sve prirodne brojeve n i k , gde je $n \geq 2$ i $n - 1 \geq k \geq 1$.

Sada sledi jedna vrlo važna teorema, jer ako možemo izračunati koliko skup $IT_2(n + k - 1, k)$ ima elemenata, onda znamo i koliko elemenata ima skup $\mathcal{OS}_2((a_1, \dots, a_n), k)$.

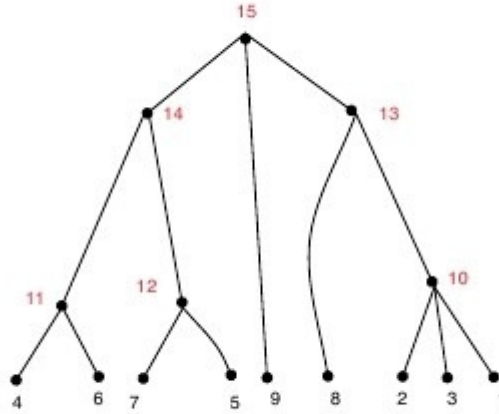
Teorema 13 *Postoji bijekcija između skupa $\mathcal{OS}_2((a_1, \dots, a_n), k)$ i skupa $IT_2(n + k - 1, k)$.*

Dokaz: Neka je $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_n = n$. Ova teorema se nadovezuje na još jednu koju je Gaiffi ranije dokazao, a to je da postoji bijekcija između skupa $S_2((a_1, \dots, a_n), k)$ i skupa $T_2(n + k - 1, k)$. Tako možemo od reči $S \in S_2((a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}), k)$ konstruisati planarno drvo, jer nam je bitan redosled listova. Nacrtamo listove označene sa $a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}$. Konstruišemo PUUKP skupa $[1, n + k - 1]$ prema sledećem pravilu. Skupovi $P_1, \dots, P_k$ particije su unutrašnji čvorovi drveta. Deo P_i je dobijen od čvora označenog sa $n + i$ i to je uređen skup konstruisan na ovaj način: ako su čvorovi $b_1, b_2, \dots, b_r$ (od levog ka desnom) pokriveni čvorom označenim sa $n + i$, onda je P_i skup $\{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ uređen sa

$b_1 < b_2 < \dots < b_r$. Na taj način smo opisali funkciju

$\Gamma : \mathcal{OS}_2((1, 2, \dots, n), k) \longrightarrow IT_2(n + k - 1, k)$. Inverzna funkcija je konstruisana povezivanjem drveta u PUUKP $\{P_1, \dots, P_k\}$ skupa $[1, n + k - 1]$. Sada u obzir uzimamo unutrašnje uređenje skupova $P_1, P_2, \dots, P_k$ i crtamo grane, od leva ka desno, prema ovom uređenju. Na kraju dobijamo skup permutacije niza $1, 2, \dots, n$ kao što je ilustrovano na slici.

$\{2,3,1\} \{4,6\} \{7,5\} \{8,10\} \{11,12\} \{14,9,13\}$



$S = (((4,6),(7,5)),9,(8,(2,3,1)))$

Slika 22: Unutrašnje uređena particija skupa $[1, 14]$ na 6 delova (vrh slike), koja odgovara postavljanju 6 pari zagrada u reči 467598231 na dnu slike

Definicija 34 *Istaknuta unutrašnje uređena k -particija skupa X je PUUKP tog skupa čija je jedna komponenta istaknuta.*

Takva particija izgleda ovako $\{X_1, P_2, \dots, P_k\}$, svaka je uređena linearno i svaka ima bar dva elementa.

Definicija 35 *Particija skupa $X - \{X_1\}$, dakle particija $P_2, \dots, P_k$, imaće uređenje takvo da ako je jedan ispred drugog znači da će najmanji element u P_i biti manji od najmanjeg elementa u P_j .*

Skup X je podskup skupa celih brojeva, pa ćemo umesto $a_1, \dots, a_n$ zamišljati prirodne brojeve $1, \dots, n$. Zato možemo porediti najmanje elemente od P_i i P_j i ako je najmanji elemenat u P_i manji od najmanjeg elementa u P_j (po uređenju u $\mathbb{N}$), onda ćemo u tom redosledu i pisati ove $P_2, \dots, P_k$. Da pojasnimo, ako P_2 ima unutrašnje linearno uređene elemente, zapisaćemo ih kao niz, $P_2 = \langle 5 < 3 < 17 \rangle$, a P_3 ima uređenje $P_3 = \langle 6 < 1 < 12 < 4 \rangle$ (oni su međusobno disjunktni, $5 = \min_{P_2} P_2$ i $6 = \min_{P_3} P_3$ i znamo da je $5 <_{\mathbb{N}} 6$ po uređenju u skupu prirodnih brojeva), onda su lepo postavljeni i P_2 dolazi ispred P_3 .

Definicija 36 *Označićemo sa $IIT_2(n+k-1, k)$ skup istaknutih unutrašnje uređenih k -particija od $[1, n+k-1]$. Njih ima onoliko koliko ima i običnih, pa još puta k , zbog k načina da istaknemo jedan element od njih k , to jest važi:*

$$|IIT_2(n+k-1, k)| = k|IT_2(n+k-1, k)|.$$

Teorema 14 *Neka su n i k prirodni brojevi takvi da je $n \geq 2$ i $n-1 \geq k \geq 1$ onda postoji bijekcija između skupa $IIT_2(n+k-1, k)$ i trojki oblika (I, σ, D) , gde je:*

1. $I = i_1, \dots, i_n$ podniz dužine n niza $L = 1, 2, \dots, n+k-1$
2. $\sigma \in S_n$
3. D je podniz dužine $k-1$ niza $i_{\sigma(2)}, \dots, i_{\sigma(n-1)}$. Specijalno, ako je $n \geq 2$ i $k = 1$, onda je D prazan niz.

Dokaz: Posmatrajmo trojku (I, σ, D) . Neka je $I = i_1, i_2, \dots, i_n$ (gde je $i_1 < i_2 < \dots < i_n$) i označimo sa $J = j_1, j_2, \dots, j_{k-1}$ podniz od L , napravljen od brojeva koji ne pripadaju I (primetimo da je $j_1 < j_2 < \dots < j_{k-1}$). Sada koristimo σ da permutujemo niz I .

$$\sigma I = i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \dots, i_{\sigma(n)}$$

Radi lepše notacije, stavićemo da je $D = i_{\sigma(d_1)}, \dots, i_{\sigma(d_{k-1})}$, gde je $d_1 \geq 2, d_{k-1} \leq n-1$. Pokazaćemo kako da trojci (I, σ, D) pridružimo istaknutu unutrašnje uređenu k -particiju skupa $[1, n+k-1]$. Prvo stavimo da je skup X_1 jednak skupu $\{i_{\sigma(n)}, i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(d_1-1)}\}$ sa uređenjem $i_{\sigma(n)} < i_{\sigma(1)} < \dots < i_{\sigma(d_1-1)}$. Onda gradimo skupove

$$P_2 = \{j_1, i_{\sigma(d_1)}, i_{\sigma(d_1+1)}, \dots, i_{\sigma(d_2-1)}\}$$

$$P_3 = \{j_2, i_{\sigma(d_2)}, i_{\sigma(d_2+1)}, \dots, i_{\sigma(d_3-1)}\}$$

...

$$P_k = \{j_{k-1}, i_{\sigma(d_{k-1})}, i_{\sigma(d_{k-1}+1)}, \dots, i_{\sigma(n-1)}\}$$

i za svako $2 \leq i \leq k$, važi uređenje kao u X_1 . Primetimo da skupovi $P_2, \dots, P_k$ formiraju neuređenu particiju skupa $[1, n+k-1] - \{X_1\}$, indeksirani prema definiciji 35. Zaključujemo, da polazeći od trojke (I, σ, D) možemo dobiti istaknutu unutrašnje uređenu k particiju skupa $[1, n+k-1]$, što ćemo ilustrovati u sledećem primeru. Da je ova funkcija injektivna lako se vidi i iz same definicije. Sada ćemo pokazati da je funkcija i surjektivna, tj da se sve istaknute unutrašnje uređene k -particije skupa $[1, n+k-1]$ mogu dobiti od trojki (I, σ, D) . Ako je $k = 1$, ovo je trivijalno. Neka je $k \geq 2$ i neka je $X_1, P_2, \dots, P_k$ takva particija. Detaljnije, neka je X_1 uređen skup $\{x_1, x_2, \dots, x_{|X_1|}\}$ i neka je za svako $i, 2 \leq i \leq k, P_i$ uređen skup $P_i = \{p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{i|P_i|}\}$. Prema definiciji 35, indeksi od P_i zadovoljavaju $p_{21} < \dots < p_{k1}$. Označimo sa J niz $p_{21}, \dots, p_{k1}$ i sa $I = i_1, \dots, i_n$ podniz od L i komplementaran nizu J . Zatim izaberemo permutaciju $\sigma \in S_n$, definisanu kao permutaciju takvu da se niz

$$\sigma I = i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n-1)}, i_{\sigma(n)}$$

poklapa sa nizom

$$x_2, \dots, x_{|X_1|}, p_{22}, p_{23}, \dots, p_{2|P_2|}, p_{32}, p_{33}, \dots, p_{3|P_3|}, \dots, p_{k2}, \dots, p_{k|P_k|}, x_1.$$

Nakon odsecanja prvog i poslednjeg elementa niza σI , izvadimo iz dobijenog niza, podniz kardinalnosti $k-1$

$$D = i_{\sigma(|X_1|)}, i_{\sigma(|X_1|+|P_2|-1)}, i_{\sigma(|X_1|+|P_2|+|P_3|-2)}, \dots, i_{\sigma(|X_1|+|P_2|+\dots+|P_{k-1}|-(k-2))}$$

(specijalno, ako je $k = 2$ ovaj niz je $D = i_{\sigma(|X_1|)}$). Ovim smo formirali trojku (I, σ, D) koja se slika u istaknutu k -particiju $X_1, P_2, \dots, P_k$ što znači da je pridruživanje "na". Kako je ovo preslikavanje i "1-1", zaključujemo da postoji bijekcija između polazna dva skupa.

Kako imamo $\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$ načina da izaberemo I , $n!$ načina za σ i $\binom{n-2}{k-1}$ načina da izaberemo D , broj elemenata skupa (I, σ, D) je

$$\binom{n+k-1}{k-1} n! \binom{n-2}{k-1}.$$

Primer 17 Neka je $n = 7$ i $k = 4$, posmatramo trojku (I, σ, D) , gde:

- $I = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10$, $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7)$ je podniz niza $L = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$
- σ je permutacija u S_7 takva da

$$\sigma I = 2, 6, 1, 10, 3, 9, 4, (i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, i_{\sigma(3)}, i_{\sigma(4)}, i_{\sigma(5)}, i_{\sigma(6)}, i_{\sigma(7)})$$

- $D = 1, 3, 9$, $(i_{\sigma(3)}, i_{\sigma(5)}, i_{\sigma(6)})$ je podniz niza $6, 1, 10, 3, 9$ (to jest, niza σI bez prvog i poslednjeg elementa).

Ovu trojku ćemo povezati sa istaknutom unutrašnje uređenom particijom X_1, P_2, P_3, P_4 skupa $[1, 10]$, prema prethodnoj teoremi. Skup X_1 je $\{i_{\sigma(7)}, i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}\}$, to jest $X_1 = \{4, 2, 6\}$ sa uređenjem $4 < 2 < 6$. Sada primećimo da je komplement od $I = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10$ u $L = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, niz $J = 5, 7, 8$. Zatim, $P_2 = \{5, i_{\sigma(3)}, i_{\sigma(4)}\}$, to jest $P_2 = \{5, 1, 10\}$ sa uređenjem $5 < 1 < 10$. Na analogan način dobijamo da je $P_3 = \{7, 3\}$ i $P_4 = \{8, 9\}$.

Konačno, možemo zaključiti da, vraćajući se u nazad po teoremama u ovom poglavlju, dolazimo do Kirkman-Kejlijevog broja:

$$\binom{n+k-1}{k-1} n! \binom{n-2}{k-1} = k n! D_{n+1, k-1}$$

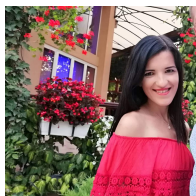
$$D_{n+1, k-1} = \frac{1}{k} \binom{n+k-1}{k-1} \binom{n-2}{k-1}.$$

Zahvaljujući brojevima Kirkman-Kejlija, sada možemo da izračunamo f -vektor (broj strana proizvoljne dimenzije) d -dimenzionog asocietra.

LITERATURA

- [1] A. POSTNIKOV, *Permutohedra, Associahedra, and Beyond*, *International Mathematics Research Notices*, 2009, pp.1026-1106
- [2] FEDERICO ARDILA, *Algebraic and geometric methods in enumerative combinatorics*, 2014 (dostupno na <http://math.sfsu.edu/federico/Articles/methods.pdf>)
- [3] FULTON-MACPHERSON, *Compactification, cyclohedra, and the polygonal pegs problem*, *Annals of Mathematics*, vol. 139, (1994), pp.3-7
- [4] GIOVANNI GAIFFI, *Nested sets, set partitions and Kirkman-Cayley dissection numbers*, *European Journal of Combinatorics*, 2014, pp. 1-9
- [5] G.M. ZIEGLER, *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag New York, 1995, pp. 1-190
- [6] JEAN LOUIS LODAY, *The multiple facets of the associahedron*, 2005 (dostupno na <https://www.claymath.org/library/academy/LectureNotes05/Lodaypaper.pdf>)

BIOGRAFIJA



Valentina Pavlović je rođena 23. jula 1992. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu „Veljko Vlahović“ u Novom Sadu završila je 2007. godine, kao nosilac Vukove diplome. Iste godine je upisala Gimnaziju „Isidora Sekulić“ u Novom Sadu, prirodno-matematički smer, koju je završila 2011. godine. Nakon završetka srednje škole, upisala je osnovne akademske studije Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer Diplomirani profesor matematike, koje je završila 2017. godine. Iste godine je upisala master akademske studije, smer Teorijska matematika, na Matematičkom fakultetu u Beogradu. Sve ispite predviđene planom i programom položila je 2018. godine i time stekla uslov za odbranu master rada.

Beograd, 2020.

Valentina Pavlović