Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Prirodni logaritam

Master rad

Mentor:
dr Nebojša Ikodinović

Student:
Neda Nikolić

Beograd,
2020.

Sadržaj

1 Uvod

Sam pojam logaritma, logaritamske funkcije i konstante e, pri čemu se daje samo njegova približna vrednost, uvodi se u drugom razredu srednje škole, a zatim se ponovo izučava u četvrtom razredu srednje škole. Međutim, pojam prirodnog logaritma, u oznaci $\ln x$, je u školama nedovoljno izučavan. Ponekad se ta funkcija predstavlja kao površina između grafika hiperbole
$y = \dfrac{1}{x}$ i $x - ose$ sa granicama od 1 do x.

Precizno izučavanje ovih pojmova, kao i njihovo predstavljanje učenicima je veoma komplikovano jer je njihovo srednjoškolsko znanje nedovoljno kako bi mogli u potpunosti shvatiti. Stoga, cilj ovog rada i jeste kako temu, *prirodan logaritam*, obraditi onako kako je i tekao sam njen razvoj, a potom učenike uvesti u samu temu i prilagoditi im na najlakši i na njima najzanimljiviji način; zainteresovati ih pričom o njihovim konstruktorima i grafički podstaći ih na razmišljanje o prirodnom logaritamu.

2 Prirodni logaritam

Kada neko u diskusiji spomene pojam logaritma, ili prirodnog logaritma, prvo na šta nas asocira jeste njegova baza. Asocijacija je uvek na bazi 10 ili na jednoj od najlepših konstanti matematike, broju e, čiju smo vrednost lako pamtili kao 2 pa 7, a zatim dva puta godina rođenja Lava Tolstoja (1828), zatim uglovi jednakokrakog pravouglog trougla, tj.

$$e = 2.718281828459045...$$

Mnogi učenici koriste logaritme pamteći njegovu definiciju i pravila za njihovo rešavanje, bez potpunog razumevanja. Oni nauče da je logaritam broja b za osnovu a realan broj c kojim treba stepenovati osnovu a da bi se dobio pozitivan broj b, pri čemu je $a > 0$ i $a \neq 1$. Njima je poznata sledeća veza:

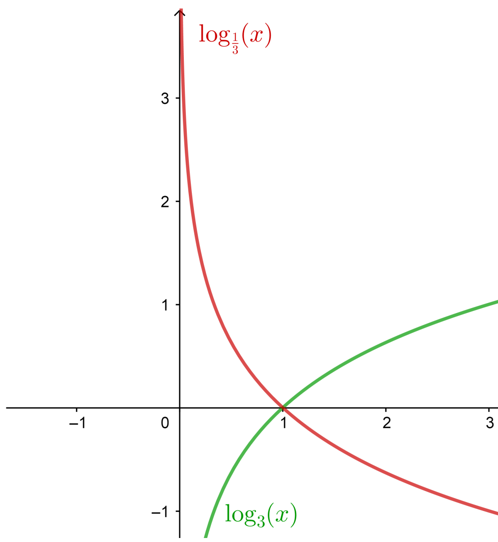
$$\log_a b = c \Longleftrightarrow a^c = b.$$

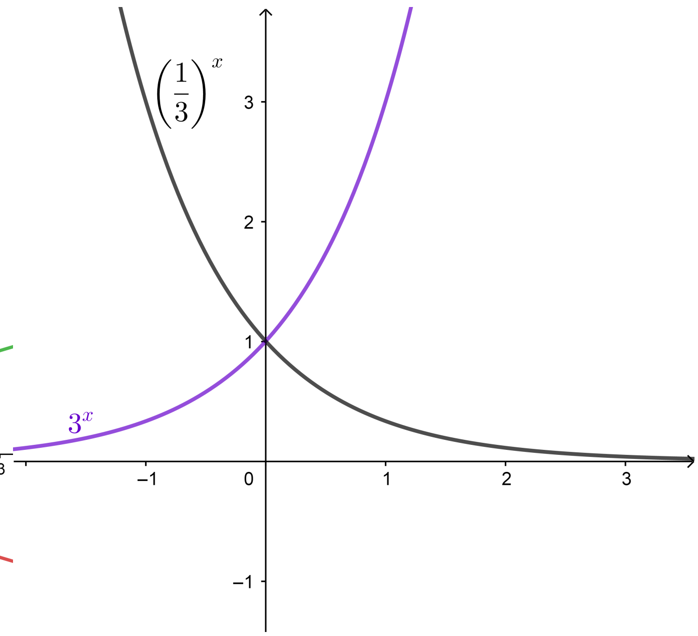
Na primer, logaritam broja 100 je broj 2, tj. $\log_{10} 100 = 2$, što je ekvivalentno $10^2 = 100$. Znaju da logaritme sa bazom 10 nazivamo dekadni logaritam ili samo logaritam, ako baza nije naglašena, a logaritam sa bazom e, prirodni logaritam. Primenjuju naučene neke osobine kao što su:

- $\log_a 1 = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$
- $\log_a a = 1$, $a > 0$, $a \neq 1$
- $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$
- $\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$
- $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$, $b > 0$
- $\log_{a^s} b = \dfrac{1}{s} \log_a b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$, $b > 0$
- $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$
- $a^{\log_a b} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$

i druge.

Takođe, upoznaju se sa logaritamskom funkcijom $y = \log_a x$, pri tom $a > 0$ i $a \neq 1$, zaključuje se da je inverzna funkcija eksponencijaloj funkciji $y = a^x$, i u mogućnosti su da skiciraju njihove grafike, kao i da ispitaju osobine funkcije. To poznavanje je za kasnije bitno za rešavanje logaritamskih jednačina i nejednačina.





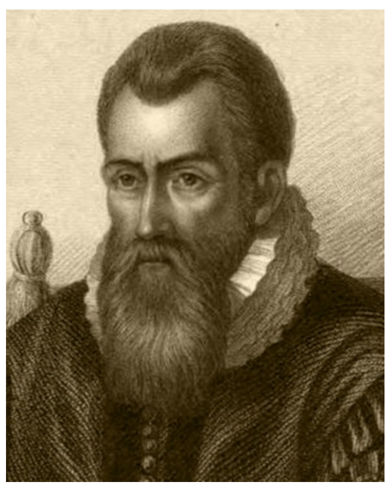
Kod ispitivanja logaritamske funkcije razlikuju se dva slučaja: kada je baza $a > 1$ (što sa leve slike vidimo da je to funkcija predstavljena zelenom bojom) i kada je baza $0 < a < 1$ (to je funkcija predstavljena crvenom bojom).
Oblast definisanosti (domen) obe logaritamske funkcije je ista, što se vidi i sa slike, $D_f : x \in (0, +\infty)$. Nula funkcije je, takođe, ista. Sa grafika se vidi da obe funkcije seku x osu u tački 1. Znak funkcija se razlikuje. Za funkciju čija je baza $a > 1$ znak funkcije je: $y < 0$, $x \in (0, 1)$, a za $y > 0$, $x \in (1, +\infty)$. Za funkciju čija je baza $0 < a < 1$ znak je sledeći: $y < 0$, $x \in (1, +\infty)$, a za $y > 0$, $x \in (0, 1)$.
Monotonost funkcije ispitujemo, isto, u dva slučaja. Za zelenu funkciju vidimo da je rastuća na celom domenu, a za crvenu da je opadajuća. Primećuje se na kraju da je asimptota[1] ove dve funkcije zajednička i to je prava $x = 0$, s tim što se zelena funkcija približava pravi $x = 0$ u $-\infty$, a crvena funkcija u $+\infty$.

[1] Asimptota funkcije je prava kojoj se funkcija približava do beskonačnosti i nikada je neće dodirnuti.

2.1 Neper, izumitelj logaritama

U vreme kada nije bio pronađen diferencijalni i integralni račun, kada još nije izmišljen proračun uz pomoć graničnih vrednosti, a kada je astronomija kao nauka veoma napredovala, nastaje jedan od najvećih izuma koji je u mnogome olakšao život i nauku tadašnjih astronoma. Taj revolucionarni pronalazak bili su logaritmi, a njihov tvorac bio je škotski matemtičar Džon Neper[2]. On je smešten u red matematičkih mislilaca, koji počinje sa Arhimedom i genijima savremenijeg vremena Isakom Njutnom i Albertom Ajnštajnom.

Džon Neper rođen je 1550. godine u Merčistonu kod Edinburga, kada je njegov otac Arčibald imao nešto više od šesnaest godina. Sa trinaest godina Neper se upisuje u St. Andrews i tada po prvi put postaje veoma zainteresovan za teologiju. O daljem školovanju nema tačnih informacija, mada se pretpostavlja da kasnije nastavlja školovanje u Francuskoj ili Holandiji.



Po povratku sa studija posvetio se vođenju imanja, a naročito zemljoradnji, gde je zemlja obrađivana i tretirana njegovim revolucionarnim metodama đubrenjem posebnim solima. Iz prvog braka imao je sina i kćerku. Nekoliko godina nakon smrti njegove prve žene, Neper se ponovo ženi i iz tog braka ima

[2] Prezime Neper može se u drugim literaturama sretati i kao Napier, Napeir, Nepair, Nepeir, Nepper, Naper, Napare, Naipper.

pet sinova i pet kćeri.

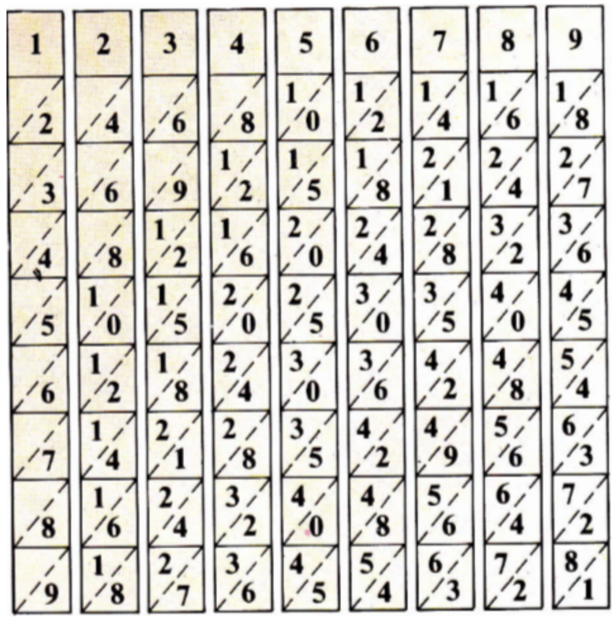
Takođe, Neper je predstavio i neke svoje tajne izume, koje je napravio, a koji su trebali da služe u odbrani njegove zemlje od Filipa od Španije. Ovi pronalasci uključuju: okrugla kola sa vatrenom snagom i teškom zaštitom (ideja za današnji tenk), podvodni brod (današnja podmornica), artiljerijski komad koji bi pokosio polje vojnika (današnji mitraljez). Priča se da je prilikom testiranja svog mitraljeza izveo čitavo stado ovaca na pašu van svog imanja. Kada je, zapravo, video kakvu ubojitu moć ima njegov izum, i da je čitavo stado "pokošeno", zakleo se da više nikada neće napraviti drugo oružje ili bilo kome dati informaciju o tome kako da ga napravi.

Isto tako je i interesantna priča o Neperovoj raspravi sa komšijom oko komšijinih golubova. Po svemu sudeći ptice su jele seme koje je Neper sejao. Nakon više opominjanja komšija nije mogao ili nije hteo da spreči ptice u "krađi". Na kraju je Neper zapretio komšiji da će zapleniti ptice. Naravno, siguran u to da Neper neće u tome uspeti, jer to su ptice, komšija je uverio Nepera da to slobodno učini. Međutim, sutradan, komšija je bio zaprepašćen kada je video da njegove ptice teturaju po Neperovom polju i kako ih Neper sa lakoćom hvata i stavlja u džak. Naime, Neper je natopio zrna graška u rakiju i razbacao po svom polju. Pijani golubovi su bili tada lak plen.

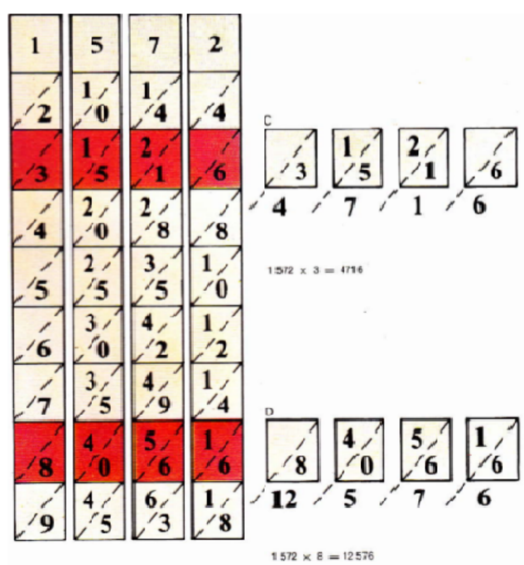
Mora se priznati da je Džon Neper najpoznatiji kao izumitelj logaritama, premda njegovi matematčki doprinosi uključuju i formule koje se koriste za rešavanje sfernih trouglova i pronalazak koji se zove "Neperove kosti" ili "štapovi" koje služe za mehaničko množenje i izračunavanje kvadratnog i kubnog korena. U svom delu "Rabdologia" opisao je metod množenja pomoću šipki sa brojevima označenim na njima.
Kako su izgledali Neperovi štapovi i kako su upotrebljavani za račun?

2.1.1 Neperovi štapovi

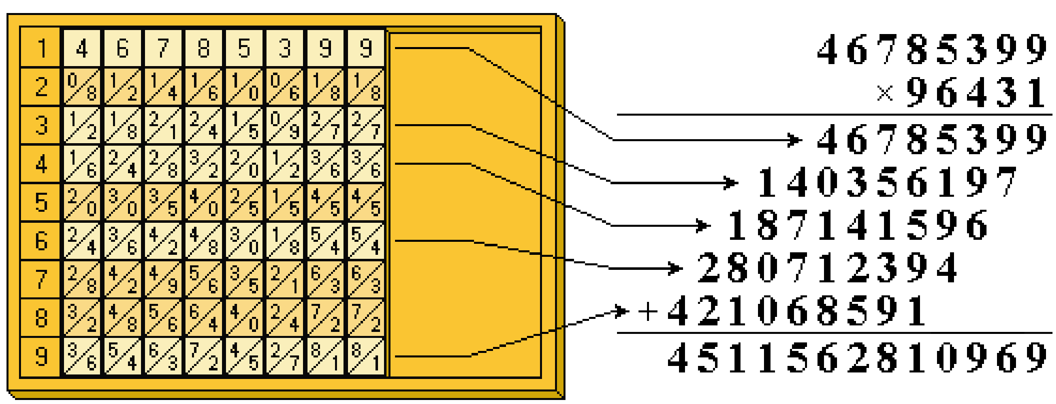
Neperovi štapovi sastojali su se od devet lenjira, svaki podeljen na 9 kvadrata i lenjiri su ređani vertikalno. U gornjim kvadratima su upisani brojevi od 1 do 9, dok su ostali kvadrati podeljeni dijagonalom. Na svakom lenjiru, odozgo na dole, upisni su brojevi koji rastu aritmetičkom progresijom. Na prvom lenjiru, u gornjem kvadratu je upisan broj 1, dok su ostali kvadrati popunjavani brojevima koji rastu po aritmetičkom nizu, i čija je razlika 1, tako da su to brojevi: $1, 2, 3, 4...9$, drugi lenjir počinje brojem 2, a ostalih 8 kvadrata je popunjeno brojevima: $4, 6, 8, 10, ..., 18$, na trećem lenjiru je u gornjem kvadratu broj 3, a onda po vertikali poređani brojevi: $6, 9, 12, ..., 27$ i tako se nastavlja sve do devetog lenjira.



Da bi se, recimo, pomnožio broj 1572 i broj 3, poređa se prvo prvi lenjir, do njega se stavlja peti, pa sedmi i na kraju drugi lenjir. Zatim se izabere treći red, jer se množi brojem tri, i saberemo posebno u svakom kvadratu svaka dva broja unutar dijagonala na susednim lenjirima (prikazano kao na slici), pa su dobijene cifre, čitajuću sa desna na levo 6, 1, 7, 4. Stoga je krajnji rezultat 4716.



Isto tako, kao što se vidi sa slike, je i kada množimo 1572 brojem 8. Poređa se prvi, za njim peti pa sedmi i na kraju drugi lenjir i potraži se osmi red. Postupak sabiranja je identičan kao u prethodnom primeru. Deluje, na izgled, lako i jednostavno množiti jednocifrenim brojem, ali ako množenje vršimo sa brojem koji ima više cifara postupak će teći na sledeći način (postupak se odnosi za primer na slici ispod), množimo brojeve 46785399 i 96431: poređamo lenjire jedan do drugog, prvo četvrti, potom šesti, pa sedmi, osmi, peti, treći i dva deveta. Zatim, tražimo onaj red koji pokazuje cifra na mestu jedinice drugog činioca, a u našem slučaju je to broj 1. Broj koji možemo pročitati je 46785399, potom potražimo treći red, jer je to mesto desetice našeg drugog činioca, pročitamo rezultat postupkom kao što je to objašnjeno kada smo množili sa jednocifrenim brojem, međutim, ukoliko se desi da saberemo dva broja na dijagonali i da zbir bude dvocifren broj, zapisujemo jedinicu, a deseticu dodajemo na zbir brojeva na dijagonali koja je ispred te dijagonale. U tom slučaju dobijamo iz trećeg reda broj 140356197 i njega potpisujemo ispod prethodnog broja, 46785399, s tim što ga pomeramo za jedno mesto u desno. Postupak se nastavlja analogno i za cifre 4, 6 i 9. Na kraju, se svi ti umnožci saberu i dobijamo konačan rezultat 4511562810969.



Neperovi štapovi predstavljaju jedan od prvih mehanizama za računanje i preteču današnjih kalkulatora.

Po nekim spisima objavljenim pod naslovom ”De Arte logistica” ispostavlja se da su ga njegova istraživanja u aritmetici i algebri dovela do razmatranja imaginarnih rešenja jednačina. Neper je takođe uveo i decimalan zapis razlomaka, zapravo uveo je decimalnu tačku.

Jedan od problema koji je mučio ljude tog vremena, posebno astronome, bio je račun sa velikim brojevima. Astronomski proračuni su zahtevali množenje i deljenje veoma velikih brojeva, nešto što je poprilično teško bilo uraditi bez kalkulatora. Jedan od načina da se ti proračuni olakšaju jeste razmišljanje o eksponentu. Ali, ljudi tog vremena nisu znali za eksponente, niti za njihove osobine, niti su bili upoznati sa pojmom baze. Međutim, ono čega su bili svesni još od vremena Arhimeda, bila je interesantna veza između nizova koji su dobili tako što je jedna niz započeo brojem 2 i uzastopno duplirali

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024...$$

a drugi niz je bio niz prirodnih brojeva

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...$$

Prvi niz je geometrijski niz, jer uzastopni brojevi imaju isti količnik, a drugi niz je aritmetički jer uzastopni brojevi imaju istu razliku. Isto je uočeno da množenje ili deljenje dva broja u geometrijskom nizu odgovara dodavanju ili oduzimanju odgovarajućih brojeva u aritmetičkom nizu.

Tako na primer, proizvod brojeva 4 i 256 odredili su na sledeći način: kako su brojevi 4 i 256 drugi i osmi član geometrijskog niza, a to su i njihove pozicije u aritmetičkom nizu, a s obzirom na to da proizvodu odgovara zbir, tada je $2+8=10$, pa deseta pozicija u geometrijskom nizu jeste broj 1024, što zapravo i jeste proizvod ova dva broja.
U tom trenutku, ovim otkrićem, budila se svest o eksponentu, pri čemu je $a^m a^n = a^{m+n}$ i $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

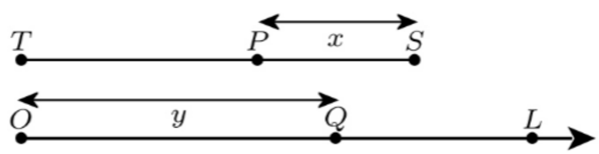
Neperova želja je bila da napravi tabelu koja bi povezivala brojeve geometrijskog niza sa brojevima aritmetičkog niza. Izradi tih tabela posvetio je dvadeset godina.

2.1.2 Neperova definicija logaritma

Na samom početku opisaćemo Neperovu zamisao koja ga je dovela do genijalnog izuma.
Neper je zamislio dve paralelne linije i tačke koje se po njima kreću. Prva linija je bila fiksne dužine, pri čemi je dužina tog segmenta veoma velika, 10^7 jedinica, a druga beskonačne dužine. Odabrao je veliki segment kako bi osigurao preciznost decimalnih delova, budući da je to bila vrednost poluprečnika krugova korišćenih za konstrukciju njegovih sinusnih tablica i pretpostavlja se da je imao u vidu astronomske proračune.

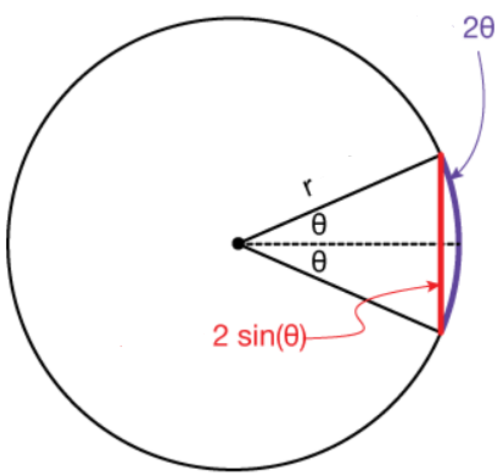
U svakom trenutku, udaljenost koja je bila pređena na beskonačnoj liniji, obeležimo je kao na slici ispod, sa y, bila je logaritam udaljenosti koja tek treba biti pređena na duži; tu udaljenost obeležimo, kao na slici ispod, sa x. U modernom zapisu to bi glasilo:

$$y = \log_{nap} x.^{3}$$



Kako se rastojanje koje nije bilo pređeno smanjivalo u geometrijskoj progresiji, vrednosti Neperovih logaritama su se povećavale u aritmetičkoj progresiji (Slika).
Treba napomenuti i imati na umu da u Neperovo vreme ugaone (trigonometrijske) funkcije nisu bile predstavljene kao u današnje vreme. Neper posmatra rastojanje na duži koje nije pređeno kao sinuse uglova počevši od 90° pa idući sve dalje do 0°.
Interesantno je reći da je reč "sinus"[4] bila latinski prevod pogrešno prepisane arapske reči koja je predstavljala dužinu polutetive kruga. Još od 5.veka reč "sinus" ima ovo značenje.

Sa slike možemo uočiti da ljubičasti luk odgovara uglu 2θ, a da crvena duž tj. tetiva ima dužinu $2\sin\theta$. Nakon toga, možemo zaključiti da je polovina dužine te tetive $\sin\theta$.



[3]Logaritam sa osnovom nap u oznaci $\log_{nap}$ se koristi da bi se napravila razlika u odnosu na koncept modernog logaritma koji za bazu uzima e za razliku od Neperovog logaritma za koji to nije slučaj.

[4]Na staroindijskom jeziku (sanskritu) reč jya-ardha ili skraćeno jya ili jiva je značilo polutetiva. Kasnije su arapski učenjaci reč jiva čitali kao jiba, ali u daljim prepiskama, greškom, javlja se kao jaib, što u prevodu znači pregib ili pevoj. Evropski naučnici prevodili su arapsku reč na latiniski kao sinus, koja je takođe značila pregib. Aryabhata ili Aryabhatta je indijski matematičar i astronom koji je prvi definisao sinus i sinusne tablice u 5.veku.

Tokom dugo vremena, bar do 1600.godine, sinus se odnosio na dužinu linije koja odgovara zadatom uglu. Zapravo, Neper odatle, još od davnina, sinus upotrebljava kao dužinu polutetive kruga nad odgovarajućim lukom zadatog ugla tj. dužinu linije AB (duž AB) ugla α u oznaci

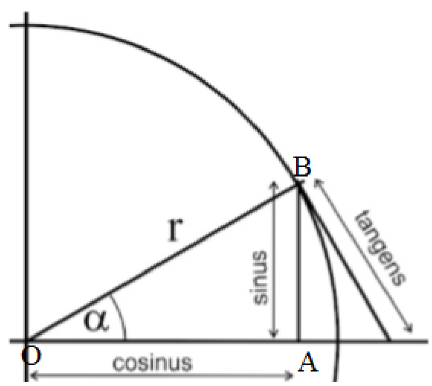
$$AB = \sin\alpha.$$

U to doba funkcija sinus nije predstavljana kao odnos naspramne stranice i hipotenuze pravouglog trougla.

U pravouglom trouglu gde su poznate hipotenuza c i ugao α, mogla se izračunati kateta a, što se lako da zaključiti da je duž AB, kao

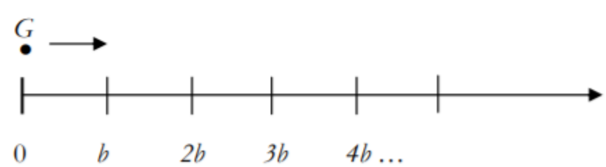
$$a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin tot},$$

gde je $\sin tot$, nazvan sinus totus, u stvari $\sin 90^\circ$, a on je iznosio 10^7.

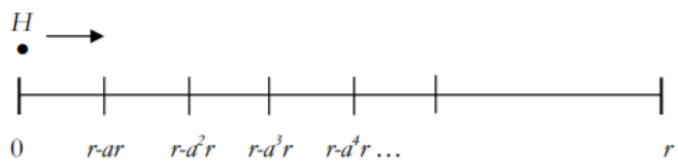


Kako je tekao sam postupak opisaćemo u daljem tekstu i prikazati slikom.

Po beskonačnoj liniji kreće se tačka G, a po duži kreće se tačka H.



Tačka G se kreće stalnom brzinom prelazeći jednaka rastojanja u istim vremenskim intervalima.



Tačka H se kreće prema r u jednakim vremenskim intervalima od 0 do $r-ar$, zatim od $r-ar$ do $r-a^2r$, od $r-a^2r$ do $r-a^3r$ i sve tako nastavljajući dalje do r koji je bio 10^7, a a je bilo nešto manje od 1. U toku kretanja brzina tačke H u nekom trenutku se smanjuje i njena brzina je u svakom trenutku proporcionalna preostalom putu.
Ovaj segment (od 0 do r) bio je "sin 90°", udaljenost od r do H bila je sinus luka odgovarajućeg ugla, a pređena udaljenost tačke G logaritam nepređenog puta.

Modernom notacijom sa stanovišta kinematike, brzinu možemo predstaviti kao izvod pređenog puta i vremena

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}s.$$

U fizici je uobičajeno da se izvod po vremenu označava tačkom iznad slova koje oznčava datu fizičku veličinu tako da se ovaj izraz često piše u obliku

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Tako, brzinu tačke H možemo računati

$$v_H = \frac{d(r-x)}{dt},$$

gde je x rastojanje koje treba da pređe tačka H do r. Isto tako, brzina tačke G je

$$v_G = \frac{dy}{dt},$$

gde je y rastojanje koje prelazi tačka G i brzina v_G je stalna.

Da bismo dobili Neperovu definiciju logaritma u modernim proračunima iskoristićemo da je

$$x = \frac{d(r-x)}{dt},$$

jer je brzina tačke H proporcionalna udaljenosti koju preostaje da pređe tačka H da bi stigla do r. Tada

$$\frac{dr}{dt} - \frac{dx}{dt} = x,$$

pri čemu $\dfrac{dr}{dt} = 0$ jer je $r = 10^7$, a izvod konstante je 0,
na osnovu toga

$$0 - \frac{dx}{dt} = x,$$

$$-\frac{dx}{dt} = x,$$

a tada

$$-\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{x},$$

odakle

$$-\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Integracijom leve i desne strane jednakosti dobijamo sledeću jednakost:

$$\int -dt = \int \frac{1}{x} dx,$$

i tada je

$$-t = \ln x + c.$$

Obe tačke počinju da se kreću istom brzinom i u trenutku $t = 0$ sledi da je $x = r$, tada

$$0 = \ln r + c,$$

odakle proizilazi da je

$$c = -\ln r,$$

pa je tada

$$-t = \ln x - \ln r.$$

Kako je brzina tačke G ista kao i brzina tačke H, u trenutku $t = 0$ ispostavlja se da je

$$\frac{dy}{dt} = r,$$

tako da je

$$dy = r dt,$$

odakle integracijom dobijamo

$$\int dy = \int r dt,$$

a tada

$$y = rt.$$

Konačno, ako povežemo promenljivu x, rastojanje koje je potrebno još da pređe tačka H do r, sa promenljivom y, rastojanje koje je prešla tačka G po beskonačnoj liniji, zaključujemo sledeće:

$$t = \ln r - \ln x,$$

odakle je po osobini logaritama

$$t = \ln \frac{r}{x},$$

a kako iz $y = rt$ sledi da je $t = \frac{y}{r}$ zamenom dobijamo

$$y = r \ln \frac{r}{x}.$$

Po Neperovoj definiciji

$$\log_{nap} x = y,$$

ali zamenom sledi

$$\log_{nap} x = r \ln \frac{r}{x},$$

a kako je $r = 10^7$ tada je

$$\log_{nap} x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}.$$

Ali, u prošlosti se uvek postavljalo pitanje na kojoj bazi su se zasnivali Neperovi logaritmi?

Ako $\log_{nap} x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}$ zapišemo malo drugačije

$$\frac{\log_{nap} x}{10^7} = \ln \frac{10^7}{x},$$

ispostavlja se da je

$$\frac{\log_{nap} x}{10^7} = \log_e (\frac{x}{10^7})^{-1},$$

$$\frac{\log_{nap} x}{10^7} = -\log_e \frac{x}{10^7},$$

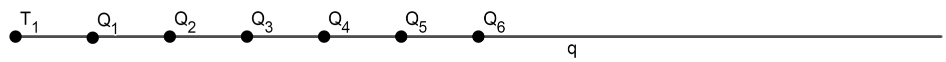
tj.

$$\frac{\log_{nap} x}{10^7} = \log_{1/e} \frac{x}{10^7}.$$

Na osnovu izvedenog vidi se da je baza Neperovih logaritama $\frac{1}{e}$.

Sve ovo, što je prethodno opisano, možemo predstaviti i na drugačiji način.

Na duži TS tačka T počinje da se kreće, sa leva na desno, određenom brzinom. Pri tom kretanju tačka T zauzima pozicije P_1, P_2, P_3, P_4, P_5...



Zatim, na beskonačnoj liniji $T_1 q_\infty$ tačka T_1 kreće uvek istom brzinom, kao i tačka T na duži TS. Takođe, Q_1, Q_2, Q_3,... su odgovarajuće pozicije koje dostigne tačka T_1 pri kretanju i pri tom je $T_1Q_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = ... = 1$.
Ali, u nekom trenutku brzina tačke T počinje polako da opada. Kako je dužina duži TS definisana kao 10^7, to je značilo da su i brzine tačaka T i T_1 takođe 10^7 i pri tom je to i konstantna brzina tačke T_1.

U prvom pomeranju tačke T_1 u položaj Q_1, brzina je tada 10^7, a pređeni put T_1Q_1 jednak je 1. Vreme koje tada protekne je 10^{-7}. Vreme izračunavamo po poznatoj definiciji $t = \frac{s}{v}$. Ako se iskoriste ti početni proračuni tada zaključujemo da je rastojanje

$$P_1S = 10^7 - 1 = 10^7(1 - 10^{-7})^1,$$

a rastojanje P_1P_2 izračunavamo ($s = v \cdot t$) kao

$$P_1P_2 = \left[10^7(1 - 10^{-7})\right] 10^{-7} = 1 - 10^{-7}.$$

Tada će rastojanje $P_2S = TS - TP_1 - P_1P_2$, što se ispostavlja zamenom da je

$$P_2S = 10^7(1 - 10^{-7})^2.$$

Nastavak ovog procesa daje sledeći geometrijski niz koji odgovara preostalim rastojanjima tačke T na duži TS:

$$10^7(1 - 10^{-7})^0, 10^7(1 - 10^{-7})^1, 10^7(1 - 10^{-7})^2, 10^7(1 - 10^{-7})^3, ...,$$

koji odgovara TS, P_1S, P_2S, P_3S,....
A, aritmetički niz koji odgovara tome koliko je tačka T_1 prošla na T_1S_1 (T_1Q_1, T_1Q_2, T_1Q_3...) se povećava i daje:

$$0, 1, 2, 3, ...$$

U našoj modernoj notaciji, numerički gledano, vrednost logaritma P_1S kome odgovara $10^7(1-10^{-7})$, po Neperu jednaka je 1, što predstavlja T_1Q_1 ili ako preimenujemo i rastojanju P_1S dodelimo novo ime x, a rastojunju T_1Q_1 dodelimo ime y, tada slobodno možemo tvrditi da je

$$\log_{nap} x = y.$$

Ako je $x_1 = 10^7(1 - 10^{-7})^{y_1}$ i $x_2 = 10^7(1 - 10^{-7})^{y_2}$, tada je

$$\frac{x_1}{x_2} = 10^7(1 - 10^{-7})^{y_1 - y_2},$$

slično važi i za proizvod

$$x_1 \cdot x_2 = 10^7(1 - 10^{-7})^{y_1 + y_2}.$$

Prema tome, Neperova metoda predstavlja intuitivnu vezu između dve vrste nizova.

Takođe, u svom istraživanju Neper je opazio da ako su data bilo koja tri uzastopna sinusa ugla u geometrijskom nizu i ako se prvi i treći pomnože, to je jednako kvadratu srednjeg sinusa ugla i da je polovina zbira vrednosti krajnjih logaritama jednaka vrednosti logaritma srednjeg člana.

Primer 1. *Neka su data prva tri člana geometrijskog niza: 2,4,8.*

Rešenje. Tada je $2 \cdot 8 = 16 \iff 4^2 = 16$. Isto tako, kako su vrednosti $\ln 2 = 0.6932, \ln 4 = 1.3863$ i $\ln 8 = 2.0794$, tada je $\dfrac{\ln 2 + \ln 8}{2} = \ln 4$. △

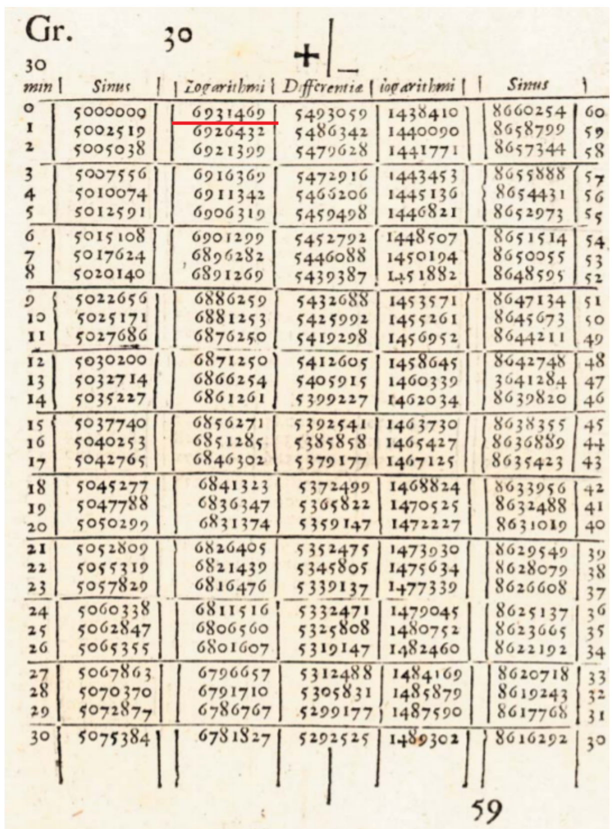
2.1.3 Logaritamske tablice

Godine 1614. Neper je objavio svoje delo pod nazivom "Mirifici canon logarithmorum descriptio" koga čini "Descriptio" (opis čudesnog kanona) i "Constructio" ("izgradnja"čudesnog kanona).

"Descriptio" se sastoji od pedeset sedam stranica objašnjenja i devedeset stranica tabela. Objašnjenje sadrži prikaz Neperove koncepcije logaritama i glavnih svojstava logaritama, kao i njihove primene pri rešavanju sfernih trouglova. Logaritmi dati u tabelama su sinusi uglova od $0°$ do $90°$ u intervalima od 1 minute, napisani na sedam ili osam decimala i to tako što su sa leve strane u prvoj koloni bile prikazane minute ugla od 0 do 30, a sa desne strane minute od 30 do 60. Druga kolona sa leve strane je bila vrednost sinusa datog ugla, ali zapisana u obliku $10^7 \cdot \sin\alpha$, a druga kolona sa desne strane je bila vrednost njemu komplementnog ugla tj. vrednost kosinusa ugla, zapisana kao $10^7 \cdot \cos\alpha$, dok je treća kolona sa leva bila vrednost logaritma sinusa ugla, a treća kolona s desna vrednost logaritma kosinusa ugla. Srednja kolona je bila razlika vrednosti logaritma sinus ugla i vrednost logaritma kosinus ugla, što je, zapravo, predstavljalo vrednost logaritma tangensa ugla. Razlog pojave razlike (diferencije) jesu, u stvari, Neperove greške koje su nastale pri iterativnom računanju uključujući odbacivanje decimalnih delova.
Vrednosti funkcija za uglove od $0°$ do $44°$ očitavaju se odozgo na dole sa leve strane, a vrednosti funkcija za uglove od $45°$ do $90°$ očitavaju se odozdo na gore sa desne strane. Takođe, treba napomenuti da je razlika (srednja kolona) pozitivan broj za sve uglove koji su manji od $45°$, jednaka je 0 za ugao $45°$, i negativna je ako je ugao veći od $45°$. Zbog toga iznad svake tablice se nalazi znak $+|-$.

α	Sinus	Logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	90–α
	$10^7\times\sin(\alpha)$	*logNep* sin(α)	*logNep* sin(α) –*logNep* cos(α) = *logNep* tan(α)	*logNep* cos(α)	$10^7\times\cos(\alpha)$	

Tako na primer, odredićemo vrednost $\log_{nap}\sin(30^\circ)$, pri čemi je $\sin(30^\circ) = 0.5$. Po Neperu $x = \sin(30^\circ)$, ali predstavljeno u svojim tabelama x računa kao $R{\cdot}\sin(30^\circ) = 10^7{\cdot}0.5 = 5{\cdot}10^6$. Tada, prema $\log_{nap} x = 10^7 \ln \dfrac{10^7}{x}$ imamo sledeće: $\log_{nap}\sin(30^\circ) = 10^7 \ln \dfrac{10^7}{R\cdot\sin(30^\circ)} = 10^7 \ln \dfrac{10^7}{5\cdot 10^6} = 10^7\cdot\ln 2 = 6931471{,}8$, a nastala razlika u dobijenom rezultatu i rezultatu u tabeli objašnjena je u prethodnom pasusu.



Gr. 30 + | –

30 min	Sinus	Logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	
0	5000000	6931469	5493059	1438410	8660254	60
1	5002519	6926432	5486342	1440090	8658799	59
2	5005038	6921399	5479628	1441771	8657344	58
3	5007556	6916369	5472916	1443453	8655888	57
4	5010074	6911342	5466206	1445136	8654431	56
5	5012591	6906319	5459498	1446821	8652973	55
6	5015108	6901299	5452792	1448507	8651514	54
7	5017624	6896282	5446088	1450194	8650055	53
8	5020140	6891269	5439387	1451882	8648595	52
9	5022656	6886259	5432688	1453571	8647134	51
10	5025171	6881253	5425992	1455261	8645673	50
11	5027686	6876250	5419298	1456952	8644211	49
12	5030200	6871250	5412605	1458645	8642748	48
13	5032714	6866254	5405915	1460339	3641284	47
14	5035227	6861261	5399227	1462034	8639820	46
15	5037740	6856271	5392541	1463730	8638355	45
16	5040253	6851285	5385858	1465427	8636889	44
17	5042765	6846302	5379177	1467125	8635423	43
18	5045277	6841323	5372499	1468824	8633956	42
19	5047788	6836347	5365822	1470525	8632488	41
20	5050299	6831374	5359147	1472227	8631019	40
21	5052809	6826405	5352475	1473930	8629549	39
22	5055319	6821439	5345805	1475634	8628079	38
23	5057829	6816476	5339137	1477339	8626608	37
24	5060338	6811516	5332471	1479045	8625137	36
25	5062847	6806560	5325808	1480752	8623665	35
26	5065355	6801607	5319147	1482460	8622192	34
27	5067863	6796657	5312488	1484169	8620718	33
28	5070370	6791710	5305831	1485879	8619243	32
29	5072877	6786767	5299177	1487590	8617768	31
30	5075384	6781827	5292525	1489302	8616292	30

59

Sve to možemo i drugačije opisati. Na primer, odrediti vrednost $\log_{nap}\sin(9^\circ 15')$, po opisanom u tabelama Neper zadaje $\sin(9^\circ 15')$ kao $R\cdot\sin(9^\circ 15') = 1607426$, a pri tom dužina tj. $l(1607426) = 18279507$, a zapravo računanjem, kao što je to urađeno na prethodnom primeru, rezultat bi bio $l(1607426) = 18279511$. Jasno je da je razlika u rezultatima ponovo nastala zbog diferencije.

Gr. 9

9 min	Sinus	Logarithmi	+ | − Differentiae	logarithmi	Sinus	
0	1564345	18551174	18427293	123881	9876883	60
1	1567218	18532826	18408484	124342	9876427	59
2	1570091	18514511	18389707	124804	9875971	58
3	1572964	18496231	18370964	125267	9875514	57
4	1575837	18477984	18352253	125731	9875056	56
5	1578709	18459772	18333576	126196	9874597	55
6	1581581	18441594	18314933	126661	9874137	54
7	1584453	18423451	18296324	127127	9873677	53
8	1587325	18405341	18277747	127594	9873216	52
9	1590197	18387265	18259203	128062	9872754	51
10	1593069	18369223	18240692	128531	9872291	50
11	1595941	18351214	18222213	129001	9871827	49
12	1598812	18333237	18203765	129472	9871362	48
13	1601684	18315294	18185351	129943	9870897	47
14	1604555	18297384	18166969	130415	9870431	46
15	1607426	18279507	18148619	130888	9869964	45

"Constructio" se sastoji od dve stranice predgovora i pedeset sedam stranica teksta. Koncept logaritama je ovde jasno objašnjen i dat je potpuni uvid u uzastopne korake po kojima su tabele napravljene. Neper je predstavio svoj proračun u kome je $\log 1 = 0$, a $\log 10 = 10^{10}$. Ovo je, praktično, ekvivalentno pretpostavci da je $\log 10 = 1$, jer prethodna pretpostavka ukazuje na to da se logaritmi izračunavaju na deset mesta decimala.

Prvenstveno, Neper je napravio tri tabele brojeva u geometrijskom nizu i pronašao njihove logaritme u aritmetičkom nizu koristeći linearnu interpolaciju. U tabele je upisivao vrednosti koje su odgovarale dužini radijusa, tj. počev od 10000000 do nešto manje od vrednosti polovine radijusa, tj. poslednja vrednost 69-te kolone treće tabele je 4998609.4034.

Prva tabela se sastoji od 101 broja, od kojih je 10^7 prvi broj pri čemu je odnos brojeva $1-\frac{1}{10^7}$ ili $\frac{9999999}{10000000}$. Svaki broj je formiran oduzimanjem od prethodnog broja, a dobijenom broju se pomeraju cifre za sedam mesta u desno. U modernoj notaciji, on bi računao brojeve u prvoj koloni prve tabele po formuli

$$p_{r+1} = p_0(1 - \frac{1}{10^7})^r,$$

gde je $p_0 = 10^7$ i $r = 0, 1, 2, ...100$.

First Table

$$\left\{10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^r,\ r=0 \text{ to } 100\right\}$$

10000000·0000000
1·0000000
9999999·0000000
·9999999
9999998·0000001
·9999998
9999997·0000003
·9999997
9999996·0000006

to be continued up to

9999900·0004950

Druga tabela se sastoji od 51 broja oblika

$$10^7(1-\frac{1}{10^5})^r,$$

pri čemu je odnos brojeva $1-\frac{1}{10^5}$ ili $\frac{99999}{100000}$ i $r=0,1,2,...50$.

Second Table

$$\left\{10^7\left(1-\frac{1}{10^5}\right)^r,\ r=0 \text{ to } 50\right\}$$

10000000·000000
100·000000
9999900·000000
99·999000
9999800·001000

to be continued up to

9995001·222927

Treća tabela se sastoji od 69 kolona, a svaka kolona sadrži 21 broj. Brojevi iz iste vrste i bilo koje kolone, su u odnosu $1-\frac{1}{100}$ ili $\frac{99}{100}$, ali s tim što se uzima odnos $n+1$ kolone i $n-te$ kolone . Odnos poslednjeg broja i prvog broja u bilo kojoj koloni je $(1-\frac{1}{2000})^{20}$, što je veoma blizu $1-\frac{1}{100}$ ili $\frac{99}{100}$. Brojevi u bilo kojoj koloni dobijaju se uzastopnim množenjem sa $1-\frac{1}{2000}$, tako da ako računamo $m - ti$ broj iz $s - te$ kolene to možemo učiniti uz pomoć

$$10^7(1 - \frac{1}{2000})^{m-1}(1 - \frac{1}{100})^{s-1},$$

gde parametar m predstavlja vrstu, a parametar s kolonu. Mada, u tabeli ima 68 brojeva u proporciji $\frac{99}{100}$ tako da je između svaka dva broja umetnuto 20 brojeva u proporciji $\frac{9995}{10000}$.

THE THIRD TABLE.

Terms	1st Column.	2d Column.	3d Column.	&c till the	69th Column.
1	10000000.0000	9900000.0000	9801000.0000	&c to	5048858.8900
2	9995000.0000	9895050.0000	9796099.5000	the 4th,	5046334.4605
3	9990002.5000	9890102.4750	9791201.4503	5th, 6th,	5043811.2932
4	9985007.4987	9885157.4237	9786305.8495	7th, &c	5041289.3879
5	9980014.9950	9880214.8451	9781412.6967	col. till	5038768.7435
&c	&c till	&c	&c	the last	&c
21	9900473.5780	9801468.8423	9703454.1539	or	4998609.4034

Da bi izračunao vrednosti logaritama sinusa ugla (pod sinusom ugla u Neperovo vreme podrazumeva se sve ono što je objašnjeno u prethodnom odeljku) i popunio svoje tabele Neper uvodi dva pravila (teoreme) po kojima ih računa.

Po prvom pravilu, Neper određuje granice logaritma sinusa ugla. Donja granica je predstavljena kao razlika radijusa i vrednosti logaritma sinusa ugla, dok je gornja granica zadata kao donja granica pomnožena količnikom radijusa i vrednosti logaritma sinusa ugla. Ali, ukoliko se vrednosti logaritma sinusa ugla razlikuje veoma malo od radijusa, tada u aritmetičkoj sredini, on je skoro jednak količniku razlike kvadrata radijusa i vrednosti logaritma sinusa ugla i dvostruke vrednosti logaritma sinusa ugla. U geometrijskoj sredini je još bliži proizvodu donje granice i korena njihovog količnika. Simbolički zapisano, ako sa r označimo radijus i sa s sinus ugla, tada se vrednost logaritma sinusa ugla s nalazi u granicama $r - s < s < \frac{r - s}{s} r$, i u aritmetičkoj sredini skoro je jednak $\frac{r^2 - s^2}{2s}$, a u geometrijskoj sredini još bliži $(r - s)\sqrt{\frac{r}{s}}$.

Po drugom pravilu, razlika dve vrednosti logaritama sinusa uglova, stim da manju vrednost oduzimamo od veće, veća je od proizvoda date razlike i količnika radijusa i manje vrednosti logaritma sinusa ugla, a manja od proizvoda date razlike i količnika radijusa i veće vrednosti logaritma sinusa ugla; simbolički zapisano, ako sa s označimo manju vrednost logaritma sinusa ugla, a sa S veću vrednost logaritma sinusa ugla, tada je $\frac{S - s}{S} r < S - s < \frac{S - s}{s} r$. Ali, kada je ta razlika veoma mala, onda je ona skoro jednaka, u aritmetičkoj sredini,

$\dfrac{S^2 - s^2}{2Ss} r$, a u geometrijskoj sredini $\dfrac{S-s}{\sqrt{Ss}} r$.

U prvoj tabeli, a po prvom pravilu, vrednost logaritma od 10000000.0000000 je 0, dok je vrednost logaritma drugog broja tabele 9999999.0000000 u granicama

$$10000000 - 9999999 < 9999999.0000000 < \frac{10000000 - 9999999}{9999999} 10000000,$$

što je

$$1 < 9999999.0000000 < 1.0000001$$

i skoro je jednaka, u aritmetičkoj sredini

$$\frac{10000000^2 - 9999999^2}{2 \cdot 9999999} = \frac{19999999}{19999998} = 1.00000005,$$

i geometrijskoj sredini

$$(10000000^2 - 9999999^2)\sqrt{\frac{10000000}{9999999}} = 1 \cdot \sqrt{1.0000001} = 1.00000005.$$

Inače, taj broj 1.00000005, je uobičajena razlika između svih vrednosti logaritama prve tabele i uzastopnim dodavanjem na svaku sledeću vrednost logaritma, vrednost logaritma poslednjeg član prve tabe, 9999900.0004950, je 100.0000050.

Po drugom pravilu, razlika poslednjeg člana prve tabele i drugog broja druge tabele je 0.0004950 i kada se to doda vrednosti logaritma poslednjeg broja prve tabele tj. 100.0000050, dobija se vrednost logaritma drugog broja u drugoj tabeli i to 100.0005000. Ovo će biti razlika svih vrednosti logaritama u drugoj tabeli i uzastopnim dodavanjem na sledeću vrednost logaritma dobijamo da je vrednost logaritma poslednjeg broja druge tabele, 9995001.222927, zapravo 5000.025000.
Isto tako, po drugom pravilu, razlika poslednjeg broja druge tabele, 9995001.222927 i drugog broja prve kolone treće tabele, 9995000.0000, je između 1.2235386 i 1.2235387, i kako su i aritmetička i geometrijska sredina za razliku jednaka 1.2235387, Neper to uzima za vrednost razlike i dodaje vrednosti logaritma poslednjeg broja druge tabele i tako dobija vrednost logaritma 9995000 treće tabele prve kolone i to 5001.2485387. Uzastopnim dodavanjem razlike na vrednost logaritama prve kolone dolazimo do vrednosti logaritma poslednjeg broja prve kolone, 9900473.5780, i to 100024.97077.
I najzad, drugim pravilom ponovo, razlika poslednjeg broja prve kolone treće tabele i prvog broja druge kolene treće tabele je između 478.3387343 i 478.3616162, dok su aritmetička i geometrijska sredina jednake i iznose 478.3502. Tada Neper uzima za razliku ova dva broja vrednost 478.3502 i dodaje vrednosti logaritma poslednjeg broja prve kolone treće tabele tj. 100024.97077 i zatim dobija vrednost logaritma prvog broja druge kolone i to 100503.3210.

The Radical Table

First column		Second column		69th column	
Natural numbers	Logarithms	Natural numbers	Logarithms	Natural numbers	Logarithms
10000000·0000	·0	9900000·0000	100503·3	5048858·8900	6834225·8
9995000·0000	5001·2	9895050·0000	105504·6	5046334·4605	6839227·1
9990002·5000	10002·5	9890102·4750	110505·8	5043811·2932	6844228·3
9985007·4987	15003·7	9885157·4237	115507·1	5041289·3879	6849229·6
9900473·5780	100025·0	9801468·8423	200528·2	4998609·4034	6934250·8

Na ovaj način je završena tabela koju Neper zove *Radikalna tabela* u kojoj on "prirodan broj" tj. sinus ugla predstavlja sa četiri decimalna mesta, a za vrednost logaritma zadržava jedno decimalno mesto.

Još je ostalo da se odrede vrednosti logaritama sinusa za uglove manje od 30° koji nisu u granicama Radikalne tabele. Za to Neper pravi takozvanu *Kratku tabelu.*

Neper tada uvodi dve metode. Po prvoj metodi, on koristi vrednosti logaritama radijusa i njegove polovine iz radikalne tabele, a prvu vrednost u kratkoj tabeli nalazi računajući razliku vrednosti logaritama brojeva u odnosu 2 : 1, i dobija 6931469.22, u odnosu 4 : 1 dobija duplu vrednost 13862938.44, u odnosu 8 : 1 troduplu vrednost 20794407.66,..., u odnosu 20 : 1 je zbir vrednost logaritama od 2 i 10, a to je 29957311.56 i tako dalje. Neper, potom množi sinus ugla koji je manji od 30° sa nekim od ovih brojeva ili nekim proporcionalnim brojem iz kratke tabele: $2, 4, 8, \ldots 100\ldots$ sve dok ne dobije proizvod skoro jednak nekom broju iz radikalne tabele i na taj proizvod dodaje razliku (vrednost proporcije) iz kratke tabele. Taj konačni zbir je, zapravo, vrednost logaritma sinusa za ugao manji od 30°.
Druga metoda je mnogo jednostavnija i izvedena je iz osobine koju on prikazuje: $\frac{r/2}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha}$, pa se prelaskom na Neperov logaritam dobijala sledeća formula:

$$\log_{nap}\frac{1}{2}10^7 + \log_{nap}\sin 2\alpha = \log_{nap}\sin\alpha + \log_{nap}\sin(90^\circ - \alpha).$$

Short Table

Given proportion of sines	Corresponding difference of logarithms	Given proportion of sines	Corresponding difference of logarithms
2 to 1	6931469·22	8000 to 1	89871934·68
4 „	13862938·44	10000 „	92103369·36
8 „	20794407·66	20000 „	99034838·58
10 „	23025842·34	40000 „	105966307·80
20 „	29957311·56	80000 „	112897777·02
40 „	36888780·78	100000 „	115129211·70
80 „	43820250·00	200000 „	122060680·92
100 „	46051684·68	400000 „	128992150·14
200 „	52983153·90	800000 „	135923619·36
400 „	59914623·12	1000000 „	138155054·04
800 „	66846092·34	2000000 „	145086523·26
1000 „	69077527·02	4000000 „	152017992·48
2000 „	76008996·24	8000000 „	158949461·70
4000 „	82940465·46	10000000 „	161180896·38

Po ovim pravilima, gore opisanim, Neper je izračunavao vrednosti logaritama za zadate sinuse uglova i tako uspeo da popuni svoje tabele.

2.2 Upotreba logaritamskih tablica

Radi lakših numeričkih proračuna dekadnih logaritama koristi se jedan način pisanja i to: ceo deo u dekadnom logaritmu, bilo da je pozitivan ili negativan, naziva se karakteristika, a decimalni deo, koji je uvek pozitivan, naziva se mantisa. Karakteristika se izračunava prema određenim pravilima, a mantisa se određuje pomoću logaritamskih tablica.

Određivanje karakteristike od $\log a$ deli se u dva slučaja:

1. $a > 1$ Za karakteristiku pronalazimo dva uzastopna cela stepena broja 10 između kojih se nalazi broj a i to:
   - Ako je $1 \leq a < 10$ tada je $0 \leq \log a < 1$, karakteristika je 0
   - Ako je $10 \leq a < 100$ tada je $1 \leq \log a < 2$, karakteristika je 1
   - Ako je $100 \leq a < 1000$ tada je $2 \leq \log a < 3$, karakteristika je 2
   - ....
   - Ako je $10^n \leq a < 10^{n+1}$ tada je $n \leq a < n+1$, karakteristika je n
2. $0 < a < 1$ Karakteristika je negativna i važi:
   - Ako je $0.1 \leq a < 0$ tada je $-1 \leq \log a < 0$, karakteristika je -1
   - Ako je $0.01 \leq a < 0.1$ tada je $-2 \leq \log a < -1$, karakteristika je -2

- Ako je $0.001 \leq a < 0.01$ tada je $-3 \leq \log a < -2$, karakteristika je -3
- ....
- Ako je $\dfrac{1}{10^n} \leq a < \dfrac{1}{10^{n-1}}$ tada je $-n \leq a < -(n-1)$, karakteristika je $-n$

Treba napomenuti, da se u običnim izračunavanjima koriste tablice sa pet decimala.

Primer 2. *Odrediti* $\log 3687$.

Rešenje. Potražimo u tablici, u koloni obeleženoj sa N broj 3687 i naspram tog broja čitamo u koloni *log* traženu mantisu 56667. Ostaje još da odredimo karakteristiku. Kako je broj $1000 < 3687 < 10000$, tada je karakteristika 3. Vrednost našeg traženog logaritma je 3.56667 △

N	log	D	N	log	D	N	log	D	N	log	D	N	log	D	P. p.
3535	54 839	12	3585	55 449	12	3635	56 050	12	3685	56 644	12	3735	57 229	12	5 5,5
3536	54 851	13	3586	55 461	12	3636	56 062	12	3686	56 656	11	3736	57 241	11	6 6,6
3537	54 864	12	3587	55 473	12	3637	56 074	12	3687	56 667	12	3737	57 252	12	7 7,7
3538	54 876	12	3588	55 485	12	3638	56 086	12	3688	56 679	12	3738	57 264	12	8 8,8
3539	54 888	12	3589	55 497	12	3639	56 098	12	3689	56 691	12	3739	57 276	11	9 9,9
3540	54 900	13	3590	55 509	13	3640	56 110	12	3690	56 703	11	3740	57 287	12	
3541	54 913	12	3591	55 522	12	3641	56 122	12	3691	56 714	12	3741	57 299	11	
3542	54 925	12	3592	55 534	12	3642	56 134	12	3692	56 726	12	3742	57 310	12	
3543	54 937	12	3593	55 546	12	3643	56 146	12	3693	56 738	12	3743	57 322	12	
3544	54 949	13	3594	55 558	12	3644	56 158	12	3694	56 750	11	3744	57 334	11	
3545	54 962	12	3595	55 570	12	3645	56 170	12	3695	56 761	12	3745	57 345	12	
3546	54 974	12	3596	55 582	12	3646	56 182	12	3696	56 773	12	3746	57 357	11	
3547	54 986	12	3597	55 594	12	3647	56 194	11	3697	56 785	12	3747	57 368	12	
3548	54 998	13	3598	55 606	12	3648	56 205	12	3698	56 797	11	3748	57 380	12	
3549	55 011	12	3599	55 618	12	3649	56 217	12	3699	56 808	12	3749	57 392	11	

log 54—57

Međutim, postupak je nešto drugačiji ako potražmo logaritam decimalnog broja.

Primer 3. *Odrediti* $\log 2853.6$.

Rešenje. Ovaj broj se nalazi između dva uzastopna broja 2853 i 2854. Za 2853 iz tablice vidimo da je mantisa 45530, za 2854 mantisa je 45545. Vidimo da se mantisa povećala za 15 i u tablici to je prikazano u koloni D. Traženu mantisu ćemo dobiti kada se nađena mantisa prvog broja, 2853, uveća za $\dfrac{6}{10}$ od D. Računanjem, $\dfrac{6}{10}$ od 15 je 9, ali podrazumevamo da je 9 na petom decimalnom mestu, pa je traženi logaritam $3.45530 + 0.00009 = 3.45539$. △

[I] **N 2750—2999**

N	log	D	N	log	D	N	log	D	N	log	D	N	log	D	P. p.
2750	43 933	16	2800	44 716	15	2850	45 484	16	2900	46 240	15	2950	46 982	15	
2751	43 949	16	2801	44 731	16	2851	45 500	15	2901	46 255	15	2951	46 997	15	
2752	43 965	16	2802	44 747	15	2852	45 515	15	2902	46 270	15	2952	47 012	14	
2753	43 981	15	2803	44 762	16	2853	45 530	15	2903	46 285	15	2953	47 026	15	
2754	43 996	16	2804	44 778	15	2854	45 545	16	2904	46 300	15	2954	47 041	15	
2755	44 012	16	2805	44 793	16	2855	45 561	15	2905	46 315	15	2955	47 056	14	
2756	44 028	16	2806	44 809	15	2856	45 576	15	2906	46 330	15	2956	47 070	15	
2757	44 044	15	2807	44 824	16	2857	45 591	15	2907	46 345	14	2957	47 085	15	
2758	44 059	16	2808	44 840	15	2858	45 606	15	2908	46 359	15	2958	47 100	14	
2759	44 075	16	2809	44 855	16	2859	45 621	16	2909	46 374	15	2959	47 114	15	
2760	44 091		2810	44 871		2860	45 637		2910	46 389		2960	47 129		

Ako računamo $\log 2853.67$, postupak bi tekao isto kao u prethodnom primeru, samo što bi se mantisa broja 2853 uvećala za $\dfrac{67}{100}$ od D tj. $\dfrac{67}{100}$ od 15 što iznosi 10.05, pa bi rešenje traženog logaritma bilo $3.45530 + 0.0001005 = 3.45540$.

Primer 4. *Odrediti* $\log 0.0921107$.

Rešenje. Kada u tablici potrazimo vrednost 9211 vidimo da je mantisa 96431, razlika u odnosu na sledeću mantisu je $D = 4$ i koristimo iz tablice deo $P.p. = 0.00028$. To čitamo sa desne strane tablice u zavisnosti koliko je D i koja je poslednja cifra traženog broja. Karakteristika je $-2 = 8 - 10$, jer se broj 0.0921197 nalazi između $0.01 \leq a < 0.1$. Tada je traženi logaritam
$8.96431 - 10 + 0.00028 = -1.03541$. $\triangle$

N	log	d	N	log	d	N	log	d	N	log	d	N	log	d
9011	95 477	5	9061	95 718	4	9111	95 957	4	9161	96 194	5	9211	96 431	4
9012	95 482	5	9062	95 722	5	9112	95 961	5	9162	96 199	5	9212	96 435	5
9013	95 487	5	9063	95 727	5	9113	95 966	5	9163	96 204	5	9213	96 440	5
9014	95 492	5	9064	95 732	5	9114	95 971	5	9164	96 209	4	9214	96 445	5
9015	95 497	4	9065	95 737	5	9115	95 976	4	9165	96 213	5	9215	96 450	4
9016	95 501	5	9066	95 742	4	9116	95 980	5	9166	96 218	5	9216	96 454	5
9017	95 506	5	9067	95 746	5	9117	95 985	5	9167	96 223	4	9217	96 459	5
9018	95 511	5	9068	95 751	5	9118	95 990	5	9168	96 227	5	9218	96 464	4
9019	95 516	5	9069	95 756	5	9119	95 995	4	9169	96 232	5	9219	96 468	5
9020	95 521	4	9070	95 761	5	9120	95 999	5	9170	96 237	5	9220	96 473	5
9021	95 525	5	9071	95 766	4	9121	96 004	5	9171	96 242	4	9221	96 478	5
9022	95 530	5	9072	95 770	5	9122	96 009	5	9172	96 246	5	9222	96 483	4
9023	95 535	5	9073	95 775	5	9123	96 014	5	9173	96 251	5	9223	96 487	5
9024	95 540	5	9074	95 780	5	9124	96 019	4	9174	96 256	5	9224	96 492	5
9025	95 545	5	9075	95 785	4	9125	96 023	5	9175	96 261	4	9225	96 497	4
9026	95 550	4	9076	95 789	5	9126	96 028	5	9176	96 265	5	9226	96 501	5
9027	95 554	5	9077	95 794	5	9127	96 033	5	9177	96 270	5	9227	96 506	5
9028	95 559	5	9078	95 799	5	9128	96 038	4	9178	96 275	5	9228	96 511	4
9029	95 564	5	9079	95 804	5	9129	96 042	5	9179	96 280	4	9229	96 515	5
9030	95 569	5	9080	95 809	4	9130	96 047	5	9180	96 284	5	9230	96 520	5
9031	95 574	4	9081	95 813	5	9131	96 052	5	9181	96 289	5	9231	96 525	5
9032	95 578	5	9082	95 818	5	9132	96 057	4	9182	96 294	4	9232	96 530	4
9033	95 583	5	9083	95 823	5	9133	96 061	5	9183	96 298	5	9233	96 534	5
9034	95 588	5	9084	95 828	4	9134	96 066	5	9184	96 303	5	9234	96 539	5
9035	95 593	5	9085	95 832	5	9135	96 071	5	9185	96 308	5	9235	96 544	4
9036	95 598	4	9086	95 837	5	9136	96 076	4	9186	96 313	4	9236	96 548	5
9037	95 602	5	9087	95 842	5	9137	96 080	5	9187	96 317	5	9237	96 553	5
9038	95 607		9088	95 847		9138	96 085		9188	96 322		9238	96 558	

N	5
1	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5

N	4
1	0,4
2	0,8
3	1,2
4	1,6
5	2,0
6	2,4
7	2,8
8	3,2
9	3,6

Suprotno ovome, možemo za zadatu vrednost logaritma odrediti broj.

Primer 5. *Odrediti za koje x je* $\log x = 1.82197$.

Rešenje. U tablici potražimo mantisu 82197 i vidimo da je $N = 6637$, a zatim odredimo još i karakteristiku. Kako je ceo deo pozitivan i iznosi 1, vrednost karakteristike je između $10 \leq a < 100$. Tada je traženo $x = 66.37$. △

N	log	d	N	log	d	N	log	d	N	log	d	N	log	d
6537	81 538	6	6587	81 869	6	6637	82 197	7	6687	82 523	7	6737	82 847	6
6538	81 544	7	6588	81 875	7	6638	82 204	6	6688	82 530	6	6738	82 853	7
6539	81 551	7	6589	81 882	7	6639	82 210	7	6689	82 536	7	6739	82 860	6
6540	81 558	6	6590	81 889	6	6640	82 217	6	6690	82 543	6	6740	82 866	6
6541	81 564	7	6591	81 895	7	6641	82 223	7	6691	82 549	7	6741	82 872	7
6542	81 571	7	6592	81 902	6	6642	82 230	6	6692	82 556	6	6742	82 879	6
6543	81 578	6	6593	81 908	7	6643	82 236	7	6693	82 562	7	6743	82 885	7

8	4,8
9	5,4

Primer 6. *Odrediti broj x ako je* $\log x = 3.13217$.

Rešenje. Ako mantisu potražimo, kao u prethodnom primeru, u tablici nećemo je naći, već se nalazi između dve uzastopne mantise koje se nalaze u tablicama. Manja mantisa je 13194 i odgovara broju 1355, a veća mantisa je 13226 za broj 1356. Razlika ove dve mantise je $D = 32$, a potom odredimo odstupanje naše zadate mantise 13217 od manje mantise. Razlika e $d = 23$. Ako je α bila priraštaj broja koji bi dao mantisu d, tada je $\alpha = \dfrac{d}{D}$. Broj α je decimalni i manji je od jedan. Prve dve njegove decimale daju petu i šestu cifru broja x. Tada je $\alpha = \frac{23}{32} = 0.71875 \approx 0.72$. Kako je karakteristika 3, tada je ceo deo broja između $1000 \leq x < 10000$ pa je traženi broj $x = 1355.72$. $\triangle$

Želim još da istaknem vezu dekadnih i Neperovih logaritama. Koeficijent proporcionalnosti koji nam omogućuje da pređemo od Neperovih logaritama na dekadne je broj $\frac{1}{\ln 10}$ kojeg zovemo modul i obeležavamo ga M. Njegova približna vrednost je $M \approx 0.43429...$. Za izračunavanje Neperovih logaritama uz pomoć dekadnih koristimo koeficijent $\frac{1}{M}$ koji ima približnu vrednost $\frac{1}{M} \approx 2.30259...$.

Primer 7. *Izračunati* $\ln 2$*, ako iz tablice dekadnih logaritama znamo da je* $\log 2 = 0.30103$*.*

Rešenje. Odredimo proizvod koeficijenta $\frac{1}{M}$ i desetih delova, stotih, hiljaditih... broja 0.30103 i zatim saberemo. Broj koji dobijemo odgovara prirodnom logaritmu broja 2.

- Proizvod 0.3 i 2.30259 je 0.690776
- Proizvod 0.001 i 2.30259 je 0.0023026
- Proizvod 0.00003 i 2.30259 je 0.0000690

Sabiranjem dobijamo 0.69315 što odgovara vrednosti $\ln 2$. $\triangle$

2.3 Jost Burgi

Čovek koji je nezavisno od Nepera osmislio sistem logaritama bio je Jost Burgi.

Jost Burgi je rođen 1552.godine u Lihtenštajgu u Švajcarskoj. Odlučio je da napusti rodno mesto, jednim delom zbog verske podele, a delom i zbog nedostatka mogućnosti za obrazovanjem. Po završetku osnovne škole nije imao priliku da napreduje, tako da Burgi uči i radi kao kovač kod proizvođača instrumenata i časovnika. Iako nikad nije učio latinski (jezik nauke u to vreme), bio je veoma upućen u matematiku i astronomiju. Burgi je prvi napravio sat (Slika 1.) koji je imao minutu, registrovao je sekundu i imao grešku manju od minute u 24 sata. Po prvi put je sat bio toliko precizan da je mogao da se koristi u astronomiji. U Kaselu je bila izgrađena opservatorija pa je Burgi napravio i nebeski globus (Slika 2.). Godine 1591. Burgi je završio svoj astronomski sat koji je zasnovan na Kopernikovom heliocentričnom sistemu. U to vreme to je bio veoma hrabar potez jer je crkva bila protivnik svih koji su taj sistem podržavali.

U vreme kada je Burgi naprvio astronomski sat, on je koristio svoju verziju logaritama, osmišljenu za vlastitu upotrebu kako bi pomogao sebi u astronomskim proračunima. Nije poznato tačno kada je počeo sa njihovom upotrebom, ali se smatra da je to bilo oko 1588.godine. Uz to, Burgi koristi trigonometrijske formule:

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

i

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2},$$

Slika 1: Burgijev sat

Slika 2: Burgijev globus

kako bi sebi olakšao množenje brojeva svođenjem na sabiranje i oduzimanje. Prethodno je, da bi koristio ove formule, izračunao sinusne tabele koje nikada nisu objavljene i sada im se već gubi trag. Primer njegovog račun je tekao ovako:

Primer 8. *Odrediti proizvod brojeva* 0.99027 *i* 0.17365.

Rešenje. U trigonometrijskim tablicama vrednost 0.99027 odgovara $\sin 82°$, a vrednost 0.17365 odgovara $\sin 10°$. Izračunavanjem $a - b = 72°$ i $a + b = 92°$. Primenom formule, kada iz tablice pročitamo $\cos 72° = 0.309017$ i $\cos 92° = -0.034899$, potom oduzimanjem i na kraju deljenjem sa brojem 2, dobijamo sledeći rezultat:

$$0,99027 \cdot 0,17365 = \frac{0,309017 - (-0,034899)}{2} = 0.171958.$$

△

2.3.1 Burgijevi logaritmi

Za razliku od Nepera, Burgi je imao potpuno drugačije viđenje logaritama. Kao prvo, on je brojeve koji odgovaraju aritmetičkom nizu zapisivao crvenom bojom u svoju tabelu i to su bili brojevi počevši od $0, 10, 20, 30, ...500, 510....$ Potom je tabelu popunjavao brojevima, ali crnom bojom i oni su predstavljali brojeve geometrijskog niza. Crni brojevi su bili vrednosti logaritama crvenih brojeva.

Kako je sve to izgledalo?

Burgi je, jednostavno, odabrao bazu blizu broja 1 tako da je baza bila

$$B = 1 + \frac{1}{10000} = 1.0001,$$

i nastavio po pravilu stepena $x_{n+1} = B^n, n = 0, 1, 2, ...23027$. Ali, on, ipak, nije želeo da množi, već je iskoristio prethodno izračunato x i uočio priraštaj od sledećeg člana, Δx i to tako, kako je $x_i = 1.0001^n$ i $x_{i+1} = 1.0001^{n+1}$ imamo da je

$$x_{i+1} - x_i = 1.0001^{n+1} - 1.0001^n = 1.0001^n(1.0001 - 1) = \frac{x_i}{10000} = \Delta x.$$

Odnos dva broja je bio $\frac{1}{10^4}$.

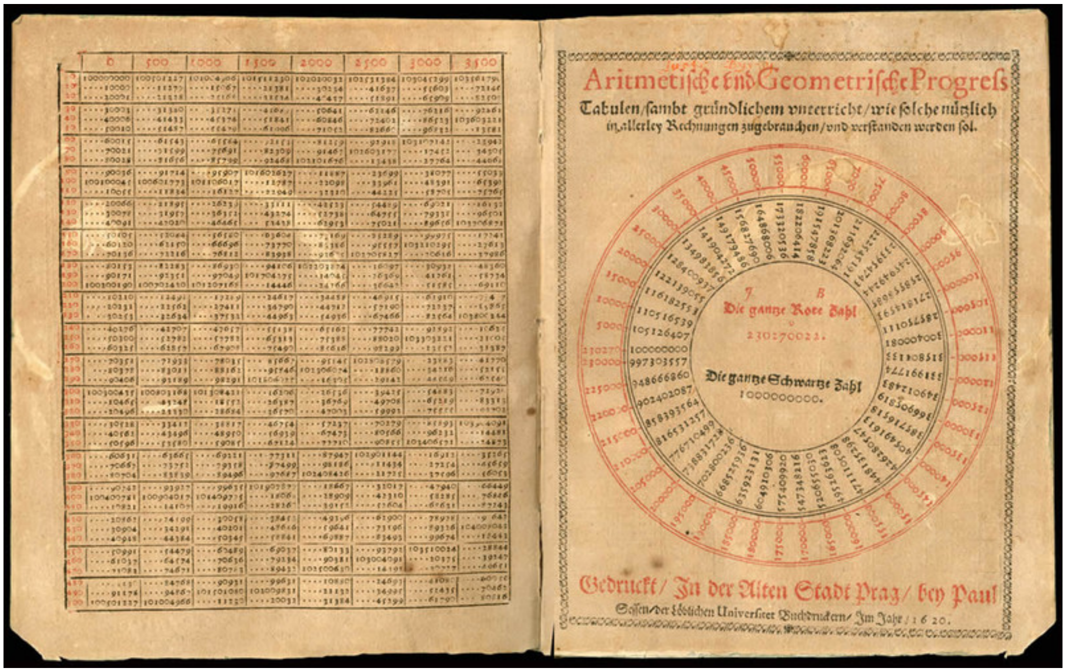
Na taj način je popunjavao svoju tabelu crnim brojevima koja je, ustvari, bila tabela antilogaritama. Na Slici 3. može se videti da su ispred cifara stavljane 4 tačke koje treba zameniti brojem 1.0000, kada je n=0,...90, potom 1.0001 za n=100,...190 i tako nastavlja dalje. Tabela se sastojala od 50 unosa po koloni i od 8 kolona na ukupno 58 strana, pri čemu je $x_0 = 1.000000000$ i $x_{23027} = 9.99999779$. Ako, na primer, u tabeli tražimo crveni broj 4000, potražimo ga tako što gledamo u vrsti 3500 i koloni 500, jer $3500 + 500 = 4000$, i to je 1.04080816, tj.

$$\log_{1.0001} 1.04080816 = 4000.$$

Kada se sagledaju Burgijeve tablice i pronalazak osnove, u odnosu na koju je Burgi izračunavao crne brojeve i popunjavao svoje tablice, to postavlja Burgija u red izumitelja logaritma, nezavisno od Nepera. Mnogi autora, koji su sve to izučavali, zaista pokazuju da je Burgi pronašao aproksimaciju broja e, odnosno bazu za prirodne logaritme. Jedan od autora koji je komentarisao Burgijeve logaritme bio je Kestner. On je primetio da su "Burgijevi logaritmi bili lakši za upotrebu od Neperovih". Zanimljivo je da je Kestner tada napisao da je $\log_{1.0001} 10 = 230270.022$, što je slično Brigsovim logaritmima.

Drugi autor, Volf, dolazi do sledeće veze:

$$\begin{array}{cc}
0 & 1 \\
\frac{1}{10^4} & \left(1+\frac{1}{10^4}\right) \\
\frac{2}{10^4} & \left(1+\frac{1}{10^4}\right)^2 \\
\cdots & \cdots \\
\frac{n}{10^4} & \left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n
\end{array}$$



Slika 3: Burgijeva tabela

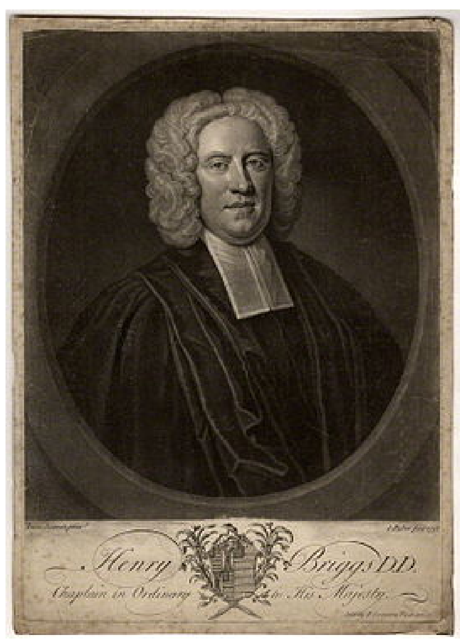
i odatle je zaključeno da crnom broju 1 odgovara $(1+\frac{1}{10^4})^{10^4} = 2.71814592682...$, što je blizu 2.71828..., jer su već znali za $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

Bruins dokazuje da za Burgijeve logaritme važi $1.0001^{10000} = 2.718145927$, a za Neperove $1.0000001^{10000000} = 2.718281692$. Ali, za Nepera je ovo skroz pogrešna pretpostavka jer Neper nikada nije smatrao da je $\log_{nap} 1.0000001 = 0.0000001$.

2.4 Henri Bridžs

Henri Bridžs je rođen 1561.godine u Jorkširu u Engleskoj. Pohađao je gimnaziju, jer kako govore neki spisi, bio je iz skromne porodice tako da nije mogao da se upiše na koledž u Kembridžu. U gimnaziji stiče veliko znanje iz grčkog i latinskog jezika. Kao veoma dobar učenik dobija stipendiju i školuje se na Kembridžu. Kasnije ga postavljaju za predavača i ispitivača matematike na Kembridžu. Godine 1596. postao je prvi profesor geometrije na koledžu u Londonu.

Bridžs je, kao i njegovi prethodnici, bio veoma zainteresovan za astronomiju, posebno je proučavao pomračenja. To je bila tema koja je zahtevala mnoge teške i velike proračune tako da je Bridžs bio neopisivo zadivljen kada je pročitao Neperov rad na logaritmima koji je pružio pomoć onima koji su izučavali astronomiju. Bridžs je već bio uključen u izradu svojih tabela, za pomoć u proračunima, i pre nego što je saznao o Neperovim logaritmima.



Bridžsova ideja je bila: ako je R radijus kruga, tj. vrednost sinusa ugla (sinus od $90°$), tada je $\log R = 0$ i $\log \dfrac{R}{10} = 10^{10}$ i sve to zasnovano na osnovi 10. Držeći javno izlaganje o ovoj doktrini u Londonu svom širokom auditorijumu Bridžs je to i izložio: 0 je vrednost logaritma celog sinusa, a logaritam desetog dela celog sinusa, odnosno $5°44'21''$, je 10.000.000.000. Odmah je o tome obavestio u pismu samog autora, Nepera, premda je već počeo da izrađuje tabele sa novom osnovom.

U leto 1615. Bridžs odlazi da upozna genijalnog Nepera. Putovanje na konju, od Londona do Edinburga, je trajalo četiri dana. Njihov prvi sastanak trajao je mesec dana. Na sastanku, Neper napušta hiperbolički oblik njegovih logaritama i prihvata Bridžsovu ideju o osnovi 10, jer je i sam došao na tu ideju, ali zbog lošeg zdravlja svoje obimne proračune ostavlja svom dragom učeniku Bridžsu da nastavi. Takođe, Neper predlaže poboljšanje da $\log 1 = 0$ i $\log R = 10^{10}$. Kasnije je Bridžs zamenio $\log R = 10^{10}$ sa $\log 10 = 1$.

Već u toku te prve posete Bridžs je radio na proračunu takvih tabela, druga poseta je usledila 1616. godine, ali kada su u leto 1617. godine planirali još jednu posetu, Neper je preminuo.

Bridžsova matematička rasprava "Arithmetica Logarithmica"objavljena je 1624. godine. U njoj su logaritmi prirodnih brojeva od 1 do 20.000 i od 90.000 do 100.000 izračunato na 14 decimala. Takođe, tu su tabele vrednosti i prirodnih sinusnih funkcija na 15 decimala. Međutim, Bridžs sugeriše da zapisnike o nestalim brojevima može popuniti tim ljudi. Tako je Vlaku popunio tabele brojevima od 20.000 do 90.000.
Bridžs je napisao rad o trigonometriji, ali je zbog smrti 1630. godine, rad ostao nedovršen, a napisao je još nekoliko matematičkih rukopisa koji su ostali neobjavljeni.

Naravno da Bridžs nije imao samo uspeha na polju logaritama. On je formirao svoju tabelu proračuna kako bi mogao da izračuna visinu polova, radio je na izračunavanju geografske širine od magnetne deklinacije, ugao između magnetnog i geografskog meridijana, potom objavljuje tabele za poboljšanje plovidbe, konstruisao nekoliko tabela za navigaciju, napravio je mapu Severne Amerike, pisao je i o severo-zapadnom prolazu u Južnom moru.

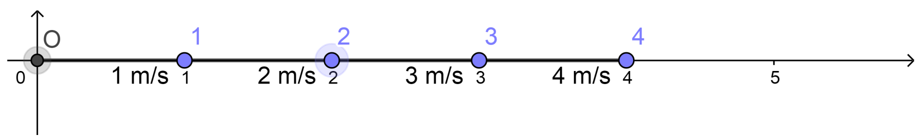
3 Logaritam iz ugla geometrije

U ovom delu pokušaćemo prirodnom logaritmu dati i geometrijski oblik i na taj način doći do definicije prirodnog logaritma.

Setimo se iz odeljka 2.1.1 kako je Neper definisao prirodni logaritam. On je zamislio dve paralelne linije, jednu konačnu i drugu beskonačnu i posmatrao kako se po njima kreću tačke.

Sa stanovišta fizike, brzinu možemo izračunavati kao pređeni put po jedinici vremena

$$brzina = \frac{pre\text{đ}eni\ put}{vreme}.$$



Neka se tačka kreće po horizontalnoj liniji (kao na slici) počevši od tačke O. Put koji je prešla tačka je $1m$ i vreme koje protekne je $1s$. Tražena brzina u toj prvoj tački je $1\frac{m}{s}$. Zatim, posmatrajući tačku u položaju 2, ali gledajući u odnosu na početni položaj, pređeni put je $2m$, a vreme $1s$. Tada je brzina, u položaju 2, $2\frac{m}{s}$; gledajući tačku u položaju 3 u odnosu na početni položaj, pređeni put je $3m$ i vreme $1s$, brzina je $3\frac{m}{s}$ i tako dalje.

Međutim, postavlja se pitanje koliko vremena protekne iz tačke 1 do tačke 2 na rastojanju 1 metar?

Rešenje. Posmatrajući tačku 1 u odnosu na početni položaj O, njena brzina je $1\frac{m}{s}$, a pređeni put $1m$. Proteklo vreme je tada

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1m}{1\frac{m}{s}} = 1s.$$

Od položaja 1 do polozaja 2, brzina je $2\frac{m}{s}$, a pređeni put $1m$. Tada je vreme koje je proteklo

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1m}{2\frac{m}{s}} = \frac{1}{2}s.$$

Brzina u tački 1 je minimalna i iznosi $1\frac{m}{s}$, a u tački 2 je maksimalna i jednaka je $2\frac{m}{s}$. Možemo zaključiti da je proteklo vreme između 1 sekunde i $\frac{1}{2}$ sekunde. $\triangle$

Ovim smo dobili grubu procenu da je vremenski interval na segmentu $[1,2]$ između $\frac{1}{2}$ sekunde i 1 sekunde što kraće zapisujemo

$$\frac{1}{2} \leq T(1,2) \leq 1.$$

Isto pitanje se postavlja i za interval $[2,4]$? Računajući kao u prethodnom primeru zaključujemo da je dužina ovog segmenta 2, minimalna brzina u tački 2 je $2\frac{m}{s}$, a maksimalna brzina u tački 4 je $4\frac{m}{s}$. Iz ovoga možemo zaključiti da je

$$\frac{2}{4} \leq T(2,4) \leq \frac{2}{2}$$

to jest,

$$\frac{1}{2} \leq T(2,4) \leq 1.$$

Na intervalu $[4,8]$, minimalna brzina je 4, a maksimalna 8, pa se ponovo ispostavlja da je

$$\frac{1}{2} \leq T(4,8) \leq 1.$$

I najzad, na bilo kom intervalu $[a,2a]$, pri čemu je a pozitivan broj, minimalna brzina je a, a maksimalna $2a$, odakle kao i iz prethodnog proističe

$$\frac{1}{2} \leq T(a,2a) \leq 1.$$

Nakon ovog objašnjenja, možemo, slobodno, horizontalnu liniju podeliti na segmente u tačkama

$$..., \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...$$

čime je nastao geometrijski niz stepena 2.

Razmotrimo još finiju procenu za interval $[2,4]$ i to tako što ga podelimo na intervale $[2,3]$ i $[3,4]$. Brzina na prvom intervalu je između 2 i 3 metra u sekundi, tako da je vreme koje protekne iz tače 2 do tačke 3 između $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ sekunde, a na intervalu $[3,4]$ između $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$ sekunde. Stoga, ukupno vreme je između $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Ovo možemo zapisati kao:

$$\frac{1}{3} \leq T(2,3) \leq \frac{1}{2}$$

i

$$\frac{1}{4} \leq T(3,4) \leq \frac{1}{3}$$

pa kako je $T\left(2,4\right)=T\left(2,3\right)+T\left(3,4\right)$, imamo da je

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\leq T\left(2,4\right)\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

Na početku smo dobili grubu procenu. Vreme koje protekne pri kretanju od tačke 2 do tačke 4, bilo je između 0.5 sekundi i 1 sekunde, a sada već imamo finiju procenu, a to je između 0.58333... sekunde i 0.8333... sekunde.

Isti zaključak se može primeniti i na intervalu $[a,2a]$. Polovina intervala je u tački $1.5a$. Tada je

$$\frac{1}{3}=\frac{0.5a}{1.5a}\leq T(a,1.5a)\leq\frac{0.5a}{a}=\frac{1}{2}$$

i

$$\frac{1}{4}=\frac{0.5a}{2a}\leq T(1.5a,2a)\leq\frac{0.5a}{1.5a}=\frac{1}{3}$$

odakle se može zaključiti da je

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\leq T(a,2a)\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}.$$

Uopštavanjem priče izvodimo sledeći zaključak.

Ako interval $[n,2n]$, pri čemu je n prirodan broj, podelimo na n intervala i to $[n,n+1]$, $[n+1,n+2]$,...,$[2n-1,2n]$, tako da je svaki interval dužine 1, brzina na prvom intervalu nije manja od n i nije veća od $n+1$, tj.

$$\frac{1}{n+1}\leq T(n,n+1)\leq\frac{1}{n},$$

na drugom intervalu brzina nije manja od $n+1$ i ne veća od $n+2$, tj.

$$\frac{1}{n+2}\leq T(n+1,n+2)\leq\frac{1}{n+1}$$

i tako;
poslednji interval

$$\frac{1}{2n}\leq T(2n-1,2n)\leq\frac{1}{2n-1}.$$

Sabiranjem svih vremena imamo da je

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\leq T(n,2n)\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n-1}.$$

Ako pritom, recimo, podelimo interval $[1,2]$ na n manjih intervala, pri čemu svaki ima dužinu $\frac{1}{n}$ i stoga je

$$\frac{1}{n+1}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{n+1}{n}}\leq T(1,1+\frac{1}{n})\leq\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{1}}=\frac{1}{n}.$$

Slično će biti i za ostale intervale, te je sve zajedno

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\leq T(1,2)\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n-1}.$$

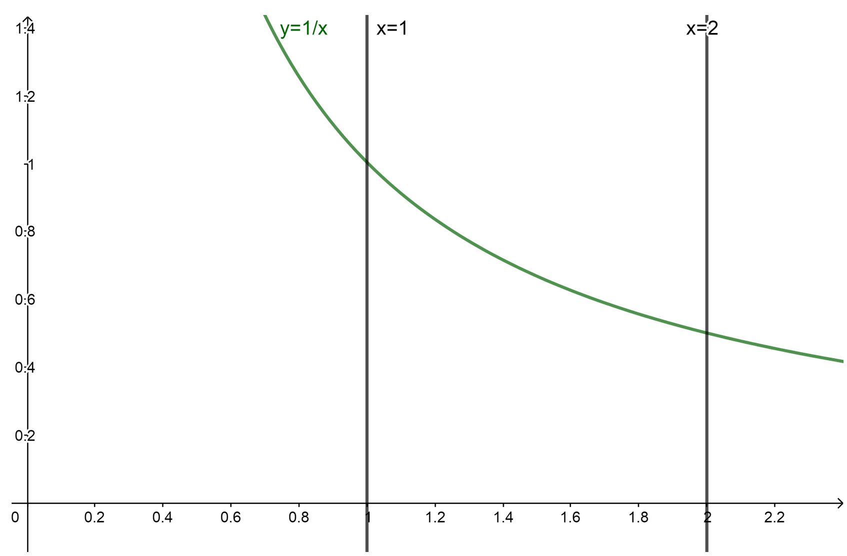
Sa povečanjem broja n dobija se veća preciznost.

3.1 Oblast pod hiperbolom

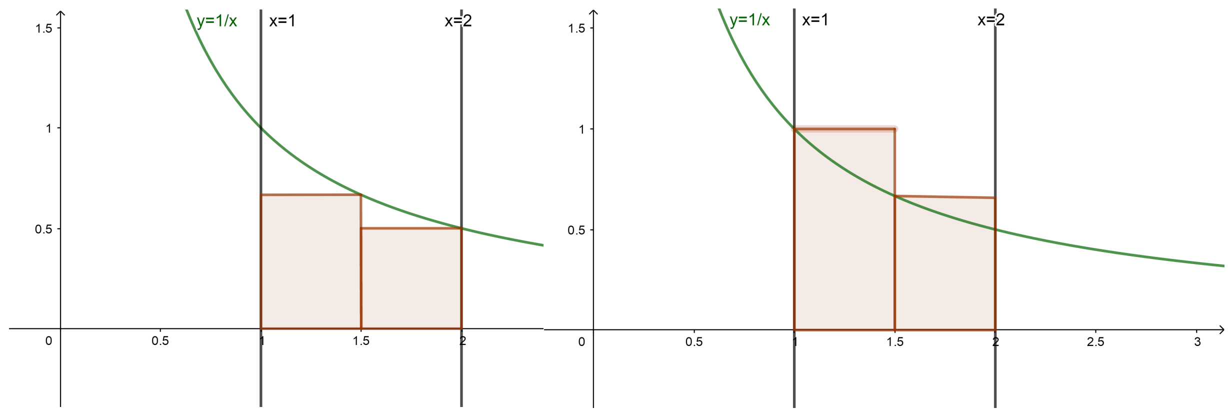
Nakon ovih finih procena, sada smo već u mogućnosti da izračunamo vreme kretanja od tačke 1 do tačke 2, to jest $T\,(1,2)$, koristeći gore navedenu nejednakost

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}\leq T(1,2)\leq\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n-1}.$$

Geometrijski se ispostavlja da je $T\,(1,2)$ jednako površini ispod krive, koja predstavlja hiperbolu jednačine $y=\dfrac{1}{x}$, ograničenu pravama $x=1$ i $x=2$, na šta ukazuje i slika.



Tu površinu ispod hiperbole s granicama $x=1$ i $x=2$, koja naizgled liči na zakrivljeni trapez, preimenujmo u $S\,(1,2)$.
Da to smemo zaista da poistovetimo dajemo i sledeće obrazloženje. Podelimo nas zakrivljeni trapez, u prvom slučaju kao na levoj slici, a u drugom sličaju kao na desnoj slici.



Razmatranjem leve slike dobijamo donju granicu. Širina svakog pravougaonika je $\frac{1}{2}$, a dužina $\frac{2}{3}$ i $\frac{1}{2}$ pa je donja granica

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

A, ako razmotrimo desnu sliku, širina je, kao i kod prethodnih pravougaonika, $\frac{1}{2}$, a dužina 1 i $\frac{2}{3}$, pa je gornja granica

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Slobodno možemo izvesti zaključak da je

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \leq S\left(1,2\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

što se ispostavlja isto prethodnoj priči, pa proističe da je $T\left(1,2\right) = S\left(1,2\right)$. Samim tim, smemo slobodno zaključiti da sve procene koje smo na početku priče izveli za T jesu važeće i za S, pa je i

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \leq S(1,2) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n-1}.$$

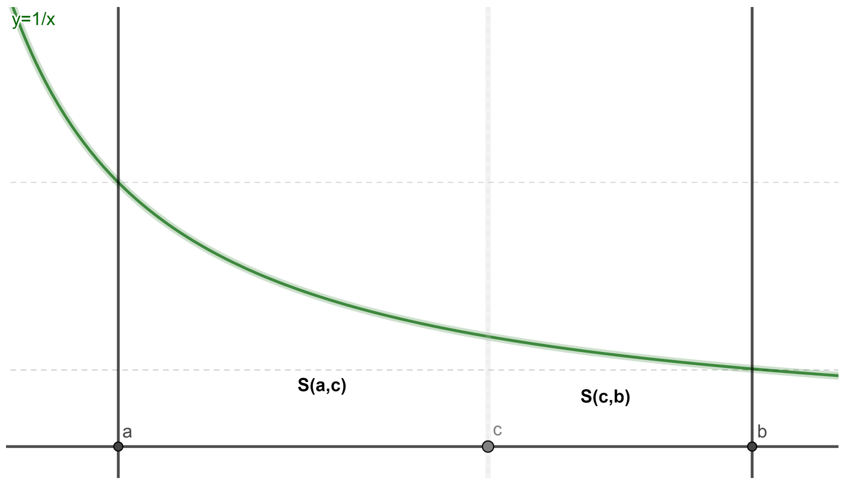
A, takođe, važiće i

$$T\left(a,b\right) = S\left(a,b\right),$$

za bilo koje a i b.

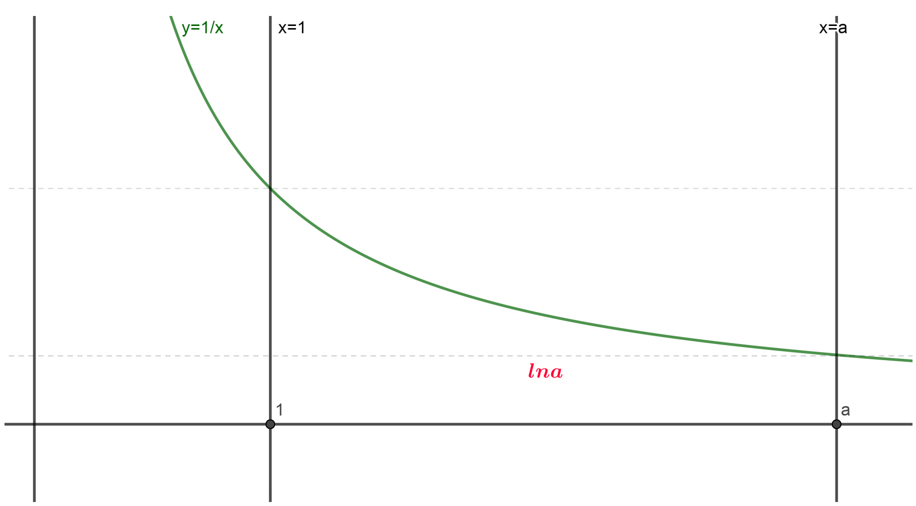
Moramo još primetiti sa slike da je za $a < c < b$

$$S\left(a,b\right) = S\left(a,c\right) + S\left(c,b\right)$$



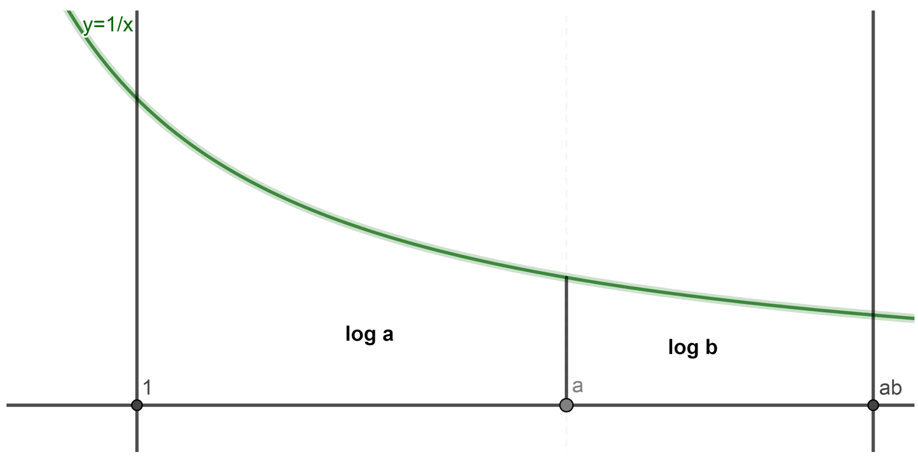
Ako baš odaberemo da nam leva granica bude prava $x = 1$, a za desnu granicu biramo $x = a$, površina zakrivljenog trapeza $S(1, a)$, ograničena ispod naše krive $y = \dfrac{1}{x}$ predstavlja, zapravo, ***PRIRODNI LOGARITAM BROJA a*** sa bazom e i

$$\ln_e a = \int_1^a \frac{1}{x} dx.$$



Dva pronalazača koja su dala logaritmima, ili kako su ih oni smatrali hiperboličkim logaritmima, geometrijski oblik bili su Gregorius Seint Vinsent i Alfonse Antonio de Sarasa. Seint Vinsent je dao odnos između hiperbole i logaritma, a kako savreminici navode, opisao je sve osim imena. On prihvata hiperbolu kao nešto što sumira površinu ispod krive koristeći niz ordinata u geomtrijskom nizu. Sarasa je shvatio da je logaritam proizvoda tačaka apscise jednak zbiru područja pod hiperbolom

$$\log ab = \log a + \log b.$$

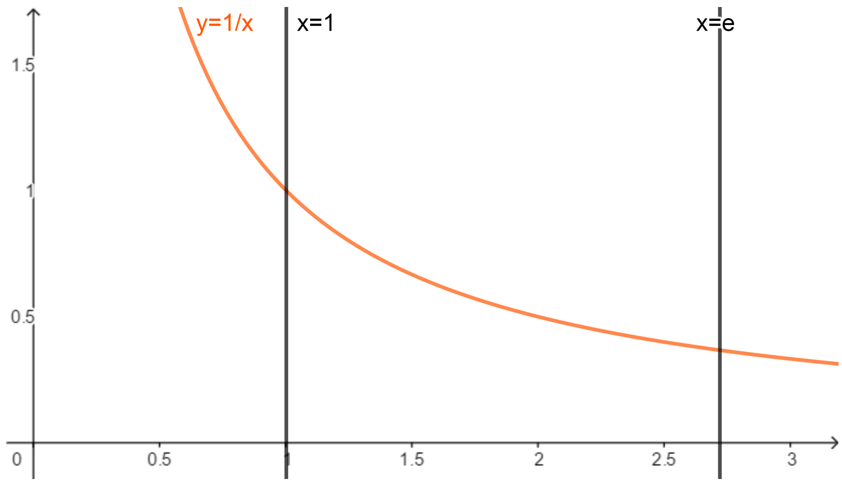


Proizilazi, da je, gledano geometrijski, granični prelaz na prirodne logaritme, zapravo prelaz na površinu ispod hiperbole. Nikolas Merkator je bio prvi koji je njihov rad, površinu ispod hiperbole, nazvao prirodni logaritam.

Prethodnu priču potkrepićemo primerom.

Primer 9. *Izračunati* $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x}.$

Rešenje. Predstavimo rešenje prvo geometrijski.



Kako sama definicija glasi

$$\ln_e a = \int_1^a \frac{1}{x} dx,$$

iz našeg zadatka vidimo da je a, zapravo e i da važi sledeće:

$$1 = \ln_e e = \int_1^a \frac{dx}{x} = \ln_e x|_1^e = \ln_e e - \ln_e 1 = \ln_e e - 0 = \ln_e e = 1.$$

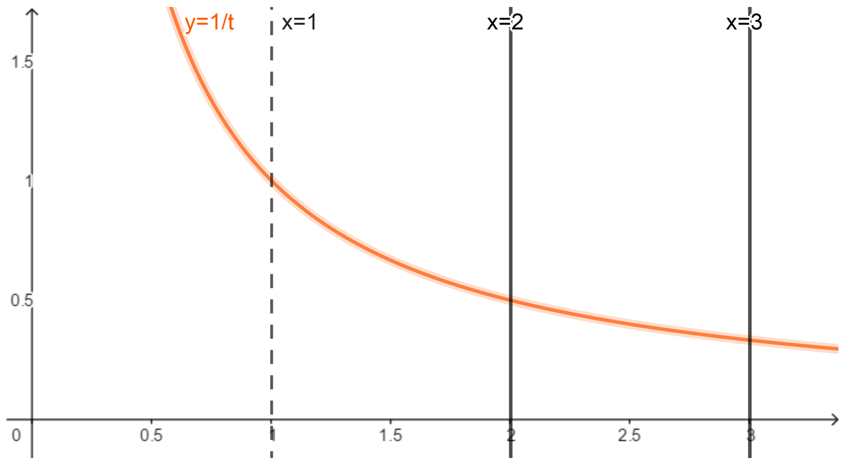
Koristili smo Njutn-Lajbnicovu formulu: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. △

Primer 10. *Izračunati* $\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$.

Rešenje. Prvo što uočavamo je da granica ne počinje kao po definiciji od 1 i da je funkcija $y = \frac{1}{x+2}$. Uvedimo smenu i diferencirajmo $t = x + 2$ i $dt = dx$, međutim, tada se i granice menjaju, tako da su granice za novu funkciju $\frac{1}{t}$ sada 2 i 3. Problem se sada svodi odrediti

$$\int_2^3 \frac{dt}{t}.$$

Grafički:



Sa sigurnošću znamo da odredimo površinu ispod krive $y = \frac{1}{t}$ u granicama $x = 1$ i $x = 3$. Tada je

$$P_1 = \ln_e 3 = \int_1^3 \frac{dt}{t},$$

a isto tako možemo odrediti i površinu ipod iste krive, ali u granicama $x = 1$ i $x = 2$. Pri tome je

$$P_2 = \ln_e 2 = \int_1^2 \frac{dt}{t},$$

pa površinu ispod krive $y = \frac{1}{t}$ u granicama $x = 2$ i $x = 3$ dobijamo kao

$$P_1 - P_2 = \ln_e 3 - \ln_e 2 = \ln_e \frac{3}{2}$$

.

Ako to uradimo drugim načinom, primenom integrala, dobijamo isti rezultat

$$\int_2^3 \frac{dt}{t} = \ln_e t|_2^3 = \ln_e 3 - \ln_e 2 = \ln_e \frac{3}{2},$$

kao što smo i očekivali.

$\triangle$

4 Logaritam u školi

Neophodno je sagledati rad tvoraca logaritama, Nepera i Burgija. Obojica polaze od činjenice $x = b^y$, za cele vrednosti y i pokušavaju da dobijene vrednosti za x budu što bliže jedna drugoj. I Neper i Burgi biraju da osnova b bude blizu jedinice, čime se za stepen od b dobija vrednost isto bliska jedinici. Burgi je odabrao bazu $b = 1.0001$, dok Neper bira bazu manju od jedinice, i to $b = 1 - 0.0000001 = 0.9999999$.

Burgijevim načinom računanja možemo uvideti sledeće: neka je

$$x = (1.0001)^y$$

i

$$x + \Delta x = (1.0001)^{y+1}.$$

Tada imamo da je,

$$\Delta x = (x + \Delta x) - x,$$

odakle zamenom dobijamo da je

$$\Delta x = (1.0001)^y (1.0001 - 1) = \frac{x}{1000} = \frac{x}{10^4}.$$

Ako dobijenu jednakost zapišemo

$$\frac{\Delta x}{1} = \frac{x}{10^4}$$

i jedinicu u imeniocu zamenino sa Δy, jednakost se svodi na sledeće

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10^4}{x}.$$

Ovim smo dobili diferencijalnu jednačinu koju je Burgi koristio da izračuna svoju tablicu.

Neper računa po istom principu. Neka je

$$x = (0.999999)^y$$

i

$$x + \Delta x = (0.9999999)^{y+1}.$$

Istim postupkom izvodi se sledeći zaključak:

$$\Delta x = (0.9999999)^y (0.9999999 - 1) = -\frac{x}{10^7},$$

odakle je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{10^7}{x}.$$

Ako sada u prvoj jednačini umesto y odaberemo da $y = \frac{y}{10^4}$ i u drugoj jednačini zamenimo $y = \frac{y}{10^7}$, tada prva jednačina se transformiše u jednačinu oblika

$$x = (1.0001)^{10000y}$$

i druga jednačina ima oblik

$$x = (0.9999999)^{10000000y}.$$

U oba slučaja dobijamo istu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$$

Posmatrajući jednačinu $x = (1.0001)^{10000y}$ formirajmo tabelu vrednosti

y	x
0.0000	1.0000
0.0001	1.0001
0.0002	1.00020001
0.0003	1.000300030001

Ako još uočimo da je

$$1.0001^{10000y} = (1.0001^{10000})^y,$$

vidimo da je baza , zapravo,

$$b = 1.0001^{10000} = (1 + \frac{1}{10^4})^{10^4} \approx e.$$

Da je Burgi odabrao bazu još bližu broju 1, na primer $b = 1 + \frac{1}{n}$ i umesto $b = 1.0001^{10000y}$ zapisao

$$b = (1 + \frac{1}{n})^{ny},$$

gde ny teži beskonačnosti kao ceo broj, dobio bi još finiju podelu x-ova. Saglasno sa definicijom stepena možemo reći da je x y-ti stepen broja $(1 + \frac{1}{n})^n$. Interesantno je da se Burgijeva baza $1.0001^{10000} = 2.718146$ poklapa sa brojem e do trećeg decimalnog mesta.

Dolazimo do toga da ovako izračunate vrednosti iz gornje tabele, zapravo odgovaraju funkciji

$$y = \log_b \ x$$

za $b \approx e$ tj.

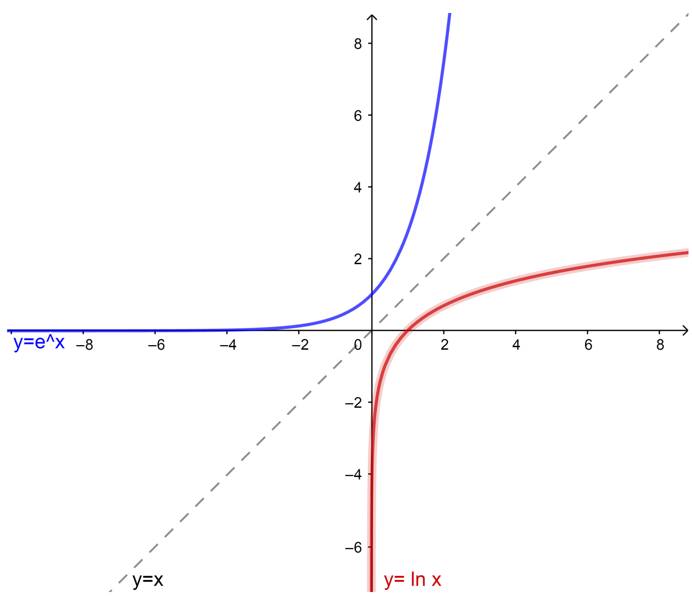
$$y = \ln_e x.$$

Polazeći od činjenice sa početka ovog dela da je $x = b^y$ i pokazatelja da je za bazu b odabrano e, dolazimo do toga da je, zapravo,

$$x = e^y.$$

Ova funkcija u kojoj y figuriše u eksponentu naziva se eksponencijalna funkcija. Ovim smo pokazali da su ove dve jednačine, $x = e^y$ i $y = \ln_e x$, međusobno ekvivalentne.

Inverzna funkcija logaritamskoj funkciji $y = \ln_e x$ je funkcija $y = e^x$.



Ako potražimo izvod funkcije $y = e^x$ imamo sledeće:

$$\frac{dy}{dx} = e^x = y,$$

odakle sledi da je

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

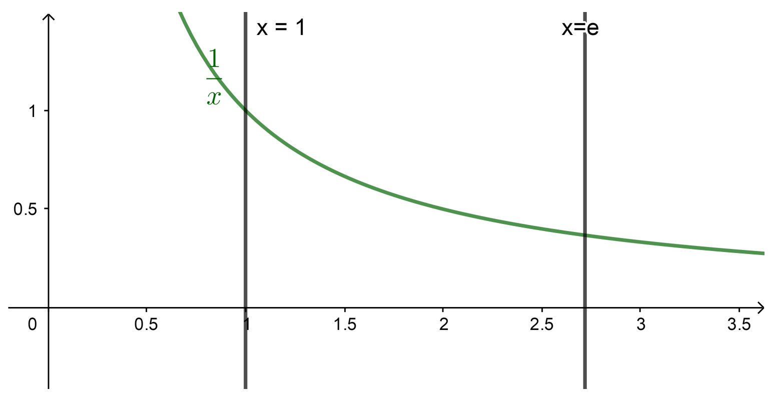
Ako zamenimo promenljive x i y, sledi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Iz ovoga možemo zaključiti da je izvod funkcije $y = \ln_e x$ zapravo $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$. Drugim rečima, funkcija $y = \ln_e x$ jeste integral funkcije $\dfrac{1}{x}$. Imajući u vidu i geometrijski opis integrala, ovim zasigurno potvrđujemo da je

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x,$$

površina ispod hiperbole. I uočimo još, ako tu površinu ispod hiperbole ograničimo sa x osom i pravama $x = 1$ i $x = e$, tada je ta površina ispod hiperbole jednaka jedan.



Osnovne osobine logaritma: Neka je data funkciji $y = \log ax$, broj a pozitivna konstanta. Kada diferenciramo jednačinu, dobijamo izvod složene funkcije

$$y' = (\log ax)' = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}.$$

Ta funkcija ima isti izvod kao i $\log x$, te se od $\log x$ razlikuje za konstantu

$$\log ax - \log x = C.$$

Konstantu C ćemo izračunati stavljajući da $x = 1$. Tada se jednakost svodi na

$$\log a - \log 1 = C,$$

a kako je $\log 1 = 0$, izvodimo da je

$$C = \log a$$

i konačno dobijamo da je

$$\log ax = \log a + \log x.$$

Ova relacija je identički zadovoljena i za $x = b$.

Tada dolazimo do jedne od osobina logaritama i to: *Neperov logaritam proizvoda jednak je zbiru Neperovih logaritama činilaca*

$$\log ab = \log a + \log b.$$

U slučaju sa tri činioca, proizvod abc se može napisati kao $a(bc)$, pa imamo sledeće

$$\log abc = \log a + \log(bc) = \log a + \log b + \log c.$$

Potom, relacija $\dfrac{a}{b} = q$ možemo napisati u obliku $bq = a$. Primenom prethodne osobine

$$\log b + \log q = \log a,$$

sledi da: *Neperov logaritam količnika jednak je razlici Neperovog logaritma brojioca i Neperovog logaritma imenioca*

$$\log q = \log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Na osnovu prethodno izvedenog za količnik imamo specijalni slučaj: *Neperov logaritam recipročne vrednosti nekog broja jednak je Neperovom logaritmu tog broja sa promenjenim znakom*

$$\log \frac{1}{a} = \log 1 - \log a = -\log a.$$

Takođe, ako je m ceo pozitivan broj, tada

$$\log a^m = m \log a,$$

pri čemu a^m posmatramo kao proizvod m jednakih činilaca.
Isto tako, neka je $y = \sqrt[n]{x}$. Ta relacija je ekvivalenta sa $y^n = x$. Tada sledi: *Neperov logaritam n-tot korena nekog broja jednak je količniku Neperovog logaritma tog broja i n*

$$n \log y = \log x,$$

tj.

$$\log y = \frac{1}{n} \log x.$$

A, ako je $y = x^{\frac{m}{n}}$, to je isto što i $y = \sqrt[n]{x^m}$. Odatle sledi da je $y^n = x^m$. Izračunavanjem logaritama i leve i desne strane dobijamo

$$n \log y = m \log x,$$

tj.

$$\log y = \frac{m}{n} \log x.$$

Primena:

1. **Ekonomija i demografija:** Broj e u ekonomiji sreće se u finansijskoj matematici. Pođimo od formule za složen kamatni račun

$$C_n = C_0(1 + \frac{p}{100})^n,$$

gde su C_0 i C_n, početna i konačna vrednost glavnice, p godišnja kamatna stopa i n broj godina. Ako kamate vršimo m puta godišnje, onda p zamenjujemo sa $\frac{p}{m}$ i n sa nm. Ako još stavimo da $m \to \infty$ imamo

$$C_n = C_0 \lim_{m\to\infty}(1 + \frac{p}{100m})^{nm},$$

ako još uvedemo smenu da $x = 100m$ tada,

$$C_0 \lim_{x\to\infty}[(1 + \frac{p}{x})^x]^{\frac{n}{100}} = C_0(e^p)^{\frac{n}{100}} = C_0 e^{\frac{np}{100}}.$$

Dobijeni izraz koristi se kada se kamata pripisuje glavnici svakog trenutka tj. beskonačno mnogo puta godišnje.

Primer 11. *Godine 1995. na Zemlji je živelo 5674380000, a 2005.godine 6453628000 ljudi. Ako je godišnja stopa priraštaja ostala nepromenjena, kada možemo očekivati da se broj stanovnika na Zemlji udvostruči?*

Rešenje. Iz zadatka vidimo da je $C_0 = 5674380000$ i da je $C_n = 6453628000$, $n = 10$godina i p=?, pa je na osnovu date formule

$$C_n = C_0 e^{\frac{np}{100}},$$

tj.

$$p = \frac{100}{n}(\ln C_n - \ln C_0) = 1.28681147\%.$$

Ovim smo odredili prosečnu stopu godišnjeg priraštaja. Uz ovu stopu priraštaja, iz uslova da je $C_n = 2C_0$, slično dobijamo

$$n = \frac{100}{p}(\ln C_n - \ln C_0) = \frac{100}{p}\ln 2 = 53.865 \approx 54 godine.$$

△

Takođe, količina prodatih proizvoda menja se po logaritamskom zakonu

$$f(x) = 160 + 10\log_2(200x + 1),$$

gde je x ulog u nekoj valuti za reklamiranje proizvoda, $f(x)$ količina prodatih proizvoda u kilogramima.

Primer 12. *Koliko bi se proizvoda prodalo ukoliko se ništa ne bi ulagalo u reklamiranje?*

Rešenje. Kako se ništa ne ulaže u reklamiranje zaključujemo da je $x = 0$, pa primenom formule

$$f(x) = 160 + 10\log_2(200x + 1),$$

dolazimo do sledećeg:

$$f(x) = 160 + 10\log_2(200 \cdot 0 + 1) = 160 + 10\log_2 1 = 160 + 10 \cdot 0 = 160.$$

Nakon proračuna vidimo da bi se prodalo $160kg$ nekog proizvoda. $\triangle$

2. **Biologija**: Poznato je da razmnožavaje mnogih populacija, na primer bakterija i virusa, prati eksponencijalni rast.

   Primer 13. *Broj bakterija u nekoj kulturi opada po formuli $B(t) = 250000e^{-0.4t}$, gde je t vreme izraženo u satima. Koliko će bakterija biti u kulturi nakon jednog sata? Nakon koliko sati će u jednoj kulturi ostati još samo 25000 bakterija?*

   Rešenje. Iz postavke zadatka vidimo da je vreme koje protekne $t = 1$. Računanjem $B(1)$ dobijamo sledeće:

$$B(1) = 250000e^{-0.4} = 250000 \cdot 0.6703 = 167580.$$

   Nakon jednog sata biće 167580 bakterija. Drugo pitanje se svodi na rešavanje jednačine $250000e^{-0.4} = 25000$ po nepoznatoj t. Ispostavlja se sledeće:

$$e^{-0.4} = 0.1,$$

   logaritmovanjem

$$-0.4t = \ln\frac{1}{10},$$

   odakle računanjem dobijamo da je $t = 5.76$ sati. $\triangle$

3. **Hemija:** Vrednost pH je negativni logaritam koncentracije hidronijum jona u rastvoru:

$$pH = -\log(H^+).$$

   Dakle, kada god znamo kolika je koncentracija H^+ jona u rastvoru, lako možemo da izračunamo pH vrednost nekog rastvora.

4. **Fizika:** Navešćemo Njutnov zakon hlađenja:

$$T_t = T_{okoline} + (T_0 – T_{okoline})e^{-kt},$$

   gde je T_0 početna temperatura, T_t temperatura nakon t minuta i k konstanta.

   Primer 14. *Kako bismo ohladili tvrdo kuvano jaje temperature $98°C$, ostavimo ga na sobnoj temperaturi od $18°C$. Nakon 5 minuta temperatura jajeta iznosi $38°C$. Kada će jaje dostići temperaturu od $25°C$?*

Rešenje. Prvo iskoristimo poznate veličine kako bismo odredili konstantu k. Iz zadatka vidimo da je $T_0 = 98°C$, $T_{okoline} = 18°C$, $t = 5$ min i $T_t = 38°C$. Na osnovu formule vidimo da je:

$$38 = 18 + (98 - 18)e^{-5k},$$

sređivanjem dobijamo

$$20 = 80e^{-5k},$$

tj.

$$0.25 = e^{-5k},$$

logaritmovanjem

$$-5k = \ln 0.25,$$

odakle izračunavanjem dobijamo da je $k = 0.2773$. Sada možemo odrediti vreme koje je potrebno da se jaje ohladi na $T_t = 25°C$.

$$25 = 18 + (98 - 18)e^{-0.2773t}$$

$$7 = 80e^{-0.2773t},$$

odakle je

$$e^{-0.2773t} = 0.0875,$$

logaritmovanjem

$$-0.2773t = \ln 0.0875,$$

izračunavanjem imamo da je $t = 8.79$ minuta. △

5. **Forenzika:** Za određivanje vremena smrti, takođe, su neophodni logaritmi kao i Njutnov zakon hlađenja.

Primer 15. *Dogodilo se ubistvo i na teren je izašla policijska ekipa za uviđaj. Temperatura tela ubijenog tada je iznosila* $26.5°C$*. Dva sata posle temperatura tela žrtve iznosila je* $24.5°C$*. U sobi je temperatura konstantna i iznosi* $20°C$*. Uz pretpostavku da je temperatura tela pre smrti bila prosečna* $36.5°C$*, odrediti vreme smrti.*

Rešenje. Iskoristićemo, iz prethodno opisanog dela Fizike, Njutnov zakon hlađenja. Iz samog zahteva zadatka vidimo da je početna temperatura $T_0 = 26.5°C$, da je nakon dva sata $t = 2h$ temperatura tela $T_t = 24.5°C$ i temperatura okoline, tj. temperatura u sobi $T_{okoline} = 20°C$. Na osnovu formule Njutnovog zakona hlađenja imamo sledeće:

$$24.5 = 20 + (26.5 - 20)e^{-2k},$$

odakle računanjem dolazimo do

$$4.5 = 6.5e^{-2k},$$

$$0.6923 = e^{-2k},$$

logaritmovanjem

$$-2k = \ln 0.6923,$$

$$-2k = -0.3677,$$

pa izračunavanjem

$$k = 0.18387.$$

Sada možemo, nakon što smo odredili koeficijent, koji odgovara ovom slučaju, odrediti i vreme smrti.

$$T_t = 20 + (36.5 - 20)e^{-0.18387t} = 20 + 16.5e^{-0.18387t}.$$

Znajući da je $T_t = 24.5°C$ imamo:

$$24.5 = 20 + 16.5e^{-0.18387t},$$

$$4.5 = 16.5e^{-0.18387t},$$

$$e^{-0.18387t} = 0.2727,$$

logaritmovanjem

$$-0.18387t = \ ln 0.2727,$$

$$t = -\frac{\ln 0.2727}{0.18387} = 7.07.$$

Zaključujemo da se ubistvo dogodilo 7 sati pre pronalaska tela. △

6. **Rihterova skala magnitude potresa-zemljotresi:** Rihterova skala magnitude potresa je logaritamska skala poznata i kao skala lokalne magnitude. Rihter je definisao magnitudu zemljtresa kao:

$$M = \log \frac{I}{S},$$

gde I predstavlja jačinu zemljotresa, a S je jačina „standardnog" zemljotresa.

Primer 16. *Koliko je puta bio jači zemljotres u Indijskom okeanu 2004.godine jačine magnitude* 9.3 *po Rihterovoj skali u odnosu na veliki japanski zemljotres 2011.godine čija je jačina magnitude bila* 8.9*?*

Rešenje. Označimo sa I_1 jačinu zemljotresa u Indijskom okeanu, a sa I_2 jačinu japanskog zemljotresa. Tada je:

$$9.3 = \log \frac{I_1}{S}$$

i

$$8.9 = \log \frac{I_2}{S}.$$

Odredimo odnos intenziteta $\frac{I_1}{I_2}$. Koristeći osobine logaritama imamo:

$$9.3 - 8.9 = \log \frac{I_1}{S} - \log \frac{I_2}{S}$$

tj.

$$0.4 = \log \frac{I_1}{I_2},$$

pa je

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{0.4} = 2.5119.$$

Možemo zaključiti da je zemljotres u Indijskom okeanu bio dva i po puta jači od zemljotresa u Japanu. $\triangle$

7. **Geografija:** Pomračenja Sunca se najčešće gleda golim okom. Međutim, gledanje duže vreme bez zatamnjenih stakala može da ošteti vid. Da bi se zaštitili, pred oko se mora staviti određen materijal određene debljine, tako da propušta procenat tog svetlosnog zračenja, i to između 0.5% i 0.003% tj. svo zračenje koje ima talasnu dužinu između $360nm$ i $1400nm$. Svaki materijal ima svoju meru propuštanja, izraženu preko optičke gustine materijala, gde se pod gustinom G podrazumeva:

$$G = \log \frac{1}{x},$$

gde je x propustljivost materijala (u %).

8. **Muzika:** Frekvancija svake muzičke note dva puta je veća od one koja je za oktavu niža. Po oktavama, frekvencije na klavijaturi stoje u odnosu $1 : 2 : 4 : 8 : 16 : ...$ i tako dalje. Ova skala je logaritamska sa osnovom 2. Metalni pragovi, što na vratu gitare razdvajaju polja, raspoređeni su, takođe, po logaritamskoj progresiji. A, i na instrumentima bez obeleženih polja, kao što je violina, muzičari raspoređuju prste po logaritamskoj progresiji.

5 Zaključak

U radu je prikazan istorijski razvoj pojma logaritma nastao u radovima Džona Nepera. Posebno je istaknuta geometrijska interpretacija prirodnog logaritma.

Pored glavnog dela rada, spomenuta su još dva matematičara koji su usko povezani sa Neperom, Jost Burgi koji je nezavisno od Nepera sastavio svoje logaritme i Henry Briggs koji je počeo sa svojim proračunima i u dogovoru sa Neperom napravio sistem koji je danas najsličniji onome koji mi koristimo u nastavi i životu.

Treba istaći da je drugi deo rada, viđenje logaritama sa geometrijskog stanovišta, napisan u korelaciji sa fizikom. Uz pomoć Galileovog otkrića mogli smo da pronađemo vremenska ograničenja kretanja nekog predmeta ili čestice, a potom da zaključimo da je površina ispod hiperbole, zapravo logaritam. Primeri su odabrani tako da se čitaocu bar na neki način pojasni ono što je opisano u teorijskom delu.

U delu 'logaritam u školi' objašnjen je, iz ugla učenika, postanak logaritma, njegova veza sa eksponencijalnom funkcijom, površina ispod hiperbole i dokazane su osobine logaritama kao i primena logaritama u svakodnevnom životu.

Tema, logaritam, je predviđena za obradu u drugom razredu srednje škole. Iako planom i programom nije predviđena obrada prirodnog logaritma, nastavnici bi trebali da planiraju njegovu obradu i tada učenike provedu kroz njegovu istoriju i njegov geometrijski aspekt.

Literatura

[1] A. Shen; Logarifm i eksponenta; Moskva, 2005., www.mccme.ru/free-books/shen/shen-log.pdf

[2] E. W. Hobson; John Napier and the invention of logarithms 1614; Cambridge 1914.

https://jscholarship.library.jhu.edu/bitstream/handle/1774.2/34187/31151005337641.pdf

[3] Z. Šikić, Prirodni logaritam

[4] The Construction of the wonderful canon of logarithms by John Napier, London and Edinburg, 1889.

[5] www.maa.org/press/periodicals/convergence/logarithms-the-early-history-of-a-familiar-function

[6] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Biographies/Briggs.html

[7] https://www.thocp.net/reference/sciences/mathematics/logarithm-hist.htm

[8] https://plus.maths.org/content/dynamic-logarithms

[9] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Biographies/Burgi.html

[10] R. P. Burn, Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms; http://users.uoa.gr/ apgiannop/Sources/Sarasa.pdf

[11] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Saint-Vincent.html

[12] https://hal.inria.fr/inria-00543936/document

[13] Ilustrovana enciklopedija NAUKA; izdavača VUK KARADŽIĆ

[14] Grupa autora, Opšta enciklopedija LAROUSSE, Beograd 1972.

[15] Felix Klein; Elementary mathematics from a Higher Standpoint

[16] https://mojainformatika.files.wordpress.com/2018/01/primena-logaritma-rad-uc48denika.pptx

[17] https://hrcak.srce.hr/file/166771

[18] Charles Hutton, Olinthus Gregory ,Mathematical Tables: Containing Common, Hyperbolic, and Logistic Logarithms, also Sines, Tangents, Secants and Versed Sines both Natural and Logarithmic, London, 1811. https://archive.org/details/mathematicaltab01huttgoog/page/n61/mode/2up

[19] https://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1112&context=tme

[20] https://happyvsright.tumblr.com/post/113506470851/greek-trigonometry-used-the-chord-while-indian