Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

PRIMENA PROCESA GRANANJA U ANALIZI SISTEMA MASOVNOG OPSLUŽIVANJA

MASTER RAD

Student: Marija Milićević
Mentor: dr Lenka Glavaš

Beograd,
2020.

Sadržaj

1 Predgovor

Svaki sistem u kome dolasci klijenata indukuju zahteve za određenom vrstom usluge od strane resursa naziva se **sistem masovnog opsluživanja**. Klijenti dolaze u sistem na slučajan način, bez prethodno određenog determinističkog pravila. Količina usluge potrebna svakom od njih, takođe, nije prethodno određena. Zbog toga dolazi do pojavljivanja konflikata u korišćenju resursa, tako da je nužno formiranje redova čekanja. Sistemi masovnog opsluživanja su sveprisutni u različitim segmentima ljudskog života, delatnosti, nauke.

Teorija procesa grananja ima dugu i bogatu istoriju, koja datira još iz devetnaestog veka. Tada su engleski naučnici Galton (engl. *Francis Galton*) i Votson (engl. *Henry William Watson*), baveći se problemom izumiranja prezimena u aristokratskim porodicama, pokazali kako se verovatnosne metode mogu primeniti pri proučavanju slučajnih efekata na reprodukciju porodice, odnosno populacije izvesnih jedinki. Procesi grananja danas imaju primenu u mnogim disciplinama, npr. biolgiji, nuklearnoj fizici, telekomunikacijama.

Rezultati koji su izvedeni u ovom radu jesu neki od značajnijih rezultata iz Neuts-ovog rada [1]. Takođe, prikazana je i veoma korisna metoda kolektivnih oznaka koja je detaljno objašnjena u knjizi [2].

Prikazana je analiza sistema masovnog opsluživanja sa jednim serverom, kod koga je ulazni potok homogen Puasonov proces, a dužine opsluživanja su nezavisne i jednako raspodeljene slučajne veličine$-$ $M|G|1$ sistem. Pristup koji se koristi zasnovan je na procesima grananja. Sistem funkcioniše tako što se smenjuju periodi zauzetosti sistema i periodi kada je sistem prazan. Svaki od perioda zauzetosti ima strukturu tipa procesa grananja, čije trajanje (do izumiranja) predstavlja dužinu zauzetosti sistema. Klijenti se opslužuju primenom tehnike koja se zasniva na analizi umetnutog polu-markovskog procesa i njegovog asimptotskog ponašanja. Izučavan je i ukupan broj klijenata u sistemu do nekog trenutka t, virtuelno vreme čekanja (vreme potrebno da klijent koji ulazi u sistem u trenutku t sačeka do početka svog opsluživanja) i virtuelna starost (dužina vremena koje je klijent koji se trenutno opslužuje već proveo u sistemu pre početka svog opsluživanja).

Za podršku i pomoć u realizaciji rada želim posebno da se zahvalim svom mentoru dr Lenki Glavaš.

2 Uvodni pojmovi

U ovom poglavlju su objašnjeni pojmovi čije je poznavanje potrebno za analizu teme kojom se bavimo. Date su formalne definicije pojmova funkcije generatrise i Laplas-Stiltjesove transformacije. Zatim, definisana je struktura lanca Markova, polu-markovskog procesa kao i objašnjenje ulaznog potoka klijenata, tj. homogenog Puasonovog procesa. Objašnjen je $M|G|1$ model masovnog opsluživanja i opisan osnovni proces grananja- Galton-Votsonov(engl. *Galton-Watson*) proces.

2.1 Funkcija generatrisa i Laplas-Stiltjesova transformacija

Definicija 2.1.1. *Neka je $a_0, a_1, a_2, ...$ niz realnih brojeva. Ako postoji neki pozitivan broj $s_0 > 0$ tako da red:*

$$G(s) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j s^j$$

konvergija za svako $|s| < s_0$, onda je $G(s)$ ***generatorna funkcija niza*** *$a_0, a_1, a_2, ...$*

Definicija 2.1.2. *Neka je X nenegativna, celobrojna slučajna veličina i p_k verovatnoća da slučajna veličina X uzima vrednost k:*

$$p_k = P\{X = k\}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Generatorna funkcija slučajne veličine *X je sledeća suma:*

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k.$$

Definicija 2.1.3. *Neka je X neneagativna slučajna veličina čija je funkcija raspodele $F(\cdot)$.* ***Laplas-Stiltjesova transformacija slučajne veličine X, odnosno funkcije raspodele*** *$F(\cdot)$, definisana na $\mathbb{R}_+$, je funkcija:*

$$\Lambda_X(\lambda) = E(e^{-\lambda X}) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dF(x), \lambda \geq 0.$$

Teorema 2.1.1. *Laplas-Stiltjesova transformacija ima sledeće osobine:*

1. $0 \leq \Lambda_X(\lambda) \leq 1$, *za svako* $\lambda \geq 0$

2. *Različite raspodele imaju različite Laplas-Stiltjesove transformacije.*

3. *Laplas-Stiltjesova transformacija na jedinstven način određuje raspodelu čija je ona transformacija.*

4. *Neka su* X_1 *i* X_2 *nezavisne, nenegativne slučajne veličine sa funkcijama raspodele* $F_1(\cdot)$ *i* $F_2(\cdot)$*, redom, i Laplas-Stiltjesovm transformacijama* $\Lambda_{X_1}(\lambda)$ *i* $\Lambda_{X_2}(\lambda)$*. Tada je:*

$$\Lambda_{X_1+X_2}(\lambda) = \Lambda_{X_1}(\lambda) \cdot \Lambda_{X_2}(\lambda). \tag{1}$$

   Odnosno, Laplas-Stiltjesova transformacija konvolucije jednaka je proizvodu Laplas-Stiltjesovih transformacija sabiraka.

5. *Za svako* $n > 0$ *i svako* $\lambda > 0$ *postoji* n*-ti izvod Laplas-Stiltjesove transformacije i jednak je:*

$$(-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \Lambda_X(\lambda) = \int_0^\infty e^{(-\lambda x)} x^n dF(x). \tag{2}$$

   Specijalno, važi: $EX = -\Lambda'(0)$ *i* $EX^2 = \Lambda''(0)$.

Veza između funkcije generatrise i Laplas-Stiltjesove transformacije

Za nenegativnu, celobrojnu slučajnu veličinu X, za svako $0 < s \leq 1$ postoji neko $\lambda > 0$ tako da je $e^{-\lambda} = s$, tj.:

$$\Lambda_X(\lambda) = G_X(s). \tag{3}$$

2.2 Lanci Markova

Proces je markovski ako verovatnosna struktura procesa u budućnosti ne zavisi od prošlosti već samo od sadašnjosti. Lanci Markova su markovski procesi kod kojih je prostor stanja konačan ili prebrojiv. U ovom delu rada definisaćemo neke od osnovnih pojmova potrebnih za razumevanje lanaca Markova.

Definicija 2.2.1. *Slučajan proces* $\{X_n, n \geq 0\}$ *je* ***lanac Markova sa diskretnim vremenom i prostorom stanja*** S, *ako za svaki trenutak* $n \geq 0$ *i sva stanja,* $i, j, i_0, i_1, i_2, ... \in S$, *važi:*

$$P\{X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_n = i\} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} \tag{4}$$

kada god su obe strane jednakosti (4) *dobro definisane.*

Definicija 2.2.2. ***Verovatnoća prelaza iz stanja*** i ***u stanje*** j ***za jedan korak***, $p_{ij}(n)$, *predstavlja verovatnoću da će se sistem u trenutku* $n+1$ *naći u stanju* j, *ako se u trenutku* n *nalazi u stanju* i:

$$p_{ij}(n) = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\}. \tag{5}$$

Lanac Markova je **homogen** ako je $p_{ij}(n) = p_{ij} = const$ za sve $i, j \in S$ i svako $n \geq 0$. Sa $P = [p_{ij}]$ označavamo **matricu verovatnoća prelaza za jedan korak** homogenog lanca Markova.
U nastavku ćemo raditi isključivo sa homogenim lancima Markova.

Možemo definisati i verovatnoću prelaza za n koraka na sledeći način:

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j | X_0 = i\}$$

gde je $i, j \in S$ i $n \geq 0$. Ovo je, zapravo, verovatnoća da lanac, krenuvši iz stanja i, nakon n koraka, dospe u stanje j kod homogenog lanca Markova.

Definicija 2.2.3. *Raspodela verovatnoća* $\pi = \{\pi_j, j \in S\}$ *je* ***stacionarna raspodela lanca Markova***, *ukoliko je* $\pi = \pi\boldsymbol{P}$, *tj.:*

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}, j \in S \tag{6}$$

gde je $\boldsymbol{P}$ *matrica verovatnoća prelaza za jedan korak posmatranog lanca Markova.*

Navešćemo nekoliko definicija za klasifikaciju lanaca Markova potrebnih za razumevanje teoreme koja sledi.

Definicija 2.2.4. *Verovatnoća:*

$$v_{ij}(n) = P\{X_1 \neq j, X_2 \neq j, ..., X_{n-1} \neq j, X_n = j | X_0 = i\}$$

je ***verovatnoća događaja da lanac prvi put dođe u stanje*** j ***u trenutku*** n***, ako je u početnom trenutku bio u stanju*** i.
Važi: $v_{ij}(0) = 0$ *za sve* $i \neq j$.
I još, sa $v_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} v_{ij}(n)$ *označavamo* ***verovatnoću da lanac nekad (u konačnom vremenu) dođe u stanje*** j***, ako je u početnom trenutku bio u stanju*** i.

Definicija 2.2.5. *Neka je* $\{X_n, n \geq 0\}$ *lanac Markova sa skupom stanja* S.
Stanje $j \in S$ *je* ***dostižno*** *iz stanja i ako je* $v_{ij} > 0$.
Stanja i i j ***komuniciraju*** *ako je* $v_{ij} > 0$ *i* $v_{ji} > 0$*, tj. ako je stanje j dostižno iz stanja i i obrnuto, stanje i dostižno iz stanja j.*

Definicija 2.2.6. *Skup stanja je* ***nesvodljiv*** *ako sva stanja koja pripadaju tom skupu međusobno komuniciraju.*
Lanac Markova je ***nesvodljiv*** *ako je njegov skup stanja S nesvodljiv, tj. ako se iz svakog stanja može preći u bilo koje drago stanje unutar skupa S.*

Definicija 2.2.7. *Najveći zajednički delilac brojeva koraka posle kojih je moguć povratak u stanje i,* $d(i)$*, zove se* ***period stanja*** i*:*

$$d(i) = NZD\{n | p_{ii}(n) > 0\}.$$

Ako je $d(i) > 1$*, onda je stanje i periodično, dok ako* $d(i) = 1$ *kažemo da je stanje i aperiodiňo.*

Definicija 2.2.8. *Neka je* $\{X_n, n \geq 0\}$ *lanac Markova sa skupom stanja* S.
Stanje i je ***povratno*** *ako je:*

$$P\{X_n = i, \text{ za neko } n \geq 1 | X_0 = i\} = 1$$

tj. ako je verovatnoća povratka lanca u stanje i, pri uslovu da je krenuo iz tog stanja, jednaka jedinici.
Stanje i je ***prolazno*** *ako je pomenuta verovatnoća* < 1.

Teorema 2.2.1. *Ako je* $\{X_n, n \geq 0\}$ *nesvodljiv i aperiodičan lanac Markova i* $\{\pi_j, j \in S\}$ *stacionarna raspodela lanca Markova sa matricom verovatnoća prelaza* $\boldsymbol{P} = [p_{ij}]$*, tada je:*

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}. \tag{7}$$

Analogno definiciji lanca Markova sa diskretnim vremenom, definiše se lanac Markova sa neprekidnim vremenom.

Definicija 2.2.9. *Slučajan proces* $\{X(t), t \geq 0\}$, *kod koga je prostor stanja* S *najviše prebrojiv skup, je* ***lanac Markova sa neprekidnim vremenom****, ako za svaki ceo broj* n, *proizvoljni niz trenutaka* $t_0, t_1, t_2..., t_{n+1}$, *tako da je* $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_{n+1}$, *kad god su obe strane jednakosti* (8) *dobro definisane, važi:*

$$\begin{aligned} P\{X(t_{n+1}) = j | X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, ...X(t_n) = i\} \\ = P\{X(t_{n+1}) = j | X(t_n) = i\} \end{aligned} \tag{8}$$

Za homogen lanac Markova sa neprekidnim vremenom verovatnoća prelaza iz stanja i u stanje j, gde su $i, j \in S$, u toku vremenskog intervala dužine t je:

$$p_{ij}(t) = P\{X(t+s) = j | X(s) = i\}. \tag{9}$$

2.3 Ulazni potok

Definicija 2.3.1. *Slučajan proces* $\{N(t), t \geq 0\}$ *koji uzima celobrojne, nenegativne vrednosti, za koji je* $N(0) = 0$ *i čije trajektorije skoro sigurno ne opadaju, naziva se* ***(ulazni) potok događaja****.*

Slučajna veličina $N(t)$ može se interpretirati kao broj događaja od interesa koji su se desili tokom vremenskog intervala $[0, t]$. Skup $\{Z_k = T_k - T_{k-1}\}$, gde su $0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq ...$ uzastopni trenuci realizacija događaja, je skup dužina vremenskih intervala između uzastopnih događaja. Smatramo da je potok događaja zadat ako je poznata konačno-dimenziona raspodela niza $\{Z_k, k \geq 1\}$, tj. za svako $n \geq 1$ zadata je raspodela slučajnog vektora $(Z_1, Z_2, ..., Z_n)$, ili ako je zadata konačno-dimenziona raspodela slučajne veličine $N(t)$, tj. za svako $n \geq 1$ i sve n-torke $t_0, t_1, ..., t_n$ zadata je raspodela slučajnog vektora $(N(t_0), N(t_1), ..., N(t_n))$.

Slučajan proces $\{N(t), t \geq 0\}$ ima **nezavisne priraštaje** ako verovatnoća realizacije k događaja u vremenskom intervalu $(T, T + t)$ ne zavisi od toga koliko je događaja realizovano pre tog vremenskog intervala, tj. brojevi događaja koji se dese u disjunktnim vremenskim intervalima su međusobno nezavisni. Ukoliko raspodela broja događaja koji se dese u proizvoljnom vremenskom intervalu zavisi samo od dužine tog intervala, a ne i pozicije tog intervala na vremenskoj osi, onda posmatrani proces ima **stacionarne priraštaje**.

Definicija 2.3.2. *Homogen Puasonov proces sa parametrom* $\lambda > 0$ *je slučajan proces* $\{N(t), t \geq 0\}$ *za koji važi:*

1. $N(0) = 0$ *skoro sigurno;*

2. *Proces* $\{N(t), t \geq 0\}$ *ima nezavisne priraštaje;*

3. *Za svako* $0 \leq s < t$ *priraštaj* $N(t) - N(s)$ *ima Puasonovu raspodelu sa parametrom* $\lambda(t - s)$*, tj.*

$$P\left\{N(t) - N(s) = n\right\} = \frac{\lambda(t-s)^n}{n!} e^{-\lambda(t-s)}, n \in \mathbb{N}_0$$

.

Iz osobine 3. zaključujemo da homogen Puasonov proces ima stacionarne priraštaje jer raspodela slučajnog vektora $N(t+s)-N(t)$ ne zavisi od trenutka t, već samo od dužine intervala s.

Definicija 2.3.3. *Apsolutno neprekidna slučajna veličina X koja ima gustinu raspodele:*

$$f_E(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}, & \text{ako je } x \geq 0 \\ 0, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}$$

je slučajna veličina koja ima ***Erlangovu raspodelu sa parametrima*** *$\lambda > 0$* ***i*** *$k \in \mathbb{N}$.*

Teorema 2.3.1. *Neka su $X_1, ..., X_n$ nezavisne slučajne veličine sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom λ. Tada suma $\sum_{k=1}^{n} X_k$ ima Erlangovu raspodelu sa parametrima λ i n.*

Navešćemo par teorema koje se odnose na Puasonov proces.

Teorema 2.3.2. *Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ homogen Puasonov proces sa intenzitetom λ i neka je τ_i vreme koje proces provede u stanju i. Slučajne veličine $\tau_i, i \geq 0$ su nezavisne, jednako raspodeljene sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom λ.*

Dokaz. Neka je $N(t) = i$, W_i trenutak ulaska procesa u stanje i i neka je τ_i vreme koje proces provede u stanju i.
Tada je:

$$\begin{aligned} P\{\tau_i > x\} &= \int_0^\infty P\{\tau_i > x | W_i = t\} g_{W_i}(t) dt \\ &= \int_0^\infty P\{\tau_i > x | N(t) = i\} g_{W_i}(t) dt \\ &= \int_0^\infty P\{N(t+x) - N(t) = 0 | N(t) = i\} g_{W_i}(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} g_{W_i}(t) dt = e^{-\lambda x}, \end{aligned} \tag{10}$$

pa važi:

$$P\{\tau_i \leq x\} = 1 - P\{\tau_i > x\} = 1 - e^{-\lambda x}. \tag{11}$$

□

Teorema 2.3.3. *Slučajna veličina V_t, koja predstavlja dužinu čekanja od trenutka t do prvog sledećeg događaja u homogenom Puasonovom procesu sa parametom $\lambda \geq 0$, ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ nezavisno od trenutka t.*

Dokaz. Neka su $T_1, T_2, ...$ trenuci nastupanja događaja u posmatranom Puasonovom procesu i V_t vreme koje protekne od proizvoljnog trenutka t do sledećeg događaja. Tada je:

$$\begin{aligned} P\{V_t \geq x\} = P\{t + x \geq T_1\} + P\{T_1 \leq t, t + x < T_2\} + \\ ... + P\{T_k \leq t, t + x < T_{k+1}\} + ... \end{aligned} \tag{12}$$

Kako na osnovu prethodne teoreme promenljiva T_1 ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ, važi:

$$P\{t + x < T_1\} = 1 - P\{t + x \leq T_1\} = 1 - (1 - e^{-\lambda(t+x)}) = e^{-\lambda(t+x)}. \tag{13}$$

Pošto je T_n suma n slučajnih promenljivih sa eksponencijalnom raspodelom, onda T_n, prema teoremi 2.3.1., ima Erlangovu raspodelu sa parametrima λ i n. Tako da, za $k \geq 1$, važi:

$$\begin{aligned} P\{T_k \leq t, t + x < T_{k+1}\} &= \int_0^\infty P\{T_k \leq t, t + x < T_{k+1} | T_k = s\} f_E(s) ds \\ &= \int_0^t P\{t + x < T_{k+1} | T_k = s\} \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} ds \\ &= \int_0^t P\{t + x < T_k + \tau_k | T_k = s\} \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} ds \\ &= \int_0^t P\{t - s + x < \tau_k\} \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda s}}{(k-1)!} ds \\ &= \int_0^t e^{-\lambda(t-s+x)} e^{-\lambda s} \frac{\lambda^k x^{k-1}}{(k-1)!} ds \\ &= e^{-\lambda t} e^{-\lambda x} \frac{\lambda^k}{k!} t^k. \end{aligned} \tag{14}$$

Zamenom (12) i (13) u (14) dobija se:

$$\begin{aligned} P\{V_t \geq x\} &= e^{-\lambda(t+x)} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda(t+x)} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda(t+x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda(t+x)} e^{\lambda t} = e^{-\lambda x} \end{aligned} \tag{15}$$

Dakle, slučajna veličina V_t ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ. □

Puasonov potok događaja je slučaj kod koga je ulazni potok zapravo homogen Puasonov proces. To je slučaj najprostijeg ulaznog potoka. Kod njega je verovatnoća da se u intervalu dužine t realizuje tačno k događaja jednaka:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, k = 0, 1, 2..., \lambda > 0. \tag{16}$$

U ovom radu se pretpostavlja da klijenti ulaze u sistem u skladu sa Puasonovim potokom sa parametrom λ.

2.4 Procesi obnavljanja i funkcija obnavljanja

Kao što je već rečeno, dužina vremenskog intervala između uzastopnih događaja u Puasonovom procesu $\{N(t), t \geq 0\}$ je slučajna veličina koja ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $\lambda > 0$. Važi još i da su slučajne veličine τ_i, koje predstavljaju vreme koje proces provede u stanju $i, i \geq 0$, nezavisne. Jedan od načina uopštavanja Puasonovog procesa je da pretpostavimo da su nenegativne slučajne veličine τ_i, pored toga što su nezavisne, još i jednako raspodeljene, i da mogu imati bilo koju raspodelu.

Definicija 2.4.1. *Slučajan proces $\{N(t), t \geq 0\}$ je **brojački proces** ako $N(t)$ predstavlja ukupan broj događaja od interesa koji su se desili do trenutka t.*

Napomena: Puasonov proces je brojački proces.

Definicija 2.4.2. *Neka je $\{N(t), t \geq 0\}$ brojački proces i τ_i slučajna veličina koja predstavlja vreme koje proces provede u stanju $i, i \geq 0$. Taj proces zovemo **proces obnavljanja** ako su nenegativne slučajne veličine τ_i nezavisne i jednako raspodeljenje za $i \geq 0$.*

Procesi obnavljanja opisuju događaje koji se javljaju na slučajan način u vremenskim trenucima, gde su vremena između dva događaja nezavisna i imaju istu raspodelu. Kako bismo opisali ponašanje procesa obnavljanja u srednjem, uvodimo pojam funkcije obnavljanja.

Definicija 2.4.3. *Funkcija $m_N(t) = E(N(t))$ zove se **funkcija obnavljanja** ili funkcija srednje vrednosti procesa obnavljanja $\{N(t), t \geq 0\}$.*

Sa aspekta sistema masovnog opsluživanja, funkcija obnavljanja predstavlja očekivani broj poseta nekom stanju za vreme dužine t.

2.5 Polu-markovski proces

U ovom delu rada definišemo uopštenje lanca Markova, takozvani **polu-markovski proces (engl. *semi-Markov process*)**. Definiciju lanca Markova proširujemo uključivanjem dodatne slučajne veličine, koja označava vreme zadržavanja procesa u datom stanju (engl. *state holding time*).

Zanimljiv način uvođenja ovog procesa možemo videti u [5].

Počećemo sa polu-markovskim procesima sa diskretnim vremenom. Kao što već znamo, lanac Markova sa diskretnim vremenom vrši promenu stanja u vremenskim intervalima jednake dužine i taj interval predstavlja jedinicu vremena promene stanja. Lanac Markova ima osobinu da u svakoj jedinici vremena proces mora da promeni stanje uz mogućnost da ta promena bude u stanje u kome se lanac trenutno nalazi, odnosno da proces ostane u trenutnom stanju. Iako su verovatnoće prelaza proizvoljne, uslov da do promene stanja dođe u svakom koraku, odnosno jedinici vremena, dovodi do toga da vreme provedeno u određenom stanju ima geometrijsku raspodelu. Ako ovaj uslov proširimo tako da dozvolimo da vreme koje proces provede u nekom stanju ima proizvoljnu raspodelu, onda takav proces zovemo **polu-markovski proces**. Primetimo da ako u takvom procesu posmatramo samo trenutke promene stanja, onda vidimo da se ovakav proces ponaša kao običan lanac Markova sa diskretnim vremenom i tada kažemo da u tim promenama stanja imamo umetnuti lanac Markova.

Definicija polu-markovskih procesa sa neprekidnim vremenom sledi iz prethodnog. Ovde je promena stanja dozvoljena u bilo kom trenutku u vremenu. Međutim, nasuprot osobini koju imaju Markovski procesi da vreme ostanka u stanju ima eksponencijalnu raspodelu, sada dozvoljavamo proizvoljnu raspodelu za vreme ostanka. Ovim dobijamo veću uopštenost i nadskup klase procesa Markova koji će se pokazati kao veoma korisni u analizi sistema za masovno opsluživanje.

Uvešćemo, pre svega, neke pojmove potrebne za formalnu definiciju polu-markovskih procesa.

Definicija 2.5.1. *Matrica $\boldsymbol{B} = (B_{i,j})$ je **matrica raspodela verovatnoća prelaza** ako ima sledeće dve osobine:*

1. $B_{i,j}(t) = 0$, *za* $t \leq 0$;

2. $\sum_{j=1}^{m} B_{i,j}(+\infty) = 1$, *za svako* $1 \leq i < m+1$, *gde je* m *fiksan pozitivan ceo broj (koji može biti jednak i* $+\infty$*).*

Definicija 2.5.2. *Vektor* $C = (c_1, c_2, ..., c_j, ...)$ *dimenzija* $m \times 1$ *naziva se vektor početnih verovatnoća ako ima sledeće dve osobine:*

1. $c_j \geq 0$;

2. $\sum_{j=1}^{m} c_j = 1$.

Definicija 2.5.3. *Sa* (X, K) *obeležavamo bilo koji dvodimenzioni slučajan proces* $\{(X_n, K_n), n \geq 0\}$, *kod koga važi* $K_0 = 0$ *skoro sigurno i koji zadovoljava sledeće jednakosti:*

$$P(X_0 = k) = c_k$$

i

$$P(X_n = k, K_n \leq x | X_0, X_1, K_1, X_2, K_2, ..., X_{n-1}, K_{n-1}) = B_{X_{n-1},k}(x)$$

za svako $x \in (-\infty, \infty)$ *i* $1 \leq k < m + 1, n > 0$.

Neka je $S_n = \sum_{i=0}^{n} K_i$ za $n \geq 0$.

Definicija 2.5.4. *Slučajan procesi* $\{N(t), t \geq 0\}$ *i* $\{N_j(t), t \geq 0\}$ *definisani na sledeći način:*

$$N(t) = sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$$

i

$$N_j(t) = (broj\ puta\ kada\ je\ X_k = j\ za\ 0 < k < N(t) + 1)$$

uzimaju celobrojne vrednosti.

Sledi formalna definicija polu-markovskog procesa.

Definicija 2.5.5. *Slučajan proces* $\{Z_t, t \geq 0\}$ *definisan na sledeći način* $Z_t = X_{N(t)}$ *naziva se* ***polu-markovski proces****.*

Polu-markovski proces je slučajan proces koji beleži stanja procesa u svakom trenutku na vremenskoj osi.

Dakle, grubo rečeno, to je slučajan proces čiji je skup stanja najviše prebrojiv i koji promenom stanja formira lanac Markova zadržavajući se u svakom stanju proizvoljnu dužinu vremena. To je lanac Markova u kome su jedinice vremena, za koje se vrše prelasci, transformisane na slučajan način.

Za detaljnije objašnjenje polu-markovskog procesa pogledati [3].

2.6 $M|G|1$ model masovnog opsluživanja

Razmotrimo sistem masovnog opsluživanja koji ima jedan red za čekanje i jedan server koji opslužuje klijente. Klijenti ulaze u sistem sa potrebom da budu opsluženi. Ako klijent koji uđe u sistem zatekne prazan sistem, odmah počinje njegovo opsluživanje, u suprotnom on čeka u redu dok se ne završi opsluživanje svih klijenta koji su pre njega upućeni na opsluživanje. U zavisnosti od discipline opsluživanja, server bira kojim redom će klijenti biti opsluženi. Kažemo da se klijenti opslužuju disciplinom FCFS (engl. *first come first served*) ukoliko je redosled dolazaka klijenata u sistem jednak redosledu opsluživanja klijenata (onaj ko prvi uđe u sistem, prvi biva i opslužen), dok disciplinom LCFS (engl. *last come first served*) kažemo da se opslužuju klijenti koji bivaju opsluženi obrnutim redom od reda ulaska u sistem (klijent koji poslednji uđe u sistem, biva prvi opslužen, a klijent koji se do tada opsluživao, ako takvih ima, biva vraćen u red za čekanje). Kada primi uslugu, klijent napušta sistem. Vreme koje protekne od kada klijent uđe u sistem do izvršenja usluge naziva se **vreme zadržavanja klijenta u sistemu**. Broj klijenata koji se nalazi u sistemu, uključujući one koji čekaju u redu i klijenta koji se opslužuje, naziva se **dužina reda**. Period otkad klijent uđe u prazan sistem do trenutka dok sistem ponovo ne ostane prazan naziva se **period zauzetosti sistema** (engl. *busy period*).

Engleski matematičar David G. Kendall je uveo notaciju $A|B|C|D|E|F$, takozvanu Kendelovu notaciju, kao formu za opis sistema masovnog opsluživanja, koja se i danas koriste. Navedene oznake A, B, C, D, E i F predstavljaju sledeće karakteristike sistema:

A je tip raspodele intervala vremena između uzastopnih dolazaka klijenata u sistem;

B je tip raspodele slučajne veličine koja predstavlja dužinu opsluživanja klijenta;

C je broj kanala prisutnih u sistemu masovnog opsluživanja;

D je maksimalna dužina reda;

E je veličina populacije iz koje klijent ulazi u sistem;

F je disciplina po kojoj se opslužuju klijenti.

Kod nekih modela, kao što je $M|G|1$ model, oznake za D, E i F uzimaju podrazumevane vrednosti, tj. redom $+\infty, +\infty, FCFS$, pa se pišu samo prve tri oznake.

$M|G|1$ sistem je sistem koji ima jednu liniju za opsluživanje klijenata i neograničen broj mesta za čekanje u redu. Klijenti ulaze u sistem u skladu sa homogenim Puasonovim procesom sa intenzitetom $\lambda > 0$. Pretpostavimo da klijenti bivaju opsluženi u skladu sa FCFS disciplinom. Vremena trajanja usluživanja klijenata su, takođe, nezavisna i jednako raspodeljena za svakog klijenta ponaosob i imaju proizvoljnu raspodelu koja je, još, i nezavisna od ulaznog potoka.

2.7 Procesi grananja: Galton-Votsonov model

Procesi grananja su verovatnosni modeli koji se koriste da prikažu rast i izumiranje članova neke populacije. Izučavanje procesa grananja je počelo u devetnaestom veku kada se među aristokratskim porodicama pojavilo pitanje izumiranja njihovih prezimena. Engleski matematičar Francis Galton je 1874. godine počeo da se bavi ovim problemom i u časopisu *"Educational Times"* objasnio problem postavljanjem sledećeg pitanja:

"Neka su $p_0, p_1, p_2, ...$ verovatnoće da otac ima $0, 1, 2, ...$ sinova, redom. Neka su te verovatnoće iste i za njegove sinove i sinove sinova itd. Koja je verovatnoća da muška loza izumre nakon r generacija i koja je verovatnoća da se pojavi izvestan broj naslednika u muškoj lozi u bilo kojoj generaciji?"

Na ta pitanja su, 1874. godine, odgovorili Galton (engl. *Francis Galton*) i Votson (engl. *Henry William Watson*).

Dakle, jedan od najpoznatijih procesa grananja je upravo Galton-Votsonov proces. Odgovarajući Galton-Votsonov model je osnovni model koji se koristi u procesima grananja. U njemu svaka jedinka populacije ima slučajan broj potomaka. Pretpostavlja se da je slučajna veličina koja predstavlja broj potomaka nezavisna i jednako raspodeljena za svakog člana populacije. Proces počinje sa određenom početnom populacijom koja se naziva nulta generacija. Skup svih potomaka nulte generacije se naziva prva generacija, skup svih potomaka prve generacije čini drugu generaciju itd.

Neka su $X_0, X_1, X_2, ...$ slučajne veličine koje predstavljaju broj jedinki populacije u nultoj, prvoj, drugoj,... generaciji. Pretpostavimo da se početna (nulta) generacija sastoji od jedne jedinke, tj. $X_0 = 1$. Iz početne generacije dobijamo prvu generaciju potomaka koju označavamo sa X_1, a jedinka iz nulte generacije iščezava. Svaka jedinka iz prve generacije na kraju svog života nezavsno jedna od druge dobija k potomaka sa verovatnoćom p_k, $k \geq 0$. Uopšteno, svaki član n-te generacije stvara svoje potomke koji će činiti $(n+1)$-vu generaciju, a on sam umire i nestaje iz populacije. Neka je $Y_r, r \geq 1$ slučajna veličina koja predstavlja broj potomaka koje je stvorila r-ta jedinka iz prethodne generacije. Ako slučajna veličina X_{n+1} predstavlja ukupan broj potomaka n-te generacije, tada važi:

$$X_{n+1} = \sum_{r=1}^{X_n} Y_r,$$

gde su Y_r nezavisne, jednako raspodeljene slučajne veličine sa raspodelom verovatnoća $P(Y_r = k) = p_k, k \geq 0$ i $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

$M|G|1$ sistem se može posmatrati kao niz procesa grananja. Kao što je već pomenuto u prethodnom poglavlju, smatra se da je sistem zauzet od trenutka kada u njega uđu klijenti. Pretpostavlja se da u početnom trenutku

$(t = 0)$ u sistemu ima $i \geq 0$ klijenata i tada kreće opsluživanje jednog od njih. Oni predstavljaju nultu generaciju u procesu grananja. Prvu generaciju čine klijenti koji uđu u sistem dok traje opsluživanje klijenata nulte generacije, drugu generaciju čine klijenti koji uđu u sistem dok traje opsluživanje klijenata prve generacije, itd. **Vreme trajanja generacije** (engl. *lifetime of the generation*) se definiše kao zbir dužine vremena opsluživanja svih klijenata te generacije. Ovakva struktura implicira prisustvo **procesa grananja**. On se završava kada dođe do izumiranja populacije, tj. kada u sistem ne uđe nijedan novi klijent, a opsluživanje svih koji su prethodno bili u sistemu se završilo. Tada nastupa period čekanja koji ima eksponencijalnu raspodelu sve dok u sistem ne dođe novi klijent. On se može posmatrati kao jedini član sledeće generacije u procesu grananja koji smo do tada posmatrali ili kao prvi član nulte generacije novog procesa grananja.

U ovom radu je proučavan sistem sa jednim serverom za opsluživanje u koji ulaze klijenti u skladu sa homogenim Puasonovim procesom sa intenzitetom λ, u kome su dužine opsluživanja klijenata nezavisne, jednako raspodeljene slučajne veličine sa funkcijom raspodele $H(\cdot)$ i konačnim očekivanjem α, $M|G|1$ sistem. U ovom sistemu se smenjuju periodi kada je sistem zauzet i kada u sistemu nema klijenata. Svaki od perioda kada je sistem zauzet se može posmatrati kao proces grananja i, još, nezavisan od ulaznog potoka.

3 Procesi grananja u analizi $M|G|1$ sistema

3.1 Umetnuti procesi grananja i promena stanja tokom perioda zauzetosti

Pretpostavimo da je u trenutku $t = 0$ prisutno i klijenata u sistemu. Jedan od njih kreće da se opslužuje. Nadalje ćemo pretpostaviti da je $i > 0$ (za $i = 0$ tvrđenja koja slede su trivijalna).

Definišemo slučajne trenutke $T_0, T_1, ...$ na sledeći način:

1. $T_0 = 0$;

2. Ako je u trenutku T_n prisutan bar jedan klijent u sistemu, trenutak T_{n+1} predstavlja trenutak u kome je završeno opsluživanje svih klijenata koji su se nalazili u sistemu u trenutku T_n. Ako u trenutku T_n nema prisutnih klijenata u sistemu, onda T_{n+1} predstavlja trenutak završetka opsluživanja prvog klijenta koji je ušao u sistem nakon trenutka T_n.

Neka je $\xi(t)$ **broj klijenata u sistemu u trenutku** t. Posmatrajmo dvodimenzioni slučajan niz:

$$\{\xi(T_n), T_{n+1} - T_n, n \geq 0\}.$$

Ovo je jedan polu-markovski proces zbog pretpostavke da klijenti ulaze u sistem u skladu sa homogenim Puasonovim procesom i da slučajna veličina, koja predstavlja dužinu opsluživanja klijenta, ima eksponencijalnu raspodelu. Takođe važi $\xi(T_0) = i$.

Matrica verovatnoća prelaza ovog procesa $Q(\cdot)$ definisana je na sledeći način:

$$Q_{ij}(x) = P\{\xi(T_{n+1}) = j, T_{n+1} - T_n \leq x | \xi(T_n) = i\}.$$

Ako je u trenutku T_n prisutno i klijenata u sistemu, na osnovu gore navedene definicije posmatanih trenutaka, trenutak T_{n+1} predstavlja trenutak kada je završeno opsluživanje svih i klijenata prisutnih u sistemu u trenutku T_n, tj. završetak opsluživanja jedne generacije klijenata. Dok je trajalo njihovo opsluživanje, u sistem je došlo j novih klijenata u skladu sa homogenim Puasonovim procesom sa parametrom λ. Ako, pak, u trenutku T_n nema prisutnih klijenata u sistemu, trenutak T_{n+1} predstavlja trenutak završetka opsluživanja prvog klijenta koji je ušao u sistem nakon trenutka T_n. U oba slučaja, svi događaji se dešavaju u periodu dužine ne veće od x jedinica merenja vremena. Stoga, nakon raspisivanja po formuli potpune verovatnoće, dobijamo da važi:

$$\begin{aligned} Q_{ij}(x) &= \int_0^x e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^j}{j!} dH_i^*(y), i > 0, j \geq 0 \\ Q_{0j}(x) &= \int_0^x \left(1 - e^{-\lambda(x-y)}\right) dQ_{1j}(y), j \geq 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Laplas-Stiltjesova transformacija $q_{ij}(\cdot)$ funkcije $Q_{ij}(\cdot)$ data je sa:

$$\begin{aligned} q_{ij}(s) &= \int_0^x e^{-(\lambda+s)y} \frac{(\lambda y)^j}{j!} dH_i^*(y), i > 0 \\ q_{0j}(s) &= \frac{\lambda}{\lambda + s} q_{1j}(s) \end{aligned} \tag{18}$$

gde funkcija $H_i^*(\cdot)$ predstavlja i-tu konvoluciju funkcije raspodele $H(\cdot)$.

Kada uvrstimo jednakost (18), definiciju Laplas-Stiltjesove transformacije i primenimo osobine 4 iz teoreme 2.1.1. u raspisivanje sume $\sum_{j=0}^{\infty} q_{ij}(s)z^j$ dobjamo da je zadovoljena sledeća jednakost: Nakon raspisivanja sume $\sum_{j=0}^{\infty} q_{ij}(s)z^j$ uvršćavanjem jednakosti (18), definicije Laplas-Stiltjesove transformacije i primene osobine 4 iz teoreme 2.1.1., sledi da je zadovoljena sledeća jednakost:

$$\sum_{j=0}^{\infty} q_{ij}(s)z^j = h^i(s + \lambda - \lambda z), \tag{19}$$

za $s \geq 0, 0 \leq z \leq 1, i > 0$.

Funkcija $h(s)$ je Laplas-Stiltjesova transformacija funkcije raspodele $H(\cdot)$.

Označimo, sada, sa $D_{ij}^{(n)}(x)$ verovatnoću da se u, gore definisanom polu-markovskom procesu $\{\xi(T_n), T_{n+1} - T_n, n \geq 0\}$, n-ti prelazak desio pre trenutka x, ako važi da je u trenutku $t = 0$ (u početnoj generaciji) u sistemu prisutno i klijenata, a nakon n-tog prelaska u sistemu ima j klijenata, pri čemu populacija nije izumrla ni jednom do trenutka x. Formalno zapisano:

$$D_{ij}^{(n)}(x) = P\{T_n \leq x, \xi(T_n) = j, \xi(T_\nu) \neq 0, \nu = 1, 2, ..., n-1 | \xi(T_0) = i\}. \tag{20}$$

Laplas-Stiltjesova transformacija $d_{ij}^{(n)}(s)$ funkcije $D_{ij}^{(n)}(s)$ zadovoljava sledeću rekurentnu vezu:

$$\begin{aligned} d_{ij}^{(1)}(s) &= q_{ij}(s) \\ d_{ij}^{(n+1)}(s) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} d_{i\nu}^{(n)}(s) q_{\nu j}(s), n \geq 1. \end{aligned} \tag{21}$$

Definišimo funkciju generatrise Laplas-Stiltjesove transformacije $d_{ij}^{(n)}(s)$ na sledeći način:

$$d_i^{(n)}(s,z) = \sum_{j=0}^{\infty} d_{ij}^{(n)}(s) z^j, s \geq 0, |z| \leq 1, i \geq 1 \tag{22}$$

pa, možemo dalje zaključiti da važi:

$$\begin{aligned} d_i^{(1)}(s,z) =& h^i(s+\lambda-\lambda z) \\ d_i^{(n+1)}(s,z) =& d_i^{(n)}\left(s, h(s+\lambda-\lambda z)\right) - d_i^{(n)}(s,0), n \geq 1. \end{aligned} \tag{23}$$

Definišimo niz funkcija $h_n(s,z)$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} h_0(s,z) =& z \\ h_{n+1}(s,z) =& h\left(s+\lambda-\lambda h_n(s,z)\right), n \geq 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Dakle, zapisano preko upravo definisanog niza funkcija, (24), formula (23) se može raspisati na sledeći način:

$$d_i^{(n)}(s,z) = h_n^i(s,z) - h_{n-1}^i(s,0), n \geq 1. \tag{25}$$

Dobijamo još i da važi:

$$\sum_{n=1}^{N} d_{i0}^{(n)}(s) = \sum_{n=1}^{N} d_i^{(n)}(s,0) = h_N^i(s,0), i \geq 1. \tag{26}$$

Očigledno je da je izraz sa leve strane Laplas-Stiltjesova transformacija verovatnoće da jedan proces grananja, koji u početnoj generaciji ima i klijenata, traje najviše N generacija sa dužinom trajanja ne većom od x.

Pomoćna tvrđenja

U ovom delu ćemo dokazati pomoćna tvrđenja za niz funkcija $h_n(s,z)$. Za tu svrhu, navešćemo teoremu koja se koristi u dokazu leme 3.1.1.

Teorema 1 (*Helly-Bray teorema*)**.** *Neka je* $(X_n)_{n\geq 0}$ *niz slučajnih veličina. Važi* $E(f(X_n)) \to E(f(X_0))$*, kada* $n \to \infty$*, za svaku ograničenu i neprekidnu funkciju* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *ako i samo ako važi* $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$*, kada* $n \to \infty$*, za svako* x *iz domena funkcije* F*.*

Lema 3.1.1. *Za* $s \geq 0$*, niz funkcija* $h_n(s,0)$ *konvergira, kada* $n \to \infty$*, ka funkciji* $\gamma(s)$*, gde je* $\gamma(s)$ *Laplas-Stiltjesova transformacija neke funkcije raspodele.*

Dokaz. Iz (26) sledi da je $h_n(s,0)$ Laplas-Stiltjesova transformacija verovatnoće da perod zauzetosti sistema, kada je u njemu inicijalno prisutan jedan klijent, traje najviše n generacija a dužina zauzetosti sistema je najviše x. Ako tu verovatnoću označimo sa $G_n(x)$, jasno je da važi $G_n(x) \leq G_{n+1}(x) < 1$. Odavde sledi da $h_n(s,0)$ raste kada $n \to \infty$. Dalje sledi, prema *Helly-Bray teoremi*, da je $\gamma(s) = \lim_{n\to\infty} h_n(s,0)$ Laplas-Stiltjesova transformacija funkcije raspodele. □

Lema 3.1.2. *Funkcija* $\gamma(s)$ *je Laplas-Stiltjesova transformacija neke funkcije raspodele ako i samo ako važi* $1-\lambda\alpha \geq 0$*. I još* $\gamma(0)$ *je najmanji pozitivan koren jednačine:*

$$\theta = h(\lambda - \lambda\theta) \tag{27}$$

na $(0,1]$*.*

Dokaz. Razmatraćemo grafike funkcija $y = x$ i $y = h(\lambda - \lambda x)$. Rastući niz tačaka $(h_{n+1}(0,0), h_n(0,0))$ leži na grafiku $y = h(\lambda - \lambda x)$ a kako je poznato i da $\gamma(0) = \lim_{n\to\infty} h_n(0,0)$ jasno je da je $\gamma(0)$ najmanji pozitivan koren jednačine (27).

Pored toga jednačina (27) ima jedinstveni koren $\theta < 1$ ako i samo ako je $1-\lambda\alpha < 0$, a koren $\theta = 1$ ako i samo ako $1-\lambda\alpha \geq 0$. Ako je $1-\lambda\alpha = 0$ onda su funkcije $y = h(\lambda-\lambda x)$ i $y = x$ imaju zajedničku tangentu u tački $x = 1$. □

Lema 3.1.3. *Važi:*

$$\gamma'(0) = \begin{cases} -\alpha(1-\alpha\lambda)^{-1} & , \text{ ako je } 1-\alpha\lambda > 0 \\ \infty & , \text{ ako je } 1-\alpha\lambda = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Dokaz. Za $s \geq 0$, iz (24) sledi da važi:

$$h'_{n+1}(s,0) + \lambda h'_n(s,0)\, h'(s + \lambda - \lambda h_n(s,0)) = h'(s + \lambda - \lambda h_n(s,0)) \,. \quad (29)$$

Za $s = 0^+$ i kada $n \to \infty$, iz leme 3.1.1. i leme 3.1.2. i diferencijabilnosti funkcije $h(s)$ sledi tvrđenje. $\square$

Lema 3.1.4. *Red:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(h_n^i(s,z) - h_n^i(s,0)\right), i \geq 1 \quad (30)$$

konvergira ravnomerno za svako $s \geq 0$, $0 \leq z \leq 1$ ako je $1 - \alpha\lambda > 0$. Štaviše, važi:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(h_n^i(s,z) - h_n^i(s,0)\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(h_{n+1}^i(s,z) - h_n^i(s,0)\right) = \\ h^i(s + \lambda - \lambda z) - \gamma^i(s), i \geq 1.\end{aligned} \quad (31)$$

Dokaz. Ako zamenimo $s = 0$ i $z = 1$ u (30), dobijamo da je red (30) ograničen odozgo redom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - h_n(0,0)) \,. \quad (32)$$

Ako je $1 - \alpha\lambda > 0$, onda su sve funkcije $h_n(0,z)$ konveksne i rastuće na $[0,1]$ i njihovi grafici ne seku grafik funkcije $y = z$ na $[0,1)$. Njihovi grafici leže iznad tangente u $z = 1$ koja seče ordinatu u tački $1 - \alpha^n\lambda^n$. Dakle, sledi da red (32) konvergira. Formula (31) sledi iz:

$$\sum_{n=1}^{N+1} \left(h_n^i(s,z) - h_n^i(s,0)\right) - \sum_{n=1}^{N} \left(h_{n+1}^i(s,z) - h_n^i(s,0)\right) = h_1^i(s,z) - h_{N+1}^i(s,0),$$

kada $N \to \infty$. $\square$

Lema 3.1.5. *Za $s > 0$ funkcija $\gamma(s)$ je jedinstveno rešenje jednačine:*

$$z = h(s + \lambda - \lambda z), s > 0 \quad (33)$$

koje leži u jediničnom disku, $|z| < 1$.

3.2 Funkcija obnavljanja umetnutog polu-markovskog procesa

U ovom delu ćemo izučiti umetnuti polu-markovski proces $\{\xi(T_n), T_{n+1} - T_n, n \geq 1\}$. Ovaj markovski proces je nesvodljiv, aperiodičan i nije koncentrisan na dvodimenzionoj celobrojnoj rešetki.

Označimo sa $M_{ij}(t)$ očekivani broj poseta stanja j u vremenskom intervalu $(0, t]$, ako pritom važi da je u trenutnku, T_0, prisutno i klijenata u sistemu, $\xi(T_0) = i$. Označimo sa $m_{ij}(t)$ Laplas-Stiltjesovu transformaciju funkcije $M_{ij}(t)$. Tada važi:

$$m_{0j}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} m_{1j}(s), j \geq 0. \tag{34}$$

Nadalje pretpostavimo da važi $i \geq 1$. Za $j = 0$ imamo:

$$m_{i0}(s) = \gamma^i(s) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + s}\gamma(s)\right)^{-1}, \tag{35}$$

jer poseta stanja 0 formira modifikovani proces obnavljanja u kome na početku ima i klijenata, nakon čega se smenjuju periodi kada je sistem zauzet i kada u sistemu nema klijenata.

Za $j > 0$ definišemo sledeću funkciju:

$$g_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{ij}^{(n)}(s), i \geq 0. \tag{36}$$

koja je za $i = 0$:

$$g_{0j}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} g_{1j}(s) \tag{37}$$

a za $i \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} g_{ij}(s) z^j = & \sum_{n=1}^{\infty} \left(d_i^{(n)}(s, z) - d_i^{(n)}(s, 0)\right) = \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(h_n^i(s, z) - h_n^i(s, 0)\right) \end{aligned} \tag{38}$$

Za $i \geq 1, j \geq 1$, imamo:

$$m_{ij}(s) = m_{i0}(s) \frac{\lambda}{\lambda + s} g_{1j}(s) + g_{ij}(s). \tag{39}$$

pošto se poseta stanju j može desiti sa ili bez posete među-stanja 0. Definišimo, sada, funkcije generatrise na sledeći način:

$$\Phi_i(s, z) = \sum_{j=1}^{\infty} m_{ij}(s) z^j. \tag{40}$$

Iz jednakosti (38) i (39), prethodnu jednakost možemo raspisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}\Phi_i(s,z) =& m_{i0}(s)\frac{\lambda}{\lambda+s}\sum_{n=1}^{\infty}\left(h_n(s,z)-h_n(s,0)\right)+\\ &\sum_{n=1}^{\infty}\left(h_n^i(s,z)-h_n^i(s,0)\right).\end{aligned} \tag{41}$$

Dalje, iz (31), (35) i (41), važi:

$$\begin{aligned}\Phi_i(s,z)-&\Phi_i\left(s,h(s+\lambda-\lambda z)\right)=\\ &=\frac{\lambda}{\lambda+s}m_{i0}(s)\left(h(s+\lambda-\lambda z)-\gamma(s)\right)+\left(h^i(s+\lambda-\lambda z)-\gamma^i(s)\right)=\\ &=h^i(s+\lambda-\lambda z)-\gamma^i(s)\frac{s+\lambda-\lambda h(s+\lambda-\lambda z)}{s-\lambda-\lambda\gamma(s)}.\end{aligned} \tag{42}$$

3.3 Granična svojstva umetnutog polu-markovskog procesa

U ovom poglavlju se bavimo graničnim raspodelama matrica prelaza umetnutog polu-markovskog procesa i umetnutog lanca Markova.

Teorema 3.3.1. *Pošto je umetnuti lanac Markova aperiodičan i nesvodljiv, sledeća verovatoća:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\xi(T_n) = j|\xi(T_0) = i\right\} = \beta_j. \tag{43}$$

postoji za svako $j \geq 0$. Ako $1-\lambda\alpha \leq 0$, $\beta_j = 0$ za svako j, a ako je $1-\lambda\alpha > 0$, onda važi:

$$B(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j z^j = 1 - \beta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - h_n(0,z)\right), \tag{44}$$

i

$$\beta_0^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - h_n(0,0)\right). \tag{45}$$

Svi β_j su tada pozitivni.

Dokaz. Jednačine za stacionarnu raspodelu umetnutog lanca Markova su:

$$\beta_0 \int_0^{\infty} e^{\lambda u} \frac{(\lambda u)^j}{j!} dH(u) + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \int_0^{\infty} e^{\lambda u} \frac{(\lambda u)^j}{j!} dH_i(u) = \beta_j. \tag{46}$$

za svako $j \geq 0$. Odavde sledi da su svi β_j pozitivni ako i samo ako je i β_0 pozitivno. Takođe imamo da važi:

$$B\left(h(\lambda - \lambda z)\right) - B(z) = \beta_0 \left(1 - h(\lambda - \lambda z)\right). \tag{47}$$

Razmatamo dva slučaja.
Za $1-\alpha\lambda < 0$, uzimamo takvo z da važi $z = \gamma(0) < 1$. Iz leme 3.1.2. dobijamo da važi $\beta_0 = 0$ i dalje, da je $B(z) = 0$.
Drugi slučaj koji ćemo razmotriti je slučaj kada je $1 - \alpha\lambda \geq 0$. Menjamo z u (47) sukcesivno sa $h_n(0,z), n = 1, 2...$ i dodamo dobijenu jednakost u prvom razmatranom slučaju. Pošto $h_n(0,z)$ teži jedinici za svako z na intervalu $[0,1]$, imamo:

$$B(1) - B(z) = \beta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - h_n(0,z)\right), 0 \leq z \leq 1. \tag{48}$$

Iz uslova $B(1) = 1$ dobijamo da važi:

$$\beta_0^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - h_n(0,0)\right), \tag{49}$$

koji je, kao što je pokazano, konačan pozitivan broj za $1-\alpha\lambda>0$. Ako je $\alpha\lambda=1$, onda β_0 mora biti 0. Kako bismo ovo zaključili, primetimo da između bilo koje dve uzastopne posete stanju 0, umetnut lanac Markova ulazi u dva Galton-Votsonova procesa. Tada β_0^{-1} predstavlja očekivani broj generacija pre izumiranja populacije u Galton-Votsonovom procesu sa stopom rađanja (stopom dolazaka klijenata sledeće generacije) jedan. Poznato je da je $\beta_0^{-1}=\infty$. □

Sledi ispitivanje stacionarnih raspodela polu-markovskog procesa.

Neka je $\mu_j, j\geq 0$ srednje vreme povratka u stanje j u polu-markovskom procesu $\{\xi(T_n), T_n-T_{n-1}\}$. Ako je $1-\alpha\lambda\leq 0$, onda je $\mu_0=\infty$ s obzirom da je očekivana dužina perioda zauzetosti beskonačna. Pošto je polu-markovski proces nesvodljiv, sledi da je $\mu_j=\infty$ za svako $j\geq 0$.

Vremenski period koji protekne do povratka umetnutog lanca u stanje 0 čini period kada je sistem prazan praćen nezavisnim periodom zauzetosti sistema. S toga, iz navedenog i primenom leme 3.1.3., važi:

$$\mu_0=\lambda^{-1}-\gamma'(0+)=\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^{-1}, 1>\lambda\alpha. \tag{50}$$

Ovo se takođe može dobiti i korišćenjem klasične teoreme tauberijskog tipa za Laplas-Stiltjesovu transformaciju:

$$\mu_0^{-1}=\lim_{s\to 0+} sm_{i0}(s)=\lambda(1-\alpha\lambda). \tag{51}$$

Za $j\neq 0$ imamo da važi sledeće:

$$\mu_j^{-1}=\lim_{s\to 0+} sm_{ij}(s)=\mu_0^{-1}\lim_{s\to 0+} g_{1j}(s)=\mu_0^{-1}g_{1i}(0+) \tag{52}$$

ali za $1>\lambda\alpha$, imamo:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} g_{1j}(0)z^j=\sum_{n=1}^{\infty}(h_n(0,z)-h_n(0,0)) &= \\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-h_n(0,0))-\sum_{n=1}^{\infty}(1-h_n(0,z)) &= \\ \beta_0^{-1}B(z)-1=\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j\beta_0^{-1}z^j\end{aligned} \tag{53}$$

Sledi:

$$\begin{aligned}&\mu_j=\beta_0\beta_j^{-1}\lambda^{-1}(1-\alpha\lambda)^{-1}, j\neq 0,\\ &g_{1j}(0+)=\beta_i\beta_0^{-1}, j\neq 0.\end{aligned} \tag{54}$$

Za detalje pogledati [4].

Neka je $\pi_{ij}(t)$ verovatnoća da je u trenutku t polu-markovski proces, tj. prva komponenta dvodimenzionog polu-markovskog procesa, u stanju j ako je u početnom trenutku bio u stanju i. Tada je poznato da postoje granične verovatnoće $\pi_j = \lim_{t\to\infty} \pi_{ij}(t)$ i da su date sa:

$$\pi_j = \eta_j \mu_j^{-1}, j \geq 0, \tag{55}$$

gde η_j predstavlja očekivano vreme boravka u stanju j pre prvog sledećeg prelaza.
Kako je:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \lambda^{-1} + \alpha, \\ \eta_j &= j\alpha, j > 0, \end{aligned} \tag{56}$$

kada u (55) uvrstimo prvu jednakost formule (54) i formule (50) i (56) dobijamo da važi:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 1 - \lambda^2\alpha^2 \\ \pi_j &= j\beta_j\beta_0^{-1}\lambda\alpha(1-\lambda\alpha), j > 0. \end{aligned} \tag{57}$$

Dobijamo da je suma ove dve verovatnoće jednaka jedinici i da je očekivanje verovatnoće da u nekom trenutku t u budućnosti u sistemu ima j klijenata: $\beta_0\lambda^2\alpha(1-\alpha^2\lambda^2)^{-1}(\alpha_2 + \alpha(1+\lambda\alpha))$, gde je α_2 drugi moment funkcije raspodele $H(\cdot)$. Očekivanje broja klijenata nakon n-te promene stanja unutar lanca Markova, ako je u početnom trenutku bilo i klijenata u sistemu, dato je sa $\beta_0\lambda\alpha(1-\lambda\alpha)^{-1}$. Ako primetimo da će nakon posete stanja 0 sledeća generacija imati samo jednog klijenta, možemo odmah naći **(asimptotski) očekivani broj klijenata po generaciji**. Dakle, očekivani broj klijenata po generaciji je:

$$\beta_0 + \sum_{j=1}^{\infty} j\beta_j = \beta_0(1-\lambda\alpha)^{-1}. \tag{58}$$

3.4 Dužina reda u neprekidnom vremenu

Neka je $p_{ij}(t)$ verovatnoća da je u trenutku t prisutno j klijenata u redu ako je u početnom trenutku bilo i klijenata, $\xi(T_0) = i$. Primetimo da za $i = 0$ važi:

$$p_{0j}(t) = \delta_{0j} e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda t} \lambda p_{1j}(t-\tau)\, d\tau, j \geq 0, \tag{59}$$

gde je δ_{ij} Kronekerovo delta, tj.:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = j \\ 0, & \text{ako je } i \neq j. \end{cases}$$

Nadalje ćemo pretpostaviti da je $i > 0$.

Ako u sistemu ima klijenata u trenutku t, oni ili pripadaju generaciji koja se trenutno opslužuje i deo su procesa grananja ili su novopristigli klijenti u sistem nakon poslednje promene unutar polu-markovskog procesa.
Definišemo verovatnoću: $P_i(\nu, r, t)$, da je u trenutku t ostalo ν klijenata u sistemu koji pripadaju generaciji koja se trenutno opslužuje, a došlo je r novih klijenata u sistem posle poslednje promene stanja u polu-markovskom procesu, pri čemu važi $\xi(T_0) = i$. Za ovako definisanu verovatnoću, ako je $\nu = 0$ i nema novih klijenata koji su ušli u sistem, važi:

$$P_i(0,0,t) = p_{i0}(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} dM_{i0}(\tau). \tag{60}$$

i za $\nu > 1$ važi:

$$P_i(\nu, r, t) = \sum_{k=\nu}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \frac{(\lambda(t-\tau))^r}{r!} \left(H_{k-\nu}(t-\tau) - H_{k-\nu+1}(t-\tau)\right) \\ d\left(M_{ik}(\tau) + \delta_{ik} U(\tau)\right) \tag{61}$$

gde je $U(\cdot)$ raspodela degenerisana u nuli.
Opisno, formula (61) se može objasniti na sledeći način: Poslednja poseta pre trenutka t unutar polu-markovskog procesa mora biti poseta nekom stanju $k \geq \nu$ u trenutku $\tau \leq t$ i unutar vremenskog intervala $(\tau, t]$ tačno je $k - \nu$ klijenata završilo opsluživanje, a r novih klijenata ušlo u sistem. Ukoliko je $k = i$, postoji mogućnost da još uvek nije došlo do promene stanja u

vremenskom intervalu $(0, t]$. Za $\nu = 1$, imamo:

$$P_i(1, r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \frac{(\lambda(t-\tau))^r}{r!} (H_{k-1}(t-\tau) - H_k(t-\tau))$$
$$d(M_{ik}(\tau) + \delta_{ik} U(\tau)) +$$
$$\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} dM_{i0} \int_0^{t-\tau} (1 - H(t-\tau-\nu)) \frac{(\lambda(t-\tau-\nu))^r}{r!} \lambda d\nu, \tag{62}$$

gde je drugi sabirak sa desne strane jednakosti zapravo slučaj kada je klijent prisutne generacije u sistemu ujedno i prvi klijent novog procesa grananja.

Označimo sa $P_i^*(\nu, r, s)$ Laplasovu transformaciju funkcije $P_i(\nu, r, t)$. Sledi da važi:

$$P_i^*(0, 0, s) = (s + \lambda)^{-1} m_{i0}(s) \tag{63}$$

i za $\nu \geq 1$:

$$\sum_{r=0}^{\infty} P_i^*(\nu, r, s) z^r = \frac{1 - h(s + \lambda - \lambda z)}{(s + \lambda - \lambda z)}$$
$$\left(\sum_{k=\nu}^{\infty} (m_{ik}(s) + \delta_{ik}) h^{k-\nu}(s + \lambda - \lambda z) + \frac{\lambda}{\lambda + s} m_{i0}(s) \delta_{\nu 1} \right) \tag{64}$$

I, takođe:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} w^\nu z^r P_i^*(\nu, r, s) = \frac{1 - h(s + \lambda - \lambda z)}{s + \lambda - \lambda z} \frac{1}{w - h(s + \lambda - \lambda z)}$$
$$\left(w\Phi_i(s, w) + w^{i+1} - wh^i(s + \lambda - \lambda z) - w\Phi_i(s, h(s + \lambda - \lambda z))\right) +$$
$$\frac{m_{i0}(s)}{s + \lambda} \left(1 - \lambda w \frac{1 - h(s + \lambda - \lambda z)}{s + \lambda - \lambda z} \right) \tag{65}$$

Postavljanjem $w = z$ u prethodnu jednakost,(65), dobijamo generatornu funkciju u j Laplasove transformacije $p_{ij}^*(s)$ verovatnoće $p_{ij}(t)$. Korišćenjem formula (35) i (42) sledi da možemo uprostiti jednakost:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}^*(s) z^j = \frac{z^{i+1}}{s + \lambda - \lambda z} \frac{1 - h(s + \lambda - \lambda z)}{z - n(s + \lambda - \lambda z)}$$
$$+ \frac{\gamma^i(s)}{(s + \lambda - \lambda\gamma(s))} \left(1 - z \frac{1 - h(s + \lambda - \lambda z)}{z - h(s + \lambda - \lambda z)} \right). \tag{66}$$

Iz (59) sledi da formula (66) važi i za $i = 0$.

3.5 Ukupan broj klijenata opsluženih do trenutka t

Neka je $N(t)$ **ukupan broj klijenata koji su završili opsluživanje u vremenskom intervalu** $(0,t]$. Izvešćemo zajedničku raspodelu slučajnih veličina $N(t)$ i $\xi(t)$ za $M|G|1$ sistem koristeći metod kolektivnih oznaka.

Pre svega, uočimo, da važi, za $i=0$:

$$P\{N(t)=r,\xi(t)=j|\xi(0)=0\}=$$
$$\delta_{0r}\delta_{0j}e^{-\lambda t}+\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\lambda P\{N(\tau)=r,\xi(\tau)=j|\xi(0)=1\}\ d\tau \tag{67}$$

Nadalje pretpostavimo da je $i>0$.

3.5.1 Metod kolektivnih oznaka

Navikli smo da, računanjem verovatnoće da se određeni događaj desi, dolazimo do funkcija raspodele i opštih izraza koji uključuju posmatrane slučajne veličine. Zatim raznim transformacijama tih izraza počinjemo da se udaljavamo od početnih verovatnosnih pretpostavki i upuštamo u suvo baratanje matematičkim izrazima. Metoda kolektivnih oznaka daje nam mogućnost da za određene transformacije damo verovatnosne interpretacije, odnosno konstruišemo događaje za koje će ove transformacije zapravo biti verovatnoće da se ti događaji dese. Transformacije za koje ovo najčešće radimo su Laplas-Stiltjesove i transformacija generatorne funkcije, odnosno z-transformacije. Ova metoda se sastoji iz dve odvojene i nezavisne operacije: **označavanje klijenata i posmatranje procesa "katastrofa"**. Kada kažemo proces katastrofa mislimo na brojački proces, gde svaki događaj nazivamo katastrofom, da bismo naglasili njegovu važnost. Oba koraka ćemo opisati primerom.

Označavanje klijenata: Neka je N slučajna veličina koja uzima nenegativne cele brojeve kao vrednosti sa verovatnoćama $P(N=v)=p_v, v=0,1,\ldots$. Posmatrajmo sada niz Bernulijevih eksperimenata, nezavisnih od procesa N, ali gde ćemo za svaki događaj u procesu N dodeliti jedan eksperiment kojim ćemo sa verovatnoćom uspeha od $1-z$ odrediti da li će taj događaj biti označen ili ne. Sada će generatorna funkcija $P(z)=\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$ intuitivno biti verovatnoća da nijedan događaj ne bude označen. "Uspeh" ćemo zvati "oznaka".

Proces katastrofa: Neka je $F(x)$ funkcija raspodele nenegativne slučajne veličine X i neka je dat nezavisan Puasonov proces sa parametrom $\lambda>0$. Slučajna veličina X predstavlja vreme pojavljivanja nekog događaja posmatrano od početnog trenutka, a Puasonov proces predstavlja proces katastrofa koji stvara katastrofe sa stopom λ. Tada Laplas-Stiltjesova transformacija funkcije raspodele $F(x)$ evaluirana u tački λ predstavlja verovatnoću da se događaj u trenutku t dogodio pre prve katastrofe.

3.5.2 Broj klijenata opsluženih tokom perioda zauzetosti

U ovom poglavlju ćemo izvesti očekivani broj klijenata tokom perioda zauzetosti korišćenjem metode kolektivnih oznaka objašnjene u prethodnom delu.

Razmotrićemo tri, međusobno nezavisna, procesa oznaka (*engl.marking processes*):

1. Puasonov proces sa parametrom $s > 0$, koji predstavlja proces katastrofa;

2. niz Bernulijevih eksperimenata koji dodeljuju oznaku svakom klijentu koji odlazi iz sistema sa verovatnoćom $1 - z$, $0 \leq z \leq 1$;

3. niz Bernulijevih eksperimenata koji dodeljuju oznaku klijentima prisutnim u sistemu na početku svake generacije sa verovatnoćom $1 - w$, $0 \leq w \leq 1$.

Nadalje ćemo navedene procese redom zvati s-proces, z-proces i w-proces.

Neka je $q_i^{(n)}(s,z,w)$ verovatnoća da ima bar n generacija u sistemu tokom perioda zauzetosti, n-ta generacija završava opsluživanje pre prvog s-događaja, nijedan od klijenata koji odlaze iz sistema nije označen u z-procesu i nijedan od prisutnih klijenata na kraju n-te generacije nije označen u w-procesu. Tada imamo da važi:

$$\begin{aligned} q_i^{(1)}(s,z,w) &= z^i h^i (s+\lambda-\lambda w) \\ q_i^{(n+1)}(s,z,w) &= q_i^{(n)}(s,z,zh(s+\lambda-\lambda w)) - q_i^{(n)}(s,z,0)\,. \end{aligned} \tag{68}$$

Prethodna rekurentna veza sledi direktno iz razmatranja slučajeva za n i $n+1$. Definišemo rekurzivne nizove funkcija na sledeći način:

$$\begin{aligned} h_1(s,z,w) &= zh(s+\lambda-\lambda w) \\ h_{n+1}(s,z,w) &= zh\left(s+\lambda-\lambda h_n(s,z,w)\right), \end{aligned} \tag{69}$$

za $s > 0, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq w \leq 1$. Dakle, formula (68) se može zapisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} q_i^{(1)}(s,z,w) &= h_1^{(i)}(s,z,w), \\ q_i^{(n)}(s,z,w) &= h_n^{(i)}(s,z,w) - h_{n-1}(s,z,w), n \geq 2 \end{aligned} \tag{70}$$

Verovatnoća $h_n(s, z, 0)$ je, zapravo, verovatnoća da u sistemu ima najviše n generacija tokom perioda zauzetosti, opsluživanje klijenata n-te generacije je završeno pre nego što se desio prvi s-događaj i nijedan klijent koji odlazi iz sistema nije označen u z-procesu.
Iz monotonosti sledi da postoji:

$$\gamma(s, z) = \lim_{n \to \infty} h_n(s, z, 0) \tag{71}$$

i jednaka je očekivanju $E(e^{-sL} z^N)$, gde je L dužina bilo kog perioda zauzetosti, a N broj klijenata opsuženih tokom tog perioda.

Funkcija $\gamma(s, z)$ se može proširiti na $s \geq 0$ i $|z| \leq 1$ je jedinstveno rešenje jednačine:

$$\xi = zh(s + \lambda - \lambda z \xi) \tag{72}$$

koje leži unutar jediničnog diska.

Poznato je da je jedna od posledica ovoga sledeća jednakost:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dz}} \gamma(\mathbf{s}, \mathbf{z}) \mid_{\mathbf{z}=\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1} + \alpha\lambda}{\mathbf{1} - \alpha\lambda}, 1 \geq \lambda\alpha \tag{73}$$

što je, ustvari, očekivani broj klijenata opsluženih tokom perioda zauzetosti. Takođe važi $\gamma(s, 1) = \gamma(s)$. I još, analogno lemi 3.1.2. $\gamma(0, z)$ je generatorna funkcija funkcije raspodele akko $1 - \alpha\lambda \geq 0$.

3.5.3 Zajednička raspodela slučajnih veličina $N(t)$ i $\xi(t)$

Razmotrimo verovatnoće:

$$\pi_{ij}(\nu, t) = P\{N(t) = \nu, \xi(t) = j | \xi(0) = i\}, i > 0 \tag{74}$$

i transformacije:

$$\pi_i(s, z, w) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} z^\nu w^j \int_0^\infty e^{-st} \pi_{ij}(\nu, t) \, dt. \tag{75}$$

Za $s > 0, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq w \leq 1$, $\pi_i(s, z, w)$ se može interpretirati kao verovatnoća, kao što će se videti u nastavku. Posmatramo Puasonov proces sa parametrom $s > 0$, niz Bernulijevih eksperimenata koji označavaju klijente koji napuštaju sistem sa verovatnoćom $1 - z$ i niz nezavisnih Bernulijevih eksperimenata koji označavaju klijente koji ulaze u sistem sa verovatnoóm $1 - w$. Tada, $\pi_i(s, z, w)$ predstavlja verovatnoću da u redu sa i klijenata u početnom trenutku, nijedan od opsluženih klijenata koji napušta sistem pre prvog s-događaja, nije označen u z-procesu i nijedan klijent koji je došao u sistem između prvog s-događaja i poslednjeg opsluženog klijenta pre s-događaja, nije označen u w-procesu.

Trebaće nam verovatnoća nekih slučajnih događaja koji su slični događajima kojima odgovara verovatnoća $\pi_i(s,z,w)$. Dobijamo da je:

$$m_{i0}(s,z) = \gamma^i(s,z)\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+s}\gamma(s,z)\right)^{-1}, \tag{76}$$

za $s > 0, 0 \leq z \leq 1$, verovatnoća da nijedan od klijenata, opsluživanih tokom bilo kog perioda zauzetosti, nije završio svoje opsluživanje pre prvog s-događaja.

Dalje ćemo definisati verovatnoću $\phi_{ij}(s,z), j > 0$ na sledeći način: Pretpostavljajući da se prvi s-događaj desio tokom nekog perioda zauzetosti koji je imao i klijenata u početnom trenutku, tada je $\phi_{ij}(s,z)$ verovatoća da u sistemu ima j klijenata u poslednjoj generaciji pre prvog s-događaja, i nijedan odlazeći klijent iz ranijih generacija (ako ih ima) tokom ovog perioda zauzetosti nije obuhvćen z- procesom.

Ako još razmotrimo i w-proces koji označava klijente koji ulaze u sistem, imamo:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\phi_{ij}(s,z)\,w^j &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(d_i^{(n)}(s,z,w) - d_i^{(n)}(s,z,0)\right) = \\ &\sum_{n=1}^{\infty}\left(h_n^i(s,z,w) - h_n^i(s,z,0)\right).\end{aligned} \tag{77}$$

Svaki od ovih izraza daje verovatnoću sledećih događaja:

1. nijedan klijent generacije, tokom koje se desio prvi s-događaj i u kojoj je bilo i klijenata u početnom trenutku, nije označen u w-procesu ;

2. nijedan klijent iz prethodnih generacija, koji je napustio sistem, ako postoji, nije označen u z-procesu.

Za $j > 0$ imamo da je:

$$m_{ij}(s,z) = m_{i0}(s,z)\frac{\lambda}{\lambda+s}\phi_{1j}(s,z) + \phi_{ij}(s,z) \tag{78}$$

verovatnoća da, ako se prvi s-događaj desio tokom perioda zauzetosti, u generaciji tokom koje se on desio, ima j klijenata i nijedan klijent iz prethodnih generacija nije označen u z-procesu.

Neka je, sada, $j \geq 0$ veličina generacije tokom čijeg se trajanja desio prvi s-događaj. Postavlja se pitanje koja je verovatnoća da nijedan klijent, koji ode iz sistema u periodu između početka ove generacije i prvog s-događaja, nije označen u z-procesu i da nijedan klijent koji je prisutan u sistemu kada se desio s-događaj nije označen u w-procesu?

Ova verovanoća, za $j = 0$, je:

$$\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)u} du + w \int_0^\infty e^{-su} du \int_0^u e^{-\lambda\tau} \left(1 - H\left(u - \tau\right)\right) e^{-\lambda(1-w)(u-\tau)} \lambda d\tau = \frac{1}{\lambda + s} + \frac{\lambda w}{\lambda + s} \frac{1 - h\left(s + \lambda - \lambda w\right)}{s + \lambda - \lambda w}, \tag{79}$$

a za $j > 0$:

$$\sum_{k=0}^{j-1} \int_0^\infty e^{-su} du \int_0^u e^{-\lambda(1-w)\tau} z^k \left(1 - H\left(u - \tau\right)\right) w^{j-k} dH_k\left(\tau\right) = w \frac{1 - h\left(s + \lambda - \lambda w\right)}{s + \lambda - \lambda w} \frac{w^j - z^j h^j\left(s + \lambda - \lambda w\right)}{w - zh\left(s + \lambda - \lambda w\right)}. \tag{80}$$

Sada ćemo primeniti formulu potpune verovatnoće i razmotriti međusobno isključive mogućnosti. Neka je S trenutak pojave prvog s-događaja. Tada važi jedan od sledećih slučajeva:

1. red nije bio prazan ni u jednom trenutku tokom vremenskog intervala $(0, S]$;
2. na kraju opsluživanja poslednje generacije čiji su svi klijenti opsluženi pre trenutka S red je bio prazan;
3. na kraju opsluživanja poslednje generacije čiji su svi klijenti opsluženi pre trenutka S u redu ima j klijenata.

Važi, redom:

$$\begin{aligned}\pi_i\left(s, z, w\right) =& w \frac{1 - h\left(s + \lambda - \lambda w\right)}{s + \lambda - \lambda w} \frac{w^i - h_1^i\left(s, z, w\right)}{w - h_1\left(s, z, w\right)} + \\ & m_{i0}\left(s, z\right) \left(\frac{1}{\lambda + s} + \frac{\lambda w}{\lambda + s} \frac{1 - h\left(s + \lambda - \lambda w\right)}{s + \lambda - \lambda w} \right) + \\ & \sum_{j=1}^\infty m_{ij}\left(s, z\right) w \frac{1 - h\left(s + \lambda - \lambda w\right)}{s + \lambda - \lambda w} \frac{w^j - h_1^j\left(s, z, w\right)}{w - h_1\left(s, z, w\right)}.\end{aligned} \tag{81}$$

Ova jednakost se može pojednostaviti, analogno dokazu formule (42) važi:

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_{ij}\left(s,z\right)\left(w^{j}-h_{1}^{j}\left(s,z,w\right)\right)=$$

$$\frac{\lambda}{\lambda+s}m_{i0}\left(s,z\right)\left(h_{1}\left(s,z,w\right)-\gamma\left(s,z\right)\right)+h_{1}^{i}\left(s,z,w\right)-\gamma^{i}\left(s,z\right)=$$

$$z^{i}h^{i}(s+\lambda-\lambda w)-\gamma^{i}(s,z)\left(s+\lambda-\lambda zh(s+\lambda-\lambda w)\right)\cdot\left(s+\lambda-\lambda\gamma(s,z)\right)^{-1}. \tag{82}$$

Konačno:

$$\begin{aligned}\pi_{i}\left(s,z,w\right)=&\frac{w^{i+1}}{s+\lambda-\lambda w}\frac{1-h\left(s+\lambda-\lambda w\right)}{w-zh\left(s+\lambda-\lambda w\right)}+\\&\frac{\gamma^{i}\left(s,z\right)}{s+\lambda-\lambda\gamma\left(s,z\right)}\frac{(w-z)h(s+\lambda-\lambda w)}{w-zh(s+\lambda-\lambda w)}.\end{aligned} \tag{83}$$

Formula (66) se može izvesti iz prethodne formule za $z=1$ i $w=z$. Za $w=1$ u (83), dobijamo sledeće:

$$\pi_{i}\left(s,z,1\right)=\int_{0}^{\infty}e^{st}\left(Ez^{N(t)}\right)dt=\frac{1-h\left(s\right)}{s\left(1-zh\left(s\right)\right)}+\frac{\gamma^{i}\left(s,z\right)\left(1-z\right)}{s+\lambda-\lambda\gamma\left(s,z\right)}\frac{h(s)}{1-zh(s)}. \tag{84}$$

3.6 Virtuelno vreme čekanja i virtuelna starost

Slučajan proces $\eta(t)$ je značajan proces koji predstavlja količinu preostalog posla u sistemu u trenutku t. Ovo je Markovski proces čije vrednosti predstavljaju vreme potrebno da se sistem isprazni, odnosno da se opsluže svi klijenti koji su prisutni u sistemu u trenutku t, pod uslovom da posle trenutka t ne bude dolazaka novih klijenata u sistem. Posmatrano u $M|G|1$ sistemu, vrednost $\eta(t)$ zapravo predstavlja vreme čekanja do početka opsluživanja klijenta ako bi taj klijent ušao u sistem u trenutku t. Zbog toga se ovo vreme čekanja zove **virtuelno vreme čekanja**.

Dakle, virtuelno vreme čekanja $\eta(t)$ je dužina vremenskog intervala koji klijent, koji je došao u trenutku t, mora da sačeka dok ne započne njegovo opsluživanje. Drugim rečima, $\eta(t)$ se može definisati kao dužina vremenskog intervala koja je potrebna da bi se red klijenata koji čekaju da budu opsluženi ispraznio pod uslovom da nijedan novi klijent ne uđe u sistem od trenutka t. Ako se klijenti opslužuju istim redom kojim su i ulazili u sistem, što jeste razmatrani slučaj u ovom radu, ove dve definicije su ekvivalentne.

Jasno je da važi:

$$P\{\eta(t)=0|\xi(0)=i\}=P\{\xi(t)=0|\xi(0)=i\} \tag{85}$$

i:

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t}P\{\eta(t)=0|\xi(0)=i\}\,dt=\frac{\gamma^i(\sigma)}{\sigma+\lambda-\lambda\gamma(\sigma)} \tag{86}$$

Ako u trenutku t red nije prazan, onda je $\eta(t)\neq 0$ i možemo zapisati $\eta(t)=U_t+V_t$, gde je U_t dužina preostalog vremena potrebnog za opsluživanje generacije koja se opslužuje u trenutku t, a V_t je dužina vremena potrebnog za opsuživanja klijenata koji su ušli u sistem u periodu od početka opsluživanja trenutne generacije do trenutka t.

Dalje, možemo zaključiti:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\sigma t}dt\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s_1u-s_2v}dP\{0<U_t\le u,0\le V_t\le v|\xi(0)=i\}=\\
&\qquad\sum_{r=0}^\infty\int_0^\infty e^{-\sigma t}dt\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s_1u-s_2v}\int_0^t e^{-\lambda(r-\tau)}\frac{(\lambda(t-\tau))^r}{r!}\\
&\qquad\qquad dH_r(v)dH(t+u-\tau)d\left(M_{i0}*F(\tau)\right)\\
&\quad+\sum_{r=0}^\infty\sum_{\nu=1}^\infty e^{-\sigma t}dt\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s_1u-s^2v}\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\frac{(\lambda(t-\tau))^r}{r!}dH_r(v)\\
&\qquad\qquad\cdot dH_\nu(t+u-\tau)d\left(M_{i\nu}(t)+\delta_{i\nu}U(t)\right).
\end{aligned} \tag{87}$$

Prvi sabirak sa desne strane odgovara slučaju kada je poslednja promena stanja, pre trenutka t, ulazak u stanje 0 ali u trenutku t novi klijent samo što je ušao u sistem. Drugi sabirak opisuje situaciju u kojoj je poslednje posećeno stanje polu-markovskog procesa stanje $\nu \neq 0$. Takođe:

$$F(t) = (1 - e^{-\lambda t})U(t). \tag{88}$$

Za $s_1 = s_2 = s$, nakon par koraka računa, dobijamo formulu:

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} dt E\left\{e^{-\eta(t)s} | \xi(0) = i\right\} = \frac{h^i(s) - s\gamma^i(\sigma)\left(\sigma + \lambda - \lambda\gamma(\sigma)\right)^{-1}}{\sigma - s + \lambda - \lambda h(s)}, \tag{89}$$

koja važi i u slučaju $i = 0$.

Sada ćemo uvesti pojam virtuelne starosti.

Kažemo da virtuelna starost $\alpha(t)$ uzima vrednost 0 ako je red prazan u trenutku t, dok ako sistem nije prazan, $\alpha(t)$ definišemo kao vreme koje je, klijent koji se opslužuje u trenutku t, već proveo u sistemu. Važi da je $\alpha(0) = 0$.

Izračunaćemo transformaciju:

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} dt \int_0^t e^{-s\tau} dP\left\{\alpha(t) \leq \tau | \xi(0 = i)\right\}, i > 0, \tag{90}$$

uzimajući u obzir moguće položaje trenutka t u skladu sa umetnutim procesom grananja. Razmotrimo nekoliko mogućnosti:

(1) $\alpha(t) = 0$

$$I_1 = (\lambda + \sigma)^{-1} m_{i0}(\sigma) = \gamma^i(\sigma)\left(\sigma + \lambda - \lambda\gamma(\sigma)\right)^{-1}. \tag{91}$$

(2) Početna generacija od i klijenata nije još uvek završila opsluživanje, tj. $\alpha(t) = t$

$$I_2 = (\sigma + s)^{-1}\left(1 - h^i(\sigma + s)\right) \tag{92}$$

(3) Došlo je bar do jedne promene stanja pre trenutka t u polu-markovskom procesu. U nekom trenutku t, $0 \leq \tau \leq t$, sistem prelazi u stanje $\nu > 0$ (ostaje ν klijenata u sistemu). Tih ν klijenata završavaju opsluživanje u trenutku $t - u$, $\tau < t - u$. Klijent koji se opslužuje u trenutku t, ušao je u sistem u nekom trenutku $t - u - v > \tau$ i u sistemu je bilo r klijenata ispred njega u generaciji kojoj on pripada. Svi oni klijenti koji su u redu ispred njega došli su u toku intervala $(\tau, t - u - v)$. Izražavajući verovatnoću ovog događaja i sumirajući po svim slučajevima, dobijamo

sledeće rešenje integrala (90), prema formuli (42):

$$
\begin{aligned}
I_3 =& \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\sigma t}dt\int_0^{t} e^{-su}\int_0^{t-u} e^{-sv}\int_0^{t-u-v} e^{-\lambda(t-u-v-r)}\frac{(\lambda(t-u-v-r))^r}{r!}\\
&\cdot\left(H_r(u)-H_{r+1}(u)\right)dH_\nu(t-u-\tau)\lambda dud\left(M_{i\nu}(\tau)+\delta_{i\nu}U(\tau)\right)\\
&=\lambda\frac{1-h(\sigma+s)}{\sigma+s}\frac{1}{\lambda-s-\lambda h(\sigma+s)}\\
&\left\{\Phi_i\left(\sigma,h(\sigma+s)\right)-\Phi_i\left(\sigma,h(\sigma+\lambda-\lambda h(\sigma+s))\right)+h^i(\sigma+s)-h^i\left(\sigma+\lambda-\lambda h(\sigma+s)\right)\right\}\\
&=\lambda\frac{1-h(\sigma+s)}{\sigma+s}\frac{1}{\lambda-s-\lambda h(\sigma+s)}\\
&\cdot\left(h^i(\sigma+s)-\gamma^i(\sigma)\frac{\sigma+\lambda-\lambda h\left(\sigma+\lambda-\lambda h(s+\sigma)\right)}{\sigma+\lambda-\lambda\gamma(\sigma)}\right).
\end{aligned}
\tag{93}
$$

(4) Pretposlednja promena stanja, pre trenutka t, bila je u stanje 0 i u trenutku $\tau < t$ novi klijent ulazi u sistem. Njegovo opsluživanje se završava u trenutku $t-u$ a u trenutku $t-u-v > \tau$ u sistem je stigao klijent koji se opslužuje u trenutku t, dok u intervalu $(\tau, t-u-v)$, r klijenata stiže u sistem. Raspisana formula (90) u ovom slučaju je:

$$
\begin{aligned}
I_4 =& \sum_{r=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\sigma t}dt\int_0^{t} e^{-su}\int_0^{t-u} e^{-sv}\int_0^{t-u-v} e^{-\lambda(t-u-v-r)}\frac{(\lambda(t-u-v-r))^r}{r!}\\
&\cdot dH(t-u-\tau)\left(H_r(u)-H_{r+1}(u)\right)\lambda dud\left(M_{i0}*F(\tau)\right)\\
&=\frac{\lambda}{\lambda+\sigma}m_{i0}(\sigma)\frac{\lambda}{\lambda-s-\lambda h(s+\sigma)}\frac{1-h(s+\sigma)}{s+\sigma}\\
&\cdot\left\{h(\sigma+s)-h\left(\sigma+\lambda-\lambda h(\sigma+s)\right)\right\}\\
&=\frac{\lambda\gamma^i(\sigma)}{\sigma+\lambda-\lambda\gamma(\sigma)}\frac{\lambda}{\lambda-s-\lambda h(s+\sigma)}\frac{1-h(s+\sigma)}{s+\sigma}\\
&\cdot\left(h(\sigma+s)-h\left(\sigma+\lambda-\lambda h(\sigma+s)\right)\right).
\end{aligned}
\tag{94}
$$

(5) Poslednji prelazak pre trenutka t je prelazak u stanje 0. Novi klijent je ušao u sistem u trenutku $t-u < t$ i njegovo opsluživanje još uvek traje u trenutku t.

$$
\begin{aligned}
I_5 =& \int_0^{\infty} e^{-\sigma t}dt\int_0^{t} e^{-su}\left(1-H(u)\right)d\left(M_{i0}*F(t-u)\right)=\\
&=\frac{\lambda\gamma^i(\sigma)}{\sigma+\lambda-\lambda\gamma(\sigma)}\frac{1-h(\sigma+s)}{(\sigma+s)}
\end{aligned}
\tag{95}
$$

Traženo rešenje formule (90) dobija se sumiranjem rešenja svih pet slučajeva. Dakle dobijamo:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-\sigma t}dt\int_0^t e^{-sx}dP\{\alpha(t)\leq x|\xi(0)=i\}\\&=\frac{1}{\sigma+s}+\frac{s}{s-\lambda+\lambda h(\sigma+s)}\left(\frac{\gamma^i(\sigma)}{\sigma+\lambda-\lambda\gamma(\sigma)}-\frac{h^i(\sigma+s)}{\sigma+s}\right).\end{aligned} \tag{96}$$

Za $1-\lambda\alpha>0$ postoji granična raspodela prethodne formule. Kada $\sigma\to 0+$, dobijamo:

$$\lim_{\sigma\to 0+}\sigma\int_0^\infty e^{-\sigma t}dt\int_0^t e^{-sx}dP\{\alpha(t)\leq x|\xi(0)=i\}=\frac{(1-\lambda\alpha)s}{s-\lambda+\lambda h(s)}, \tag{97}$$

što pokazuje da $\alpha(t)$ i $\eta(t)$ imaju istu graničnu raspodelu, tj. vreme koje je klijent, koji se trenutno opslužuje, već proveo u sistemu i vreme koje klijent provede u redu čekajući da bude opslužen imaju istu graničnu raspodelu.

4 Zaključak

Kao što smo videli, koristili smo osobine umetnutog polu-markovskog procesa za izvođenje rezultata koji se tiču $M|G|1$ sistema. Struktura procesa grananja nam omogućava da identifikujemo nove klijente i da izvršimo njihovu kategorizaciju po generacijama. Te osobine nam pružaju bolji uvid u proces dolazaka klijenata i proces po kome se oni opslužuju što nam pomaže u analizi perioda zauzetosti sistema.

Prvi značajan rezultat koji smo dobili je nalaženje generatorne funkcije pomoću koje možemo odrediti raspodelu za dužinu reda, odnosno, broj klijenata koji čekaju na opsluživanje. Pored umetnutog polu-markovskog procesa, uvodimo i metodu kolektivnih oznaka koju koristimo u izvođenju daljih rezultata. Definišemo proces koji predstavlja ukupan broj klijenata koji su opsluženi do nekog trenutka. Dalje računamo očekivani broj opsluženih klijenata tokom perioda zauzetosti, koji je jedan od bitnijih u ovom radu, jer se koristi u analizi performansi sistema. Poslednji rezultat u ovom delu rada jeste zajednička raspodela ukupnog broja klijenata opsluženih do trenutka t i broja klijenata u sistemu u istom tom trenutku t.

Za kraj izvodimo bitan rezultat koji se tiče virtuelnog vremena čekanja do opsluživanja i virtuelnu starost klijenta u sistemu. Pokazano je da ove dve slučajne veličine imaju istu graničnu raspodelu.

Neki od radova u kojima se ova tema dalje razvijala su radovi Neuts-a [6] i [7] u kojima možemo videti primenu umetnutih polu-markovskih procesa u analizi nehomogenih sistema i više servera u nizu koji vrše opsluživanje klijenata sa ograničenim redom za čekanje između servera. U radu [8] možemo videti kako se pomoću procesa grananja i verižnih razlomaka dobija trajanje opsluživanja n-te serije klijenata nehomogenog $M|G|1$ procesa. Zanimljivu varijaciju izučavanog $M|G|1$ sistema, kao i pristup posmatranja pražnjenja čekaonice kao umetnutog lanca Markova, možemo videti u radu [9].

Literatura

[1] M. F. Neuts, *The queue with Poisson input and general service times, treated as a branching process*, 1969.

[2] L. Kleinrock, *Queueing systems*, United States Copyright Act, 1976.

[3] R. Nelson, *Probability, stochastic processes and queuing theory* , Springer-Verlag New York, 1995.

[4] J. Korevaar, *Tauberian theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

[5] R. Pyke, *Markov renewal processes: Definitions and preliminary properties*, Institute of Mathematical Statistics, 2015.

[6] M. F. Neuts, *A queue subject to extraneous phase changes*, Applied Probability Trust, 1971.

[7] M. F. Neuts, *Two queues in series with a finite, intermediate waitingroom*, Applied Probability Trust, 1968.

[8] P.R. Parthasarathy and K.Vasudevan, *A single server queue with a varying gate mechanism*, Indian Institute of Technology Madras, 2008.

[9] R. Rietman and J. Resing, *An M/G/1 Queueing Model with Gated Random Order of Service*, Kluwer Academic Publishers, 2004.