УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Филип Јекић

ПЕРЗИСТЕНТНА ХОМОЛОГИЈА

мастер рад

Београд, 2020.

Ментор:

др Синиша Врећица, редован професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Раде Живаљевић, редован професор
Математички институт САНУ

др Владимир Грујић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 30. septembar 2020.

Родитељима

Наслов мастер рада: Перзистентна хомологија

Резиме: Описивање геометрије и топологије облака тачака - скупа тачака у euklidском простору - је важан отворен проблем. Захваљујући могућности рачунара да обрађују велике скупове података, у последње време је посебно добио на важности, и разне тополошке технике су развијене да би се описао облик облака тачака.

Задатак описивања облика тополошког простора је један од централних којима се топологија бави. Постојеће технике дају одличне резултате када се примене на високодимензионе тополошке просторе. Међутим, за описивање облака тачака често није погодно посматрати само један тополошки простор, већ фамилије таквих простора.

Циљ овог рада је да опише неке од постојећих начина за креирање тополошких простора из облака тачака, а потом и да дефинише теорију перзистентне хомологије - методу развијену у последњих двадесет година, којом се облик облака тачака описује при различитим ”скалама” при којима се посматра.

Описано је неколико метода чијом се узастопном применом тај циљ остварује. Конструкција растућих фамилија симплицијалних комплекса из облака тачака генерише потребне тополошке просторе чији се облик анализира. Теорија хомологије даје формалан начин за описивање повезаности и облика тополошког простора. Перзистентна хомологија сумаризује како се тај облик мења при различитим скалама, то јест корацима у филтрацији. Тиме је описан и стандардни начин примене овог метода: из облака тачака се креира филтрација, на коју се потом примењује перзистентна хомологија која као резултат даје опис промена облика тополошких простора кроз такозване дијаграме перзистенције.

Резултат рада је преглед најважнијих радова из претходно описаних области. У раду је постављена теоријска основа погодна за примену овог метода на друге проблеме унутар или ван математике, која даје и погодну основу за даље истраживање унутар области.

Примене перзистентне хомологије успешно решавају проблеме унутар разних математичких области. Постоји блиска веза са парцијалним диференцијалним једначинама, диференцијалном и алгебарском геометријом, теоријом репрезентација, статистиком и комбинаториком. Уз то, ова област топологије је пронашла и разне примене ван математике: у анализи материјала и слика, у медицини, епидемиологији, анализи података и временских серија.

Неки од даљих праваца истраживања укључују: нове начине репрезентације дијаграма перзистенције, примене метода вероватноће и статистике, везу са области машинског учења, и примену теорије репрезентација.

Кључне речи: топологија, геометрија, симплицијални комплекси, хомологија, тополошка анализа података

Садржај

Глава 1

Увод

Ако особа стоји на планинском врху и посматра шуму у подножју планине, јасно ће видети њену величину и облик, њене границе, пропланке који се промаљају кроз дрвеће. Друга особа, која се налази на једном од тих пропланака, пред собом има другачију слику. Она види само тај пропланак и стабла која га раздвајају од шуме, али зато посматра појединачна стабла, њихов облик, лишће на гранама.

Ко од њих двоје боље види шуму? Тешко се може дати предност једном погледу у односу на други - свака особа примећује нека својства, особине, детаље, које друга не може да примети јер је предалеко или превише близу.

Теорија перзистенте хомологије даје једно решење таквог проблема у контексту анализе облика облака тачака. Та теорија предлаже да се гледа и са ближе и са даље позиције, и то истовремено!

Облак тачака је скуп тачака у еуклидском простору. Веома често се у разним проблемима јавља као скуп података. На пример, у добро познатом скупу података о ценама станова у Бостону који се користи у статистици, свака кућа је репрезентована својом тачком - вектором у $\mathbb{R}^{14}$, чије координате представљају особине попут односа наставника и ученика, стопи злочина по становику, или концентрацији азотних оксида на тој локацији.

Најчешће су такви скупови података коначни па и дискретни као тополошки простори, што онемогућава директну примену тополошких метода. Међутим, визуализацијом тих облака тачака се голим оком могу уочити правилности или одређени облици. Често је тај скуп тачака узорак са неке многострукости. Поставља се питање како се може реконструисати та многострукост и одредити њена тополошка својства, само на основу датог узорка са ње.

Један начин за описивање структуре облака података је да се на њој дефинише граф, тако да су темена тачке из облака, а ивице одговарају тачкама које су „близу”, где се појам блискости може дефинисати на различите начине. Међутим, значајно више информација се добија ако се уместо графа конструише симплицијални комплекс. Ако та конструкција зависи од параметра блискости, варирањем тог параметра се добија и фамилија симплицијалних комплекса. Та фамилија обично садржи комплексе који лепо реконструишу глобални облик тог простора, као и комплексе који имају пуно ситних компоненти повезаности које описују облик малих делова простора - детаље који нестану када је параметар блискости велики.

Уколико се конструише растућа фамилија симплицијалних комплекса, та фамилија се назива филтрација финалног комплекса у њој, а финални комплекс заједно са филтрацијом се назива филтрирани комплекс. Такви објекти су посебно погодни за примене тополошких метода.

За опис облика једног од конструисаних симплицијалних комплекса, погодна је примена теорије хомологије. Хомологија омогућава да се тополошким просторима придруже алгебарски објекти. Једно од првих таквих придруживања је дефинисао Ојлер[1], и по њему је добило име „Ојлерова карактеристика”. Затим, Риман[2] је дефинисао род површи, док су Бети[3] а потом и Поенкаре[4] дали зачетке појма хомолошке групе. Оригинална идеја хомологије је да се два тополошка простора могу разликовати на основу броја „рупа” сваког од њих. Бројање „рупа” показује, на пример, да су сфера и торус различити тополошки простори.

Теорија хомологије примењена на симплицијални комплекс описује компоненте повезаности и „рупе” тог комплекса, које су представљене одговарајућим класама хомологије из хомолошких група тог простора.

Перзистентна хомологија је математичка теорија која рачуна тополошка својства при различитим вредностима параметра филтрације. Рачунањем хомолошких група за сваки од комплекса филтрације, може се пратити када нека класа хомологије настаје, а када нестаје. Ако се нова класа појави за вредност параметра филтрације t, каже се да се та класа родила у тренутку t. Слично, ако нека класа нестане, то јест споји се са другом, каже се да је та класа умрла у тренутку t. На пример, облак тачака може имати два густо груписана одвојена подскупа тачака. У тренутку t_0, симплицијални комплекс филтрације ће имати две компоненте повезаности, по једну за сваки од њих. Међутим, како се t повећава, у једном тренутку ће настати симплекси између тачака те две групе, то јест две компоненте ће се спојити у једну. Конвенција је да старија компонента настави да живи, док млађа у том тренутку умре.

У другој глави рада дат је преглед теорије симплицијалних комплекса. Дефинисани су геометријски и апстрактни комплекси, као и појам нерва, који даје један општи начин за креирање апстрактног комплекса из коначне фамилије скупова. Потом, описани су различити начини креирања

[1] Leonhard Euler (1707-1783) - швајцарски математичар
[2] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) - немачки математичар
[3] Enrico Betti Glaoui (1823-1892) - италијански математичар
[4] Jules Henri Poincaré (1854-1912) - француски математичар

симплицијалног комплекса из облака тачака, и дата је формална дефиниција филтрације.

Трећа глава садржи дефиниције и основна својства алгебарских објеката који се употребљавају при дефиницији перзистентне хомологије. Дат је кратак преглед теорије модула, а потом и основних дефиниција и ставова хомолошке алгебре.

У четвртој глави је дефинисана симплицијална хомологија - једна од теорија хомологије која се односи на симплицијалне комплексе. Иако је у прошлости симплицијална хомологија важила за метод који захтева пуно рачуна за добијање резултата које друге хомолошке теорије дају брже, у последње време интересовање за ову хомолошку теорију расте пошто се рачунање може лако извести помоћу рачунара.

Пета глава садржи излагање теорије перзистентне хомологије. Дефинисане су перзистентне хомолошке групе, и описана је структура модула перзистенције. Та структура даје јединствен поглед на рађање и смрт хомолошких класа у филтрацији, независно од база хомолошких група. Поред тога, описана је филтрација која настаје од поднивоа неке непрекидне функције која слика тополошки простор у $\mathbb{R}$, као и дијаграми перзистенције.

Након ових глава наведен је списак коришћене литературе.

Глава 2

Симплицијални комплекси

Скуп тачака $\{a_0, a_1, \dots a_n\} \subset \mathbb{R}^m$ је у *општем положају* ако важи:

$$\big(\forall(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\big) \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i = 0 \wedge \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0 \implies (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathbf{0}.$$

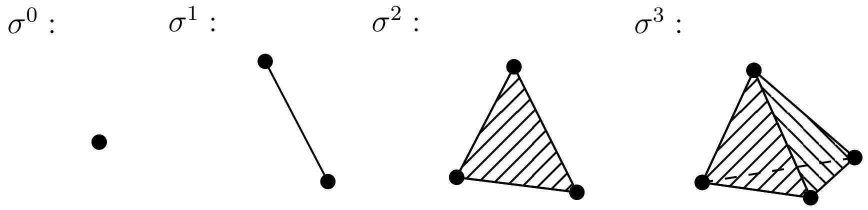
Скуп тачака $\{a_0, a_1, \dots a_n\} \subset \mathbb{R}^m$ задовољава то својство ако и само ако су вектори $(a_1 - a_0), \dots, (a_n - a_0)$ линеарно независни.

2.1 Симплекси

Дефиниција 2.1.1. *Скуп тачака у општем положају $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^m$ одређује геометријски n-симплекс*

$$\sigma^n = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1,\ (\forall i \in \{0, 1, \dots, n\})\, \lambda_i \geq 0\}.$$

Тачке $a_0, a_1, \dots, a_n$ се називају темена или врхови симплекса σ^n. Димензија симплекса σ^n је број n, и за један је мања од броја темена. Коефицијенти λ_i, $(i \in \{0, \dots, n\})$ су барицентричке координате тачке симплекса σ^n.



Слика 2.1: σ^0- тачка, σ^1- дуж, σ^2- троугао, σ^3- тетраедар.

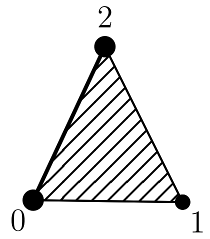
Дефиниција 2.1.2. *Интериор симплекса σ^n је скуп*

$$\mathring{\sigma}^n = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1,\ (\forall i \in \{0, 1, \dots, n\})\, \lambda_i > 0\}.$$

Руб симплекса, $|\sigma^n|$, је разлика $\sigma^n \backslash \mathring{\sigma}^n$.

Приметимо да интериор и руб симплекса σ^n не морају да се поклапају са интериором и рубом σ^n као тополошког потпростора у $\mathbb{R}^m$.

Страна симплекса Симплекс σ^n обележавамо и помоћу његових темена као $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Сваки подниз низа темена $a_0, a_1, \ldots, a_n$ је такође један симплекс, и назива се *страна* симплекса σ^n. Уколико је страна симплекса различита од празног скупа и целог симплекса, она се назива и правом страном тог симплекса.



Слика 2.2: Симплекс $(0, 2)$ је страна симплекса $(0, 1, 2)$

Стандардни симплекс Постоји један примерак скупа хомеоморфних n-симплекса посебно погодан за рачунање. То је скуп

$$\Delta^n = \left\{ x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} x_i = 1,\ (\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\})\, x_i \geq 0 \right\},$$

који се назива и *стандардни n-симплекс.*

Темена стандардног n-симплекса су тачке $e_i \in \mathbb{R}^{n+1}$, где су

$$\begin{aligned} e_0 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_1 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Постоји канонско пресликавање стандардног n-симплекса у произвољан n-симплекс са теменима $(a_0, \ldots, a_n)$, које тачке стандардног n-симплекса пресликава на следећи начин:

$$(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i.$$

Приметимо да помоћу тог пресликавања видимо барицентричке координате произвољног n-симплекса на стандардном n-симплексу.

2.2 Симплицијални комплекси

Дефиниција 2.2.1. *Геометријски симплицијални комплекс K у $\mathbb{R}^n$ је коначна фамилија симплекса у $\mathbb{R}^m$ која задовољава следећа два услова:*

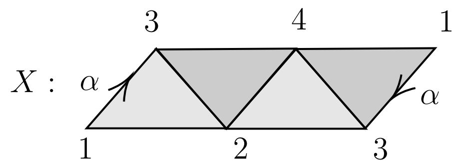
1º Свака страна произвољног симплекса из K припада фамилији K.

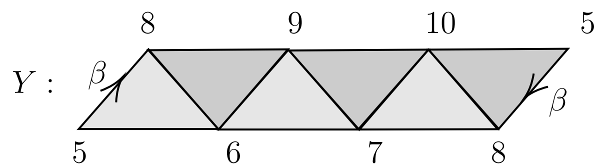
2º Пресек свака два симплекса из K је страна сваког од њих.

Фамилија симплекса L која задовољава услов $2°$ *генерише* симплицијални комплекс K који се састоји од симплекса из фамилије L и свих њихових страна. Такав симплицијални комплекс означавамо са $[L]$.

Фамилију симплекса L ћемо често задавати цртањем слике. $K = [L]$ укључује све симплексе на слици и њихове стране.

Пример 1. На следећој слици су дате две фамилије симплекса, X и Y. Y задовољава услов $2°$, па је $[Y]$ један симплицијални комплекс.





Пресек симплекса $(1, 2, 3)$ и $(2, 3, 4)$ из X је скуп $\{(2), (3)\}$, што није симплекс па ни страна ниједног од та два симплекса. Зато није испуњен услов $2°$ из дефиниције, па $[X]$ није симплицијални комплекс.

$\triangle$

Пример 2. $K = \{(a_0, a_1, a_2), (a_1, a_2, a_3), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_3), (a_0), (a_1), (a_2), (a_3)\}$ није симплицијални комплекс јер не задовољава услов $1°$ из дефиниције: $(a_0, a_1, a_2) \in K$, (a_1, a_2) је страна од (a_0, a_1, a_2), али (a_1, a_2) не припада симплицијалном комплексу K. $\triangle$

Полиедар симплицијалног комплекса *Поткомплекс* симплицијалног комплекса K је произвољна потфамилија симплекса из K. Ако та потфамилија садржи све симплексе димензије мање или једнаке k, за неко $k \in \mathbb{N}$, она се назива *k-скелетон* комплекса K. *Полиедар* комплекса K је унија свих симплекса тог комплекса у $\mathbb{R}^m$, и означава се са $|K|$. Тако дефинисан полиедар поред тополошке структуре има и додатну структуру симплицијалног комплекса, па можемо посматрати и пресликавања која чувају ту структуру.

Дефиниција 2.2.2. *Триангулација (K, h) тополошког простора X је симплицијални комплекс K заједно са хомеоморфизмом $h : |K| \to X$.*

Дефиниција 2.2.3. *Пресликавање $f : |K| \to |L|$ између полиедара симплицијалних комплекса K и L се назива симплицијално, ако су испуњени следећи услови:*

1º Темена симплекса из K се са f сликају у (не обавезно различита) темена симплекса из L.

2º За темена $a_0, \dots a_n$ симплекса из K и $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \in K$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(a_i)$.

Став 2.2.4. *Симплицијално пресликавање $f : |K| \to |L|$ је непрекидно.*

Δ Рестрикција пресликавања f на симплекс $\sigma = (a_0, \dots, a_n) \in K$ је на основу 2° задата са $f(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(a_i)$, па је f композиција пресликавања $g : \sigma \to \Delta^n$, $g(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i)) = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ и $h : \Delta^n \to f[\sigma]$, $h(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(a_i)$. Пресликавање g је хомеоморфизам симплекса σ са стандардним n-симплексом, па је непрекидно. Пресликавање h је непрекидно као рестрикција непрекидног пресликавања $H : \mathbb{R}^{n+1} \times (\mathbb{R}^m)^{n+1} \to \mathbb{R}^m$, $H((\lambda_0, \dots, \lambda_n), (x_0, \dots, x_n)) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$, па је и посматрана рестрикција пресилкавања f непрекидна.

Како је $|K|$ унија коначног броја затворених скупова таквих да су рестрикције функције f на сваком од њих непрекидне, то је и $f : |K| \to |L|$ непрекидна.

$\square$

2.3 Апстрактни симплицијални комплекси

Дефиниција 2.3.1. *Апстрактни симплицијални комплекс $\mathcal{K}$ је пар (V, Σ), где је V коначан скуп и Σ фамилија његових подскупова таква да важи:*

1º $(\forall v \in V)\, \{v\} \in \Sigma$,

2º $(\forall \sigma \in \Sigma)\, (\forall \tau \subset \sigma)\, \tau \in \Sigma$.

Тачке $v \in V$ се називају темена или врхови комплекса $\mathcal{K}$, док се скупови $\sigma \in \Sigma$ називају апстрактни симплекси.

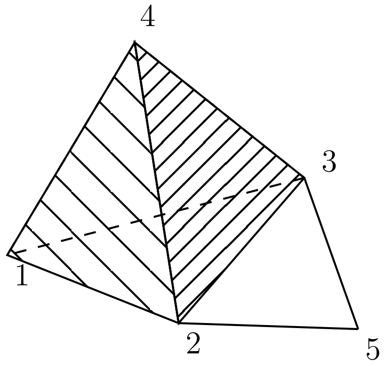
Симплицијална пресликавања Пресликавање $f : V \to V'$ између врхова апстрактних комплекса $\mathcal{K} = (\Sigma, V)$ и $\mathcal{K}' = (\Sigma', V')$ се назива *симплицијално* ако је испуњен следећи услов:

$$(\forall \sigma = (v_0, \dots, v_n) \in \Sigma)\, f[\sigma] = \{f(v_0), \dots, f(v_n)\} \in \Sigma'.$$

Симплицијално пресликавање f из апстрактног комплекса $\mathcal{K}$ у апстрактни комплекс $\mathcal{K}'$ се означава са $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$. Ако је симплицијално пресликавање $f : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ бијекција, и $f^{-1} : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ симплицијално, тада се f назива *симплицијални изоморфизам*. Апстрактни комплекси $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ су, ако такав изоморфизам постоји, *изоморфни*, у ознаци $\mathcal{K} \approx \mathcal{K}'$.

Апстрахизација геометријског комплекса Из датог геометријског комплекса K се увек може конструисати апстрактни комплекс, на следећи начин. V је скуп свих темена симплексâ у K. Σ се састоји од скупова V_σ, врхова симплекса σ, за сваки симплекс $\sigma \in K$. Како сваком врху v одговара симплекс (v), услов $1°$ је задовољен. Подскуп W_σ скупа темена V_σ произвољног симплекса $\sigma \in K$ образује страну тог симплекса у K. Стране произвољног симплекса $\sigma \in K$ су такође симплекси, па је и W_σ у Σ, то јест важи и услов $2°$. Дакле, (V, Σ) је апстрактни комплекс који одговара симплицијалном комплексу K. Он се назива *апстрахизација* комплекса K.

Пример 3. На следећој слици је дат геометријски комплекс K, који се састоји од једног пуног тетраедра $(1, 2, 3, 4)$ на који су надовезане две дужи са заједничким теменом, $(2, 5)$ и $(3, 5)$.



Апстрахизација тог комплекса је апстрактни комплекс $\mathcal{K} = (V, \Sigma)$, где су V и Σ следећи скупови:

$$
\begin{aligned}
V &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\
\Sigma &= \{(1, 2, 3, 4), \\
&\quad (1, 2, 3), (1, 2, 4), (2, 3, 4), \\
&\quad (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (2, 5), (3, 5), \\
&\quad (1), (2), (3), (4), (5), \varnothing\}.
\end{aligned}
$$

△

Следећа два става омогућавају да са апстрактних симплицијалних комплекса прелазимо на геометријске, сигурни да топологија резултујућег комплекса не зависи од реализације.

Став 2.3.2. *За сваки апстрактни симплицијални комплекс $\mathcal{K}$ постоји геометријски симплицијални комплекс K такав да је његова апстрахизација изоморфна са $\mathcal{K}$.*

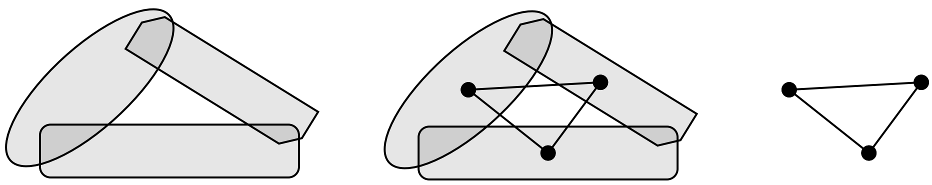
Став 2.3.3. *Полиедри који одговарају реализацијама апстрактног симплицијалног комплекса $\mathcal{K}$ су међусобно хомеоморфни.*

Нерв

Постоји начин да се од произвољне коначне фамилије скупова добије апстрактни комплекс. Тај начин је описан у следећој дефиницији:

Дефиниција 2.3.4. *Нека је F коначна фамилија скупова у тополошком простору X. Нерв те фамилије се састоји од свих непразних потфамилија фамилије F, које задовољавају услов да је пресек свих скупова унутар потфамилије непразан. То јест,*

$$\mathrm{Nrv}(F) = \{\mathbf{X} \subseteq F \mid \bigcap_{X \in \mathbf{X}} X \neq \varnothing\}.$$



Слика 2.3: Конструкција нерва фамилије три конвексна скупа у равни.

$\mathrm{Nrv}(F)$ је један апстрактни комплекс, или прецизније скуп симплекса апстрактног комплекса који се означава на исти начин. Наиме, за $\mathbf{X} \subseteq F$ и $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$, из $\bigcap_{X\in\mathbf{X}} X \neq \varnothing$ следи $\bigcap_{X\in\mathbf{Y}} X \neq \varnothing$. Скуп темена V тог апстрактног комплекса одговара појединачним скуповима из фамилије F.

Реализација нерва у неком еуклидском простору омогућава одређивање његовог хомотопског типа. Унија скупова из фамилије F не мора имати исти хомотопски тип као и нерв, међутим ако су скупови из F у еуклидском простору затворени и конвексни онда важи следећа теорема.

Теорема 2.3.5. *Нека је F коначна фамилија затворених и конвексних скупова у еуклидском простору X. Тада $\mathrm{Nrv}(F)$ и унија скупова из F имају исти хомотопски тип.*

Теорема важи при општијим условима. Наиме, нека за фамилију F важи следеће:

1° Постоји триангулација простора $\bigcup_{A\in F} A$.

2° Сви скупови у F су затворени.

3° Сви непразни заједнички пресеци скупова у F су контрактибилни.

Тада је $\mathrm{Nrv}(F) \simeq \bigcup_{A \in F} A$. [3]

2.4 Придруживање комплекса облаку тачака

Комплекси описани у наредним секцијама су погодни за придруживање симплицијалног комплекса *облаку тачака* - скупу тачака у еуклидском (или произвољном метричком) простору.

У многим случајевима, добијени комплекс и његова тополошка структура зависе од одабране вредности параметра.

Превише мале вредности параметра често дају тополоши простор сличан дискретном. Са друге стране, превелике вредности „потопе” занимљива тополошка својства и стварају симплексе великих димензија. Конструкцијом и анализом различитих примера комплекса се може закључити да оптимална вредност параметара или не постоји, или се налази у веома малом интервалу који је тешко погодити.

У многим просторима се једна група тополошких својстава јасно види при мањој вредности параметра, док се друга појављује тек на већој вредности, када је прва већ одавно „потопљена” у један велики симплекс. У таквим случајевима нема смисла причати о оптималној вредности, пошто различите вредности равноправно дају независне тополошке информације.

Из претходне дискусије се види да није лако добро одабрати тај параметар, па се као алтернативни приступ разматра интеграција структура по свим могућим вредностима. [2]

Чехов комплекс

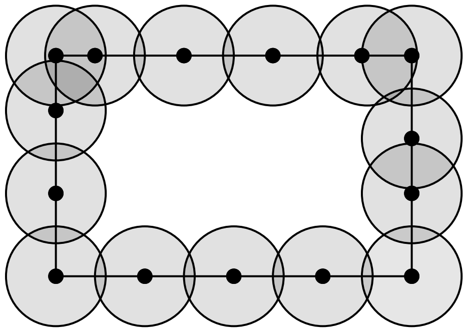
Дефиниција 2.4.1. *Нека је (X, d) коначан метрички простор. Чехов*[1] *комплекс је апстрактни комплекс $\check{C}_\epsilon = (V, \Sigma_\epsilon)$, где је $V = X$, а симплекси Σ_ϵ су одређени оним скуповима тачака S са својством да је пресек свих ϵ-лопти са центрима у тачкама из S непразан. Другим речима, $\check{C}_\epsilon$ је нерв скупа ϵ-лопти са центрима у тачкама из X.*

Пример 4. На слици испод је приказан узорак тачака S са правоугаоника у равни. Ако се за одређено $\epsilon > 0$ око сваке тачке из S нацрта лопта полупречника ϵ, посматрањем пресека тих лопти се добија Чехов комплекс $\check{C}_\epsilon(S)$. На примеру се види да овај комплекс добро апроксимира топологију правоугаоника.

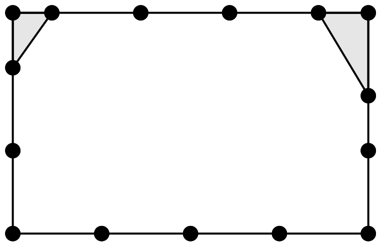
[1] Eduard Čech (1893-1960) - чешки математичар

За сваке две лопте које се секу, додаје се 1-симплекс, а за сваке три се додаје 2-симплекс чија су темена тачке - центри тих лопти.

S :



$\check{C}_\epsilon(S)$:



$\triangle$

Како се параметар ϵ повећава, могу да настану нови пресеци између ϵ-лопти. Са дрге стране, ако се две лопте секу за једну вредност параметра, сећи ће се и за све друге вредности веће од те. Дакле, $\check{C}_{\epsilon_0} \subseteq \check{C}_{\epsilon_1}$ за $\epsilon_0 < \epsilon_1$. Ако вредност параметра ϵ расте од 0 до ∞, добија се дискретна фамилија угњеждених Чехових комплекса. [3] Анализом те фамилије, уместо појединачних комплекса из ње, се може добити бољи увид у топологију почетног облака тачака.

Захваљујући теореми 2.3.5, зна се да Чехов комплекс тополошки верно описује простор који је настао од облака тачака подебљавањем тих тачака помоћу лопти око њих.

Мана Чеховог комплекса је тежина његовог рачунања. Због тога су осмишљени и други начини креирања симплицијалног комплекса из облака тачака, који жртвују верно осликавање топологије у корист лакшег рачунања и мање количине информација потребне за репрезентацију.

Виеторис-Рипсов комплекс

Дефиниција 2.4.2. *Нека је (X, d) коначан метрички простор. Виеторис[2]-Рипсов[3] комплекс је апстрактни комплекс $VR_\epsilon(X) = (V, \Sigma_\epsilon)$, где је $V = X$, а симплекси Σ_ϵ су одређени оним скуповима тачака са својством да се сваке две*

[2] Leopold Vietoris (1891-2002) - аустријски математичар

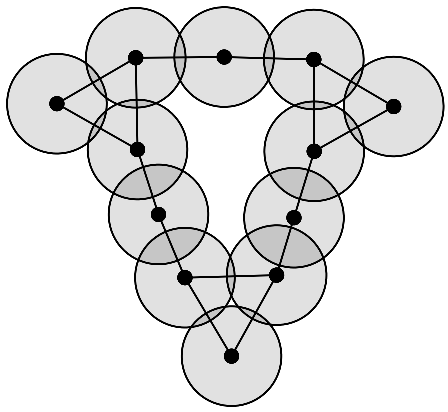
[3] Eliyahu Rips (1948-) - израелски математичар

тачке налазе на растојању мањем или једнаком 2ϵ, *то јест:*

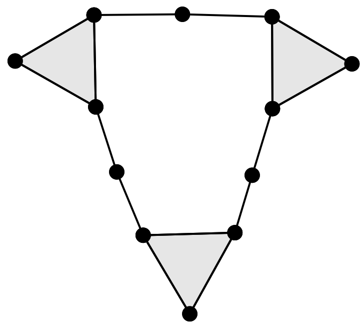
$$\begin{aligned}\Sigma_\epsilon =&\{(v_1, \ldots, v_k) \in X^k \mid k \in \{1, \ldots, |X|\}, (\forall i, j \in \{1, \ldots, k\})\\ &v_i \neq v_j \ \wedge \ d(v_i, v_j) \leq 2\epsilon\} \cup \ \varnothing.\end{aligned}$$

Пример 5. На слици испод је приказан узорак тачака S у равни. Ако се за одређено $\epsilon > 0$ око сваке тачке из S нацрта лопта полупречника ϵ, посматрањем пресека тих лопти се добија Виеторис-Рипсов комплекс $VR_\epsilon(S)$. За сваке две лопте које се секу, додаје се 1-симплекс, а за свака три пара лопти таква да се свака два међусобно секу се додаје 2-симплекс чија су темена тачке - центри тих лопти.

S :



$VR_\epsilon(S)$:



Може се приметити да Чехов комплекс $\check{C}_\epsilon(S)$, за исто $\epsilon > 0$, нема 2-симплекса. Наиме, никоје три ϵ-лопте немају непразан пресек. $\triangle$

Може се приметити да је Виеторис-Рипсов комплекс одређен својим 1-скелетоном. Наиме, он је максимални симплицијални комплекс који одговара том 1-скелетону. То одмах омогућава и лакше рачунање, као и мању количину информација које треба сачувати за његову реконструкцију. Иако су тиме решени главни недостаци Чеховог комплекса, потенцијално је изгубљено пуно информација о топологији.

Делоне комплекс

Дефиниција 2.4.3. *За дати скуп дискретних тачака P у равни, Делоне[4] триангулација $DT(P)$ је триангулација за коју важи да ниједна тачка из P није унутар описаног круга произвољног троугла у $DT(P)$.*

Посматрајући описане сфере, појам Делоне триангулације се може дефинисати и у вишим димензијама.

d-димензиона Делоне триангулација За скуп тачака P у d-димензионом еуклидском простору, Делоне триангулација је триангулација $DT(P)$ таква да ниједна тачка у P није унутар описане хиперсфере око произвољног d-симплекса у $DT(P)$.

Теорема 2.4.4. *Нека за скуп тачака P важи да је афини омотач од P је d-димензион и ниједан подскуп са $d+2$ тачке из P не лежи на граници лопте чија унутрашњост не сече P. Тада за P постоји јединствена Делоне триангулација.*

Доказ ове теореме се може пронаћи у [5].

Вороној дијаграм Нека је S дискретан скуп тачака у простору $\mathbb{R}^d$. *Вороној*[5] *ћелија* V_u тачке $u \in S$ се дефинише на следећи начин:

$$V_u = \{x \in \mathbb{R}^d \mid (\forall v \in S)\ ||x-u|| \leq ||x-v||\}.$$

Вороној ћелија тачке $u \in S$ садржи све тачке простора $\mathbb{R}^d$ које су најближе тачки u у односу на друге тачке скупа S. Другим речима, „утицај" тачке u је најјачи у својој ћелији V_u.

Дефиниција 2.4.5. *Вороној дијаграм скупа S је скуп Вороној ћелија скупа S, $\{V_u \mid u \in S\}$.*

Свака ћелија дијаграма настаје као пресек полупростора. Одатле следи да су Вороној ћелије конвексни подскупови.

За било које две суседне ћелије V_u и V_v, ивица која одговара њиховој међусобној граници је симетрала дужи која спаја тачке u и v.

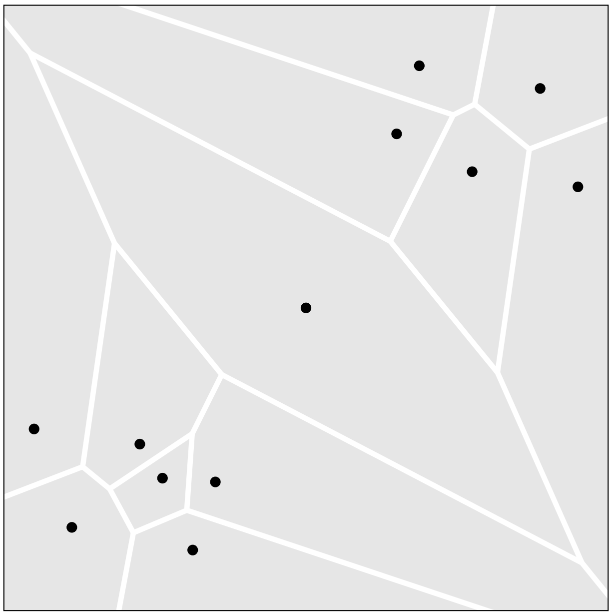
Ако су четири тачке из S планарне и на кружници у равни која их садржи, тада постоји тачка c која је на подједнаком растојању од сваке од њих. У том случају ће четири Вороној ћелије делити једну тачку. Ако постоји четири или више Вороној ћелија које имају непразан пресек, такав Вороној дијаграм је *дегенерисан.*

[4]Бори́с Никола́евич Делоне́ (1890-1980) - руски математичар

[5]Гео́ргий Феодо́сьевич Вороно́й (1868-1908) - руски математичар

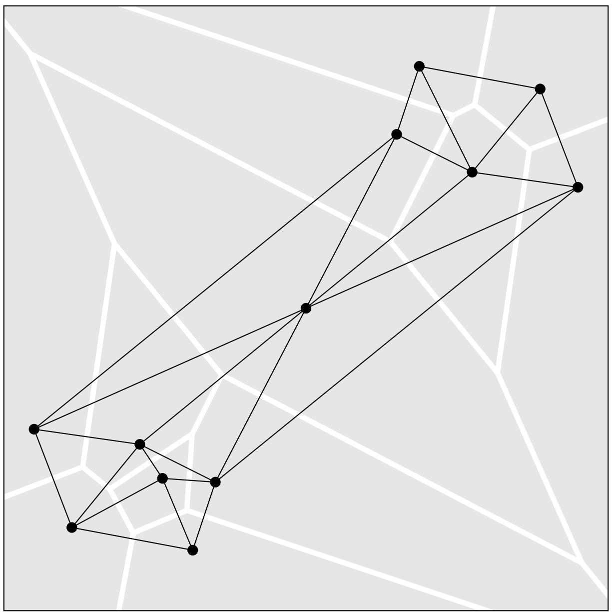
Дефиниција 2.4.6. *Делоне комплекс коначног скупа тачака* $S \in \mathbb{R}^d$ *је нерв Вороној дијаграма:*

$$\text{Delaunay}(S) = \{\sigma \subseteq S \mid \bigcap_{u \in \sigma} V_u \neq \varnothing\}.$$



Слика 2.4: Вороној дијаграм за 15 тачака у равни. [a1]

[a1] Слика је нацртана помоћу упуства на адреси https://tex.stackexchange.com/a/255899.



Слика 2.5: Делоне комплекс.

Алфа-комплекс

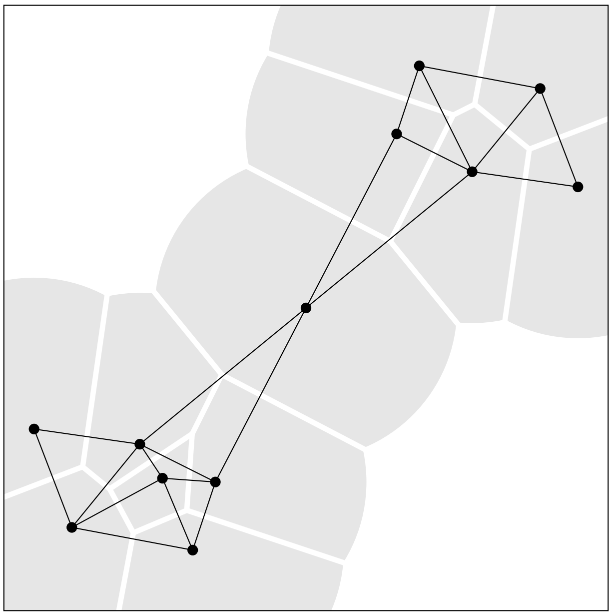
Комбинујући идеје из конструкција Чеховог и Делоне комплекса, може се дефинисати фамилија скупова чији ће нерв давати поткомплекс оба та симплицијална комплекса. Конструкција те фамилије зависи од параметра r, што ће омогућити креирање филтрације која се завршава Делоне комплексом.

Нека је $B_r(u)$ лопта полупречника r око тачке $u \in S \subset \mathbb{R}^d$, где је S коначан скуп тачака. Фамилија скупова $R_u(r) = B_u(r) \cap V_u$ се састоји од конвексних скупова који се могу (али не морају) сећи по ивицама.

Сваки скуп $R_u(r)$ је садржан и у лопти $B_u(r)$ и у Вороној ћелији V_u, па је нерв те фамилије поткомплекс Чеховог и Делоне комплекса.

Дефиниција 2.4.7. *Алфа комплекс је нерв покривања $\{R_u(r) \mid u \in S\}$, то јест:*

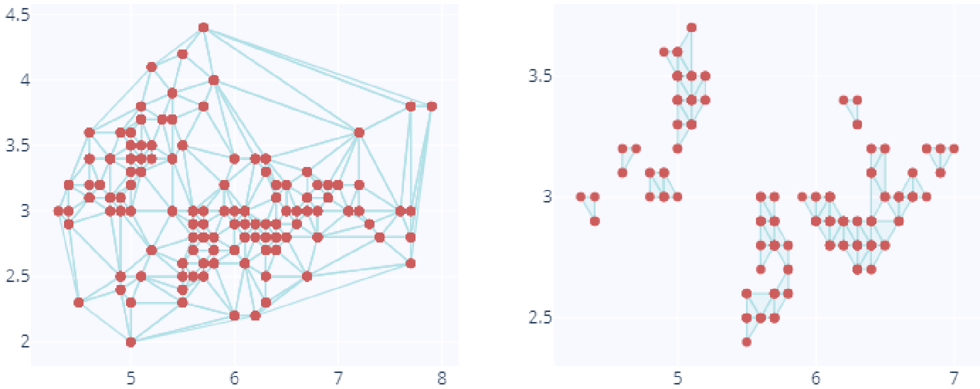
$$\mathrm{Alpha}(r) = \{\sigma \subseteq S \mid \bigcap_{u \in \sigma} R_u(r) \neq \varnothing\}.$$



Слика 2.6: Алфа комплекс.

Пример 6. На следећој слици су редом приказани Делоне и алфа-комплекс над скупом тачака у равни. Може се приметити да су приликом креирања алфа комплекса успешно уклоњени симплекси који спајају тачке на великој удаљености, па самим тим и да је успешно приказана топологија облака тачака.

Параметар α је ручно одабран.



Слика 2.7: Делоне и алфа комплекс. На слици десно су остављени само 2-симплекси и њихови врхови.

$\triangle$

Комплекс сведока

Дефиниција 2.4.8. *Нека је S подскуп од $\mathbb{R}^d$, L коначан скуп тачака у $\mathbb{R}^d$, и $\epsilon > 0$.*

- *L је ϵ-шуман узорак од S ако ниједна тачка из L није на растојању већем од ϵ од S.*
- *L је ϵ-узорак од S ако ниједна тачка из S није на растојању већем од ϵ од L.*
- *L је ϵ-редак ако су растојања парова тачака из L бар ϵ.*

Обележја и сведоци Нека је L коначан скуп тачака у $\mathbb{R}^d$ и нека је W подскуп од $\mathbb{R}^d$. Тачке из скупа L се називају *обележја*.

Нека је σ апстрактни симплекс са теменима у L и $w \in W$. Тачка w се назива *сведок* од σ ако је

$$(\forall p \in \sigma)(\forall q \in L \backslash \sigma)\ ||w - p|| \leq ||w - q||.$$

Другим речима, ако је w сведок од σ, тада не постоји обележје $l \notin \sigma$ које је ближе w од неког обележја из σ. Тачка је сведок обележја ако је удаљена од обележја колико је и од њеног најближег обележја.

Дефиниција 2.4.9. *Комплекс сведока* $\mathrm{Wit}(L, W)$ *је апстрактни симплицијални комплекс који се састоји од свих симплекса* σ *таквих да за сваку страну* τ *од* σ *(укључујући и* σ*),* τ *има сведока у* W*.*

Везу са Делоне комплексом даје следећа теорема:

Теорема 2.4.10. $\mathrm{Wit}(L, W) \subseteq \mathrm{Delaunay}(L)$.

Доказ ове теореме се може наћи у [7].

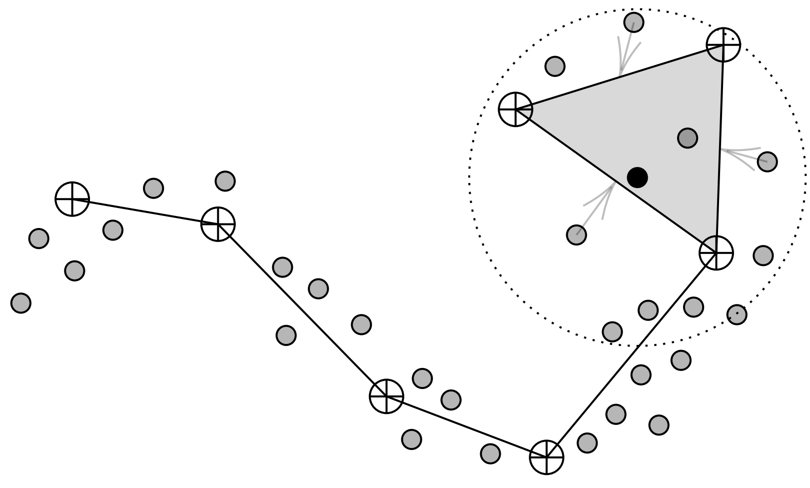
Пример 7. На следећој слици су приказани:

- Тачке скупа W, обележене сивим круговима, и посебно тачка која је сведок 2-симплекса у комплексу сведока обележена црним кругом.
- Обележја из скупа L, обележена симболом $\oplus$.
- Апстрактни комплекс сведока, $\mathrm{Wit}(L, W)$.

Комплекс сведока садржи тачно један 2-симплекс. Тај симплекс за сведока има тачку обележену црном бојом. Тачке које на слици стрелицама показују на одговарајуће 1-стране тог симплекса су сведоци тих страна.

У овом примеру свако обележје има свог сведока – тачку из W која му је најближа, а која нема ближе обележје.

Међу тачкама из W постоје оне које су сведоци и других тројки обележја, међутим те тројке не представљају апстрактне 2-симплексе јер њихове стране немају своје сведоке.



Слика 2.8: Комплекс сведока.

$\triangle$

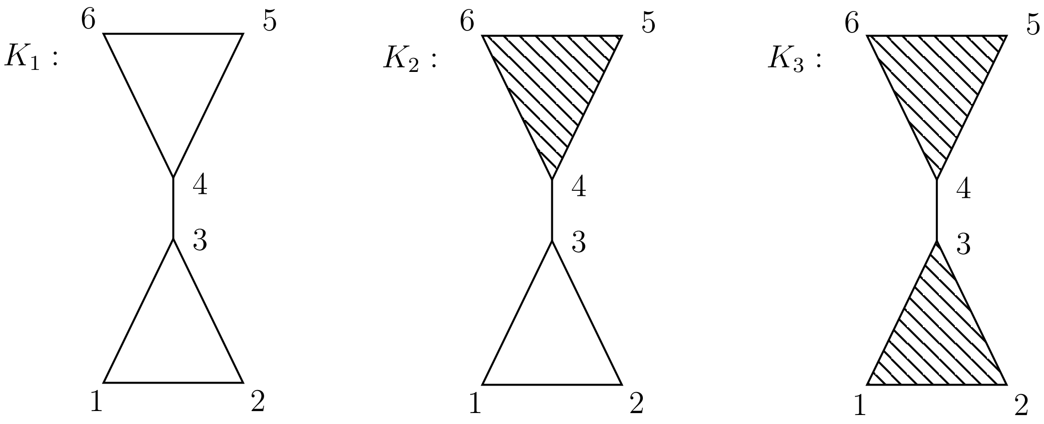
2.5 Филтрације

Дефиниција 2.5.1. *Филтрација симплицијалног комплекса K је растући низ његових поткомплекса K_i, $i \in \{0, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$:*

$$\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n = K.$$

Симплицијални комплекс заједно са својом филтрацијом се назива филтрирани комплекс.

Пример 8. На следећој слици је приказан део филтрације $\emptyset = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset K_3 = K$.



У првом кораку филтрације је 1-скелетон од K. У другом кораку се додаје 2-симплекс $[4, 5, 6]$, док се у трећем кораку додаје још један 2-симплекс, $[1, 2, 3]$. $\triangle$

Пример 9. Повећавањем вредности одговарајућег параметра добија се филтрација разних симплицијалних комплекса чија је конструкција описана у претходној секцији, конкретно Чеховог, Виеторис-Рипсовог и алфа-комплекса. Такође, филтрација Делоне комплекса се добија повећавањем параметра одговарајућег алфа-комплекса.

Комплекс сведока допушта више начина за добијање филтрације, малим променама у дефиницији тог симплицијалног комплекса. Један од начина се може пронаћи у [8]. $\triangle$

Глава 3

Хомолошка алгебра

3.1 Модули

Нека је R комутативни прстен са јединицом. За већину примера у даљем излагању као пример тог прстена ће послужити прстен $\mathbb{Z}$.

Дефиниција 3.1.1. *R-модул се састоји од Абелове групе $(M, +)$ и операције $\cdot : R \times M \to M$ тако да важе следећи услови:*

1° $(\forall r, s \in R)(\forall m \in M)\ (r + s) \cdot m = r \cdot m + s \cdot m,$

2° $(\forall r, s \in R)(\forall m \in M)\ (rs) \cdot m = r \cdot (s \cdot m),$

3° $(\forall r \in R)(\forall m, n \in M)\ r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n,$

4° $(\forall m \in M)\ 1 \cdot m = m.$

Уколико се то може урадити недвосмислено, операција $\cdot$ се у ознаци изоставља – за $r \in R$ и $m \in M$, $r \cdot m$ се записује и као rm.

Дефиниција 3.1.2. *Нека је R градуисани прстен. R-модул M је градуисани R-модул ако се може декомпоновати на директну суму R-модула, $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} M_i$, такву да је $(\forall i, j \in \mathbb{N}_0)\ R_i M_j \subseteq M_{i+j}$.*

Скуп $A \subseteq M$ је *подмодул* од M, $A \leq M$, ако су испуњени следећи услови:

1° $(A, +)$ је подгрупа од $(M, +)$, то јест A није празан скуп и за свака два елемента $a, b \in A$, $a + b$ и $-a$ су у A.

2° За сваки елемент прстена $r \in R$ и сваки елемент $a \in A$, $r \cdot a \in A$.

Хомоморфизми Нека су M и N два R-модула. Пресликавање $f : M \to N$ је *хомоморфизам R-модула* ако испуњава следећи услов:

$$(\forall a, b \in R)(\forall m, n \in M)\ f(am + bn) = af(m) + bf(n).$$

Пресликавање f је *изоморфизам R-модула* ако је хомоморфизам R-модула и бијекција (ти услови су довољни да је и $f^{-1} : N \to M$ хомоморфизам R-модула).

Сума модула Нека су A и B подмодули од M. *Сума модула* A и B се дефинише као $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$, што је један подмодул од M. Наиме, $(A + B, +)$ је подгрупа од $(M, +)$ и први услов дефиниције подмодула је тривијално испуњен. Ако $a+b \in A+B$ и $r \in R$, тада је $r(a+b) = ra+rb \in A+B$, јер $ra \in A$ и $rb \in B$.

Аналогно се доказује и да је за коначно подмодула $A_1, \ldots, A_n$ R-модула M њихова сума

$$A_1 + \ldots + A_n = \{a_1 + \ldots + a_n \mid (\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ a_i \in A_i\}$$

један подмодул од M.

Коначно-генерисани модули Нека је M један R-модул и $x \in M$. Тада је $Rx = \{rx \mid r \in R\}$ подмодул од M – *циклични подмодул* R-модула M. За $x_1, \ldots, x_n \in M$, сума $Rx_1 + \ldots + Rx_n$ је један подмодул од M. Ако је тај подмодул једнак M, M је *коначно-генерисан R-модул*.

Квоцијентни модул Нека је A подмодул R-модула M. Тада је M/A квоцијентна група, $M/A = \{[m] = m + A \mid m \in M\}$. Операција те групе је дата са $(\forall m, n \in M)\ [m] + [n] = [m + n]$. Од M/A се може направити модул, тако што се операција $\cdot : R \times M/A \to M/A$ дефинише као $r \cdot [m] = [rm]$. Та операција је добро дефинисана:

$$[m] = [n] \iff m - n \in A \iff r(m - n) \in A \iff [rm] = [rn].$$

Група M/A са операцијом $\cdot$ испуњава услове дефиниције 3.1.1, па је M/A један R-модул, који се назива и *квоцијентни модул* R-модула M и његовог подмодула A.

Став 3.1.3. *Нека је A подмодул R-модула M и нека $\{x_i\}_{i=1}^n$ генеришу M. Тада $\{[x_i]\}_{i=1}^n \subseteq M/A$ генеришу M/A, то јест:*

$$R[x_1] + \ldots + R[x_n] = M/A.$$

Δ Нека је $[m] \in M/A$ елемент квоцијентног модула. Како $\{x_i\}_{i=1}^n$ генеришу M, $m \in M$ се може записати као $m = r_1x_1 + \ldots + r_nx_n$, па је и $[m] = [r_1x_1 + \ldots + r_nx_n] = r_1[x_1] + \ldots + r_n[x_n]$. $\square$

Директна сума модула *Спољашња директна сума* M R-модула $M_1, \dots, M_n$ је R-модул који се дефинише на следећи начин. Као скуп, $M = \{(m_1, \dots m_n) \mid (\forall i \in \{1, \dots, n\})\ m_i \in M_i\}$. Операције $+$ и $\cdot$ су дате са:

$$\begin{aligned} (m_1, \dots, m_n) + (m_1', \dots, m_n') &:= (m_1 + m_1', \dots, m_n + m_n') \\ 0 &:= (0_{M_1}, \dots, 0_{M_n}) \\ -(m_1, \dots, m_n) &:= (-m_1, \dots, -m_n) \\ r(m_1, \dots, m_n) &:= (rm_1, \dots, rm_n). \end{aligned}$$

Ако је M спољашња директна сума R-модула $M_1, \dots, M_n$, M се означава и као

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i.$$

Ако је $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ где су $(\forall i \in \{1, \dots, n\})\ M_i \leq M$, тада је M *унтрашња директна сума* подмодула $\{M_i\}_{i=1}^n$.

Скуп подмодула $\{M_i\}_{i=1}^n$ R-модула M је *независан скуп подмодула* ако за произвољне $m_i \in M_i,\ i \in \{1, \dots, n\}$, $m_1 + \ldots + m_n = 0 \Rightarrow m_1 = \ldots = m_n = 0$. Унутрашња директна сума модула M је пример независног скупа подмодула: за $m \in M$, $m = (m_1, \dots, m_n) = (m_1, 0, \dots, 0) + (0, m_2, \dots, 0) + (0, 0, \dots, m_n)$. Дакле, $m = 0 \iff (m_1, 0, \dots, 0) = (0, m_2, \dots, 0) = (0, 0, \dots, m_n) = 0$.

Детаљнији опис независних скупова подмодула даје следећи став.

Став 3.1.4. *Нека је M један R-модул и $(\forall i \in \{1, \dots, n\})\ M_i \leq M$. Тада су следећи искази еквивалентни:*

1º $\{M_1, \dots, M_n\}$ је независан скуп модула.

2º Сваки елемент m из суме $M_1 + \ldots + M_n$ се може на јединствен начин записати као сума елемената из M_i, то јест постоје јединствени $\{m_i\}_{i=1}^n$, $(\forall i \in \{1, \dots, n\})\ m_i \in M_i$ такви да је $m = m_1 + \ldots + m_n$.

3º $(\forall i \in \{1, \dots, n\})\ M_i \cap (M_1 + \ldots + \hat{M}_i + \ldots + M_n) = 0$.

Ознака $\hat{M}_i$ значи да се тај сабирак искључује из суме.

Δ $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$: Нека је $m = m_1 + \ldots + m_n = m_1' + \ldots + m_n'$ где $(\forall i \in \{1, \dots, n\})\ m_i \in M_i \wedge m_i' \in M_i$, и где је $\{M_1, \dots, M_n\}$ независан скуп модула. Тада је $0 = m - m = (m_1 - m_1') + \ldots + (m_n - m_n')$, па $(\forall i \in \{1, \dots, n\})\ m_i = m_i'$.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$: Нека је $m = m_i \in M_i$ и $m = m_1 + \ldots + \hat{m}_i + \ldots + m_n \in M_1 + \ldots + \hat{M}_i + \ldots + M_n$. Пошто постоји јединствена репрезентација m као суме елемената скупова из $\{M_1, \dots, M_n\}$, то је $m_i = 0$ и $(\forall i \in \{1, \dots, n\})\ m_i = 0$. Наиме, у првој репрезентацији је $m = m_i = 0_{M_1} + \ldots + m_i + \ldots + 0_{M_n}$, а у другој је $m = m_1 + \ldots + 0_{M_i} + \ldots + m_n \in M_1 + \ldots + \hat{M}_i + \ldots + M_n$, и те две репрезентације су једнаке.

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$: Нека је $0 = m_1 + \ldots + m_n$ где $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ m_i \in M_i$. Ако је за неко $i \in \{1, \ldots, n\}$ m_i различит од нуле, тада је $-m_1 = m_1 + \ldots + \hat{m_i} + \ldots + m_n \in M_1 + \ldots + \hat{M_i} + \ldots + M_n$, па из $M_i \cap (M_1 + \ldots + \hat{M_i} + \ldots + M_n) = 0$ следи контрадикција. $\square$

Везу директне суме и независног скупа модула даје следећи став.

Став 3.1.5. *Нека је M један R-модул, и $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ M_i \leq M$. Тада су следећи искази еквивалентни:*

1º $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$.

2º $M = \sum_{i=1}^n M_i$ *и* $\{M_1, \ldots, M_n\}$ *је независан скуп модула.*

Δ $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$: $m \in M \Rightarrow m = (m_1, \ldots m_n)$ где $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ m_i \in M_i$. Тада, пошто је сваки M_i изоморфан са $\{(0, \ldots, m_i, \ldots, 0) \mid m_i \in M_i\}$ важи декомпозиција модула M на суму подмодула M_i. $\{M_1, \ldots, M_n\}$ је независан скуп модула јер из $0 = (m_1, 0, \ldots, 0) + (0, m_2, \ldots, 0) + (0, 0, \ldots, m_n) = (m_1, \ldots, m_n)$ следи да је $m_1 = \ldots = m_n = 0$.

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$: Нека је $h : M \to \bigoplus_{i=1}^n M_i$ хомоморфизам модула дефинисан на $m = m_1 + \ldots + m_n \in M$ $((\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ m_i \in M_i)$ као $h(m) = (m_1, \ldots, m_n)$. Дефиниција је добра пошто је таква декомпозиција m на сабирке јединствена. Из дефиниције пресликавања h следи да је оно бијекција, то јест и да је изоморфизам модула. $\square$

Слободни модули R-модул M облика $M = \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{n} = R^n$ се назива *слободан модул* над R. Скуп $e = \{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq M$ је *база* R-модула M ако за произвољан елемент $m \in M$ постоје јединствени елементи $\{r_i\}_{i=0}^n$ прстена R такви да је $m = r_1 e_1 + \ldots + r_n e_n$.

Везу између појма слободног модула и базе даје следећи став.

Став 3.1.6. *R-модул M има базу ако и само ако је M слободан модул.*

Δ $\Rightarrow$: Нека је $(e_1, \ldots, e_n)$ база модула M. Тада се сваки елемент $m \in M$ може јединствено разложити на сабирке $m = r_1 e_1 + \ldots + r_n e_n$, где су $\{r_i\}_{i=1}^n \subset R$. Пресликавање $h : M \to R^n$ дато на произвољном $m = r_1 e_1 + \ldots + r_n e_n$ као $h(m) = (r_1, \ldots, r_n)$ је хомоморфизам модула и бијекција, па и изоморфизам модула.

$\Leftarrow$: Нека је $M = \underbrace{R \oplus \ldots \oplus R}_{n}$ слободан модул. За свако $i \in \{1, \ldots, n\}$ нека је $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in M$, где је 1 на i-тој позицији. Тада је $\{e_i\}_{i=0}^n$ база модула M: произвољан елемент $m = (r_1, \ldots, r_n)$ се јединствено раставља на збир $r_1(1, 0, \ldots, 0) + r_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + r_n(0, 0, \ldots, 1)$. $\square$

Често је пожељно да се пресликавање задато на бази неког модула продужи на цео модул. Када је домен пресликавања слободан модул, следећи став то омогућава.

Став 3.1.7. *Нека је F слободан модул са базом $(e_1, \dots, e_n)$. Нека је M R-модул, и нека $m_1, \dots, m_n \in M$. Тада постоји јединствен хомоморфизам модула $f : F \to M$ који задовољава услов*

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\})\ f(e_i) = m_i.$$

Δ Нека је $f : F \to M$ дефинисано на произвољном $m = r_1e_1 + \ldots + r_ne_n \in F$ као $f(m) = r_1f(e_1) + \ldots + r_nf(e_n)$. Због јединствености декомпозиције помоћу елемената базе, f је добро дефинисано. Нека $a, b \in R$ и $\{r_i\}_{i=1}^n, \{\bar{r}_i\}_{i=1}^n \subset R$. Тада је

$$\begin{aligned} f\left(a\sum_{i=1}^n r_ie_i + b\sum_{i=1}^n \bar{r}_ie_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^n (ar_i + b\bar{r}_i)e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (ar_i + b\bar{r}_i)f(e_i) \\ &= a\sum_{i=1}^n r_if(e_i) + b\sum_{i=1}^n \bar{r}_if(e_i) \\ &= af\left(\sum_{i=1}^n r_ie_i\right) + bf\left(\sum_{i=1}^n \bar{r}_ie_i\right). \end{aligned}$$

Дакле, f је хомоморфизам R-модула.

Ако је $g : F \to M$ хомоморфизам R-модула који се на $\{e_1, \dots, e_n\}$ поклапа са f, тада је за произвољан елемент $m = r_1e_1 + \ldots + r_ne_n \in F$

$$g\left(\sum_{i=1}^n r_ie_i\right) = \sum_{i=1}^n r_ig(e_i) = \sum_{i=1}^n r_if(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^n r_ie_i\right),$$

то јест f јесте јединствен. □

Декомозиција Важи следећа теорема о структури модула и градуисаних модула:

Теорема 3.1.8. *Ако је D главноидеалски домен, тада се сваки коначно-генерисан D-модул јединствено декомпонује на суму цикличних модула, то јест:*

$$D^\beta \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^m D/d_iD\right),$$

где $d_i \in D$, $\beta \in \mathbb{Z}$, и $d_i | d_{i+1}$.

Сваки градуисани главноидеалски домен D се јединствено декомпонује на следећи начин:

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\Sigma^{\alpha_i}D\right)\oplus\left(\bigoplus_{j=1}^{m}\Sigma^{\gamma_j}D/d_jD\right),$$

где су хомогени елементи $d_i \in D$ такви да $d_i | d_{i+1}$, затим $\alpha_i, \gamma_j \in \mathbb{Z}$, и Σ^α означава померај у градуацији на горе за α.

3.2 Ланчасти комплекси

Дефиниција 3.2.1. *Ланчасти комплекс X је низ R-модула $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ и хомоморфизама $d_i : X_i \to X_{i-1}$,*

$$\cdots \longrightarrow X_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} X_i \xrightarrow{d_i} X_{i-1} \longrightarrow \cdots,$$

такав да хомоморфизми $(d_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ задовољавају услов $d_{i-1}\circ d_i = 0$.

Дефиниција 3.2.2. *Коланчасти комплекс Y је низ R-модула $(Y^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ и хомоморфизама $d_i : Y_i \to Y_{i+1}$,*

$$\cdots \longrightarrow Y^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} Y^i \xrightarrow{d^i} Y^{i+1} \longrightarrow \cdots,$$

такав да хомоморфизми $(d^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ задовољавају услов $d^i\circ d^{i-1} = 0$.

Најчешће се посматрају ланчасти (коланчасти) комплекси код којих је $X_i = 0$ ($Y^i = 0$) за $i < 0$.

Ланци, цикли и границе Елементи језгра хомоморфизма d_i се зову *i-цикли*, и они су подмодул модула X_i. Тај подмодул се означава са $Z_i(X)$. Елементи слике хомоморфизма d_{i+1} се називају i-границе, и такође образују подмодул модула X_i. Подмодул i-граница се означава са $B_i(X)$. Из услова $d_{i-1}\circ d_i = 0$ следи да је свака граница и цикл, то јест:

$$B_i(X) \subseteq Z_i(X) \subseteq X_i.$$

Зато се за свако $i \in \mathbb{N}$ може дефинисати квоцијентни R-модул $H_i(X) = Z_i(X)/B_i(X)$, који се назива *i-та хомолошка група* ланчастог комплекса X.

Низ хомолошких група $H_*(X)$ се може посматрати као један градуисани R-модул. Наиме, како R није градуисан прстен, испуњен је услов $RM_i \subseteq M_i$.

Ланчаста пресликавања Нека су X и X' два ланчаста комплекса. Пресликавање $f : X \to X'$ је низ пресликавања $f_i : X_i \to X'_i$ таквих да следећи дијаграм комутира:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "d_i"'] & X'_i \arrow[d, "d'_i"] \\ X_{i-1} \arrow[r, "f_{i-1}"] & X'_{i-1} \end{tikzcd}$$

Такво пресликавање се назива *ланчасто пресликавање.*

Свако такво пресликавање $f : X \to X'$ индукује и низ пресликавања између $H_*(X)$ и $H_*(X')$, које се означава са f_* и дефинише на следећи начин:

$$(\forall i \in \mathbb{Z})(\forall [z] \in H_i(X))\ f_*([z]) = [f(z)].$$

Пресликавање f_* је добро дефинисано, јер за свако $i \in \mathbb{Z}$ важи:

1º $f_i(Z_i(X)) \subseteq Z_i(X')$, јер је за $z \in Z_i(X)$ $d'_i(f_i(z)) = f_{i-1}(d_i(z)) = 0$.

2º $f_i(B_i(X)) \subseteq B_i(X')$, јер за свако $v \in B_i(X)$ постоји $b_v \in X_{i+1}$ такво да је $v = d_{i+1}(b_v)$, па је $f_i(v) = f_i(d_{i+1}(b_v)) = d'_{i+1}(f_{i+1}(b_v))$, то јест $f_i(v) \in B_i(X')$.

3º Ако се два цикла z_1 и z_2 из произвољне групе циклова $Z_i(X)$ разликују до на границу $d \in B_i(X)$, $z_1 = z_2 + d$, тада је $f_*([z_1]) = [f(z_1)] = [f(z_2) + d] = [f(z_2)] = f_*([z_2])$.

Ланчаста хомотопија $s : f \simeq g$ ланчастих пресликавања $f, g : X \to X'$ је низ хомоморфизама $s_i : X_i \to X'_{i+1}$ такав да за свако $i \in \mathbb{Z}$ важи:

$$d'_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i = f_i - g_i.$$

Ова неинтуитивна дефиниција помоћу следећег става описује парове ланчастих пресликавања f и g која се исто понашају на хомолошким групама ланчастих комплекса X и X'.

Став 3.2.3. *Ако постоји ланчаста хомотопија ланчастих пресликавања $f, g : X \to X'$, тада су индукована пресликавања хомолошких група f_* и g_* једнака.*

Δ Нека $s : f \simeq g$, за ланчаста пресликавања $f, g : X \to X'$. Из дефиниције ланчасте хомотопије важи $d'_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i = f_i - g_i$, па посебно, за $z \in Z_i(X)$, $d'_{i+1} \circ s_i(z) + s_{i-1} \circ d_i(z) = f_i(z) - g_i(z)$. Како је z цикл, $d_i(z) = 0$, па је други сабирак у горњој једнакости нула. Одатле следи да је $f_i(z) - g_i(z)$ граница, то јест да су класе од $f_i(z)$ и $g_i(z)$ у хомологији истоветне. $\square$

Глава 4

Симплицијална хомологија

4.1 Ланчасти комплекси симплицијалних комплекса

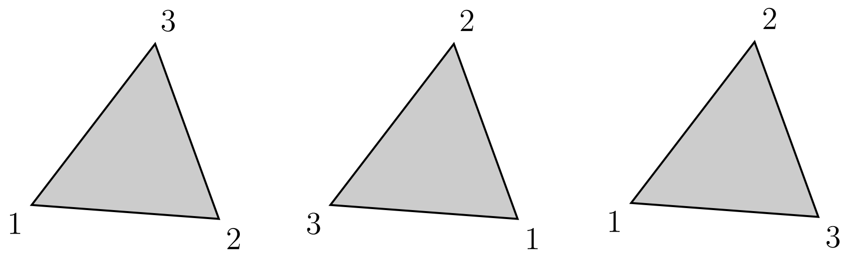
Оријентација Нека је σ један p-симплекс, где је $p \in \mathbb{N}_0$. Два уређења његовог скупа темена су еквивалентна ако се разликују до на парну пермутацију, то јест:

$$(v_0, \dots, v_p) \sim (v_{\tau(0)}, \dots, v_{\tau(p)}),$$

за парну пермутацију τ.

Ако је $p > 0$, постоје две класе еквиваленције релације $\sim$. Свака класа се назива *оријентацијом* од σ. *Оријентисан симплекс* σ је симплекс заједно са једном његовом оријентацијом.

Пример 10. Први и други симплекс на слици испод имају исту оријентацију, док трећи симплекс има оријентацију супротну од прва два.



$\triangle$

Дефиниција 4.1.1. *Нека је K симплицијални комплекс.*

1° p-ланац је формална сума оријентисаних p-симплекса $\{\sigma_i : i \in \{0, \dots, n\}\}$ из K,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sigma_i,$$

где $(\forall i \in \{0, \ldots, n\})\ a_i \in R$. *За сваки оријентисани симплекс* σ *из* K, *тај исти симплекс са супротном оријентацијом се у p-ланцу дефинише као* $-\sigma$.

2^o *Модул p-ланаца комплекса* K *са коефицијентима у* R *је слободан модул* $C_p(K; R)$ *са базом која се састоји од оријентисаних p-симплекса из* K.

Стандардни начин да се дефинише оријентација свих симплекса једног симплицијалног комплекса је да се одабере уређење врхова тог симплицијалног комплекса, а онда да се сваком симплексу придружи оријентација која одговара уређењу његових врхова.

Ознака $C_p(K; R)$ ће се писати скраћено као $C_p(K)$ претпостављаћи коефицијенте у R, уколико се то може урадити недвосмислено.

Дефиниција 4.1.2. *Граница симплекса* $\sigma = [v_0, \ldots, v_p]$ *је алтернирајућа сума његових страна димензије* $p - 1$:

$$\partial_p(\sigma) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \left[u_0, \ldots, \hat{u}_j, \ldots, u_p\right], \tag{4.1}$$

где $\hat{u}_j$ *означава да је врх* u_j *избачен из симплекса. Посебно, граница 0-симплекса је 0.*

Гранични хомоморфизам $\partial_k : C_k(X) \to C_{k-1}(X)$ *произвољан симплекс* σ *из* $C_k(X)$ *пресликава у границу* $\partial_p(\sigma)$, *а на формалне линеарне комбинације симплекса се проширује на следећи начин:*

$$(\forall a_0, \ldots, a_n \in R)\ \partial_p \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \sigma_i \right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \partial_p(\sigma_i). \tag{4.2}$$

За $p \leq 0$, $\partial_p := 0$.

Пример 11. Границе произвољних симплекса димензије 0, 1, 2 и 3 се рачунају на следећи начин:

$$\begin{aligned}
&\partial_0 [v_0] = 0, \\
&\partial_1 [v_0, v_1] = [v_1] - [v_0], \\
&\partial_2 [v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1], \\
&\partial_3 [v_0, v_1, v_2, v_3] = [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2].
\end{aligned}$$

$\triangle$

Став 4.1.3. $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$.

Δ Због (4.2), довољно је проверити да је пресликавање $\partial_p \circ \partial_{p+1}$ нула на симплексима из $C_{p+1}(K)$. За $\sigma = [v_0, v_1, \ldots, v_{p+1}] \in C_{p+1}(K)$,

$$
\begin{aligned}
\partial_p(\partial_{p+1}([v_0, v_1, \ldots, v_{p+1}])) &= \partial_p \left(\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \, [v_0, v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{p+1}] \right) \\
&= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \; \partial_p ([v_0, v_1, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{p+1}]) \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \, [v_0, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_{p+1}] \\
&+ \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{j=i+1}^{p+1} (-1)^{j-1} \, [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, \hat{v}_j, \ldots, v_{p+1}] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Збир последње две суме је нула, јер је знак сваког симплекса који се јавља у првој суми супротан од знака истог симплекса који се јавља у другој суми. $\square$

Из предходног следи да је

$$
\mathcal{C}(K): \ \ldots \xrightarrow{\partial_{p+2}} C_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \ldots
$$

један ланчасти комплекс, који се зове *ланчасти комплекс симплицијалног комплекса* K.

4.2 Хомолошке групе

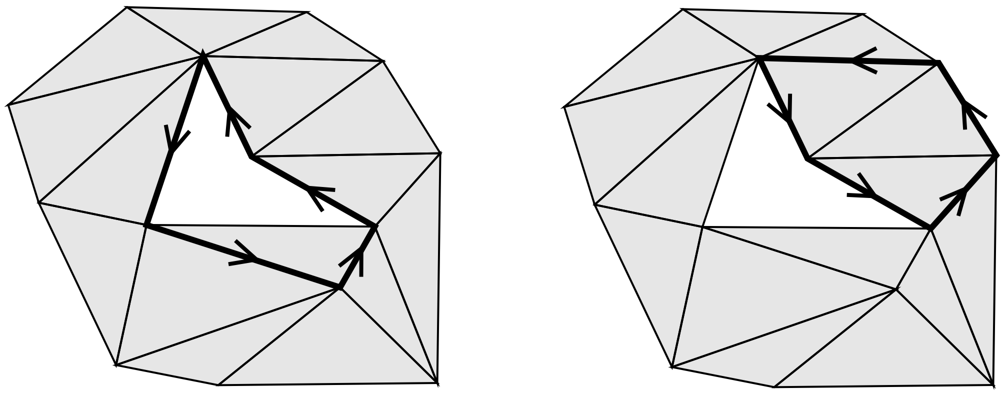
Пратећи дефиниције из одељка 3.2, појмови цикла, границе и хомолошке групе се дефинишу и за ланчасти комплекс симплицијалног комплекса K.

Ланци, цикли и границе p-ланци које гранични оператор ∂_p слика у нулу се називају *p-цикли*, и они су подмодул R-модула $C_p(K)$. Тај подмодул се означава са $Z_p(K)$. Елементи слике граничног оператора ∂_{p+1} су p-границе, и образују подмодул p-граница R-модула $C_p(K)$ који се означава са $B_p(K)$. Између њих важи веза

$$
B_p(X) \subseteq Z_p(X) \subseteq C_p(K).
$$

Дефинише се квоцијентни R-модул $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$, који се назива *i-та хомолошка група* симплицијалног комплекса K.

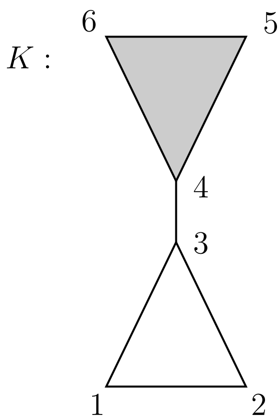
Пример 12. Дат је симплицијални комплекс K, на коме је на слици доле лево приказан пример 1-цикла, а на слици доле десно пример 1-границе. Може се приметити да и тај 1-цикл и његов збир са приказаном 1-границом припадају истој нетривијалној класи хомологије.



Слика 4.1: На слици лево је подебљан пример 1-цикла, а на слици десно је подебљан пример 1-границе.

△

Пример 13. На слици испод је задат симплицијални комплекс K са уређењем својих врхова.



Ланчасти комплекс симплицијалног комплекса K Симплекси овог симплицијалног комплекса, разврстани на основу своје димензије, су следећи:

Димензија 0: [1], [2], [3], [4], [5], [6].

Димензија 1: $[1,2]$, $[2,3]$, $[1,3]$, $[3,4]$, $[4,5]$, $[4,6]$, $[5,6]$.

Димензија 2: $[4,5,6]$.

$C_0(K)$: $\mathbb{Z}$-модул $C_0(K)$ је генерисан симплексима димензије 0, то јест $C_0(K) = \mathbb{Z}[1] + \mathbb{Z}[2] + \mathbb{Z}[3] + \mathbb{Z}[4] + \mathbb{Z}[5] + \mathbb{Z}[6]$. Произвољан елемент из $C_0(K)$ је облика $r_1[1]+r_2[2]+r_3[3]+r_4[4]+r_5[5]+r_6[6]$, за неке коефицијенте $r_1, \ldots, r_6 \in \mathbb{Z}$.

На пример, формална сума $5[2] - 7[3] + 11[6]$ 0-симплекса $[2], [3]$ и $[6]$ припада $C_0(K)$.

Гранично пресликавање ∂_0 је нула-пресликавање на бази $\mathbb{Z}$-модула $C_0(K)$, то јест на појединачним 0-симплексима. Самим тим је и $\partial_0 : C_0(K) \to C_{-1}(K)$ нула-пресликавање.

Језгро граничног пресликавања ∂_0, $Z_0(K)$ је зато једнако целом $\mathbb{Z}$-модулу $C_0(K)$.

$C_1(K)$: $\mathbb{Z}$-модул $C_1(K)$ је генерисан симплексима димензије 1, то јест $C_1(K) = \mathbb{Z}[1,2] + \mathbb{Z}[2,3] + \mathbb{Z}[1,3] + \mathbb{Z}[3,4] + \mathbb{Z}[4,5] + \mathbb{Z}[4,6] + \mathbb{Z}[5,6]$. Произвољан елемент из $C_1(K)$ је облика $r_1[1,2] + r_2[2,3] + r_3[1,3] + r_4[3,4] + r_5[4,5] + r_6[4,6] + r_7[5,6]$, за неке коефицијенте $r_1, \ldots, r_7 \in \mathbb{Z}$. На пример, формална сума $[2,3] - 2[3,4] + 3[4,6]$ 1-симплекса $[2,3], [3,4]$ и $[4,6]$ припада $C_1(K)$.

Гранично пресликавање ∂_1 је дефинисано за произвољан p-ланац ако је дефинисано на бази $\mathbb{Z}$-модула $C_1(K)$. Слике 1-симплекса из K при том пресликавању су редом:

$$\begin{aligned}
\partial_1([1,2]) &= [2] - [1] \\
\partial_1([2,3]) &= [3] - [2] \\
\partial_1([1,3]) &= [3] - [1] \\
\partial_1([3,4]) &= [4] - [3] \\
\partial_1([4,5]) &= [5] - [4] \\
\partial_1([4,6]) &= [6] - [4] \\
\partial_1([5,6]) &= [6] - [5]
\end{aligned}$$

За произвољан елемент v из $C_1(K)$, $r_1[1,2] + r_2[2,3] + r_3[1,3] + r_4[3,4] + r_5[4,5] + r_6[4,6] + r_7[5,6]$, $\partial_1(v) = r_1\partial_1([1,2]) + r_2\partial_1([2,3]) + r_3\partial_1([1,3]) + r_4\partial_1([3,4]) + r_5\partial_1([4,5]) + r_6\partial_1([4,6]) + r_7\partial_1([5,6])$. Дакле, посматрајући ∂_1 као линеарно пресликавање у односу на базе 1-симплекса и 0-симплекса комплекса K, ∂_1 се може записати као матрица са коефицијентима у $\mathbb{Z}$. На овом примеру, матрица пресликавања ∂_1 је:

$$[\partial_1] = \begin{array}{c} \\ [1] \\ [2] \\ [3] \\ [4] \\ [5] \\ [6] \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} [1,2] & [2,3] & [1,3] & [3,4] & [4,5] & [4,6] & [5,6] \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Свака колона матрице $[\partial_1]$ представља слику једног базног елемента, то јест једног 1-симплекса у K. Та колона је вектор коефицијената слике тог базног елемента у бази 0-симплекса комплекса K.

Да би се одредило језгро граничног пресликавања ∂_1, $Z_1(K)$, потребно је наћи све коефицијенте $r_1, \ldots, r_7 \in \mathbb{Z}$ такве да се елементи $r_1[1,2] + r_2[2,3] + r_3[1,3] + r_4[3,4] + r_5[4,5] + r_6[4,6] + r_7[5,6]$ сликају у нулу. Другим речима, потребно је одредити језгро матрице $[\partial_1]$.

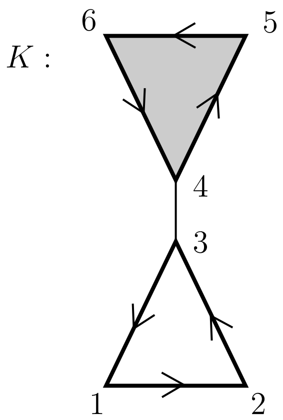
Како је $\partial_1(r_1[1,2] + r_2[2,3] + r_3[1,3] + r_4[3,4] + r_5[4,5] + r_6[4,6] + r_7[5,6]) = (-r_1-r_3)[1]+(r_1-r_2)[2]+(r_2+r_3-r_4)[3]+(r_4-r_5-r_6)[4]+(r_5-r_7)[5]+(r_6+r_7)[6]$ (коефицијенти уз произвољан 0-симплекс се читају из његовог реда у матрици $[\partial_1]$), то се може урадити решавањем следећег система линеарних једначина:

$$\begin{aligned} -r_1 - r_3 &= 0 \\ r_1 - r_2 &= 0 \\ r_2 + r_3 - r_4 &= 0 \\ r_4 - r_5 - r_6 &= 0 \\ r_5 - r_7 &= 0 \\ r_6 + r_7 &= 0. \end{aligned}$$

Из прве две једначине следи да је $r_1 = r_2 = -r_3$. Из треће потом следи да је $r_4 = 0$. Из последње три једначине следи да је $r_5 = -r_6 = r_7$. Дакле, $Z_1(K)$ је генерисан са два 1-цикла, то јест

$$Z_1(K) = \mathbb{Z}([1,2] + [2,3] - [1,3]) + \mathbb{Z}([4,5] - [4,6] + [5,6]).$$

Та два 1-цикла се могу уочити и на самом симплицијалном комплексу, као 1-ланци који почињу и завршавају се у истом врху, то јест чија је граница 0. На следећој слици су $[1,2]+[2,3]-[1,3]$ и $[4,5]-[4,6]+[5,6]$ подебљани и приказани са својим оријентацијама (негативан знак испред симплекса означава супротну оријентацију).



Слика пресликавања ∂_1 је $B_0(K) = \{(-r_1 - r_3)[1] + (r_1 - r_2)[2] + (r_2 + r_3 - r_4)[3] + (r_4 - r_5 - r_6)[4] + (r_5 - r_7)[5] + (r_6 + r_7)[6] \mid r_1, \ldots, r_7 \in \mathbb{Z}\}$. Пошто важи $[3] - [1] = ([2] - [1]) + ([3] - [2])$ и $[6] - [4] = ([6] - [5]) + ([5] - [4])$, следи да је слика генерисана границама 1-симплекса $[1,2],[2,3],[3,4],[4,5]$ и $[5,6]$, то јест са елементима $[2]-[1],[3]-[2],[4]-[3],[5]-[4],[6]-[5]$. Решавањем једноставног система линеарних једначина се проверава да је скуп $\{\mathbb{Z}([2]-[1]),\mathbb{Z}([3]-[2]),\mathbb{Z}([4]-[3]),\mathbb{Z}([5]-[4]),\mathbb{Z}([5]-[6])\}$ један независан скуп подмодула $\mathbb{Z}$-модула $C_0(K)$. Из претходног, по ставу 3.1.5, следи да је

$$B_0(K)=\mathbb{Z}([2]-[1])+\mathbb{Z}([3]-[2])+\mathbb{Z}([4]-[3])+\mathbb{Z}([5]-[4])+\mathbb{Z}([5]-[6]).$$

$C_2(K)$: $\mathbb{Z}$-модул $C_2(K)$ је генерисан симплексима димензије 2, то јест $C_0(K)=\mathbb{Z}[4,5,6]$. Произвољан елемент из $C_2(K)$ је облика $r_1[4,5,6]$, за неки коефицијент $r_1\in\mathbb{Z}$. На пример, $12[4,5,6]$ и $-3[4,5,6]$ припадају $C_2(K)$.

Гранично пресликавање $\partial_2 : C_2(K)\to C_1(K)$ је дефинисано за произвољан p-ланац ако је дефинисано на бази $\mathbb{Z}$-модула $C_2(K)$. Слика јединог 2-симплекса из K, $[4,5,6]$, при том пресликавању је:

$$\partial_2([4,5,6])=[5,6]-[4,6]+[4,5].$$

За произвољни елемент из $C_2(K)$, који је облика $r[4,5,6],\ r\in\mathbb{Z}$, његова слика при граничном пресликавању је $\partial_2(r[4,5,6])=r\cdot([5,6]-[4,6]+[4,5])$. Како је слика тог пресликавања нула ако и само ако је $r=0$, то је и језгро тог пресликавања, $Z_2(K)$, нула.

Из претходног директно следи и да је слика пресликавања ∂_2, $B_1(K)$ једнака подмодулу $\mathbb{Z}([5,6]-[4,6]+[4,5])$ $\mathbb{Z}$-модула $C_1(K)$.

$C_i(K), i\notin\{0,1,2\}$: Како у комплексу K нема симплекса димензија различитих од 1, 2 и 3, то су и $C_i(K)=0$, за $i\notin\{0,1,2\}$. Самим тим, и домен граничног пресликавања је 0, па је и само гранично пресликавање $\partial_i : C_i(K)\to C_{i-1}(K)$ нула-пресликавање.

$\mathcal{C}(K)$: Са дефинисаним модулима ланаца и граничним пресликавањима, дефинисан је и ланчасти комплекс симплицијалног комплекса K:

$$\mathcal{C}(K):\ \dots\xrightarrow{0}0\xrightarrow{0}C_2(K)\xrightarrow{\partial_2}C_1(K)\xrightarrow{\partial_1}C_0(K)\xrightarrow{\partial_0}0\xrightarrow{0}\dots$$

Хомологија симплицијалног комплекса K Хомолошке групе симплицијалног комплекса K се добијају рачунањем квоцијентних модула језгара и граница:

1° $H_0(K)=Z_0(K)/B_0(K)$. Важи $Z_0(K)=\mathbb{Z}[1]+\mathbb{Z}[2]+\mathbb{Z}[3]+\mathbb{Z}[4]+\mathbb{Z}[5]+\mathbb{Z}[6]$ и $B_0(K)=\mathbb{Z}([2]-[1])+\mathbb{Z}([3]-[2])+\mathbb{Z}([4]-[3])+\mathbb{Z}([5]-[4])+\mathbb{Z}([5]-[6])$. Како је $[2]=([2]-[1])+[1],\dots,[6]=([6]-[5])+[5]$, следи да у $H_0(K)$ постоји једна хомолошка класа. За њеног представника се може узети произвољан 0-симплекс из K. Дакле, $H_0(K)=\mathbb{Z}$.

2° $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K)$. Важи $Z_1(K) = \mathbb{Z}([1,2]+[2,3]-[1,3]) + \mathbb{Z}([4,5]-[4,6]+[5,6])$ и $B_1(K) = \mathbb{Z}([5,6]-[4,6]+[4,5])$. Одатле следи да је $H_1(K) = \mathbb{Z}([1,2]+[2,3]-[1,3])$.

3° $H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K)$. $Z_2(K) = 0$ па је и $H_2(K) = 0$.

4° $H_i(K) = Z_i(K)/B_i(K) = 0$, за $i \notin \{0,1,2\}$.

Класе нулте хомолошке групе $H_0(K)$ одговарају компонентама повезаности симплицијалног комплекса K. На пример, врхови [1] и [5] су у истој класи, што се може видети посматрајући и пут између њих преко 1-симплекса $[1,2]+[2,3]+[3,4]+[4,5]$. Та два врха припадају истој класи јер је граница тог пута $([2]-[1])+([3]-[2])+([4]-[3])+([5]-[4]) = [5]-[1]$.

Јединствена хомолошка класа из $H_1(K)$ одговара једнодимензионој рупи у симплицијалном комплексу K, и тај комплекс нема дводимензионих рупа па је и хомолошка група $H_2(K)$ једнака нули.

Може се отићи и корак даље и приметити да је један од два генератора из $Z_1(K)$ попуњен 2-симплексом $[4,5,6]$, па да $H_1(K)$ зато нема две већ једну класу хомологије. Ако би се тај 2-симплекс избрисао из K, оба генератора из $Z_1(K)$ би дала по једну класу. Такав поглед формализује теорија *перзистенције* описана у следећем поглављу.

△

Глава 5

Перзистенција

5.1 Перзистентне хомолошке групе

Филтрације и ланчасти комплекси Нека је K филтрирани комплекс са својом филтрацијом, то јест са растућим низом његових поткомплекса $(K^i)_{i=0}^n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\emptyset = K^0 \subset K^1 \subset \ldots \subset K^n = K.$$

За сваки пар узастопних поткомплекса из филтрације, K^j и K^{j+1}, постоји и инклузија $i_j : K^j \hookrightarrow K^{j+1}$. Самим тим у филтрацији постоји и низ инклузија

$$\emptyset = K^0 \xhookrightarrow{i_0} K^1 \subset \ldots \xhookrightarrow{i_{n-1}} K^n = K.$$

Сваки комплекс K^i из те филтрације има свој ланчасти комплекс $\mathcal{C}(K^i)$ који се састоји од модула p-ланаца $C_p^i(K) := C_p(K^i)$ и граничних пресликавања $\partial_p^i : C_p^i(K) \to C_{p-1}^i(K)$. Модули p-цикала и p-граница i-тог поткомплекса се обележавају са $Z_p^i(K) := Z_p(K^i)$ и $B_p^i(K) := B_p(K^i)$ и они су подмодули модула p-ланаца $C_p^i(K)$. Такође, сваки поткомплекс има и своје хомолошке групе, које се обележавају са $H_p^i(K) := H_p(K^i)$.

Како је филтрација растући низ поткомплекса симплицијалног комплекса K, то су и модули p-ланаца $C_p^i(K)$ растући по i, то јест:

$$0 = C_p^0(K) \leq C_p^1(K) \leq \ldots \leq C_p^n(K) = C_p(K).$$

Наиме, сваки симплекс у K^{i+1} који се не налази у K^i се појављује као нови генератор у $C_p^{i+1}(K)$, уз претходне генераторе који се већ налазе у $C_p^i(K)$.

Инклузије $i^j : K^j \hookrightarrow K^{j+1}$ се са симплекса као генератора продужују и до инклузија модула p-ланаца, $i_p^j : C_p^j(K) \hookrightarrow C_p^{j+1}(K)$.

Став 5.1.1. *Пресликавање $i^j : \mathcal{C}(K^j) \to \mathcal{C}(K^{j+1})$ дефинисано као низ пресликавања*

$$(i_p^j : C_p^j(K) \hookrightarrow C_p^{j+1}(K))_{i\in\mathbb{Z}}$$

је ланчасто.

Δ Потребно је доказати да следећи дијаграм комутира:

$$\begin{tikzcd} C_p^j \arrow[r, "i_p^j"] \arrow[d, "\partial_p^j"'] & C_p^{j+1} \arrow[d, "\partial_p^{j+1}"] \\ C_{p-1}^j \arrow[r, "i_{p-1}^j"] & C_{p-1}^{j+1} \end{tikzcd}$$

Дијаграм комутира ако је испуњен услов $(\forall p \in \mathbb{Z})(\forall v \in C_p^j)\ i_{p-1}^j \circ \partial_p^j(v) = \partial_p^{j+1} \circ i_p^j(v)$. Нека $p \in \mathbb{Z}$ и $v \in C_p^j$. Као p-ланац, v је формална комбинација p-симплекса $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in C_p^j$, то јест $v = \sum_{i=1}^k r_i \sigma_i$ за неке $r_1, \ldots, r_k \in R$. $i_p^j(v) = i_p^j(\sum_{i=1}^k r_i\sigma_i) = \sum_{i=1}^k r_i i_p^j(\sigma_i) = \sum_{i=1}^k r_i\sigma_i \in C_p^{j+1}$ па је $\partial_p^{j+1} \circ i_p^j(v) = \partial_p^{j+1}(\sum_{i=1}^k r_i\sigma_i) = \sum_{i=1}^k r_i \partial_p^{j+1}(\sigma_i) \in C_{p-1}^{j+1})$.

Са друге стране, $i_{p-1}^j \circ \partial_p^j(v) = i_{p-1}^j(\sum_{i=1}^k r_i\partial_p^j(\sigma_i)) = \sum_{i=1}^k r_i i_{p-1}^j(\partial_p^j(\sigma_i)) \in C_{p-1}^{j+1})$. Како се ∂_p^j и ∂_p^{j+1} поклапају на p-симплексима из C_p^j, $\sum_{i=1}^k r_i i_{p-1}^j(\partial_p^j(\sigma_i)) = \sum_{i=1}^k r_i \partial_p^{j+1}(\sigma_i)$, па дијаграм комутира.

$\square$

На следећем дијаграму је приказан низ ланчастих комплекса и ланчастих пресликавања филтрираног комплекса K:

$$\begin{tikzcd} \vdots \arrow[d, "\partial_3^0"'] & \vdots \arrow[d, "\partial_3^1"] & \vdots \arrow[d, "\partial_3^2"] & \\ C_2^0 \arrow[r, "i_2^0"] \arrow[d, "\partial_2^0"'] & C_2^1 \arrow[r, "i_2^1"] \arrow[d, "\partial_2^1"] & C_2^2 \arrow[r, "i_2^2"] \arrow[d, "\partial_2^2"] & \ldots \\ C_1^0 \arrow[r, "i_1^0"] \arrow[d, "\partial_1^0"'] & C_1^1 \arrow[r, "i_1^1"] \arrow[d, "\partial_1^1"] & C_1^2 \arrow[r, "i_1^2"] \arrow[d, "\partial_1^2"] & \ldots \\ C_0^0 \arrow[r, "i_0^0"] & C_0^1 \arrow[r, "i_0^1"] & C_0^2 \arrow[r, "i_0^2"] & \ldots \end{tikzcd}$$

Из става 5.1.1 следи да овај дијаграм комутира.

Пошто је i^j ланчасто, оно индукује и добро дефинисан низ хомоморфизама $f_p^j : H_p^j(K) \to H_p^{j+1}(K)$. Компоновањем узастопних пресликавања f_p^j у односу на филтрацију, добија се и хомоморфизам

$$f_p^{i,j} : H_p^i(K) \to H_p^j(K),\ (0 \le i \le j \le n)$$

који даје везу између хомолошких група у филтрираном комплексу.

Цикли и границе у филтрацији Преко пресликавања инклузије се могу повезати модули p-цикала и p-ланаца различитих поткомплекса у филтрацији. Везу даје следећи став.

Став 5.1.2. *За модуле p-циклова Z_p^j и Z_p^{j+1}, и p-граница B_p^j и B_p^{j+1} узастопних поткомплекса K^j и K^{j+1} филтрираног комплекса K важи:*

1° $i_j\left[Z_p^j\right] \subseteq Z_p^{j+1}$;

2° $i_j\left[B_p^j\right] \subseteq B_p^{j+1}$.

Δ За $z_p \in Z_p^j$ важи $\partial_p^j(z) = 0$. $\partial_p^{j+1}(z)$ је комбинација алтернирајућих сума страна симплекса p-ланца $i_j(z_p)$. Како се у K^{j+1} појављују нови симплекси, али се не искључују они који су већ у K^j, то се $\partial_p^{j+1}(z)$ не мења у односу на $\partial_p^j(z)$, па је $\partial_p^{j+1}(z) = 0$.

Ако је $d = \partial_{p+1}^j(v) \in B_p^j$, тада је $i_j(d) = i_j \circ \partial_{p+1}^j(v) = \partial_{p+1}^j \circ i_{j+1}(v)$ јер је i_* ланчасто пресликавање. Одатле је $i_j(d) \in B_p^{j+1}$. $\square$

Перзистентне хомолошке групе

Дефиниција 5.1.3. *p-те перзистентне хомолошке групе од K су квоцијентни R-модули*

$$\mathrm{H}_p^{i,j}(K) = \mathrm{Z}_p^i(K) / \left(\mathrm{B}_p^j(K) \cap \mathrm{Z}_p^i(K)\right), \ (0 \leq i \leq j \leq n).$$

У $\mathrm{H}_p^{i,j}(K)$ су класе оних циклова из C_k^i који су „преживели” границе нових симплекса додатих у K^j.

До перзистентних хомолошких група се може доћи и помоћу пресликавања $f_p^{i,j} : H_p^i(K) \to H_p^j(K)$. Наиме, $\mathrm{H}_p^{i,j}(K) = \mathrm{im}(f_p^{i,j})$. Другим речима, ту су хомолошке класе из K^i које су и даље „живе” у K^j.

Рађење и смрт класа Нека је $\alpha \in \mathrm{H}_p(K^i)$. Класа α се *рађа* у $\mathrm{H}_p(K^i)$ ако важи

$$\alpha \notin \mathrm{H}_p^{i-1,i}(K).$$

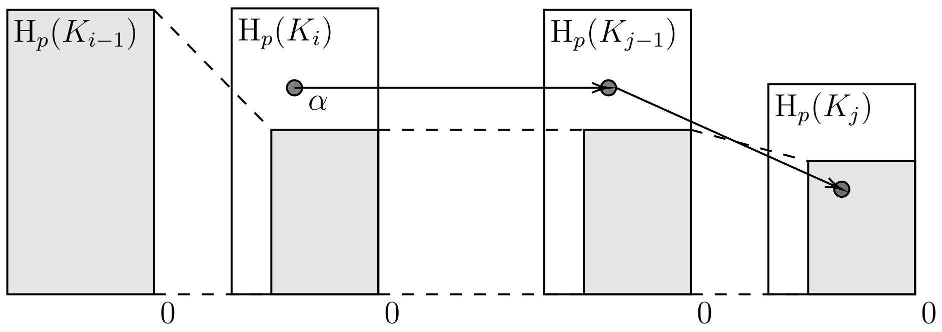
То значи да та класа није међу онима из K^{i-1} које су преживеле до K^i.

Класа $\alpha \in \mathrm{H}_p(K^i)$ која се родила у K^i *умире* у K^j ако се споји са старијом класом при преласку из K^{j-1} у K^j, то јест ако

$$f_p^{i,j-1}(\alpha) \notin \mathrm{H}_p^{i-1,j}(K) \ \wedge \ f_p^{i,j}(\alpha) \in \mathrm{H}_p^{i-1,j-1}(K).$$

Дефиниција 5.1.4. *Индекс перзистенције класе $\alpha \in \mathrm{H}_p(K^i)$, која се роди у K^i и умре у K^j је вредност $j - i$.*

Ако та класа роди у K^i, али не умре ни у једном K^j из филтрације, њен индекс перзистенције је ∞.



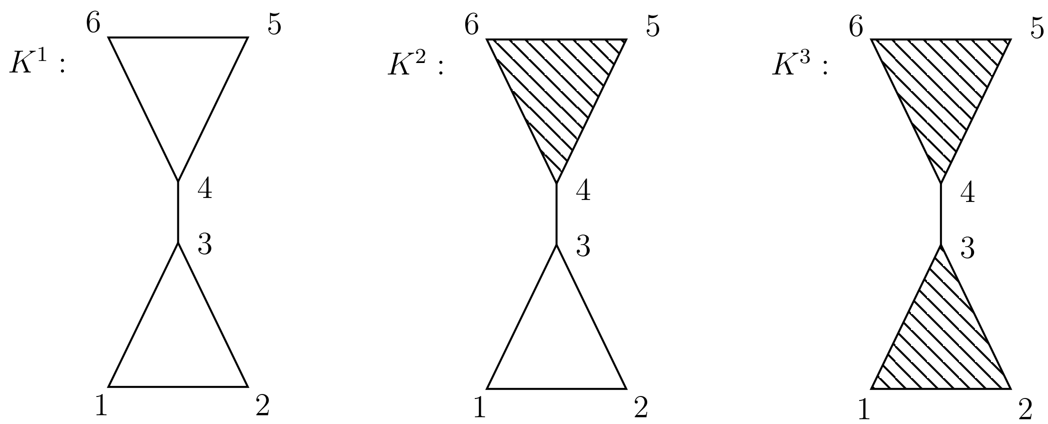
Слика 5.1: Класа α која се рађа у K^i и умире у K^j. [4]

Дефиниција 5.1.5. *p-перзистентни k-ти Бетијев број $\beta_k^{i,p}(K)$ је ранг перзистентне хомолошке групе $\mathrm{H}_k^{i,p}(K)$.*

Пример 14. Нека је дата филтрација симплицијалног комплекса K

$$\emptyset = K^0 \subset K^1 \subset K^2 \subset K^3 = K$$

приказана на следећој слици:



Нека је z 1-цикл из $Z_1^1(K)$, $z = [1,2] + [2,3] - [1,3]$. Тада класа од z, $\alpha = [z]$ припада хомолошкој групи $\mathrm{H}_1^1(K)$. Слике те класе при пресликавањима $f_1^{1,j}$, $1 \leq j \leq 3$ су:

1° $f_1^{1,1}(\alpha) = \alpha \in \mathrm{H}_1^1(K)$,

2° $f_1^{1,2}(\alpha) = \alpha \in \mathrm{H}_1^2(K)$,

3° $f_1^{1,2}(\alpha) = \alpha = 0 \in \mathrm{H}_1^3(K)$.

$\alpha \in \mathrm{H}_1^1(K)$ и $\alpha \notin \mathrm{H}_1^{0,1}(K) = 0$, па је та класа рођена у тренутку 1.
$f_1^{1,2}(\alpha) \notin \mathrm{H}_1^{0,3}(K)$ и $f_1^{1,2}(\alpha) \in \mathrm{H}_1^{0,2}(K) = 0$, па та класа умире у тренутку 3.

△

5.2 Модул перзистенције

Постоји начин, приказан у [11], да се појединачне перзистентне хомолошке групе филтрираног комплекса обједине у једну алгебарску структуру. Ако се за коефицијенте хомологије узме неко поље F, та структура може да се декомпонује на једноставан начин.

Дефиниција 5.2.1. *Комплекс перзистенције* C *је фамилија ланчастих комплекса* $\{\mathcal{C}_*^i\}_{i\geq 0}$ *над* R *заједно са ланчастим пресликавањима* $f^i : \mathcal{C}_*^i \to \mathcal{C}_*^{i+1}$ *који дају следећи дијаграм:*

$$\mathsf{C}: \ \mathcal{C}_*^0 \xrightarrow{f^0} \mathcal{C}_1^i \xrightarrow{f^1} \mathcal{C}_*^2 \xrightarrow{f^2} \dots$$

Пример комплекса перзистенције је филтирирани комплекс K заједно са инклузијама између поткомплекса филтрације.

Претходни дијаграм се може приказати и са граничним пресликавањима унутар појединачних ланчастих комплекса, аналогно примеру филтрираног комплекса:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "\partial_3^0"'] & \vdots \arrow[d, "\partial_3^1"] & \vdots \arrow[d, "\partial_3^2"] & \\
C_2^0 \arrow[r, "f_2^0"] \arrow[d, "\partial_2^0"'] & C_2^1 \arrow[r, "f_2^1"] \arrow[d, "\partial_2^1"] & C_2^2 \arrow[r, "f_2^2"] \arrow[d, "\partial_2^2"] & \dots \\
C_1^0 \arrow[r, "f_1^0"] \arrow[d, "\partial_1^0"'] & C_1^1 \arrow[r, "f_1^1"] \arrow[d, "\partial_1^1"] & C_1^2 \arrow[r, "f_1^2"] \arrow[d, "\partial_1^2"] & \dots \\
C_0^0 \arrow[r, "f_0^0"] & C_0^1 \arrow[r, "f_0^1"] & C_0^2 \arrow[r, "f_0^2"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Дефиниција 5.2.2. *Модул перзистенције* $\mathcal{M}$ *је фамилија* R*-модула* M^i *заједно са хомоморфизмима* $\varphi^i : M^i \to M^{i+1}$.

Преглед новијих резултата у анализи модула перзистенције се може наћи у [12].

Пример модула перзистенције је хомологија комплекса перзистенције. Пресликавање φ^i је дефинисано тако да одговарајућу класу хомологије слика у класу која је садржи.

Комплекс перзистенције C је *коначног типа* ако је сваки комплекс унутар њега коначно-генерисан R-модул, и ако су пресликавања f^i изоморфизми за све $i \in \mathbb{N}$ почев од неког m_0.

Модул перзистенције $\mathcal{M}$ је *коначног типа* ако је сваки модул унутар њега коначно-генерисан R-модул, и ако су пресликавања φ^i изоморфизми за све $i \in \mathbb{N}$ почев од неког m_0.

Пример 15. Филтрирани комплекс генерише комплекс коначног типа, чија је хомологија модул перзистенције коначног типа. △

Сваки модул перзистенције $\mathcal{M}$ се може посматрати и као модул над прстеном $R[t]$, који се означава са $\alpha(\mathcal{M})$, на следећи начин:

$$\alpha(\mathcal{M}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M^i.$$

Множење са t одговара померању за један на горе у градуацији, то јест

$$t \cdot \left(m^0, m^1, m^2, \ldots\right) = \left(0, \varphi^0\left(m^0\right), \varphi^1\left(m^1\right), \varphi^2\left(m^2\right), \ldots\right).$$

За цикл $z \in \mathrm{Z}_p^i$ са нетривијалном хомолошком класом у H_p^i, множењем са t се прати како се његова хомолошка класа $z + \mathrm{B}_p^i$ мења кроз филтрацију. Постоје два случаја:

1º За неко $k \in \mathbb{N}$, $z + \mathrm{B}_p^{i+k} = \mathrm{B}_p^{i+k}$, то јест класа од z постаје тривијална после k померања у градуацији.

2º Ни за једно $k \in \mathbb{N}$ се не деси да $z \in \mathrm{B}_p^{i+k}$.

Теорема 3.1.8, која важи ако је прстен R заправо поље, даје следећу декомпозицију тог модула која осликава претходно.

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \Sigma^{\alpha_i} F[t]\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{m} \Sigma^{\gamma_j} F[t] / \left(t^{n_j}\right)\right)$$

Дакле, постоји база модула перзистенције $\alpha(\mathcal{M})$ погодна за рачунање перзистентне хомологије на целој филтрацији. [11]

Да би се боље сагледала та структура, погодно је приметити коресподенцију између ње и коначног скупа $\mathcal{P}$-интервала, који се дефинишу као парови (i, j), где $0 \leq i < j \in \mathbb{Z}^{\infty} = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

Ту везу даје пресликавање Q дефинисано на $\mathcal{P}$-интервалу (i, j) као

$$Q(i, j) = \Sigma^i F[t] / \left(t^{j-i}\right),$$

за $j < +\infty$, а

$$Q(i,j) = \Sigma^i F[t],$$

за $j = +\infty$.

На скупу $\mathcal{P}$-интервала $\mathcal{S} = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2) \ldots, (i_n, j_n)\}$, Q се дефинише као

$$Q(\mathcal{S}) = \bigoplus_{l=1}^{n} Q(i_l, j_l)$$

и даје споменуту коресподенцију између коначних скупова $\mathcal{P}$-интервала и градуисаних $F[t]$-модула. [11]

5.3 Филтрација поднивоа

У овом одељку биће дефинисани појмови рођења и смрти класа перзистенције на филтрацијама насталим посматрањем поднивоа ограничених непрекидних функција из простора X у $\mathbb{R}$. Надаље, претпоставља се да су коефицијенти хомологије из датог поља.

Нека је дат тополошки простор $\mathbb{X}$ и ограничена непрекидна функција $f : X \to \mathbb{R}$. Са $\mathbb{X}^a$ се за праг $a \in R$ обележава подниво функције f, $X_a = f^{-1}(-\infty, a]$.

За димензију p и $a \leq b \in \mathbb{R}$, инклузије $\mathbb{X}^a \subset \mathbb{X}^b$ индукују хомоморфизме хомолошких група

$$f_p^{a,b} : \mathrm{H}_p(X^a) \to \mathrm{H}_p(X^b).$$

Дефиниција 5.3.1. *Вредност $c \in \mathbb{R}$ је хомолошка критична вредност ако постоји $p \in \mathbb{Z}$ такво да за све $\delta > 0$, $f_p^{c-\delta,c}$ није изоморфизам.*

Функција $f : X \to \mathbb{R}$ је питома ако је ограничена, непрекидна, има највише коначно хомолошких критичних вредности, и ако су $\mathrm{H}_p(X^a)$ коначно генерисани за све $a \in R$ и све $p \in Z$.

Ако је $f : X \to \mathbb{R}$ питома функција, све хомолошке групе $\mathrm{H}_p(X_{b-\delta})$ су коначно генерисане за произвољно $\delta > 0$, па за довољно мало $\delta > 0$ $\mathrm{Im}\, f_p^{a-\delta,b}$ не зависи од δ. Зато се могу добро дефинисати

$$\mathrm{F}_p^{a-,b} := \mathrm{Im}\, f_p^{a-\delta,b},$$

$$\mathrm{B}_p^{a} := \mathrm{H}_p(X^a)/\mathrm{F}_p^{a-,a}.$$

за довољно мало $\delta > 0$.

Пратећи већ дефинисане појмове *рађања* и *смрти* класе хомологије, B_p^a се назива *p-та група рађања* у X^a. Наиме, ако је нека класа хомологије α у том којезгру пресликавања $f_p^{a-\delta,a}$, то значи да она не постане тривијална при сечењу сликом тог пресликавања, то јест да се она појавила у тренутку a.

Група смрти се добија ако се посматрају класе рођене у X^a које се у X^b утопе у класе рођене пре тренутка a. Та идеја се може формализовати на следећи начин.

Нека је пресликавање $g_p^{a,b} : \mathrm{B}_p^a \to \mathrm{H}_p(X^b)/\mathrm{F}_p^{a-,b}$ дато на елементима $[\alpha] \in \mathrm{B}_p^a$ (угласте заграде означавају класу у тој количничкој групи) са

$$g_p^{a,b}([\alpha]) := \left[f_p^{a,b}(\alpha)\right].$$

Додатно, $g_p^{a,\sup_{x\in X} f(x)} := 0$.

Језгро овог пресликавања, *подгрупа смрти*, се означава са $\mathrm{D}_p^{a,b}$ и садржи тачно оне класе које су рођене у тренутку a, а које су се спојиле са неком класом насталом пре тренутка a у тренутку b.

Класа $\alpha \in \mathrm{H}_p(X^a)$ *умире* у тренутку b ако њена класа $[\alpha]$ припада подгрупи смрти $\mathrm{D}_p^{a,b}$, (а самим тим и групи рађања B_p^a), међутим не припада ни једној групи $\mathrm{D}_p^{a-\delta,b}$ за $\delta > 0$.

Ако се класа α родила у тренутку a и умрла у тренутку b, њена *перзистенција* се дефинише као $\mathrm{pers}(\alpha) = b - a$.

Уколико класа не умире, њена перзистенција је $+\infty$. Због $g_p^{a,\sup_{x\in X} f(x)} = 0$, при овој дефиницији све перзистенције су коначне. [13]

5.4 Дијаграм перзистенције

Број $\beta_p^{i,j-1} - \beta_p^{i,j}$ представља број класа димензије p које су се родиле у неком K^l, за $l \leq i$, а умрле у K^j.

Слично, број $\beta_p^{i-1,j-1} - \beta_p^{i-1,j}$ представља број класа димензије p које су се родиле у неком K^l, за $l \leq i-1$ а умрле у K^j.

Разлика та два броја даје број независних p-димензионих класа које се роде у K^i и умру у K^j, $\mu_p^{i,j}$, и дата је следећим изразом:

$$\mu_p^{i,j} = \left(\beta_p^{i,j-1} - \beta_p^{i,j}\right) - \left(\beta_p^{i-1,j-1} - \beta_p^{i-1,j}\right).$$

Рађања и смрти p-димензионих класа се репрезентују у равни $\mathbb{R}^2$ помоћу мултискупа који се назива *дијаграм перзистенције*. Тај дијаграм се означава са $\mathrm{Dgm}_p(K)$.

Хоризонтална оса на дијаграму се односи на рађања класа - тачке десно су се родиле касније. Вертикална оса се односи на смрти класа хомологије - класе које касније умру се налазе у горњем делу дијаграма. У дијаграм се укључује и дијагонала, $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$, и тачке на њој представљају тривијалне хомолошке класе.

Како смрт увек долази након рађања, то се све нетривијалне тачке на дијаграму налазе изнад дијагонале. [13]

Простори дијаграма перзистенције

Следеће растојање омогућава да се направи метрички простор дијаграма перзистенције:

Дефиниција 5.4.1. *p-то Васерштајново*[1] *растојање између два дијаграма перзистенције се дефинише као*

$$W_p\left(d_1, d_2\right) = \left(\inf_{\gamma} \sum_{x \in d_1} \|x - \gamma(x)\|_{\infty}^{p}\right)^{\frac{1}{p}},$$

где γ пролази кроз све бијекције из d_1 у d_2.

Растојање је добро дефинисано: бијекција која упарује тачке ван дијагонале првог дијаграма са њима најближим тачкама на дијагонали у другом дијаграму има коначну суму растојања $\sum_{x \in d_1} \|x - \gamma(x)\|_{\infty}^{p}$, јер та сума има коначно сабирака.

Тај метрички простор не мора бити комплетан. Међутим, модификована дефиниција дијаграма перзистенције ће за ово растојање дати комплетност:

Дефиниција 5.4.2. *Генерализовани дијаграм перзистенције је пребројив мултискуп тачака равни заједно са дијагоналом $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ у коме се свака тачка са дијагонале појављује бесконачно пута.*

Између генерализованих дијаграма перзистенције се може дефинисати и појам *коначности растојања.* *Перзистенција тачке x* на дијаграму перзистенције d је

$$\mathrm{pers}(x) = 2 \inf_{y \in \Delta} \|x - y\|_{\infty}.$$

Инфимум се достиже у $y = \left(\frac{(x_1+x_2)}{2}, \frac{(x_1+x_2)}{2}\right)$, за $x = (x_1, x_2)$. Наиме, ако се $\mathrm{pers}(x)$ посматра као дужина дужи која спаја тачку x са њеном вертикалном пројекцијом на дијагоналу, онда је половина те дужи једнака $\|x - y\|_{\infty}$.

Применом те чињенице се може израчунати Васерштајново растојање до празног дијаграма перзистенције. Нека је празан дијаграм перзистенције означен са $d_{\varnothing}$. Важи:

$$\left(W_p\left(d, d_{\varnothing}\right)\right)^p = 2^{-p} \sum_{x \in d} (\mathrm{pers}(x))^p.$$

Ако се са $\mathrm{Pers}_p(d) = \sum_{x \in d} (\mathrm{pers}(x))^p$ дефинише *тотална перзистенција* дијаграма d, добија се једнакост $\mathrm{Pers}_p(d) = 2^p \left(W_p\left(d, d_{\varnothing}\right)\right)^p$, која повезује растојање до празног дијаграма за тоталном перзистенцијом тог дијаграма. [13]

То даје еквиваленцију дефиниција *простора дијаграма перзистенције*:

[1] Leonid Vaseršteĭn (1944-) - руско-амерички математичар

Дефиниција 5.4.3. *Простор дијаграма перзистенције димензије* p *је скуп свих дијаграма перзистенције који су на коначном растојању од празног дијаграма перзистенције. Еквивалентно, он се састоји од свих дијаграма перзистенције са коначном тоталном перзистенцијом.*

$$D_p = \{d \mid W_p\left(d, d_\emptyset\right) < \infty\} = \{d \mid \mathrm{Pers}_p(d) < \infty\}.$$

Библиографија

[1] Милосав Марјановић, Синиша Врећица. *Топологија.* Завод за уџбенике, Београд, 2011.

[2] Steve Y. Oudot, *Persistence theory: from quiver representations to data analysis*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2015.

[3] Robert Ghrist, *Homological Algebra and Data*, Math. Data, 2018, 25: 273.

[4] Edelsbrunner, Herbert, and John Harer. *Computational topology: an introduction.* American Mathematical Soc., 2010.

[5] Franz Aurenhammer, Rolf Klein, Der-tsai Lee. *Voronoi Diagrams And Delaunay Triangulations.* World Scientific Publishing Company, 2013.

[6] Boris Delaunay. *Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoï.* Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS. Classe des sciences mathématiques et na, 1934.

[7] Guibas, Leonidas J., and Steve Y. Oudot. *Reconstruction using witness complexes.* Discrete & computational geometry 40.3 (2008) 325-356.

[8] De Silva, Vin. *A weak characterisation of the Delaunay triangulation.* Geometriae Dedicata 135.1 (2008): 39-64.

[9] Attali, Dominique, et al. *Alpha-beta witness complexes.* Workshop on Algorithms and Data Structures. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007

[10] May, J. Peter. *A concise course in algebraic topology.* University of Chicago press, 1999.

[11] Zomorodian, Afra, and Gunnar Carlsson. *Computing persistent homology.* Discrete & Computational Geometry 33.2 (2005): 249-274.

[12] Chazal, Frédéric, et al. *The structure and stability of persistence modules.* Springer, 2016.

[13] Mileyko, Yuriy, Sayan Mukherjee, and John Harer. *Probability measures on the space of persistence diagrams.* Inverse Problems 27.12 (2011): 124007.

[14] Edelsbrunner, Herbert, and John Harer. *Persistent homology - a survey.* Contemporary mathematics 453 (2008): 257-282.

[15] Otter, Nina, et al. *A roadmap for the computation of persistent homology.* EPJ Data Science 6.1 (2017): 17.

[16] Berwald, Jesse J., Joel M. Gottlieb, and Elizabeth Munch. *Computing Wasserstein distance for persistence diagrams on a quantum computer.* arXiv preprint arXiv:1809.06433 (2018)