УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Настава аритметике некад и сад - анализа уџбеника Кисељева из 1912.године

мастер рад

ментор: студент:

Проф.др Зоран Петровић **Милица Грбатинић**

Београд, 2020.

Ментор:

Проф.др Зоран Петровић, редовни професор

Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

Проф.др Александар Т. Липковски, редовни професор

Универзитет у Београду, Математички факултет

Др Марко Радовановић, доцент

Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: _____

Садржај :

1. **Увод 4**
   - 1.1. **Предмет истраживања.....5**
   - 1.2. **Циљ рада.....5**
   - 1.3. **Историјат наставе аритметике.....6**
     - 1.3.1. **Почеци наставе аритметике у свету.....6**
     - 1.3.2. **Настава аритметике у Србији.....8**
     - 1.3.3. **Настава аритметике у Русији.....11**
   - 1.4. **Кратка биографија А.П. Кисељева.....12**
2. **Приказ уџбеника А. П. Кисељева.....14**
   - 2.1. **Важни делови уџбеника из 1912.....14**
   - 2.2. **Обрада аритметике у нашим уџбеницима за основну школу.....46**
   - 2.3. **Поређење наставе аритметике некада и сада.....52**
   - 2.4. **Могућа побољшања у настави аритметике.....53**
3. **Истраживачки део.....56**
4. **Закључак.....58**

Литература.....59

Биографија……61

1. УВОД

Математика је један од најважнијих алата за развој размишљања која су потребна за решавање свакодневних проблема. Са друге стране, математика се најчешће сматра једним од најтежих школских предмета.

Прва ствар која се уочи када се отвори неки математички уџбеник јесте да је пун симбола, јер математичари своје идеје исказују језиком математичких симбола. Основни разлог због ког ученици сматрају да је математику тешко разумети је тај што је током учења потребно схватити специфичну мрежу апстрактних односа. Стога је од највеће важности квалитетно подучавање из ове области, које би морало да почне од најранијих разреда основне школе.

У овом раду ће бити речи о анализи сличности и разлика у подучавању једне важне гране математике - аритметике, помоћу уџбеника који је коришћен у Русији (и потом у СССР) крајем 19. и почетком 20. века.

Појам математике одређен је у античкој Грчкој и означен речју „ *mathema*“ што значи наука, а први пут се помиње код Питагорејаца (следбеника грчког филозофа и математичара Питагоре). Они су себе називали математичарима (од грчке речи *mathemathikoi*), односно онима који изучавају математику. Математику тог времена чине две засебне целине: аритметика и геометрија.

Аритметика (грч. *arithmos* - бројеви, *techne* - умеће) је грана математике која се бави бројевима и рачунским операцијама са бројевима. Назив аритметика своје порекло дугује Питагорејцима, који су сматрали да бројеви владају светом и да се у средишту свега налази *arithmos* - број. Првобитно, аритметика је представљала науку о бројевима и вештини рачунања. [1]

Аритметика се дели на посебну и општу. Посебна аритметика бави се проучавањем рачунских операција (радњи) са посебним бројевима, а општа аритметика рачунским операцијама помоћу слова (општих бројева).

Уз четири основне операције које чине: сабирање, одузимање, множење и дељење, аритметика се бави и вишим операцијама као што су: степеновање, кореновање и логаритмовање. Након увођења арапских цифара и примене бројевних система, посебно декадног, било је могуће извести правила рачунања у њиховом

[1] Горан Цвијановић, *Концептуализација појма рана алгебра и раноалгебарско мишљење*, Истраживање математичког образовања, Том VIII, Број 14, 1-8, 2016.

садашњем облику. Уз античку Грчку, знатан прилог развоју аритметике дали су Индијци и Арапи, али су у новом веку европски математичари развили аритметику до њеног садашњег степена.

1.1. Предмет истраживања

У овом раду проучаваћемо одређене наставне теме из аритметике са којима ученици основних школа имају често потешкоће. Веома чести су проблеми са рачунањем, разломцима и у мањој мери са процентним рачуном. Упоредном анализом са уџбеником из 1912. године потребно је створити слику о педагошким методама које су примењиване некада и сад и које могу довести до унапређења знања ученика из области аритметике.

1.2. Циљ рада

Циљ нам је да уопоредимо наставу аритметике некада и сада, помоћу анализе уџбеника руског математичара Кисељева: „*Систематски курс аритметике*“ из 1912. године. Циљ је поређење ефекта коришћења тог уџбеника са уџбеницима који се користе у савременом образовању код нас.

Посебно се утврђује однос са целинама које се обрађују у оквиру савремене наставе математике и то са посебним акцентом на:

V разред : дељивост, разломци.

VI разред : цели бројеви, проценти.

VII разред : пропорционалност, процентни рачун.

У том смислу је у оквиру истраживачког дела рада извршено тестирање ученика у решавању задатака изабраних из уџбеника Кисељева.

1.3. Историјат наставе аритметике

1.3.1. Почеци наставе аритметике у свету

Основне карактеристике математике као науке препознајемо већ у првим цивилизацијским културама. Настанком писма, око трећег миленијума пре нове ере, створени су предуслови да се и основна математичка сазнања записују. О математици тог времена сведоче прва писана сведочанства математике која су настала на подручју великих цивилизација, у првом реду Месопотамије (простор данашњег Ирака, у сливу река Тигра и Еуфрата) и Египта. [2]

Аритметику античке Грчке, поред Питагоре (560-500. год. п.н.е.), обележили су својим делима математичари Еуклид (325-265. год. п.н.е.), Еудем (350-290. год. п.н.е.) и Никомах (60-120. год. н.е.). Од тринаест књига *Еуклидових елемената*, садржај седме, осме и девете посвећен је аритметици, односно научном изучавању целих (природних) бројева.

Одређење појма разломка појављује се независно и много касније од појма целог броја, а потиче од латинске речи *frangere*, што значи преломити. Прве написане аритметике сведоче да су се разломцима служиле и најстарије цивилизацијске културе. Египћани су користили хијероглифско писмо из кога је проистекао непрактичан адитивни систем нумерације, па су тиме и поступци за разне математичке операције били веома сложени. Из староегипатских папируса из 2. века п.н.е. види се висок степен знања из области аритметике. Садржина ових рукописа не протеже се само на четири врсте рачунања (бинарне операције) са целим бројевима, већ обухвата и разломке.

Учење и настава математике развијали су се упоредо са развојем математике као науке. Првобитно то није био организован облик образовања, већ су се математичка искуства преносила са старијих генерација на млађе. Тек у античкој Грчкој, са настанком првих школа, јавља се организован процес математичког образовања.

Иако образовање тог времена није било масовно као данас, основано је више приватних школа у којима се поред филозофије, астрономије и музике, изучавала и математика. Познате школе из тог периода носиле су назив по својим оснивачима који су били филозофи (Милетска школа, Платонова школа, Питагорејска школа).

[2] Болгарский Б.В. *Очерки по истории математики*, Минск, 1979, стр. 21- 43

Распадом западног римског царства 476. године, које је наследило тековине грчке културе, наступила је вишевековна стагнација математичке делатности у Европи, али се она и даље развијала на истоку, у арапским земљама, Кини и Индији. Кључну улогу у очувању математичког наслеђа имала је арабљанска математика, која је са процватом исламске културе између 8. и 13. века постала главна интелектуална дисциплина. Допринос арабљанске математике првенствено је у изузетно значајним преводима грчких математичких текстова. Извесно је да су Арапи створили нова, али и сачували дотадашња значајна математичка знања, које су пренели и Европи тек у ренесансном периоду.

У Европи до 12. века математичари су разматрали само посебне конкретне задатке теоријско-бројчаног карактера. Од радова тог времена највећи траг за даљи развој аритметике оставили су радови Леонарда Пизана Фибоначија (*Leonardo Pisano Fibonacci*, 1170.-1250.). У свом делу „*Књига о рачунању*“ из 1202. године, објавио је индијско-арапски позициони систем бележења бројева и увео цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0. Такође, описао је стандардне поступке за множење и дељење које и данас користимо и навео велики број проблемских задатака. Између осталог, он је у истој књизи први користио термин количник. Промовисањем позиционог декадног система Фибоначи је утемељио модерну аритметику.

До 15. века и периода ренесансе када је уследило масовно отварање школа, учење математике било је доступно тек малом броју људу из слојева интелектуалне аристократије. Са увођењем новог предметно-разредно часовног облика наставе, од стране познатог чешког педагога и реформатора J. A. Коменског (*Jan Amos Komensky*, 1592.–1670.), настала је прекретница у образовању.

Обавезно школовање у Европи уведено је средином 16. века, објављивањем првих наставних планова и отварањем школа. У европским школама појавила се тзв. „нова” аритметика заснована на декадној нумерацији. До тог периода Европљани су се користили справама за рачунање (абакус) и римском или словном нумерацијом. Тадашњу рачунску наставу карактерисао је механицизам, који се састојао у понављању рачунских поступака и правила. Није било адекватних уџбеника. Аритметика се тек разрађивала, само дељење је представљало тешку и компликовану операцију, а прави и децимални разломци су се тек уводили.

1.3.2. Настава аритметике у Србији

Математика, односно аритметика је различито називана у образовној историји Срба: рачун, рачуница, наука о рачуну, численица. Србија је све до 20. века имала неповољан положај и била делимично под турском влашћу, тако да се прихватање европске науке обављало кроз школске институције Срба у Аустро-Угарској. Тадашња настава рачуна код нас развијана је под утицајем аустријске и немачке педагогије. [3]

Прву књигу из математике на српско-словенском језику написао је Василије Дамјановић. Књига представља уџбеник елементарне аритметике, а штампана је 1767. године у Венецији, под називом „*Новаја сербска аритметика"*. У њој аутор разрађује основне аритметичке садржаје, којима су обухваћени и тзв. „*разбијени*" бројеви тј. разломци и децимални бројеви.

Математика као посебан предмет у Србији почела је да се изучава почетком 19. века, са настанком првих школа, а обухватала је елементарне математичке садржаје. У овом периоду, у основним школама у Кнежевини Србији доминирали су учитељи Пречани (учитељи српског порекла из Аустро-Угарске), од којих су многи завршили сомборску учитељску школу Норму (Препарандију). Због недостатка школованих учитеља Србија се ослањала и на недовољно стручан домаћи учитељски кадар, понекад и са само завршеном основном школом. Методички неспремним учитељима са скромним математичким знањем биле су потребне смернице за свакодневни рад. Због тога, у првој половини 19. века, као методичка литература користе се упутства Министарство просвете (Попечитељство просвештенија), тзв. „*Наставленија*". У овим упутствима која су била релативно оскудна, доминирао је принцип да се учи на основу задатака из живота.

Док је у Наставленију из 1838. године само истакнут уопштен захтев да деца треба да уче са разумевањем, у Наставленију из 1844. године захтева се да се прво учи усмени па писмени рачун, и да се при увођењу бројева и рачунских операција користе очигледна наставна средства (рачунаљка, новац).

Унапређивање наставе рачуна у овом периоду је потпомогнуто штампањем првих уџбеника у Београду. За наставу рачуна, најпре 1843. године излази „*Рачуница за младе у народним училиштима Књажевства Србије*" Симеона Прице, а затим и уџбеник „*Кратка рачуница за основне србске школе*" Филипа Христића, 1850. године.

[3] Гаровић Ј, Вујисић Н. и остали, *Из историје наставе математике у основним и средњим школама у Србији*, Педагошки музеј, Београд, 2011.

У уводном делу уџбеника дата су одређења појма јединице, наречених, ненаречених, равноречених, и разноречених бројева (именовани, неименовани бројеви, бројеви једнаких вредности и различитих вредности). Садржај чини једанаест поглавља, а на крају сваког налазе се питања са примерима и простором за вежбање. У складу са тадашњом утилитарном функцијом наставе рачуна, Христић је рачуницу дефинисао као науку која нас учи правилно и лако рачунати.

Развој целовитог школског система у Србији започиње у време Првог српског устанка, отварањем малих основних школа, у којима се уче буквар, часловац, псалтир и численица (рачун). Увођењем елемената државности Хатишерифом из 1830. године образовање у Србији добило је на значају.

Настава рачуна обухватала је учење целих бројева, четири рачунске операције, разломке и просто правило тројно. Општим законом о школама 1844. године остварена је потпуна организација школа. Прецизирано је време трајања школовања, које у селима траје три, а у варошима четири године, а дотадашњи назив нормална школа промењен је у основна школа. Програмом је било предвиђено да настава рачуна почиње у другом полугодишту првог разреда, и прво се учио усмени па писмени рачун. Тражила се употреба очигледних наставних средстава (рачунаљка, мере, новац), а наставни садржаји оријентисани су на практичну примену. Унапређивање наставе рачуна, половином 19. века, потпомогнуто је штампањем првих уџбеника: Рачуница, са исцрпним објашњењима, примерима и задацима.

Новим наставним програмом из 1850. године настава рачуна почиње у првом полугодишту првог разреда, а градиво је усаглашено са начином на који је изложено у штампаним уџбеницима. Рад на изради уџбеника прати и виши степен разраде садржаја и методичког поступка, штампањем првих методичких приручника за учитеље.

Наставним планом из 1871. године извршена је подела садржаја по предметима. Аритметички садржаји подељени су на блокове бројева по систему декадног бројевног низа (1-10, 10-100, 100-1000,...). Изменом поступка обраде, била је предвиђена обрада све четири рачунске операције у оквиру блокова, с тим што се прво уводи усмени па писмени рачун. Нарочито је истакнуто да у настави рачуна треба да се користе приручници педагога Стевана Д. Поповића.

Новим законом о школама из 1898. године, народне школе деле се на ниже школе, забавишта и основне школе, и више, грађанске и девојачке, а основно обавезно образовање сведено је на четири године.

Наредне године донет је нови наставни план, а дотадашња настава рачуна мења назив у Рачуница са геометријским облицима, за коју је било предвиђено четири часа недељно у сва четири разреда. Побољшани су услови рада, а осим штапића и руске рачунаљке, у настави рачуна почињу се користити и друга очигледна наставна средства.

Почетком 20. века, квалитет наставе рачунице значајно је порастао захваљујући чињеници да се усталио један програм. Уџбеничка литература знатно је обогаћена, а српска дидактичка литература довољно је развијена да замени дотадашња наставленија Министарства просвете. У периоду између два светска рата долази до експанзије напредних педагошких идеја које су промениле и дужину трајања основног образовања.

Идеја којом се 1929. године предлаже осмогодишње основно образовање реализована је тек три деценије касније, 1958. године, педагошком реформом школства у федералној Југославији.

Данас се образовање у Србији одвија под надзором Министарства просвете, науке и технолошког развоја, а дели се на предшколско, основно, средње и високо образовање.

1.3.3. Настава аритметике у Русији

У средњевековној Русији прве школе су биле организоване најчешће у манастирима, у њима је предавало свештенство. Обука се спроводила на матерњем језику. У школама почетног нивоа децу су учили читању, писању, певању и богословији, док су у школама вишег нивоа децу племића припремали за државнички и црквени посао. Ученици су добијали знања из филозофије, реторике, граматике, упознавани су са византијским историјским делима, географским и природно научним радовима.

Реформа цара Петра Великог у првој трећини 18. века је показала да постоје потребе државе у погледу повећања броја образованих људи. Традиција да се позивају стручњаци из земаља Европе, а такође да се руска омладина образује у иностранству, нису могли да обезбеде решавање овог проблема. По први пут је учињен покушај да се створи државни систем образовања, појавила се светска школа, била је разрађена основа прихваћена у тадашњем свету система за обучавање и васпитање. [4]

На иницијативу руског цара су организоване тзв. „цифарне" школе (вид основне опште образовне школе). У свакој од губернија уз архијерејске домове и манастире су отваране школе за обуку у писмености, математици, геометрији и другим „бројчаним мудростима" за децу племства, државне службенике, децу добро стојећих грађана узраста од 10 до 15 година. Организоване су биле и гарнизонске школе у оквиру гарнизона, за децу војника и разне приватне школе.

Преломни тренутак у историји образовања у Русији су биле реформе 60.-тих година 19. века. Према „*Статуту о почетним народним училиштима*" (1864. године) све школе су постале опште доступне и за остале грађане (осим племства и чиновника).

У таквом друштвеном и историјском окружењу А.П. Кисељев почиње да пише своје уџбенике.

[4] Болгарский Б.В., *Op. cit* . , 275 - 284

1.4. Кратка биографија А.П. Кисељева

Андреј Петрович Кисељев (*Андрей Петрович Киселев*), рођен је у Мтсенску 30. новембра 1852. године, умро у Лењинграду, 8. новембра 1940.године и био је руски и совјетски математичар.

Кисељев је похађао окружну школу у Мтсенску, а касније је уписао Гимназију у Орелу, главном граду у региону. Завршио је гимназију 1871. године са изузетним успехом и исте године уписао физичко-математички факултет универзитета у Санкт Петербургу. Кисељев је 1875. године дипломирао на универзитету и диплома му је омогућила да након тога предаје у гимназији. Предавао је математику, механику и техничко цртање у Вороњешкој реалној школи до 1891. године, затим у Вороњешком кадетском корпусу до 1901. године, након чега се пензионисао.

Током периода у коме је предавао почео је и да самостално пише уџбенике. Објавио је „*Систематски курс аритметике за средње образовне установе*“ (1884.), „*Елементарну алгебру*“ (1888.) и „*Елементарну геометрију*“ (1892.). Те књиге су се разликовале од тада постојећих уџбеника вишим теоријским нивоом, доследношћу, јасноћом и сажетошћу. Они су убрзо постали главни уџбеници математике у средњим школама у Русији.

После 1917. године и великих промена у Русији, Кисељев се вратио у наставу, настављајући да ради на усавршавању својих уџбеника. Његови уџбеници аритметике, алгебре и геометрије су наново издавани и током 20 година били су важни уџбеници у средњим школама у СССР . Одликован је Орденом рада 1933. године.

Од многих уџбеника које је написао три су постала основ текстова школске математике у Русији током многих година: „*Систематски аритметички курс за средње школе*“, „*Елементарна алгебра*“, „*Елементарна геометрија*“. Ови уџбеници су и даље били у употреби за време Совјетског Савеза, веома хваљени због добре логичке организације и јасноће грађе, упркос томе што су имали неке логичке празнине, које су биле ван разумевања обичног ученика. Кисељев је сам сугерисао да су својства доброг уџбеника прецизност, једноставност и концизност. До 1950.-их Кисељевова геометрија је још увек била у широкој употреби.

Почетком 2000.-их ова три наслова поново су издата и то пре свега да би се учитељи средњих школа упознали са стилом математичког образовања коришћеним пре једног века. Од тада за ове уџбенике постоји повећано интересовање и наставника и ученика.

Слика број 1 : Андреј Петрович Кисељев

Објављени радови Кисељева:

- „*Систематски аритметички курс за средње школе*“ (1884.);
- „*Елементарна алгебра*“ (1888.);
- „*Елементарна геометрија“* (1892.-1893.);
- „*Додатни чланци из алгебре*“- курс за 7. разред реалне школе (1893.);
- „*Кратка аритметика за градске школе*“ (1895.);
- „*Кратка алгебра за гимназије и теолошке семинаре*“ (1896.);
- „*Основна физика за средње школе са много вежби и задатака*“ (1902.) ;
- „*Физика*“, два издања (1908.);
- „*Правила диференцијалног и интегралног рачуна*“ (1908.);
- „*Основна изведбена доктрина за реалне школе 7. разреда*“ (1911.);
- „*Графички приказ неких функција разматраних у елементарној алгебри“* (1911.);
- „*Питања елементарне геометрије која се обично решавају уз помоћ ограничења*“ (1916.);
- „*Кратка аритметика за више разреде основне школе* “ (1917.);
- „*Кратка аритметика за градске окружне школе*“ (1918.);
- „*Ирационални бројеви*“ (1923.);
- „*Елементи алгебре и анализе*“ (1-2, 1930.-1931.).

2. Приказ уџбеника А. П. Кисељева

2.1. Важни делови уџбеника из 1912.

У првом делу уџбеника приказано је рачунање.

Први део чини: **Концепт броја** [5]

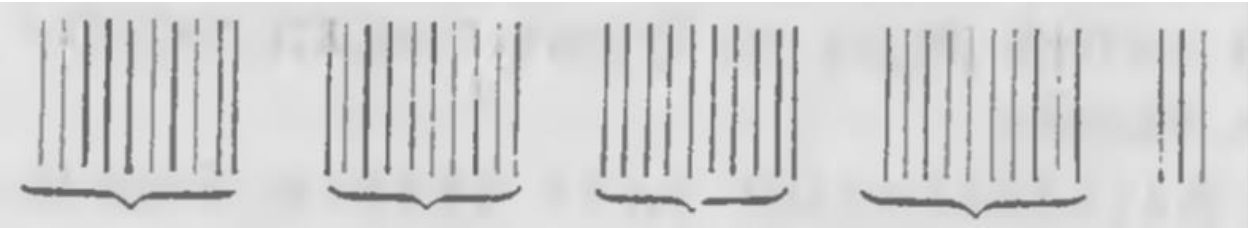
Приказан је скуп природних бројева и декадни бројни систем, где се бројеви наводе речима или коришћењем цифара: 1,2,3,4,5,6,7,8,9, и 0 (укупно 10 цифара).

Тако је наведен распоред цифара :

- јединица на првом месту са десне стране, десетица на другом, стотина на трећем, хиљада на четвртом итд.

Напоменуто је да са леве стране броја није дозвољено писати нулу (нпр. уместо 024 пише се 24).

Цртежом је дат приказ броја 43 помоћу штапића:



Слика број 2 : Приказ броја помоћу штапића

или: 4 x 10 + 3 = 43

Објашњено је и записивање вишецифрених бројева. За пример је узет број 35 милијарди 806 милиона 7 хиљада и 63.

Тако би овај број могао да буде приказан у блоковима по 3 броја :

35' 806' 7' 63'

Ипак, овакав приказ вишецифрених бројева био би сасвим непрактичан и неодговарајући. Стога овај број записујемо као:

35 806 007 063.

Стога прве 3 цифре с десна представљају број јединица, следеће 3 број хиљада, потом следеће 3 број милиона итд.

Приказано је и читање вишецифрених бројева са датим примером:

5183000567000.

[5] Киселев, А. П, *Систематическии курс арифметики*, Москва, 1912, репринт: Орел, 2002, стр. 14-22

Подељен на делове постаје: 5 ' 183 ' 000' 567' 000 и чита се : „5 билиона 183 милијарде 567 хиљада“.

Истакнуто је да свака цифра читана са десна на лево има 10 пута већу вредност од претходне.

Уводи се и појам класе и разреда у броју: јединице су тако 1. разред, десетице 2. разред, а стотине 3. разред. Прва 3 разреда чине 1. класу (јединице, десетице и стотине), 2. класу чине хиљаде, десетине хиљада и стотине хиљада, итд.

Различити бројни системи су приказани пре свега од основног - декадног бројног система са основом 10.

Узет је за пример и систем са основом 5 (петични бројни систем), у коме су цифре: 0, 1, 2, 3 и 4. Тако је приказано пребацивање декадног броја: 1766 у бројни систем са основом 5:

1766 : 5 = 353 (остатак: **1**)

353 : 5 = 70 (остатак: **3**)

70 : 5 = 14 (остатак: **0**)

14 : 5 = **2** (остатак: **4**)

Као прва цифра упише се последњи добијени резултат (једноцифрени број) и након тога се додају наведени остаци при дељењу, у обрнутом редоследу. Тако овај број у систему са основом 5 постаје: **24031**.

$(1766)_{10} = (24031)_5$

Може се извршити и провера тачности (враћањем у декадни број).

$2 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 2 \cdot 625 + 4 \cdot 125 + 0 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 =$

$= 1250 + 500 + 15 + 1 =$ **1766**

Следећи пример је пребацивање у систем са основом 12. У овом систему користе се цифре 0, 1 , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, као и додатне ознаке:

a = 10, b = 11.

Пример: пребацити декадни број 121380 у систем са основом 12.

121380 : 12 = 10115 (остатак: **0**)

10115 : 12 = 842 (остатак: 11 = **b**)

842 : 12 = 70 (остатак : **2**)

70 : 12 = **5** (остатак: 10 = **a**)

Број 121380 у декадном бројном систему тако постаје **5a2b0** у бројном систему са основом 12.

Дат је пример пребацивања других бројних система у декадни. Тако је у систему са основом 8:

$$(5623)_8 = 5 \cdot 8^3 + 6 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = (2963)_{10}$$

Наведен је и пример декадног броја 70 у бинарном систему и то је: 1000110. Овај систем је у новије време изузетно важан и заузима приоритетно место у пребацивању из декадног бројног система и обратно.

Наредни део обрађује:

Сабирање. [6]

Уводни задатак: У кутији је остало 5 шибица. Додато је 7 шибица, а потом још 2. Колико сада има шибица у кутији ?

5 + 7 + 2 = 14.

Основно својство сабирања је да збир не зависи од поретка сабирака:

5 + 7 + 2 = 5 + 2 + 7 = 7 + 5 + 2 = 14

За сабирање вишецифрених бројева са једноцифреним може се користити као у следећем примеру:

37 + 8 = 30 + 7 + 8 = 30 + 15 = 45.

Сабирање бројева у више редова. Код сабирања вишецифрених бројева предложено је потписивање бројева једног испод другог, водећи рачуна о томе да се одговарајуће цифре потпишу једне испод других (јединице испод јединица, десетице испод десетица итд.):

$$\begin{array}{r} 13653 \\ 22409 \\ 1608 \\ 346 \\ \hline 38016 \end{array}$$

Аутор предлаже да се у случају потребе за сабирањем већег броја сабирака, они разбију на групе. Тако је дао пример сабирања бројева: 288, 108, 426, 576, 35, 93, 76, 16, 45 и 72.

Прва група:	Друга група:	Трећа група:
288		
108	35	16
426	93	45
576	76	72
1398	**204**	**133**

[6] Киселев, А. П, *Op. cit*, 22 - 26

Коначна сума:

$$\begin{array}{r} 1398 \\ 204 \\ 133 \\ \hline \mathbf{1735} \end{array}$$

Одузимање. [7]

Уводни задатак : У кутији је било 17 шибица. Извађено је 9. Колико је шибица остало у кутији ?

17 - 9 = 8

Наводе се називи: 17 је умањеник, 9 умањилац и 8 разлика.

Истиче се да умањеник не може бити мањи од умањиоца (нпр. 17 - 20).

Ако су умањеник и умањилац једнаки, онда је разлика 0 (17 - 17 = 0).

Посебна пажња је поклоњена одузимању вишецифрених бројева.

Пример: од броја 60072 одузети 7345.

```
 . .   .
 6 0 0 7 2  ---------------------------------- умањеник
   7 3 4 5  ---------------------------------- умањилац
 ---------
 5 2 7 2 7  ---------------------------------- разлика
```

Тачке изнад цифара умањеника означавају да при одузимању на месту јединица : 2 - 5 постаје 12 - 5, како би могло да се изврши одузимање (како је наведено - умањеник не може бити мањи од умањиоца), док се цифра десетица (7) умањује за 1 и постаје 6. То правило се наставља даљим процесом одузимања с десна улево.

Важно правило код одузимања вишецифрених бројева је писати одговарајуће цифре једне испод других (јединице испод јединица, десетице испод десетица итд.)

Поставке задатака код којих је потребно извршити одузимање могу бити различите:

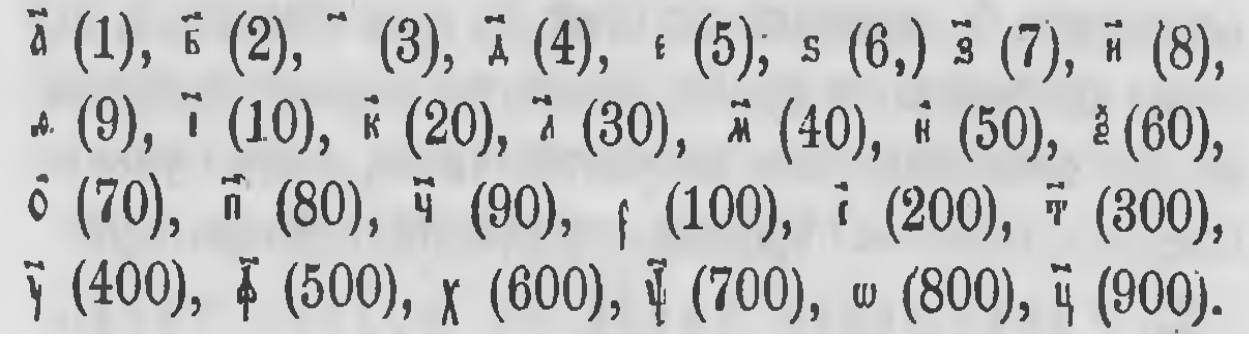
- „за колико је 20 мање од 35 ?“,
- „за колико је 35 веће од 20 ?“.

У оба случаја се користи рачун: 35 - 20 = 15

[7] Киселев, А. П, *Op. cit*, 26 - 30

Словенско и римско обележавање бројева.

У црквеним књигама и у историји словенске писмености појављују се бројеви обележени словима словенске азбуке.

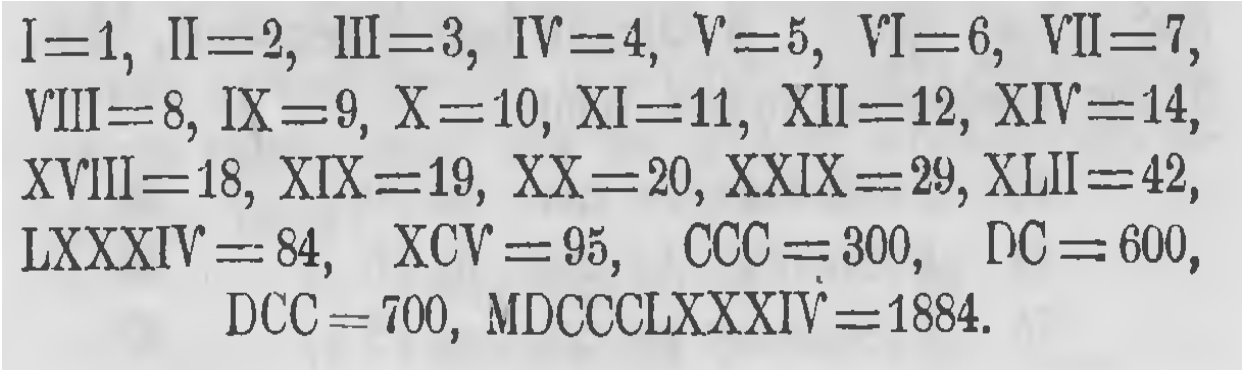


Слика број 3 : Словенско обележавање бројева

Пример:

Тако се означава 1884. (година првог издања овог уџбеника)

Римски бројеви. Систем представљен римским бројевима потиче из античког Рима и задржао се као уобичајен начин писања бројева широм Европе све до касног средњег века. Бројеви у овом систему су представљени комбинацијама слова из латинског алфабета.



Слика број 4 : Римско обележавање бројева

Овај начин може бити проблематичан код приказивања вишецифрених бројева, јер тражи коришћење превеликог броја знакова. Стога је за обележавање хиљада одређено мало слово латинице : *m* (*mille* - хиљада).

На пример:

CLXXX *m* CCCLXIV = 180364

Промене збира и разлике. [8]

Уколико неком од сабирака додамо неки број, сума ће се увећати за тај исти број, а уколико неки од сабирака умањимо за одређени број, збир ће се умањити за тај број. Пример:

73	73	73
18	20 (увећан за 2)	18
40	40	30 (умањен за 10)
131	133 (увећан за 2)	121 (умањен за 10)

Ова особина може се користити када је потребно усмено сабирање. На пример, број 427 треба сабрати са бројем 68. Прво се сабере 427 са 70 (а то је 68 увећано за 2), што даје 497, а потом одузме 2, што даје коначан резултат 495.

Такође приказане су особине одузимања. Уколико умањенику додамо неки број, разлика ће се за тај број повећати. Уколико од њега одузмемо неки број, разлика ће се за тај број смањити.

Код умањиоца је супротно. Уколико умањиоцу додамо неки број, разлика ће бити умањена за тај број, а уколико од њега одузмемо неки број, разлика ће за тај број бити повећана.

Увећање или умањење умањеника и умањиоца за исти број не мења разлику.

Пример:

50	увећан за 10	60	умањен за 10	40
15	увећан за 10	25	умањен за 10	5
35		35		35

У наредном делу описују се означавања рачунских операција (+, -), знаци једнакости и неједнакости (=, < , >), те коришћење заграда. Са тим појмовима се упознају ученици у почетним разредима основне школе.

За коришћење заграде је дат пример: од броја 200 одузети збир бројева 35 и 20.

200 - (35 + 20)

Потом је објашњено коришћење заграда различитих врста, које одређују приоритете у извршавању рачунских операција.

Тако се може користити више заграда: 100 + { 160 - [60 + (7 + 8)] }, што значи да прво треба извршити сабирање 7 и 8, потом додати тај збир броју 60, након тога све одузети од 160 и броју 100 додати добијену разлику.

[8] Киселев, А. П, *Op. cit*, 31 - 34

Множење. [9]

Задатак: Једна свеска кошта 7 копејки. Колико коштају 4 свеске ?

Помоћу сабирања задатак би се решио овако: 7 + 7 + 7 + 7 = 28

Помоћу множења задатак би био записан:

7 · 4 = 28, где 7 представља множеник, 4 је множилац, а 28 је производ.

Код множења са нулом (0 је множеник, или множилац), производ је увек 0. Пример: 0 · 5 = 0, пошто је збир: 0+0+0+0+0 = 0. Такође и 5 · 0 = 0.

Производ не зависи од места чиниоца, тј. множеник и множилац могу да замене места и производ ће остати исти. На пример: 50 · 36 = 36 · 50.

Дата је и таблица множења једноцифрених бројева, која се учи у почетним разредима основне школе (од 2 · 2 = 4 до 9 · 9 = 81).

Множење вишецифреног броја са једноцифреним бројем.

Пример: 846 · 5 = 4230.

Множење бројевима са степеном десетке (10, 100, 1000 и са више нула).

Пример: 358 x 10 = 358**0** (на месту цифре јединица додаће се нула)

296 x 1000 = 296**000**.

Правило: уколико множимо број са бројем степена десетке, потребно је на множеник додати онолико нула колико их има множилац.

Множење вишецифрених бројева. Пример: 3826 x 472

$$\begin{array}{r} 3826 \\ \times\ 472 \\ \hline 7652 \\ 26782\mathbf{0} \\ 1530\mathbf{00} \\ \hline 1805872 \end{array}$$

Код множења већег броја чиниоца могу им се мењати места како би се на што погоднији начин одредио производ.

Тако: 7 x 2 x 4 x 5 (у уџбенику записано је као : **7 . 2 . 4 . 5**) може да се прикаже и као (7 x 4) x (2 x 5) = 28 x 10 = 280. У овом случају погодност представља множење 2 x 5 што даје број 10.

Степеновање. Производ једнаких чинилаца. Тако је 5 x 5 = 25, названо „други степен броја 5“. производ 3 x 3 x 3 = 27 или „трећи степен броја 3“, 2 x 2 x 2 x 2 = 16 „четврти степен броја 2“ итд.

Приказује се као: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$, $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$

[9] Киселев, А. П, *Op. cit*, 35 - 51

Дељење. [10]

Дељење је приказано као обрнута рачунска операција од множења. Тако поделити 24 са 6 значи одредити који број треба помножити са 6 да би се добио производ 24.

У примеру 24 : 6 = 4, 24 означава дељеник, 6 је делилац, а 4 количник.

Као знак за дељење може да се употреби и црта: $\frac{24}{6}$.

Дељење са остатком.

Пример: поделити 27 са 6. Није могуће помножити 6 неким бројем да би се добило 27. Стога:

27 : 6 = 4 (остатак 3). Тако је 27 = 6 x 4 + 3.

Дељење се употребљава када:

- треба сазнати колико пута се мањи број садржи у већем (сазнати колико пута се 8 рубаља садржи у 48 рубаља),
- треба сазнати колико пута је неки број већи или мањи од другог,
- треба број поделити на одређени број једнаких делова,
- када број треба умањити одређени број пута.

Дати су примери како одредити да ли је резултат дељења једноцифрени или вишецифрени број.

534 : 37 = ? Када 37 помножимо са 10 добија се 370. Стога је резултат дељења већи од 10.

534 : 68 = ? Пошто је 68 x 10 = 680, можемо закључити да је количник мањи од 10, тј, да је једноцифрени број.

Дељење вишецифрених бројева - користи се дељење са потписивањем:

Пример: Потребно је израчунати колико пута се 23 рубље садржи у 64508 рубљи.

```
64508 : 23
46    |  2804
185
184
  108
   92
   16
```

Резултат је 2804 и остатак 16.

[10] Киселев, А. П, *Op. cit*, 52 - 71

Приказано је и упрошћавање дељења када се делилац завршава нулама:

5463**4** : 10 = 5463 (остатак 4)

54**634** : 1000 = 54 (остатак 634)

У случају да дељеник и делилац делилац нису степени десетке, али се завршавају са нулама:

3 5 0 ~~0 0~~ : 7 3 ~~0 0~~ = 350 : 73 = 4 (остатак: 58)

Проверавање резултата дељења:

Пример: 8375 : 42 = 199 (остатак 17).

Истовремено 199 x 42 + 17 = 6356 + 17 = 8375.

Подела делиоца на чиниоце: Потребно је поделити број 60 са 15. Познато је да је 15 = 5 x 3. Поделићемо 60 са 5, а потом тај количник са 3.

60 : 5 = 12; 12 : 3 = 4.

Коначно:

60 : 15 = 4

При усменом дељењу 1840 са 20, најпогодније је раставити 20 као 10 x 2 и након тога извршити два дељења:

1840 : 10 = 184 ; 184 : 2 = 92.

Наведена су и следећа правила. Уколико се дељеник увећа неколико пута и количник се увећава, а уколико се умањи неколико пута, количник се умањује.

10 : 2 = 5, 20 : 2 = 10, 30 : 2 = 15 итд.

Са делиоцем је супротно. Увећањем делиоца количник се умањује, а умањивањем делиоца количник се повећава.

48 : 2 = 24, 48 : 4 = 12, 48 : 6 = 8 итд.

Други део овог уџбеника чини преглед различитих мерних величина. Ове величине су:

- дужина,
- површина,
- запремина,
- обим,
- висина,
- време,
- новац и многе друге величнне.

Мере за дужину које су коришћене у Русији :

- миља = 7 врста
- врста = 500 *саженямъ* [11]
- *сажень* = 3 аршина
- аршин = 16 врхова (*вершкамъ*)
- *сажень* = 7 стопа (*футамъ*)
- стопа (*футъ*) = 12 инча (*дюймамъ*)
- инч (*дюймъ*) = 10 линија (*линіямъ*)

Мере за површину се изводе из датих. Дат је пример поља правоугаоног облика, чија је дужина 10 аршина, а ширина 7 аршина. Тако површина постаје:

10 x 7 = 70 квадратних аршина.

Тако је у оквиру таблице мера површина дато : квадратна миља = 49 квадратних врста, квадратна врста = 250000 *кв. саженямъ*, итд...

Мере запремине су назване кубним мерама. Пример: фигура је ограничена са 6 правоугаоника и има дужину 10 аршина, ширину 7 аршина и висину 8 аршина. Тако основа овакве фигуре има 10 x 7 = 70 квадратних аршина. Потом ову површину помножимо са висином: 70 x 8 = 560 кубних аршина.

Уколико би имали коцку чије су ивице дужине 3 аршина, запремина такве коцке је : 3 x 3 x 3 = 27 кубних аршина.

За меру запремине течности основна мера је ведро. Запремина која одговара једном ведру је 750 кубних инча, а маса 30 фунти воде при температури од 16 2/3° целзијуса.

Потом су наведене мере за новчане вредности, мере за време, објашњења разлика између Јулијанског и Грегоријанског календара.

На примеру је приказано како се одређује маса у одређеној мерној јединици, уколико је дата у другим јединицама. Маса износи 5 пуда 4 фунте и 15 лота. Потребно је одредити масу у златницима ако једном лоту одговара 3 златника. [12]

Та маса се претвара у тражену меру на следећи начин:

5 x 40 = 200 (фунти у 5 пуда), 200 + 4 = 204 фунте

204 x 32 = 6528 (лота у 5 пуда и 4 фунте), 6528 + 15 = 6543

6543 x 3 = 19629 златника.

[11] Стара руска мера за дужину, око 2,1336 m

[12] Јединица масе која одговара 4,266 грама, назив из времена Кијевске Русије, потиче од назива мање златне монете „*золотник*“.

Нарочито је акцентована важност претварања мерних величина у одговарајуће при њиховом сабирању, одузимању, множењу и дељењу.

Следе задаци који се баве рачунањем времена. Пример:

Пароброд је кренуо из луке 27. априла, у 7 часова ујутру. Када се пароброд враћа у полазну луку ако је у путу провео 6 месеци 8 дана 21 час и 40 минута ?

До решења се долази тако што се прво додају месеци, потом дани, па часови и коначно минути. Одговор: 5. новембра у 4 сата и 40 минута.

Такође је дат пример који може да се реши аритметичким начином. Цар Александар Први је ступио на престо 12. марта 1801. године, а преминуо је 19. новембра 1825. године. Колико дуго је трајала његова владавина ?

Понуђено је решење које се рачуна преко времена од рођења Христа: тако је до 12. марта 1801. прошло 1800 година 2 месеца и 11 дана, а од 19. новембра 1825. је прошло 1824 године 10 месеци и 18 дана.

1824 године	10 месеци	18 дана
− 1800 година	2 месеца	11 дана
24 године	8 месеци	7 дана

Трећи део уџбеника бави се питањима дељивости бројева.

Број је дељив другим бројем ако је могуће тај број поделити другим без остатка. Тако можемо рећи да је број 15 дељив бројем 3, али није дељив бројем 4.

Када су сабирци дељиви неким бројем онда је дељив тим бројем и њихов збир. Бројеви 15, 20 и 40 су дељиви бројем 5, самим тим је и збир 15 + 20 + 40 дељив бројем 5.

Када је један од сабирака дељив неким бројем, а други сабирак није дељив тим бројем онда збир није дељив истим бројем. Број 20 је дељив бројем 5, а 17 није дељив бројем 5. Онда 20 + 17 није дељив бројем 5.

Дељивост бројем 2. Бројеве дељиве бројем 2 називамо парним, а оне који нису дељиви непарним бројевима. Такође сваки број који се завршава нулом дељив је бројем 2. Дељив бројем 2 је сваки број који се завршава са нулом или парном цифром.

Збир два парна броја је дељив бројем 2, док збир парног и непарног броја није дељив бројем 2 (320 + 7 = 327, 320 + 8 = 328).

Дељивост бројем 4. Познато је да је 100 дељив бројем 4 (100 : 4 = 25). Број је дељив бројем 4 уколико се завршава са две нуле, или уколико је двоцифрени број којим се тај број завршава дељив бројем 4.

2350 = 2300 + 50, 50 није дељив бројем 4, стога 2350 није дељиво бројем 4

2348 = 2300 + 48, 48 је дељиво бројем 4, стога је 2348 дељиво бројем 4.

Дељивост бројем 8. Број 1000 је дељив бројем 8 (1000 : 8 = 125). Број је дељив бројем 8 уколико се завршава са три нуле, или ако је троцифрени број који чине последње три цифре дељив бројем 8.

Дељивост бројевима 5 и 10. Број је дељив бројем 5 уколико је последња цифра броја 0 или 5. Број је дељив бројем 10 ако се завршава нулом.

Дељивост бројњвима 3 и 9. Број је дељив бројем 3 уколико је збир цифара тог број дељив бројем 3. Број је дељив бројем 9 уколико је збир цифара тог број дељив бројем 9.

Уколико је збир цифара 18, онда је тај број дељив бројевима 3 и 9 , пошто је 18 дељиво бројевима 3 и 9.

Пример : 2457 = 999 + 999	+ 2
99 + 99 + 99	+ 4
9 + 9 + 9 + 9	+ 5
	+ 7

Суме са леве стране су дељиве бројевима 3 и 9 (сабирци су: 9, 99 и 999) а сума са десне стране (2 + 4 + 5 + 7 = 18) такође је дељива истим бројевима. Стога је број 2457 дељив бројевима 3 и 9.

Дељивост бројем 6. Уколико је број дељив бројем 6 онда је дељив бројевима 2 и 3, пошто су 2 и 3 чиниоци броја 6 (6 = 2 x 3).

Дељивост бројевима 12, 18 и 15.

Број је дељив бројем 12 уколико је дељив бројевима 3 и 4.

Број је дељив бројем 18 уколико је дељив бројевима 2 и 9.

Број је дељив бројем 15 уколико је дељив бројевима 3 и 5.

Дељивост бројевима 7, 11 и 13. Познато је да је 1000 + 1 (или 1001) дељив бројевима 7, 11 и 13. Тада се сваки број који је већи од 1000 може приказати као:

$a \cdot 1000 + b$ или: $a \cdot 1001 + b - a$

У случају да је a > b : $a \cdot 1001 - (a - b)$

У случају да је a < b : $a \cdot 1001 + (b - a)$

Пошто је код првог сабирка чинилац 1001 дељив бројевима 7, 11 и 13, потребно је утврдити да ли је *а - б* или *б - а* дељиво наведеним бројевима.

Пример: Да ли је број 11673207 дељив бројем 7 ?

Три последње цифре овог броја су 207. Стога можемо да тврдимо да је 207207 дељиво са 7 (пошто је 207 · 1001 = 207207).

11673 207

- 207 207

11466 000

Даље 11011 је дељив бројем 7 (пошто је 11 · 1001 = 11011).

11 466

- 11 011

455

Пошто је 455 дељив бројем 7, закључујемо да је број 11673207 дељив бројем 7.

Дељивост бројем 37. Базирана је на томе да је 999 дељив бројем 37. Самим тим и број $a \cdot 999 + (a + b)$ треба да буде дељив бројем 37, што зависи од дела $a + b$, који се даље испитује.

Прости и сложени бројеви. Прост број је број дељив само јединицом и самим собим.

Сложен број је онај који има још делилаца, осим јединице и самог себе. Такав број је 12. Осим са 1 и са 12 дељив је са 2, 3, 4 и 6.

Наведени су тако прости бројеви мањи од 100 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Теорема о бесконачном броју простих бројева. Претпоставимо супротно, тј. да је број простих бројева ограничен. Тада највећи прости број можемо да означимо као *a.* Тако можемо да прикажемо одређени природан број као производ свих простих бројева увећан за 1 :

$N = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 ... \cdot a) + 1$

У том случају број N треба да буде сложен број, већи од највећег простог броја. Из тога би даље следило да је тај број дељив неким бројем из низа 2, 3, 5, ... *a*. Пошто то није тачно, N је такође прост број, тј. прост број већи од простог броја који смо прогласили за највећи. Тако је доказано да постоји бесноначан број простих бројева.

Ератостеново сито је поступак за одређивање простих бројева мањих од неког задатог броја *n*. [13]

Из низа природних бројева прво се уклања број 2, означава се да је прост и из низа уклања све његове садржиоце (тј. бројеве дељиве са 2), јер то сигурно нису прости бројеви. Затим се поново узима следећи број који није избачен (број 3) и уклањају се сви његови садржиоци, потом они дељиви са 5, 7, 11 итд.

[13] Ератостен из Кирене (Кирена, 276. п. н. е.- Александрија, 194. п. н. е.) је био грчки математичар.

Разлагање сложеног броја на просте чиниоце.

Пример: разложити сложени број 12 на просте чиниоце. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

Други пример: Разложити број 420 на просте чиниоце.

420 : 2 = 210, 210 : 2 = 105, 105 : 3 = 35, 35 : 5 = 7

Коначно: $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Препоручени приказ разлагања бројева на чиниоце је следећи:

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Када се број разлаже на већи број једнаких чиниоца, онда је погодно приказати производ помоћу степеновања.

$14000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot 7$

Да би се пронашли сви делиоци неког броја потребно га је разложити на просте чиниоце.

Највећи заједнички делилац [14] То је највећи могући број који је истовремени делилац два или више бројева.

Пример: Највећи заједнички делилац за бројеве 18, 24 и 30 је 6.

Два броја чији је највећи заједнички делилац 1 називају се **узајамно прости бројеви**. Такви су бројеви 14 и 15.

Када тражимо највећи заједнички делилац за неколико бројева, потребно је прво те бројеве разложити на чиниоце, а потом помножити оне чиниоце који су заједнички за све бројеве.

Пример: Наћи највећи заједнички делилац за бројеве: 210, 1260 и 245.

210	2	1260	2	245	**5**
105	3	630	2	49	**7**
35	**5**	315	3	7	7
7	**7**	105	3		
		35	**5**		
		7	**7**		

Тако би највећи заједнички делилац био: $5 \cdot 7 =$ **35**.

[14] Киселев, А. П, *Op. cit*, 119 - 123

Налажење највећег заједничког делиоца помоћу дељења:

Пример: Потребно је наћи највећи заједнички делилац за бројеве 54 и 18.

54 : 18 = 3, што значи да је 54 дељиво са 18. Ако је већи број дељив са мањим, њихов највећи заједнички делилац је мањи број (у овом случају 18).

Ако већи број поделимо са мањим, њихов највећи заједнички делилац постаје највећи заједнички делилац мањег броја и остатка.

Пример: Одредити највећи заједнички делилац за 85 и 30.

85 : 30 = 2 (ост. 25)

85 = (30 · 2) + 25

Тако два пара бројева (85, 30) и (30, 25) имају једнак највећи заједнички делилац и то је 5.

Други начин добијања највећег заједничког делиоца за 2 броја помоћу дељења је да се већи подели са мањим и да се потом делилац подели са остатком тог дељења. Потом се тај процес наставља све док се не стигне до последњег дељења које нема остатка. Тај последњи делилац постаје највећи заједнички делилац за наведена два броја.

Пример: Одредити највећи заједнички делилац за бројеве 391 и 299.

391 : 299 = 1 (остатак 92)

299 : 92 = 3 (остатак **23**)

92 : 23 = 4 (остатак 0).

Највећи заједнички делилац за (391, 299) је **23**.

Најмањи заједнички садржалац за два цела броја је најмањи природан број који је дељив без остатка са оба.

Најмањи заједнички садржалац је најмањи могући број у коме се ти бројеви садрже. Тако најмањи заједнички садржалац за 6, 15 и 20 је број 60.

Да би се добио најмањи заједнички садржалац потребно је бројеве раставити на просте чиниоце, потом чиниоцима једног броја додати недостајуће чиниоце из другог, трећег итд. и помножити их све заједно.

Пример: Одредити најмањи заједнички садржалац за бројеве: 100, 40 и 35. Прво ове бројеве раставимо на просте чиниоце.

100 = **2 · 2 · 5 · 5**, 40 = 2 · 2 · **2** · 5, 35 = 5 · **7**

Најмањи заједнички садржалац за дате бројеве:

2 · 2 · 5 · 5 · 2 · 7 = **1400.**

Наведени су неки карактеристични случајеви:

- Када бројеви за које тражимо најмањи заједнички садржалац немају заједничких чинилаца. Пример: три броја 20, 49 и 33.

$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, $49 = 7 \cdot 7$, $33 = 3 \cdot 11$

У том случају најмањи заједнички садржалац је производ самих тих бројева:

$20 \cdot 49 \cdot 33 = 32340$

Када се сви бројеви садрже у највећем броју. Пример: бројеви 5, 12, 15 и 60. Број 60 је дељив са бројевима 5, 12 и 15. Стога је најмањи заједнички садржалац за ове бројеве 60.

Разломци су описани у четвртом поглављу овог уџбеника. [15]

На почетку је објашњено записивање разломака .

Разломак „три петине“ се записује на следећи начин : $\frac{3}{5}$ или $^3/_5$.

Код разломка број изнад црте назива се бројилац (*числител*), а испод црте именилац (*знаменател*).

Мешовити бројеви се записују на следећи начин.

$3\frac{2}{7}$ или: $3\,^2/_7$.

Једнаки и неједнаки разломци. Можемо рећи да је $^3/_4 = {}^6/_8$. Такође у случају неједнаких разломака: $^1/_5 > {}^1/_8$.

Прави и неправи разломци. Прави разломци су они код којих је бројилац мањи од имениоца. Уколико је бројилац већи од имениоца или једнак имениоцу, ради се о неправом разломку (у садашњим уџбеницима помиње се и појам „привидни разломак“). Очигледно је да су прави разломци мањи од 1, а неправи једнаки или већи од 1.

$^7/_8 < 1$, $^8/_8 = 1$, $^9/_8 > 1$.

Цели бројеви се исто могу приказати као разломци. Тако је:

$25 = \frac{100}{4}$, $100 = \frac{1700}{17}$.

Свеки цео број се може приказати као разломак коме је именилац број 1. Тако уместо 5 може да се напише $^5/_1$.

Претварање мешовитог броја у неправи разломак:

Пример: Претворити $8\,^3/_5$ у неправи разломак. Потребно је израчунати колико је 8 целих и три петине у петинама. У 8 целих је 8 x 5 = 40 петина. Укупно је 40 + 3 = 43 петине. Коначно : $8\,^3/_5 = {}^{43}/_5$.

[15] Киселев, А. П, *Op. cit*, 127 - 144

Претварање неправог разломка у мешовити или цели број:

Пример: Претворити $^{100}/_{8}$ у мешовити број. Пошто 1 (један) у себи садржи 8 осмина, потребно је 100 поделити са 8. Количник је 12 и остатак 4.

Тако је: $^{100}/_{8} = 12\ ^{4}/_{8}$.

Измена величине разломка:

- Са увећавањем бројиоца разломак се увећава.

$^{5}/_{9} > {}^{4}/_{9}$

- Са увећавањем имениоца, разломак се умањује.

$^{5}/_{10} < {}^{5}/_{9}$

Из тога следи да се умањењем бројиоца разломак умањује, а да се умањењем имениоца разломак повећава.

Када бројилац разломка увећамо неколико пута тада и цео разломак увећавамо толико пута.

Увећавањем бројиоца разломка $^{4}/_{10}$ 3 пута добићемо $^{12}/_{10}$, а то је и разломак увећан 3 пута.

Када именилац разломка увећамо неколико пута тада и цео разломак умањимо толико пута.

Увећавањем имениоца разломка $^{4}/_{10}$ 5 пута добићемо $^{4}/_{50}$, а то је и разломак умањен 5 пута.

Уколико и бројилац и именилац разломка увећамо или умањимо исти број пута, тај разломак се неће променити.

Пример: Уколико и бројилац и именилац разломка $^{4}/_{10}$ поделимо са 2 разломак ће постати $^{2}/_{5}$ и биће једнак почетном разломку . Дакле, $^{4}/_{10} = {}^{2}/_{5}$.

Скраћивање разломака.

Постиже се дељењем бројиоца и имениоца истим бројем. како је већ наведено, величина разломка се при томе не мења.

Скраћивање разломака може да се врши докле год не стигнемо до облика који је нескратив (пример):

$$\frac{84}{360} = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$$

Тако је у првом кораку разломак скраћен са 4, а у другом са 3. Последњи разломак се не може даље скраћивати.

Да би се одједном разломак скратио до нескративог облика потребно је одредити највећи заједнички делилац за бројилац и именилац разломка и потом их поделити са истим.

Тако је за бројеве 391 и 527 највећи заједнички делилац 17. Ако би ови бројеви били бројилац и именилац разломка може се извршити скраћивање:

$$\frac{391}{527} = \frac{391:17}{527:17} = \frac{23}{31}$$

Довођење разломака на заједнички именилац.

Пример: Дати су разломци $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{15}$. Први корак је одредити најмањи заједнички садржалац за бројеве 12 и 15, који представљају имениоце ових разломака. То је број 60. (60 = 12 x 5, 60 = 15 x 4).

Потом бројилац и именилац првог разломка множимо са 5, а другог са 4.

$$\frac{5}{12} = \frac{5\cdot 5}{12\cdot 5} = \frac{25}{60} \quad \text{и} \quad \frac{7}{15} = \frac{7\cdot 4}{15\cdot 4} = \frac{28}{60}$$

Наведени су неки карактеристични случајеви:

- Разломци $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{15}$ и $\frac{5}{8}$ имају имениоце који су узајамно прости бројеви. Пошто је њихов најмањи заједнички садржалац: 7 · 15 · 8, то ћемо бројилац и именилац првог разломка множити са 15 · 8 = 120, другог са 7 · 8 = 56, а трећег са 7 · 15 = 105.

$$\frac{3}{7} = \frac{3\cdot 120}{7\cdot 120} = \frac{360}{840}, \quad \frac{4}{15} = \frac{4\cdot 56}{15\cdot 56} = \frac{224}{840}, \quad \frac{5}{8} = \frac{5\cdot 105}{8\cdot 105} = \frac{525}{840}$$

- Код разломака $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{15}$ и $\frac{8}{315}$ именилац трећег разломка је дељив са имениоцима првог и другог. (315 : 7 = 45, 315 : 15 = 21). Стога:

$$\frac{3}{7} = \frac{3\cdot 45}{7\cdot 45} = \frac{135}{315}, \quad \frac{7}{15} = \frac{7\cdot 21}{15\cdot 21} = \frac{147}{315}, \quad \frac{8}{315} = \frac{8}{315}$$

Следи одређивање дела неког броја помоћу разломака.

Пример : одредити ¾ броја 26.

Прво налазимо ¼ броја 26. То је $\frac{26}{4}$. Потом ¾ је $\frac{26\cdot 3}{4} = \frac{78}{4}$.

Коначно: $\frac{78}{4} = 19\frac{1}{2}$.

Следећи пример односи се на одређивање дела разломка:

Одредити $\frac{8}{3}$ од $\frac{5}{6}$.

Прво се одређује $\frac{1}{3}$ од $\frac{5}{6}$ тако што се именилац другог разломка помножи са 3, а потом се одреди $\frac{8}{3}$ тог броја тако што се бројилац помножи са 8.

$$\frac{5\cdot 8}{6\cdot 3} = \frac{40}{18} = 2\frac{2}{9}.$$

Такође приказано је добијање броја од кога се добија неки део.

Пример: $\frac{3}{8}$ неког броја је 5. Одредити тај број.

Одреди се $\frac{1}{8}$ тог броја тако што се 5 подели са 3. То је $\frac{5}{3}$. Потом се одређује тај број тако што се резултат помножи са 8: $\frac{5 \cdot 8}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$

Следе рачунске операције са разломцима.

Сабирање разломака.

Једноставан пример сабирања разломака:

$\frac{7}{11} + \frac{3}{11} + \frac{5}{11} = \frac{7+3+5}{11} = \frac{15}{11} = 1\frac{4}{11}$

Правило: Уколико је потребно сабрати разломке са различитим имениоцима, потребно је свести те имениоце на најмањи заједнички садржалац и онда извршити сабирање.

Пример: $\frac{3}{4} + \frac{7}{10} + \frac{9}{16} = \frac{3 \cdot 20}{4 \cdot 20} + \frac{7 \cdot 8}{10 \cdot 8} + \frac{9 \cdot 5}{16 \cdot 5} =$

$= \frac{60+56+45}{80} = \frac{161}{80} = 2\frac{1}{80}$.

Одузимање разломака.

$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7-3}{8} = \frac{4}{8}$

Као и код сабирања различити имениоци се доводе на најмањи заједнички садржалац, након чега се врши одузимање.

Пример одузимања мешовитог броја од целог броја:

$7 - 2\frac{3}{5} = 6\frac{5}{5} - 2\frac{3}{5} = 4\frac{2}{5}$

Множење разломака.

Множење разломка и целог броја: $\frac{3}{10} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

Множење разломка и целог броја се врши тако што се цели број помножи са бројиоцем разломка, а именилац се препише.

Множење разломка разломком.

Врши се тако што се бројилац првог разломка помножи са бројиоцем другог, а именилац са имениоцем.

Пример : Помножити $\frac{3}{5}$ са $\frac{7}{8}$.

$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 8} = \frac{21}{40}$

Скраћивање код множења разломака:

4 (скратити бројилац и именилац са 4)

$\frac{16}{21} \cdot \frac{5}{28} = \frac{16 \cdot 5}{21 \cdot 28} = \frac{4 \cdot 5}{21 \cdot 7} = \frac{20}{147}$

Дељење разломака.

Дељење разломка целим бројем: када разломак делимо целим бројем, онда или делимо бројилац разломка са тим бројем, или множимо именилац са тим бројем.

$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8:4}{9} = \frac{2}{9}$

$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9 \cdot 4} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

Дељење целог броја разломком:

$3 : \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2}$

Дељење разломка разломком врши се тако што се бројилац разломка дељеника помножи са имениоцем разломка делиоца, а именилац дељеника са бројиоцем делиоца:

$\frac{5}{6} : \frac{7}{11} = \frac{5 \cdot 11}{6 \cdot 7} = \frac{55}{42} = 1\frac{13}{42}$.

Дељење мешовитих бројева врши се истим начином, након што се они претворе у неправе разломке :

$7\frac{3}{4} : 5\frac{1}{2} = \frac{31}{4} : \frac{11}{2} = \frac{31 \cdot 2}{4 \cdot 11} = \frac{31}{22} = 1\frac{9}{22}$

Након тога су дати примери задатака код којих се могу користити рачунске операције са разломцима, везани за различите мерне величине (за дужину, површину, масу и тако даље).

Пето поглавље уџбеника бави се **децималним бројевима**.

Разломци који у имениоцу имају декадне јединице (10, 100, 1000,...) називају се декадни разломци. То су: $\frac{3}{10}$, $\frac{27}{100}$, $\frac{27401}{1000}$, ...

Основни декадни разломци су декадни разломци код којих је бројилац 1.

То су : $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ...

Када декадни разломак желимо да напишемо као децимални број, онда препишемо бројилац са зарезом, тако да са десне стране од зареза треба да буде онолико цифара колико нула има декадна јединица у имениоцу.

Пример : $\frac{578}{10000} = 0{,}0578$

Читање децималних бројева :

7,05 се чита „7 целих и 5 стотих“. Овај број се може написати и као: 7,0500 и 007,05. Нуле се могу дописати са сваке стране броја и број остаје исти.

Упоређивање децималних бројева. Пример: одредити који је број већи: 0,735 или 0,7349987. На основу наведеног први број се може записати као 0,7350000. Тако оба могу да имају исти број цифара, те је јасно да је 0,7350000 > 0,7349987.

Уколико се зарез код децималног броја помери за једно место удесно, број се увећава 10 пута. Тако је број 32,74 већи од броја 3,274 тачно 10 пута.

Обратно: ако се зарез помера за једно место улево, број се умањује 10 пута. За 2 места умањује се 100 пута, за 3 места 1000 пута и тако даље.

Сабирање децималних бројева. Врши се исто као сабирање целих бројева, водећи рачуна о зарезу.

Пример: потребно је сабрати 2,078 + 0,75 + 13,56209.

Потпишимо ове бројеве један испод другог и додајмо нуле како би одговарајуће децимале биле једне испод других.

```
  2,078**0**
+ 0,75**00**
  13,5602
 ---------
  16,3882
```

Одузимање децималних бројева. Врши се исто као одузимање целих бројева, водећи рачуна о зарезу. Пример: потребно је одузети бројеве 5,709 и 0,30785. Овај пример показује важност дописивања непостојећих нула.

```
  5,709**00**
-  0,30785
 ---------
  5,40115
```

Множење децималних бројева. Када множимо децималне бројеве, помножимо их као целе бројеве и на крају производу одредимо онолико децималних места колико их имају множеник и множилац заједно.

```
   8,375  x 2,56  =  21,44
   50250
  41875
 16750
 ---------
 21,44**000**
```

Дељење децималних бројева.

Пример: Поделити 39,47 са 8. Прво поделимо целе бројеве : 39 са 8 и то је 4, са остатком 7. Дописујемо 4 десета и то даје 74 десетих. Делимо 74 десета са 8 и то даје 9 десетих и остатак 2. Дописујемо 7 стотих и то даје 27 стотих итд.

39, 47 : 8 = 4,93375

74

27

30

60

40

0

Може се извршити и заокруживање резултата дељења. Тако број на 3 децимале постаје : 4,933 + $\frac{6}{8}$ или 4,934 - $\frac{2}{8}$.

Да би се добила приближна вредност до ½ децималног разреда, дели се све док се не добије тражена цифра (у овом случају трећа децимала), та бројка се повећава за 1, ако остатак буде већи од ½ делиоца, а у противном се последња цифра оставља непромењена.

У наведеном примеру, децимални број се заокружује као 4,934.

Када делимо децимални број са децималним бројем:

Пример: Поделити 3,753 са 0,85.

Да бисмо добили делилац као цео број и извршили дељење на наведени начин потребно је помножити и дељеник и делилац са 100. Тако се добија:

375,3 : 85 = 4,415...

Пребацивање разломака у децималне бројеве.

Декадни разломци се најлакше пребацују у децималне бројеве.

Тако је 1000 = 10 · 10 · 10 = 2 · 5 · 2 · 5 · 2 · 5 (растављен на просте чиниоце).

Пример:

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{875}{1000} = 0{,}875$$

Други начин пребацивања је поделити бројилац са имениоцем.

Дат је разломак $\frac{23}{8}$. 23 : 8 = 2,875 ; $\frac{23}{8}$ = 2,875.

Коначни и бесконачни децимални бројеви.

Децимални запис разломка може да буде коначан тј. да садржи коначан број децимала, или бесконачан (онај који садржи бесконачан број децимала).

Децимални запис разломка код кога се једна или више децимала истим редоследом бесконачно пута понавља називамо бесконачан периодичан децимални запис разломка.

Тако се децимални број 2,363636... записује као 2,(36).

Уколико је бројилац 1, а именилац 9, 99, 999...

$\frac{1}{9}$ = 0,111... = 0,(1) ; $\frac{1}{99}$ = 0,0101... = 0,(01) ; $\frac{1}{999}$ = 0.001001... = 0,(001)

Правило: Када пребацујемо периодични децимални број у разломак, тада као бројилац упишемо периодични број, а као именилац број са цифрама 9 којих има толико колико има цифара периодични број.

Примери: 0,(7) = $\frac{7}{9}$; 2,(05) = $2\frac{5}{99}$; 0,(063) = $\frac{63}{999}$.

Последњи разломак се може скратити: $\frac{63}{999} = \frac{7}{111}$.

Уколико имамо разломак код кога одређене цифре претходе периодичним, попут 0,3525252... = 0,3(52), тада тај број третирамо као:

3,(52) : 10 = $3\frac{52}{99}$: 10 = $\frac{349}{99}$: 10 = $\frac{349}{990}$.

Као доказ пребацивања бесконачног периодичног броја у разломак узет је број 0.2323...

$x_n = 0,23\,23\,23\ldots 23 = \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + \ldots + \frac{23}{100^n}$ (помножимо обе стране једначине са 100).

$100\,x_n = 23,23\,23\ldots 23 = 23 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \frac{23}{100^3} + \ldots + \frac{23}{100^{n-1}}$

Из прве и друге једначине следи:

$99\,x_n = 23 - \frac{23}{100^n}$

$\mathbf{x_n = \frac{23}{99} - \frac{23}{99 \cdot 100^n}}$

На тај начин уочавамо да уколико **n** тежи бесконачности $\frac{23}{99 \cdot 100^n}$ постаје веома мали број и децимални број може да се прикаже као разломак $\frac{23}{99}$.

Даље се у уџбенику обрађује **метрички систем мера**. Овај систем се овде назива и „француски“ систем мера (за разлику од већ поменутог традиционалног).

За јединицу дужине у овом систему одређен је метар. Делови метра су : дециметар (1/10 метра), центиметар (1/100), милиметар (1/1000).

Веће јединице од метра су: декаметар (10 метара), хектометар (100) и километар (1000).

Дат је и приближан однос метричког система са традиционалним мерама.

Тако је 1 метар = 22 ½ врхова = 1,4 аршина = 3 ¼ фута.

За јединице површине користе се квадратни метар, али и ар (1 ар = 100 квадратних метра) и хектар (1 хектар = 100 ари = 10000 квадратних метара).

Јединица за масу је грам. Одређен је као апсолутна тежина чисте воде запремине једног кубног центиметра, на температури топљења леда, тј. при температури од 4 степена Целзијуса. Одговара приближно 22 ½ доња, или 0,2344 злота.

Такође су наведене веће мере: декаграм, хектограм и килограм. Један килограм одговара приближно 2 ½ фунти. Користи се и тона (1000 килограма), или у старим руским јединицама око 61 пуда.

Кисељев истиче предност метричког система у односу на традиционалне мере, пре свега у томе што су мере лако упоредиве са својим основним мерним јединицама.

Размере и пропорције су описане у шестом поглављу овог уџбеника.

Прва вредност размере је предводнички члан, а друга следбенички члан.

Ако је однос 25 према броју 100 једнака ¼ онда је 25 = 100 x ¼ .

Из односа фунти и пуда, таквих да је 2 пуда = 10 фунти x 8, то значи да 2 пуда у себи садрже 10 фунти 8 пута. Исто тако: 10 фунти = 2 пуда x 1/8.

Стога се размера, или однос величина у овом случају пише:

2 пуда : 10 фунти, или $\frac{2\text{ пуда}}{10\text{ фунти}}$

Такође однос 10 фунти и 16 лота према 3 лота једнак је 336 лота : 3 лота.

Уколико поделимо или помножимо и предводнички и следбенички члан размере истим бројем, она се неће променити.

Пример: размера 42 : 12 једнака је размери 7 : 2.

Најпогодније је размеру приказати целим бројевима. Стога се размера 7/3 : 5, множењем чланова бројем 3 претвара у размеру 7 : 15.

Пропорције. Оне представљају једнакост једног односа бројева или величина са другим. Тако можемо рећи да је размера 8 пуда : 4 пуда једнака размери 20 аршина : 10 аршина (у оба случаја размера је 2). То даје пропорцију:

8 пуда : 4 пуда = 20 аршина : 10 аршина.

То се може заменити и неименованим величинама, па постаје

8 : 4 = 20 : 10, или $\frac{8}{4} : \frac{20}{10}$.

Први и четврти члан су спољашњи (крајњи), а други и трећи су унутрашњи (средњи) чланови пропорције.

Правила код пропорција:

- Уколико оба члана прве и оба члана друге пропорције замене места, пропорција остаје иста.

- Уколико оба предводничка члана или следбеничка члана једне и друге стране пропорције помножимо или поделимо истим бројем, пропорција остаје иста.

- Ако све чланове пропорције помножимо или поделимо истим бројем, пропорција остаје иста.

Скраћивање пропорција.

Пример: Дата је пропорција

$x : 20 = 35 : 25$

x : **4** = 35 : **5** (поделимо следбене чланове са 5)

x : 4 = **7 : 1** (десну страну пропорције поделимо са 5)

Основно својство пропорције. Производ спољашњих чланова пропорције једнак је производу унутрашњих чланова.

Тако из пропорције $8 : 4 = 20 : 10$ следи да је $8 \cdot 10 = 4 \cdot 20$.

Одређивање непознатог члана пропорције.

Пример: пропорција $8 : 0{,}6 = x : ¾$

На основу основног својства пропорције $0{,}6\,x = 8 \cdot ¾$

$0{,}6\,x = 6$; $x = 6 : 0{,}6$; $x = 60 : 6 = 10$

Непрекидна пропорција је она код које су оба унутрашња или спољашња члана једнака.

32 : **16** = **16** : 8 или **20** : 5 = 80 : **20**

Тако се долази до појма геометријске средине. Уколико тај члан означимо са x, добијамо пропорцију $a : x = x : b$.

Из тога је $x^2 = a \cdot b$, односно $x = \sqrt{a \cdot b}$, а то је геометријска средина других чланова пропорције. Број 16 је геометријска средина за бројеве 32 и 8.

Сложена пропорција.

Пример : имамо 2 пропорције.

40 : 10 = 100 : 25 и 4 : 2 = 10 : 5.

Можемо да помножимо одговарајуће чланове прве пропорције са члановима друге пропорције.

$(40 \cdot 4) : (10 \cdot 2) = (100 \cdot 10) : (25 \cdot 5)$

160 : 20 = 1000 : 25

Такође се чланови једне пропорције могу и поделити са одговарајућим члановима друге.

40 : 10 = 100 : 25 и 8 : 4 = 10 : 5 .

(40 : 8) : (10 : 4) = (100 : 10) : (25 : 5)

5 : 2 ½ = 10 : 5 (коначна пропорција)

Уколико узмемо неку пропорцију (пример):

21 : 7 = 30 : 10 и додамо сваком претходном његов следбени члан, пропорција ће и даље бити тачна.

(21 + 7) : 7 = (30 + 10) : 10

Такође даљом заменом места унутрашњих чланова, пропорција остаје важећа.

(21 + 7) : (30 + 10) = 7 : 10

Пошто је 21 : 30 = 7 : 10 можемо и написати да је:

(21 + 7) : (30 + 10) = 21 : 30 , итд.

У седмом поглављу приказани су неки задаци који се тичу пропорционалних величина. У том смислу разликују се :

- Директно пропорционалне величине.
- Обрнуто пропорционалне величине.

Ако једна од величина порасте или се смањи одређени број пута, при чему је *m* број различит од нуле, њој директно пропорционална величина такође порасте или се смањи исти број пута.

За две величине кажемо да су обрнуто пропорционалне ако важи: Колико се пута повећа једна величина толико ће се пута смањити друга величина, односно колико се пута смањи једна величина толико ће се пута повећати друга величина.

Пример задатка за директну пропорционалност:

Ако 8 аршина неког сукна кошта 30 рубаља, колико ће коштати 15 аршина истог сукна ?

Један начин решавања тог задатка је да се прво одреди цена једног аршина.

30 : 8 = 3,75 рубаља, тако да је за 15 аршина: 3,75 x 15 = 56,25 рубаља.

Други начин решавања је помоћу пропорције. Примењује се тзв. **просто тројно правило**.

x : 30 = 15 : 8

$x \cdot 8 = 15 \cdot 30$ (основно својство пропорције)

x = 450 : 8 = 56,25 рубаља.

Пример задатка за обрнуту пропорционалност:

Ако 6 радника заврши неки посао за 18 дана, за колико дана ће исти тај посао завршити 9 радника ?

Први начин је да израчунамо колико ће требати једном раднику да сам заврши цео посао, тј. $6 \cdot 18 = 108$ дана. Потом ћемо одредити колико времена треба деветорици радника :

$108 : 9 = 12$ дана.

Други начин је примена пропорција. Пошто 9 радника обавља посао брже него 6 радника, требаће им мање дана.

$x : 18 = 6 : 9$

$9x = 18 \cdot 6$

$9x = 108$; $x = 108 : 9 = 12$ дана.

Сложено тројно правило означава продужену пропорцију. Примењује се онда када непозната величина зависи од више других величина.

Пример: За осветљење 18 соба током 48 дана потребно је утрошити 120 фунти керозина, при чему у свакој соби горе 4 лампе. Колико дана ће 125 фунти керозина осветљавати 20 соба помоћу 3 лампе ?

Задатак се поставља на следећи начин:

18 соба	120 фунти	4 лампе	48 дана
20 соба	125 фунти	3 лампе	x дана

До решења долазимо тако што узимамо у обзир два параметра, а друга два претпостављамо да су константни.

Број дана је обрнуто пропорционалан броју соба, уколико бисмо имали исти број лампи у свакој соби и исти број фунти керозина.

$$18 : 20 = x : 48$$

Тако је за осветљење 20 соба потребно: $\frac{48 \cdot 18}{20} = 43{,}2$ дана.

Број дана је даље директно пропорционалан количини керозина (при истом броју лапми у свакој соби):

$$43{,}2 : x = 120 : 125$$

Стога је за сагоревање 125 фунти керозина потребно : $\frac{48 \cdot 18 \cdot 125}{20 \cdot 120} = 45$ дана.

Коначно остао је број лампи. Број лампи је обрнуто пропорционалан броју дана, зато ће при горењу 3 лампе бити потребно:

$$45 : x = 3 : 4$$

$x = \frac{48 \cdot 18 \cdot 125 \cdot 4}{20 \cdot 120 \cdot 3}$ дана, $x = 60$ дана.

Процентни рачун. „Проценат“ означава 1/100 неког броја. Тако 2 процента означавају 2/100, 3 означавају 3/100,... Ознака за проценат је %.

Важан пример за процентни рачун приказан је код давања зајмова. Ту се дужник (онај који је примио зајам) мора на одређени начин одужити зајмодавцу. Уколико је неко позајмио 500 рубаља са 7 % камате годишње, то значи да је дужан да до истека рока исплати зајмодавцу осим 500 рубаља још 35 ($7/100 \cdot 500 = 35$).

Такође је наведен пример држања новца у банци. За уложени новац банка даје улагачу одређену надокнаду. Количина камате пропорционална је времену и уложеном капиталу. Уколико је уложени капитал у банци 100 рубаља, а банка одобрава камату од 5 % годишње, онда ће за годину дана камата износити 5 рубаља, за 2 године 10 рубаља, за 3 године 15,... Тако ће након годину дана укупни капитал бити 105 рубаља, за 2 године 110 рубаља,...

Задаци са процентним рачуном могу се поделити на 4 групе:

- израчунавање приноса капитала (или увећања капитала),
- израчунавање почетног капитала,
- израчунавање процента (каматне стопе),
- израчунавање времена потребног за дато увећање капитала.

Пример: одредити камату на уложених 7285 рубаља са 8% у току 3 ½ године.

Износ камате за једну годину : $\frac{7285 \cdot 8}{100}$.

За 3 ½ , или 7/2 година : $\frac{7285 \cdot 8 \cdot 7}{100 \cdot 2}$ = 2039 руб. 80 коп.

Пример за одређивање времена увећања: Колико је потребно времена да се од 2485 рубаља, уз каматну стопу од 7 % добије камата од 139 рубаља и 16 копјејки.

Време = $139{,}16 : (2485 \cdot 7/100) = \frac{4}{5}$ година = 288 дана.

Процентни рачун може бити прост, или сложен.

Наведени задаци са простим процентним рачуном могу бити решавани и помоћу општих формула:

$$x = \frac{a\,p\,t}{100} \quad , \quad A = a + x = a + \frac{a\,p\,t}{100} \quad ,$$

где је:

x - процентни принос,

a - почетни капитал,

p - камата у процентима,

t - време у годинама.

Задаци са плаћањем меница.

Дат је пример да је дужник узео од кредитора 1000 рубаља на годину дана са 10 % камате и да треба да врати дуг који је узет 1. јануара 1908. године. Тада ће дужник морати да исплати дванаест месеци од тог датума 1100 рубаља. Приказан је и пример како треба да се напише таква меница.

Тада је износ који треба да се врати менична свота.

Дисконт је каматни проценат који је раван суми интереса од дана куповине до рока плаћања.

Пример: Меница од 5600 рубаља са датумом доспећа од 5 месеци и са каматом од 6 %. Одредити износ дисконта менице.

5 месеци = 5/12 године.

Дисконт = $\frac{5600 \cdot 6 \cdot 5}{100 \cdot 12}$ = 140 рубаља.

Уколико је потребно време изразити у данима, година се представља као 360 дана, а месец као 30 дана.

За рачунање дисконта менице користе се:

- комерцијална метода,

- математичка метода (рационална).

Математички добијени дисконт је мањи од онога добијеног комерцијалном методом.

Тако је код менице на 800 рубаља за годину дана уз 5 % камате, комерцијалним методом :

$\frac{800 \cdot 5}{100}$ = 40 рубаља. Формула је: $x = \frac{\mathrm{A\,q}}{100}$.

Формула за математички метод: (где је q - проценат за одређено време)

$x = \frac{\mathrm{A\,q}}{100+\mathrm{q}}$.

Тако је у овом случају:

$x = \frac{800 \cdot 5}{100+5}$ = 38,09523 рубаља, или 38 рубаља 9 $\frac{9}{21}$ копејки (што показује да се математичким методом добија мања вредност дисконта).

Правило рокова уплате. Неколико рокова уплате може се заменити једном уплатом. Такође и један рок уплате може са заменити за више њих. Неколико рокова уплате може са заменити и другим уплатама под различитим условима.

Пример: Потребно је заменити исплате дуговања 4200 рубаља на 5 месеци, 3500 рубаља на 7 месеци и 2000 рубаља на 9 месеци са једном исплатом дуговања.

Прво израчунамо збир исплата дуга: 4200 + 3500 + 2000 = 9700 рубаља.

Потом ћемо дуг од 4200 рубаља на 5 месеци изједначити са дугом од 100 рубаља на 210 месеци (пошто је 4200 x 5 = 100 x 210). Исто ћемо урадити са остала два дуга: 3500 на 7 месеци = 100 рубаља на 245 месеци, 2000 на 9 месеци = 100 рубаља на 180 месеци.

Коначно то је: 210 + 245 + 180 = 635 месеци.

Ако се 100 рубаља исплаћује на 635 месеци, онда је 9700 рубаља потребно исплатити на $\frac{635 \cdot 100}{9700}$ месеци, или $\frac{635}{97}$ месеци = 6 месеци 16 дана.

Правило ланца.

Пример: Колико пуда тежи 100 немачких фунти, уколико 18,36 немачких фунти одговара 9 $\frac{9}{50}$ килограма, а 18,75 килограма одговара 45 ¾ руских фунти (познато је да 40 руских фунти одговара 1 пуду)?

100 немачких фунти $= \frac{45\frac{3}{4} \cdot 9\frac{9}{50} \cdot 100}{40 \cdot 18{,}75 \cdot 18{,}36} = 3\frac{1}{50}$ пуда.

Правило је да се производ вредности у које се дате претварају (45 ¾ , 9 $\frac{9}{50}$, 100) подели са производом вредности од којих се почиње (40 ; 18,75; 18,36) .

Пропорција и рачун поделе.

Пример : Поделити број 84 на 3 дела пропорционална бројевима 7, 5 и 2.

Можемо да запишемо $x1 : x2 : x3 = 7 : 5 : 2$, када је $x1 + x2 + x3 = 84$. Збир свих делова је 7 + 5 + 2 = 14. један део се добија тако што се 84 подели са 14.

84 : 14 = 6, $x1 = 6 \cdot 7 = 42$, $x2 = 6 \cdot 5 = 30$, $x3 = 6 \cdot 2 = 12$.

Тако се добијају делови: 42, 30 и 12.

Ако је потребно поделити број у датој пропорцији, онда број поделимо са сумом пропорционалних бројева и потом количник помножимо са сваким понаособ.

Рачун поделе је приказан кроз разне примере, као што је подела зараде радника у односу на број одрађених дана и слично.

Наведен је и пример поделе када знамо размеру првог и другог дела, другог и трећег, трећег и четвртог,...

Рачун мешања.

Пример: Помешано је 3 врсте брашна: прва врста 15 фунти по 8 копејки, друга 20 фунти по 7 копејки и трећа 25 фунти по 4 копејке за фунту. Колико кошта фунта смесе?

Саберимо цену све три врсте брашна : 15 x 8 + 20 x 7 + 25 x 4 = 360 копејки.

Укупно фунти брашна: 15 + 20 + 25 = 60.

Цена по фунти смесе брашна : 360 : 60 = 6 копејки.

Други тип задатка: Од две врсте чаја направљено је 32 фунте смеше. Фунта прве врсте чаја кошта 3 рубље, а друге врсте 2 рубље и 40 копејки. Колико фунти које врсте треба узети да би се добила смеша по цени од 2 рубље и 85 копејки.

Метод : ако тражену цену смеше одузмемо од веће цене (300 - 285 = 15 копејки) и од те тражене цене одузмемо мању цену (285 - 240 = 45 копејки), добићемо размеру 45 : 15 (или после скраћивања 3 : 1). Очито је да је потребно узети више чаја по већој цени, пошто је мања разлика од тражене цене смеше. Када би тражена цена била тачно на средини између две понуђене, количина обе врсте чаја би била једнака.

$x1 = (32 : 4) \cdot 3 = 24$ фунте, $x2 = (32 : 4) \cdot 1 = 8$ фунти.

Даље се у задацима ради о мешању вина са различитим процентом алкохола, о легурама метала, злата и сребра.

У **Прилогу уџбеника** приказано је одређивање приближних вредности при вршењу рачунских операција.

Тако је приказана приближна вредност броја 3,14159265... (броја π) која са тачношћу до 1/100 износи 3,14. Такође приближна вредност броја 5835,2173... до тачности од једне стотине је 5800.

Број A - тачан број. Број a - приближан број, α - апсолутна грешка.

Тако је $A = a + \alpha$ или $A = a - \alpha$. Даље се приказује приближно сабирање, одузимање, множење и дељење. Ако радимо са приближним бројевима, онда је јако важно да разумемо да се грешка повећава са сваком рачунском операцијом (најмање са сабирањем и одузимањем), а што је сложенија операција све је већа.

Пример приближног множења: помножити 314,159265358... са 74,632543926 до тачности од 0,001. [16]

314,159265358... · 74,632543926

2199 114855	са грешком <	7	стохиљадитих
125 663704	- II - <	4	- II -
18 849552	- II - <	6	- II -
942477	- II - <	3	- II -
62830	- II - <	2	- II -
15705	- II - <	5	- II -
1256	- II - <	4	- II -
93	- II - <	3	- II -
27	- II - <	9	- II -

23446,50499 или: 23446,505 са тачношћу до 0,001.

[16] Овај метод рачунања се не примењује у новијој настави математике.

Објашњење приказаног поступка: помножити 314159265 са 7 (број 314,159... са 6 децималних места). Тако ми множимо број са милионитим делом са десетицом (овде 7) и добијамо тачност до 7 стохиљадитих. Даље настављамо исто и број 31415926 (са 5 децималних места - стохиљадити део) множимо са цифром јединица множиоца (4). Тако се поново добија тачност до 4 стохиљадита. Исти процес се тим начином наставља до краја. На крају рачунања зарез стављамо на место тако да би последња његова цифра десно од зареза изражавала цифру јединице.

Наведен је и пример: израчунати до тачности 1/100 производ 1000 π ($\sqrt{5}$ - 1), где је π однос обима кружнице и њеног пречника = 3,1415926535... Треба обратити пажњу на претходни пример множења, тј. тражени производ рачунамо са тачношћу до 0,01. Стога број $\sqrt{5}$ - 1 мора бити написан са 4 децимале. Коначно се добија резултат 3883,22.

Следећи пример је израчунати π^3 са тачношћу од 0,01, тако да је $\pi^3 = \pi^2 \cdot \pi$, и у целом делу броја је само једна цифра, а π^2 је потребно израчунати до последњег десетохиљадите децимале. Тако је $\pi^2 = \pi \cdot \pi$. Треба узети π са 6 децимала. Коначно се добија резултат 31,01 (до тачности од 1/100).

Приближно дељење.

Ако дељеник обележимо са M, делилац са A и децимални део делиоца са *a*, онда је цели део делиоца A - a. Тачан резултат представља $\frac{M}{A}$, а приближно је $\frac{M}{A-a}$.

Увећање дела је $\frac{M}{A-a} - \frac{M}{A}$, па је једнако $\frac{MA - MA + Ma}{(A-a)\,A} = \frac{M\,a}{(A-a)\,A} = \frac{Ma}{A} : (A - a)$.

Пошто је a < 1 , следи M · a < M.

Стога је увећање резултата мање од $\frac{Ma}{A} : (A - a)$

Пример: уколико заменимо делиоца 367,28 његовим целим делом 367 (што представља 367,28 - 0.28) ми правимо грешку мању од 1/367 тачности.

На крају уџбеника приказана је табела простих бројева до 6000.

2.2. Обрада аритметике у нашим уџбеницима за основну школу

Приказана је обрада аритметике у српским уџбеницима који користе ученици у текућем образовању и који обрађују исте области као уџбеник Кисељева.

У складу са циљевима и задацима наставе математике, у почетној настави математике (до петог разреда) ученици треба да упознају разломак као део целине, да науче да разломке записују и упоређују, да одређују део ако је дата целина, као и да одређују целину ако је познат њен део. [17]

Према важећем плану и програму наставе математике, прва етапа формирања појма разломка реализује се у другом полугодишту другог разреда. Ученици се упознају са поступком деобе једне целине на једнаке делове, а половљење целине претходи увођењу операције дељења. У овој етапи изграђује се појам основног (правог) разломка. Ученици се прво упознају са појмом половине, четвртине и десетине, а процес сазнања о појму разломка заснива се на практичној активности (преко деобе осносиметричних геометријских фигура: квадрата, правоугаоника, круга). Наредну етапу у трећем разреду, чини увођење осталих делова целине - осталих јединичних разломака: трећине, петине, шестине, седмине, осмине и деветине. Уопштава се појам јединичног разломка облика $1/n$, као n-ти део од n једнаких делова на које је једна целина подељена. Након усвајања појма разломака облика $1/n$, у последњој етапи у четвртом разреду, обрађују се разломци облика a / b (где је $a < b$ и a, $b \in N$), укључујући и упоређивање разломака.

Пети разред је веома важан за теме које су поменуте у овом раду.

Ако је $a : b$ природан број, онда кажемо да „број b дели број a“ и пишемо $b \mid a$.

Делилац неког броја јесте сваки природан број којим је тај број дељив, то јест којим се може поделити без остатка.

Сваки природан број већи од 1 има бар два делиоца.

Садржалац датог броја јесте сваки природан број који је дељив тим бројем.

Својства дељивости:

- Ако су сабирци дељиви неким бројем, онда је и збир дељив тим бројем. Ако су умањеник и умањилац дељиви неким бројем, онда је и разлика дељива тим бројем.

- Ако је један чинилац производа дељив неким бројем ($c \mid a$ или $c \mid b$), онда је и производ дељив тим бројем ($c \mid a \cdot b$).

[17] Дејић, М. и Егерић, М., *Методика наставе математике*, Београд, Учитељски факултет, 2010.

Дељивост бројева. [18]

Број је дељив декадном јединицом ако на крају има бар онолико нула колико има та декадна јединица. Број је дељив са 2 ако је последња цифра тог броја 0, 2, 4, 6 или 8. Број је дељив са 5 ако је последња цифра тог броја 0 или 5. Број је дељив са 4 када му је двоцифрени завршетак дељив са 4, то јест ако су последње две цифре тог броја: 00, 04, 08, 12, 16, 20, 24, ...

Број је дељив са 25 када му је двоцифрени завршетак дељив са 25, то јест ако су последње две цифре тог броја: 00, 25, 50, 75. Број је дељив са 9 ако му је збир цифара дељив са 9. Број је дељив са 3 ако му је збир цифара дељив са 3. Број је дељив са 6 ако је дељив и са 2 и са 3. Број је дељив са 12 ако је дељив и са 3 и са 4. Број је дељив са 15 ако је дељив и са 3 и са 5. Број је дељив са 36 ако је дељив и са 4 и са 9.

Прости и сложени бројеви.

Природни бројеви већи од 1 који имају тачно два делиоца, број 1 и самог себе, називају се прости бројеви. Природни бројеви већи од 1 који имају више од два делиоца називају се сложени бројеви. Број 1 има само један делилац и то је број 1. Број 1 није ни прост ни сложен. Број 2 је једини паран број који је прост.

Многи познати математичари покушавали су да пронађу поступак помоћу којег можемо утврдити да ли је неки природан број прост или сложен. Први допринос дао је Ератостен (грчки математичар који је живео у III веку пре нове ере). Он је пронашао поступак којим се налазе сви прости бројеви који су мањи од неког датог броја и тај поступак назива се Ератостеново сито (такође описано и у уџбенику Кисељева).

Растављање на чиниоце. Просте бројеве не можемо раставити на просте чиниоце, то јест не можемо записати као производ простих бројева.

Највећи од свих заједничких делилаца бројева a и b називамо највећи заједнички делилац бројева a и b и означавамо га са $D(a, b)$. [19]

Највећи заједнички делилац два броја које смо раставили на просте чиниоце добијамо тако што одредимо производ свих чинилаца једног броја који имају свој пар међу чиниоцима другог броја. За узајамно просте бројеве a и b важи $D(a, b) = 1$. Ако је неки природан број $к$ садржалац бројева a и b, онда је $к$ заједнички садржалац тих бројева.

Најмањи од свих заједничких садржалаца бројева a и b називамо најмањи заједнички садржалац бројева a и b и означавамо га са $S(a,b)$.

[18] Владимир Стојановић, *Математика 5*, уџбеник за пети разред основне школе, Математископ, Београд, 2018., стр 12 - 34

[19] Владимир Стојановић, *Op. cit.*, 34 - 37.

Ако је један број садржалац другог броја, онда је њихов најмањи заједнички садржалац сам тај број. Ако су бројеви узајамно прости, онда је њихов најмањи заједнички садржалац једнак производу тих бројева.

Разломци. Разломком изражавамо број једнаких делова неке целине. Разломак записујемо помоћу два природна броја (бројиоца и имениоца) и разломачке црте. [20]

Разломачка црта је симбол за дељење. Дакле, $\frac{a}{b} = a / b = a : b$, за a, b N.

Када бројилац и именилац неког разломка помножимо истим природним бројем $n > 1$, кажемо да смо проширили тај разломак бројем n. Када бројилац и именилац неког разломка поделимо истим природним бројем $n > 1$ кажемо да смо скратили тај разломак бројем n.

Разломак чији су бројилац и именилац узајамно прости бројеви не може се даље скраћивати (сводити) и такве разломке називамо несводљивим.

Прави разломци су разломци који су мањи од 1, а остали су неправи.

Сваки од неправих разломака се може записати као збир (једног) природног броја и (једног) правог разломка. Одговарајући природан број из тог збира представља број целих у том разломку. Неправи разломак записан на овај начин називамо **мешовити број**. Назив потиче од тога што у том запису учествују и природан број и разломак.

Упоређивање разломака. Од два разломка једнаких именилаца већи је онај који има већи бројилац. Од два разломка једнаких бројилаца мањи је онај који има већи именилац.

Сабирање и одузимање разломака. Разломци који имају једнаке имениоце сабирају се тако што се бројиоци саберу, а именилац препише, то јест : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$. Разломке различитих именилаца сабирамо тако што их проширивањем доводимо на разломке једнаких именилаца, а онда их сабирамо као разломке једнаких именилаца.

Разломци са једнаким имениоцима одузимају се тако што се од бројиоца умањеника одузме бројилац умањиоца, а именилац препише. Разломке различитих именилаца одузимамо тако што их проширивањем доводимо на разломке једнаких именилаца, а онда их одузимамо као разломке једнаких именилаца.

Разломак се множи природним бројем тако што се бројилац помножи тим бројем, а именилац препише. Разломак се дели природним бројем тако што се бројилац препише, а именилац помножи тим природним бројем.

[20] *loc. cit.* , 102 - 150.

Производ два разломка јесте разломак чији је бројилац производ бројилаца та два разломка, а именилац је производ именилаца та два разломка:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Поделити разломак другим разломком исто је што и помножити тај разломак реципрочном вредношћу другог разломка.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Разломци који у имениоцу имају декадне јединице називају се децимални разломци. Код децималног броја број испред децималне запете представља број целих, а цифре иза запете представљају број десетих, стотих, хиљадитих делова и тако даље, тим редом.

Када желимо произвољан разломак да запишемо у децималном запису неопходно је или да тај разломак проширивањем (скраћивањем) доведемо до децималног разломка или да извршимо дељење.

Број који има више цифара него што нам је потребно замењујемо бројем чији запис има одговарајући број цифара, и то тако да се новодобијени број што мање разликује од почетног. Тај поступак се назива **заокругљивање**.

Заокругљивањем броја увек правимо неку грешку и циљ нам је да она буде што мања. Да бисмо то постигли треба да поштујемо следећа правила:

1. Ако је прва цифра коју одбацујемо **0**, **1**, **2**, **3** или **4**, цифре испред ње остају непромењене.

2. Ако је прва цифра коју одбацујемо **6**, **7**, **8** или **9**, последња цифра коју задржавамо повећава се за 1.

3. Ако је прва цифра коју одбацујемо **5**, а иза ње има још цифара, последња цифра коју задржавамо повећа се за 1.

4. Ако је прва цифра коју одбацујемо 5 и иза ње нема других цифара, разликујемо два случаја:

а) ако је цифра испред парна она остаје непромењена,

б) ако је цифра испред непарна она се повећава за 1.

Децималне бројеве сабирамо или одузимамо тако што их најпре правилно потпишемо, водећи рачуна о томе да децималне запете сабирака буду једна испод друге, а затим их сабирамо или одузимамо као природне бројеве, с тим што на крају децимална запета збира мора бити испод децималних запета сабирака.

Разломак записан у децималном запису множи се декадном јединицом тако што му се децимална запета помера за онолико места удесно колико та декадна јединица има нула. Разломак записан у децималном запису дели се декадном јединицом тако што му се децимална запета помера за онолико места улево колико та декадна јединица има нула.

Два разломка дата у децималном запису множимо као природне бројеве, а затим у производу издвојимо онолико децимала колико их имају оба чиниоца заједно.

Разломак дат у децималном запису делимо природним бројем тако што вршимо дељење као у случају природних бројева, с тим што када дођемо до децималне запете у дељенику, напишемо и децималну запету у количнику.

Дељење два разломка дата у децималном запису увек сводимо на дељење разломка природним бројем, множењем и дељеника и делиоца одговарајућом декадном јединицом (оном која има онолико нула колико делилац има децимала).

Директна пропорционалност. Две величине (x и y) су директно пропорционалне ако је количник одговарајућих вредности константан. Примери: однос пређеног пута и времена код равномерног кретања, зависност запремине воде у односу на време уливања у посуду, зависност масе коцке од њене запремине итд. [21]

$$y = k \cdot x, \quad \frac{y}{x} = k$$

Две зависне величине (x и y) су **обрнуто пропорционалне** ако је производ одговарајућих вредности сталан. Одговарајућа константа k назива се коефицијент обрнуте пропорционалности. Примери: време потребно да се обави неки посао и број радника који су ангажовани, дужине страница које се мењају тако да површина остаје иста и тако даље.

$$\frac{x}{k} = y, \; k = y \cdot x$$

Пропорције и особине пропорција.

Једнакост двеју размера облика $a : b = c : d$ називамо пропорцијом. Бројеви a и d називају се спољашњим, а b и c унутрашњим члановима пропорције. И важи:

$$a \cdot d = c \cdot b$$

[21] Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић, *Математика 6*, уџбеник за 6. разред основне школе, Klett, Београд, 2019., стр. 129 - 134

Процентни рачун се након упознавања са процентима у шестом и седмом разреду основне школе, данас значајније обрађује у првом разреду средње школе. Обрађене величине у руском уџбенику приказане су као основне пропорције процентног рачуна.

$G : 100 = P : p$, или $G : P = 100 : p$. [22]

Овде је p - проценат, или процентна стопа, стоти део неке величине, G - главница, основна вредност, величина од које се рачунају проценти P - процентни принос, део главнице коме одговара одређени проценат.

Такође промил је објашњен као хиљадити део главнице.

Тада се обрађује и каматни рачун. I је камата (интерес).Одређује се камата (интерес) преко формуле:

$I = K \cdot p \cdot t / 100$ (K - капитал или главница , p - проценат, t - време)

[22] Живорад Ивановић, Срђан Огњановић, *Математика 1* , збирка решених задатака за први рагред гимназија и техничких школа, Круг, Београд, 2018. , 35 - 38

2.3. Поређење наставе аритметике некада и сада

Први део руског уџбеника бави се приказом различитих бројних система, као и методама пребацивања из једног система у други. Због савременог развоја рачунарске технике базиране на бинарном бројном систему, тај систем је данас после декадног најважнији. Током основне школе ученици се са бинарним системом бројева упознају и преко предмета Информатика и рачунарство.

Словенско записивање бројева (помоћу слова) није примењено у актуелним уџбеницима код нас, али се ученици упознају са римским бројевима.

Јединице мера које су описане у руском уџбенику замењене су јединицама из СИ система, које је руски аутор навео као „француске″ мере.

Следе рачунске операције са вишецифреним бројевима, као и промене резултата у случају увећавања или умањивања сабирака, умањеника или умањиоца. Ово градиво се у данашњим основним школама обрађује у четвртом разреду.

У старијим уџбеницима била је темељно приказана повезаност између Јулијанског и Грегоријанског календара, што у савременим школама није приоритетно.

Дељивост бројева је обрађена веома слично и у некадашњим и садашњим уџбеницима, с тим да је код Кисељева додатно обрађена дељивост бројевима: 7, 11, 13 и 37 (осим са 2,3,4,5,...).

У обради теме разломака постоје велика поклапања у некадашњем и данашњем приступу, што се тиче упоређивања и рачунских операција са разломцима.

Кисељев у овом уџбенику није помињао скуп целих бројева, као унију позитивних и негативних бројева и броја нуле, док се та област данас детаљно обрађује у шестом разреду основне школе.

Са друге стране, продужена пропорција, рачун поделе и мешања се у данашњој настави значајније обрађују у првом разреду средње школе. Исто важи за каматни рачун.

Коначно метод одређивања приближних вредности при множењу и дељењу, који је приказан у прилогу руског уџбеника не користи се више у савременој настави математике.

2.4. Могућа побољшања у настави аритметике

Предлози за побољшања наставе артитметике дати су у односу на области које су поменуте у овом раду.

Побољшања у настави аритметике требало би посматрати у оквиру постизања конкретних циљева који се учењем математике постижу. Једна од битнијих могућности побољшања лежи у повезивању тих знања са градивом из других предмета. У том смислу би повезивање са физиком било преко пребацивања мерних јединица, пропорције, заокругљивања бројева, са хемијом преко пропорција и процентног рачуна, а са информатиком преко пребацивања из једних бројних система у друге.

Одређени образовни стандарди за математику утврђују да ученик који је завршио осмогодишње образовање треба да зна да прочита и запише различите врсте бројева (природне, целе, рационалне), преведе децимални запис броја у разломак и обратно, упореди по величини бројеве истог записа, помажући се сликом кад је то потребно, изврши једну основну рачунску операцију са бројевима истог записа, помажући се сликом кад је то потребно (у случају сабирања и одузимања разломака само са истим имениоцем), дели са остатком једноцифреним бројем и зна када је један број дељив другим, користи целе бројеве и једноставне изразе са њима помажући се визуелним представама.

Ученик даље треба да користи одговарајуће јединице за мерење дужине, површине, запремине, масе, времена и углова, претвори веће јединице дужине, масе и времена у мање, користи различите апоене новца. За обраду података потребно је одредити процентну вредност неке величине.

Такође је важно да може да упореди по величини бројеве записане у различитим облицима, одреди супротан број, реципрочну вредност и апсолутну вредност броја, израчуна вредност једноставнијег израза са више рачунских операција различитог приоритета, укључујући ослобађање од заграда, са бројевима истог записа, примени основна правила дељивости са 2, 3, 5, 9 и декадним јединицама, користи бројеве и бројевне изразе у једноставним реалним ситуацијама.

У сврху постизања тих циљева, било би важно уврстити у збирке задатака што више математичких задатака који се баве реалним проблемима, како би ученици

повезали математику са свакодневним животом и тако је лакше схватили. У том смислу добро је пратитити идеју која није нова, а јасно је приказана на многим примерима и у датом уџбенику: повезивати учење аритметике и осталих области математике са проблемима из реалног живота.

Такође би било добро да предавачи у оквиру часа ураде један задатак на више начина, како би ученицима била јасно да једноставном преформулацијом задатка могу доћи до проблема који је за њих решив на лакши начин. Наставници би требало да науче ученике како да се сами баве проблемом. На овакав начин би некада избегли неразумевање написаног текста код ученика.

Неки начини решавања који су наведени у овом уџбенику могли би да послуже као модел за сагледавање датих задатака са више страна, попут задатака из дељивости, рачуна мешања и друго.

3. Истраживачки део

У истраживачком делу рада биће извршена анализа резултата теста из уџбеника Кисељева из 1912. године који су решавали ученици савремених школа у Шиду, као и тумачење постигнутих резултата.

Задатке су решавали ученици 8. разреда, који су већ упознати са градивом аритметике које се обрађује у основној школи и које им је потребно у решавању проблема који се могу наћи на завршним испитима. Узорак испитаника обухватио је 20 ученика. Вођено је рачуна да међу испитаницима буду ученици који имају различите оцене из математике - од доброг до одличног успеха, како би се постигла одређена објективност у тестирању.

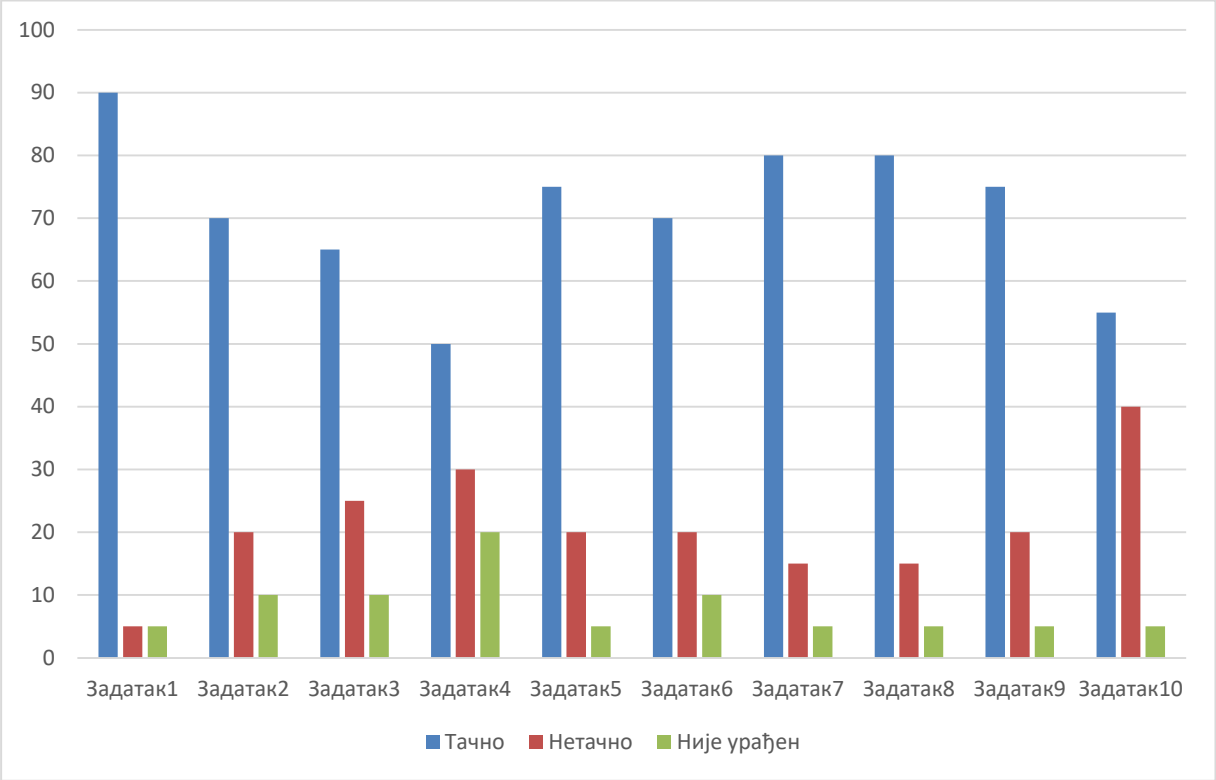
Ученицима је дато 60 минута да реше ове задатке, тј. нешто више од једног школског часа.

Циљ овог истраживања је утврђивање да ли су ученици који похађају савремене школе оспособљени да решавају задатке који су наведени у уџбеницима који су објављивани пре више од једног века.

Из збирке Кисељева одабрани су следећи задаци:

1. Одредити производ бројева (са потписивањем): 3826 · 472 .
2. Поделити 35000 : 7300 (и одредити остатак).
3. Одредити запремину тела чија је дужина 10 аршина, ширина 7 аршина, а висина 8 аршина.
4. Ако је пароброд испловио 27. априла у 7 сати ујутро, а на путу је провео 6 месеци, 8 дана 21 час и 40 минута, када се вратио у луку ?
5. Одредити највећи заједнички делилац за бројеве: 210, 1260 и 245.
6. Одредити најмањи заједнички садржалац за бројеве: 20, 49 и 33.
7. Одредити број чијих 8/3 износи 2 2/9.
8. Ако 8 аршина сукна кошта 30 рубаља, колико кошта 15 аршина истог сукна ?
9. Ако 6 радника заврши неки посао за 18 дана, за колико дана ће исти посао завршити 9 радника ?
10. Поделити број 968 на 4 дела пропорционална бројевима 1 ½ , ¾. 2/5 и 3/8.

Наредни графикон показује резутате овог тестирања:



Слика број 5: Графикон успешности ученика у решавању задатака (у процентима)

Анализирајући задатке који нису тачно урађени утврђено је да су погрешно урађени из следећих разлога:

- Задаци нису добро схваћени и рачунска операција је погрешно примењена.
- Рачунске грешке.
- Задатак није довршен.

Код задатака код којих је требало само извршити рачунске операције (задаци 1 и 2) долазило је до грешака у рачунању.

Грешке у задатку број 3 биле су везане за непрепознавање геометријског тела о коме је реч и самим тим до нетачног решавања или недовршеног задатка. Сви ученици који су тачно одредили формулу за запремину квадра решили су тачно и задатак.

Задатак број 4 је урађен са најмање тачности, а разлог је вероватно тај што не спада у стандардне задатке који се обрађују у оквиру данашње наставе. Ученицима је највећи проблем представљало додавање сати и пребацивање на наредни дан. Стога је код њега највећи проценат ученика који га нису урадили.

Проблеми са задацима код којих је требало одредити НЗД и НЗС (5 и 6) били су углавном рачунске грешке или пропуштање (превид) неких чинилаца при множењу.

Тешкоће код задатка број 7 биле су у поставци задатка, идеји коју рачунску операцију извршити са задатим бројевима.

Задаци 8 и 9 су из области директне и обрнуте пропорционалности. Задатак са обрнутом пропорцијом урађен је нешто слабије него задатак са директном. Разлог: није добро постављена пропорција (постављена је као за директну пропорцију).

Задатак 10 је такође слабије урађен, а разлог је тај што чланови пропорције нису цели бројеви и код тог задатка је потребно прво те чланове помножити - претворити их у целе бројеве и тек после тога радити рачун поделе.

Из наведене анализе јасно се види да одређени проценат ученика има проблема са разумевањем написаног текста задатка. У задацима у којима сам појам није у директној вези са математичком операцијом неопходном за решавање задатка (задаци број 4, 7, 8, 9, 10) неки ученици не схватају написани текст и не знају коју операцију треба да примене.

Неколико ученика је без већих тешкоћа тачно решило све задатке, што указује да успешни ученици данас немају никакве проблеме у разумевању и решавању задатака из области аритметике који су постављени пре више од једног века.

Након прегледаних радова, ученицима су исти враћени и заједно са њима су анализиране учињене грешке. Ученицима је објашњено где су грешили и на шта треба да обрате пажњу у даљем раду.

4. ЗАКЉУЧАК

У овом раду анализиран је уџбеник руског математичара А. П. Кисељева и извршено је поређење са изучавањем аритметике у савременим школама.

Из наведеног је јасно да разлике у обради појединих области некада и сада нису велике и да су математичари тога времена могли да одрже висок стандард школске наставе, који би давао добру основу за даљу математичку надградњу.

Овај рад може да послужи као саставни део даљег изучавања историје развоја математичких сазнања. Такође би било добро упоредити тај ниво описивања аритметике са осталим уџбеницима тога времена из других развијених европских земаља. У том смислу би се добила још комплетнија слика о томе колики је значај самог математичара Кисељева у унапређивању наставе аритметике.

Дати су одређени предлози о могућим побољшањима наставе аритметике у нашим школама. У циљу побољшања наставе било би важно уврстити у збирке задатака што више математичких задатака који се баве реалним проблемима, како би ученици повезали математику са свакодневним животом и тако је лакше схватили.

Што се тиче истраживачког дела рада утврђено је да ученици данас немају значајнијих проблема у разумевању и решавању задатака из области аритметике који су одабрани из овог уџбеника.

Може се извести закључак да начин на који су наставне целине обрађене у овом уџбенику задовољавају критеријуме савремене наставе аритметике.

ЛИТЕРАТУРА:

1. **Андрей Петрович Киселев, *Систематический курс арифметики*, Москва, 1912, репринт: Орел, 2002.**
2. **Борис Владимирович Болгарский, *Очерки по истории математики*, Минск, 1979.**
3. **Горан Цвијановић, *Концептуализација појма рана алгебра и раноалгебарско мишљење*, Истраживање математичког образовања, Том. VIII, Број 14, 1-8, 2016.**
4. **Синиша Црвенковић, Данијел А. Романо, *Рана алгебра и раноалгебарско мишљење*, У: Методички аспекти наставе математике, Трећа међународна конференција МАТМ 2014 (14.-15. Јуна 2014, Факултет педагошких наука), 2014.**
5. **Маријана Вуковић: *Како обрађујемо правила аритметике,* у: Настава Математике: Друштво математичара Србије, Београд, 1998.**
6. **Јелена Гаровић, Наташа Вујисић-Живковић и остали, *Из историје наставе математике у основним и средњим школама у Србији*, Педагошки музеј, Београд, 2011.**
7. **Војислав Андрић, Математика 4 - *Збирка задатака 4. разред основне школе,* Круг, Београд, 2020.**
8. **Војислав Андрић, Ђорђе Дугошија, Вера Јоцковић, Владимир Мићић: *Приручник за наставнике уз уџбенички комплет за 5. разред основне школе,* Завод за уџбенике, Београд 2007.**
9. **Војислав Андрић, Ђорђе Дугошија, Вера Јоцковић, Владимир Мићић: *Приручник за наставнике уз уџбенички комплет за 6. разред основне школе,* Завод за уџбенике, Београд, 2008.**
10. **Војислав Андрић, Ђорђе Дугошија, Вера Јоцковић, Владимир Мићић: *Приручник за наставнике уз уџбенички комплет за 7. разред основне школе,* Завод за уџбенике, Београд, 2009.**
11. **Владимир Стојановић, *Математика 5*, уџбеник за пети разред основне школе, Математископ, Београд, 2018.**
12. **Мира Поповић и Ружица Павлићевић, *Математика 5,* Збирка задатака за 5. разред основне школе, Круг, Београд, 2020.**
13. **Мира Поповић и Ружица Павлићевић, *Математика 6,* Збирка задатака за 6. разред основне школе, Круг, Београд, 2020.**

14. **Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић, *Математика 6*, уџбеник за 6. разред основне школе, Klett, Београд, 2019**

15. **Срђан Огњановић, *Математика 7,* Уџбеник за 7. разред основне школе, Круг, Београд, 2020.**

16. **Срђан Огњановић, *Математика 8,* Уџбеник за 8. разред основне школе, Круг, Београд, 2020.**

17. **Живорад Ивановић, Срђан Огњановић, *Математика 1*, збирка решених задатака за први разред гимназија и техничких школа, Круг, Београд, 2018.**

18. **Мирко Дејић, Милана Егерић, *Методика наставе математике,* Београд, Учитељски факултет, 2010.**

Биографија

Милица (Пејић) Грбатинић

Рођена сам 03.05.1991. у Сремској Митровици. Највећи део свог детињства и школских дана сам провела у селу Вашица, код Шида, где сам 2006.године завршила Основну школу „Вук Караџић“. Након тога уписујем Гимназију „Сава Шумановић“ у Шиду, општи смер, потом 2010.године Природно-математички факултет у Новом Саду, смер Дипломирани професор математике, који сам завршила августа 2016.године, а од септембра 2016. радим у Основној школи „Бранко Радичевић“ у Шиду, као наставник математике. Мастер студије на Математичком факултету у Београду, смер Професор математике и рачунарства, сам уписала такође 2016.године. У току мастер студија (2019.године) се остварујем као супруга , а 30.04.2020. и као мајка једној дивној девојчици Мили.