Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Master rad

LILOV METOD ODREĐIVANJA REALNIH KORENA POLINOMA SA REALNIM KOEFICIJENTIMA

Mentor:

Prof. dr Nebojša Ikodinović

Student:

Tijana Cvetković 1117/2018

Beograd, jul 2020.

Mentor: **Prof. dr Nebojša Ikodinović**

Matematički fakultet u Beogradu

Članovi komisije: **Prof. dr Zoran Petrović**

Matematički fakultet u Beogradu

Prof. dr Srđan Vukmirović

Matematički fakultet u Beogradu

Datum odbrane: 23.07.2020.

Sadržaj

1. Uvod 2
1.1. Istorija rešavanja algebarskih jednačina 3
1.2. Eduard Lill 5
2. Polinomi 6
3. Lilov metod određivanja realnih korena polinoma sa realnim koeficijentima 10
3.1 Kvadratna jednačina 15
3.2 Bikvadratna jednačina 25
3.3 Zlatna kvadratna jednačina 29
3.4 Kvadratna jednačina sa imaginarnim rešenjima 32
3.5 Kubna jednačina 33
4. Zaključak 37
5. Literatura 38

1. Uvod

U radu će biti opisan Lilov metod određivanja realnih korena polinoma sa realnim koeficijentima. Takođe, biće razmatrano i netrivijalno proširenje metode koje se odnosi na određivanje kompleksnih korena polinoma sa realnim koeficijentima.

Ovaj rad se sastoji od 4 poglavlja.

U uvodnom delu biće reči o istorijskom razvoju algebarskih jednačina, kao i radu i delu inženjera Eduarda Lila.

U poglavlju Polinomi biće predstavljena osnovna pravila i osobine polinoma, kao i rastavljanje polinoma na činioce.

Zatim u poglavlju Lilov metod određivanja realnih korena polinoma sa realnim koeficijentima biće detaljno objašnjen Lilov metod i obrađeni različiti tipovi jednačina počevši od kvadratne jednačine pa sve do kubne jednačine. Svaki primer biće potkrepljen i grafičkim prikazom urađenim u programu GeoGebra.

Zaključna razmatranja su izložena u četvrtom poglavlju, gde je dat osvrt na Lilovu metodu i njenu primenu, kao i ideje za njeno uvođenje učenicima srednje škole.

1.1. Istorija rešavanja algebarskih jednačina

Koreni algebre mogu se pratiti još od Vavilonjana, koji su razvili napredni aritmetički sistem sa kojim su mogli da izvrše razne proračune na algoritamski način. Razvili su formule za izračunavanje rešenja za probleme koji se danas rešavaju korišćenjem linearnih, kvadratnih i neodređenih linearnih jednačina. Za razliku od njih, većina Egipćana te ere, kao i Grci i Kinezi, rešavali su takve jednačine geometrijskim metodama. Tipičan primer geometrijskog rada Grka su **Euklidovi**[1] **Elementi**. Do vremena **Platona**[2], grčka matematika je doživela drastične promene. Grci su kreirali geometrijsku algebru u kojoj su članovi bili predstavljeni stranama geometrijskih objekata, obično linijama.

Ranije tradicije imale su direktan uticaj na čuvenog indijskog matematičara **Al Horezmija**[3]. Napisao je "*Knjiga o svođenju i dvostrukom oduzimanju*", koja je uspostavila algebru kao matematičku disciplinu koja je nezavisna od geometrije i aritmetike. Horezmijeva slava ponajviše potiče od njegovog remek-dela "Al-đabr" (Algebra). Ovaj naziv se i danas koristi na Zapadu da bi se ukazalo na ovu matematičku disciplinu. **Al Horezmi** je dao opšti metod za nalaženje dva korena kvadratne jednačine

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathrm{R},\ \ a \neq 0$$

Italijanski matematičar **Del Fero**[4], prvi je rešio jedan od tipova kubne jednačine u XVI veku, ali je postupak držao u tajnosti. U to vreme, često su se održavala matematička takmičenja koja su ličila na dvoboje. Jedni drugima bi zadavali zadatke, a pobednik bi bio onaj koji bi useo da reši više protivnikovih zadataka. Nisu sačuvani nikakvi rukopisi Del Fera, niti je bilo šta objavio za života. Na samrti, on tajnu poverava svom učeniku **Antoniju Mariji Fiori**[5], a beleške daje svom zetu Naveu. Samouki matematičar **Nikolo Fontana Tartalja**[6] izazvao je Fioru koji se hvalio kako zna metod za rešavanje kubne jednačine. U tom matematičkom dvoboju, Tartalja je uspeo da reši protivnikove probleme, dok je Fiori rešio samo jedan slučaj kubne jednačine. **Đirolamo Kardano**[7], koji je za razliku od Tartalje bio školovani matematičar, uspeo je doći do metode za rešavanje kubne jednačine. Kardano sa svojim učenikom **Lodovikom Ferarijem**[8] razvija metodu za rešavanje svih tipova kubne

---

[1]Euklid, poznat kao i Euklid iz Aleksandrije, antički matematičar poznat po svojim delima *Elementi, Dama* i *Optika* i algoritmu za izračunavanje najvećeg zajedničkog delioca koji je po njemu nazvan *Euklidovi elementi*

[2] Platon (Atina, 427. p.n.e – 347. p.n.e), uticajan starogrčki filozof i besednik

[3] Al Horezmi (783. Hiva – oko 850. Bagdad), persijski matematičar, astronom, astrolog i geograf

[4] Scipion Del Fero (6. Februar 1465 – 5. Novembar 1526, Bolonja), italijanski matematičar, poznat po tome što je prvi dao metod rešavanja kubne jednačine u svedenoj formi

[5] Antonio Maria Del Fiore (XV - XVI), italijanski matematičar iz bolonjske škole, uključen u niz sporova vezanih za autorstvo rešavanja jednačina trećeg stepena

[6] Nikolo Fontana Tartalja (oko 1499 - 1557), venecijanski matematičar I vojni inženjer

[7] Đirolamo Kardano (Pavija, 1501 – Rim, 1576), italijanski lekar, matematičar, astronom I kockar. Bavio se algebrom

[8] Lodovik Ferari (Bolonja, 1522 - 1565), italijanski matematičar

jednačine, dok Ferari razvija i metod za rešavanje jednačina četvrtog stepena. Sva znanja i otkrića su sabrali u delo “**Velika veština**”.

Danas su formule za rešavanje kubnih jednačina poznate kao **Kardano-Tartaljine formule**.

1.2. Eduard Lill

Eduard Lill (1830–1900) je bio austrijski inženjer i oficir. Rođen je 20. oktobra u Bruku (Bohemija). Od 1848. do 1849. godine studirao je matematiku na Tehničkom univerzitetu u Pragu, a 1850. pridružio se Vojnom inženjerskom korpusu Austrijskog carstva. Od 1852. do 1856. nastavio je obrazovanje na vojnoj inženjerskoj akademiji u Klosterbrucku kod Znaima. Kasnije je bio stacioniran u Essegu, Kronstadtu i Spalatu sve dok se 1868. nije povukao iz vojne karijere u činu kapetana inženjerskog korpusa. Iste godine postao je inženjer za austrijsku severozapadnu železnicu. Teška nesreća ga je, međutim, uskoro ograničila na kancelarijski posao. Od 1872. do 1875. radio je kao sekretar za direktora izgradnje železničke kompanije. Kasnije je postao tehnički konsultant u sedištu kompanije, a 1885. šef sedišta za statistiku. Penzionisao se 1894. godine sa titulom glavnog inspektora.

Lill je najpoznatiji po doprinosu u matematici i svojim istraživanjima saobraćaja. Osmislio je grafički postupak za određivanje korena polinoma. Lill je svoj izum objavio 1867. godine u francuskom časopisu iz matematike “Nouvelles Annales de Mathématiques”. Kasnije je postala poznata kao Lilova metoda. Istraživanje transporta Lila dovelo je do onoga što se sada naziva Lilov zakon putovanja. Bio je to jedan od prvih pokušaja modeliranja količine putnika, posebno putnika na železnici, između dve lokacije. Međutim, iako se koristio u civilnom inženjerstvu, posebno u urbanističkom planiranju, tokom većeg dela 20. veka, sada se smatra pomalo zastarelim i zamenjen je složenijim modelima.

2. Polinomi

Definicija: *Polinom po neodređenoj x nad prstenom K je izraz*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x^1 + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}x^k,$$

pri čemu je n $\in N$ *i* $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in K$. *Ako je* $a_n \neq 0$, *za polinom P(x) kažemo da je stepena n i to označavamo sa dgP(x) = n. Sabirak* a_0x^n *se naziva najstarijim članom, a sabirak* a_n *slobodnim članom.*

Definicija: *Nula (koren) polinoma P(x) je bilo koje rešenje jednačine* $P(x) = 0$.

Definicija: *Za polinom čiji je vodeći koeficijent jednak jedinici kažemo da je* ***moničan***.

Monični polinom ima oblik

$$P(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1x^{n-1} + x^n.$$

Skup svih polinoma nad poljem K označavamo sa K[x].

U skup K[x] možemo uvesti relaciju *jednakost* kao I operacije *sabiranje i množenje polinoma*:

Definicija:

Polinomi

$$P(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n$$

$$i$$

$$Q(x) = b_m + b_{m-1}x + b_{m-2}x^2 + \cdots + b_1x^{m-1} + b_0x^m$$

su jednaki ako i samo ako je $a_k = b_k$, *za svako k* ≥ 0 i $m = n$, *tj. kada su njihovi koeficijenti jednaki.*

Definicija: *Za dva polinoma*

$$P(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n$$

$$i$$

$$Q(x) = b_m + b_{m-1}x + b_{m-2}x^2 + \cdots + b_1x^{m-1} + b_0x^m$$

zbir i proizvod su redom jednaki :

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = c_r + c_{r-1}x + \cdots + c_0x^r$$

$$(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x) = d_s + d_{s-1}x + \cdots + d_0x^s,$$

gde su

$$c_k = a_k + b_k, \quad (0 \le k \le r = \max(n, m)),$$

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}, \ (0 \le k \le s = n + m).$$

Primer: Neka je K = R i

$$P(x) = 2 - 3x + 5x^2, \qquad Q(x) = 2x - x^2 + 2x^3.$$

Tada je

$$R(x) = (P + Q)(x) = 2 - x + 4x^2 + 2x^3,$$

$$S(x) = (P \cdot Q)(x) = 4x - 8x^2 + 17x^3 - 11x^4 + 10x^5.$$

Kao specijalan slučaj množenja polinoma imamo množenje polinoma P(x) skalarom $\alpha \in K$.

$$\alpha \cdot P(x) = \alpha \cdot (a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0 x^n) = (\alpha \cdot a_n) + (\alpha \cdot a_{n-1})x + \cdots + (\alpha \cdot a_0)x^n$$

Teorema: *Skup* K[x] *snabdeven sabiranjem i množenjem polinoma čini komutativan prsten sa jedinicom.*

Inverzni element od

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_{m-k} x^k$$

u odnosu na sabiranje je

$$\sum_{k=0}^{m} (-b_{m-k}) x^k$$

koji ćemo označavati sa $-Q(x)$. Tada možemo definisati odužimanje polinoma sa

$$(P - Q)(x) = P(x) + \big(-Q(x)\big).$$

Primer: Neka su dati polinomi

$$P(x) = 5 - 2x + 4x^2 \quad i \quad Q(x) = 2 + 4x - 3x^2.$$

Tada je:

$$(P - Q)(x) = P(x) + \big(-Q(x)\big)$$

$$= 5 - 2x + 4x^2 + \big(-(2 + 4x - 3x^2)\big)$$

$$= 5 - 2x + 4x^2 - 2 - 4x + 3x^2$$

$$= 3 - 6x + 7x^2.$$

Teorema: *Za svaki polinom P(x) i svaki nenula polinom Q(x), postoji jedinstveni polinomi S(x) i R(x), P(x), Q(x), S(x), R(x)*$\in K(x)$*, gde je K polje, takvi da važi jednakost*

$$P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

pri čemu je R(x) nula polinom ili dg R(x) < dg Q(x).

Definicija: *Za polinom S(x) iz prethodne teoreme kažemo da je količnik pri deljenju polinoma P(x) polinomom Q(x), (*$Q(x) \neq 0$*), a za odgovarajući polinom R(x) kažemo da je ostatak pri tom deljenju.*

Ako je ostatak nula polinom, kažemo da je P(x) deljivo sa Q(x) i polinom Q(x) zovemo delilac *polinoma P(x) i pišemo Q(x)|P(x).*

Neke osobine deljivosti polinoma navodimo u sledećoj teoremi :

Teorema: *Za proizvoljne polinome P(x), Q(x) i U(x) važe tvrđenja:*

a) *P(x)|P(x)*
b) *Ako Q(x)|P(x) i P(x)|Q(x), tada je P(x)=αQ(x), za neko* $\alpha \in K$
c) *Ako U(x)|Q(x) i Q(x)|P(x), tada U(x)|P(x)*
d) *Ako U(x)|P(x) i U(x)|Q(x), tada U(x)|αP(x)+βQ(x), za svako* $\alpha, \beta \in K$.

Primer:

$$(2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x + 1) : (x^2 - x - 2) = 2x^2 + 3x + 4$$

$$\underline{-(2x^4 - 2x^3 - 4x^2)}$$

$$3x^3 + x^2 + 5x$$

$$\underline{-(3x^3 - 3x^2 - 6x)}$$

$$4x^2 + 11x + 1$$

$$\underline{-(4x^2 - 4x - 8)}$$

$$15x + 9$$

$$\Rightarrow S(x) = 2x^2 + 3x + 4, \qquad R(x) = 15x + 9.$$

Rastavljanje polinoma na činioce

- Najjednostavniji primer rastavljanja polinoma na činioce je izvlačenje zajedničkog činioca ispred polinoma, u kojem se koristi svojstvo distributivnosti množenja u odnosu na sabiranje.

Ako su A,B i C tri neslična monoma, tada je AB + AC = A(B + C).

Primer:

1) $2x^3 + 18x^2 = 2x^2 \cdot x + 2x^2 \cdot 9 = 2x^2(x + 9)$

2) $2a - 2x - ax + x^2 = 2(a - x) - x(a - x) = (a - x)(2 - x).$

- Razliku kvadrata zapisujemo u obliku proizvoda i na taj način, nekad samostalno, nekad uz primenu distributivnosti, neke polinome možemo rastaviti na činioce.

Primer:

1) $81x^2 - 25 = (9x)^2 - 5^2 = (9x - 5)(9x + 5)$

2) $60x^2a - 135y^2a = 15a \cdot 4x^2 - 15a \cdot 9y^2 = 15a(4x^2 - 9y^2)$

$$= 15a((2x)^2 - (3x)^2) = 15a(2x - 3y)(2x + 3y).$$

- Neke trinome predstavljamo kao kvadrat binoma i to nekad samostalno, a češće u kombinaciji sa pomenutim metodama rastavljanja polinoma na činioce.

Primer:

1) $50a^2 - 60a + 18 = 2(25a^2 - 30a + 9) = 2(5a - 3)^2$

2) $2x^5 - 8x^3 + 8x = 2x(x^4 - 4x^2 + 4) = 2x(x^2 - 2)^2$

3) $x^2 + 6x + 5 = x^2 + 6x + 9 - 4 = (x + 3)^2 - 2^2$

$$= (x + 3 - 2)(x + 3 + 2)$$

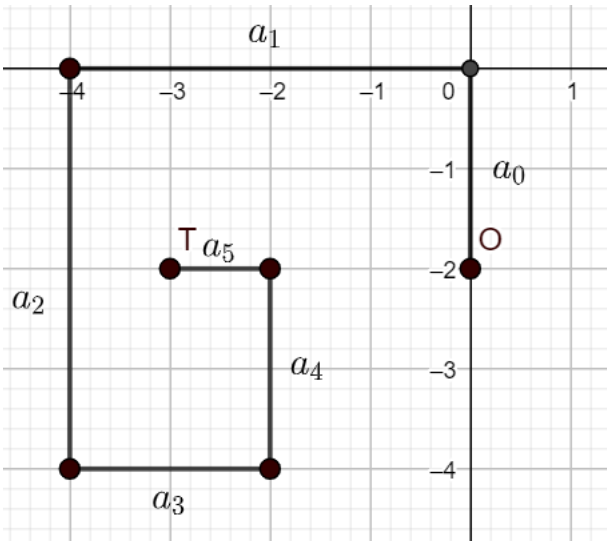
$$= (x + 1)(x + 5).$$

3. Lilov metod određivanja realnih korena polinoma sa realnim koeficijentima

Lilova metoda je vizuelna metoda pronalaženja realnih korena polinoma sa realnim koeficijentima bilo kog stepena. Razvio ju je austrijski inženjer **Eduard Lil** 1867. godine. Lilov metod je dosta izučavan u prvoj polovini XX veka, naročito nakon što ga je Klajn[9] prikazao u svojoj čuvenoj knjizi „Elementarna matematika sa napredne tačke gledišta“.

Neka je dat polinom reda n, $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, gde su koeficijenti $a_0, a_1, \dots, a_n$ realni brojevi. U Lilovoj metodi, ovi koeficijenti predstavljeni su nadovezanim usmerenim dužima čije su dužine $|a_0|$, $|a_1|$,…, $|a_n|$, tako da su pravci svake dve susedne duži međusobno normalni, a usmerenje je određeno znakom odgovarajućeg koeficijenta. Preduslov za korišćenje Lilove metode je postojanje pravouglog koordinatnog sistema.

$$p(x) = 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

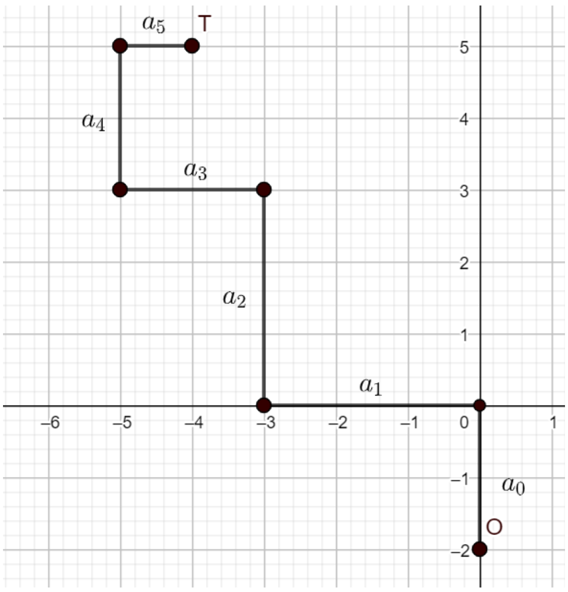


Slika 1

Duž crtamo uz *y* osu iz početne tačke O nagore prema vrednosti koeficijenta $|a_0|$ sve dok ne stignemo do koordinatnog početka. Zatim povlačimo sledeći segment prema vrednosti koeficijenta $|a_1|$ iz koordinatnog početka pod pravim uglom ulevo, ($a_1 > 0$), zatim iz trenutne tačke nastavljamo povlačenjem narednog segmenta prema vrednosti koeficijenta $|a_2|$ nadole ($a_2 > 0$), zatim udesno prema vrednosti koeficijenta $|a_3|$, ($a_3 > 0$), i tako dalje. Ukoliko su svi koeficijenti pozitivni (slika 1), niz pravaca (ne skretanja) je uvek gore, levo, dole, desno, a zatim se ponavlja. Stoga je svaki zaokret obrnut u odnosu na smer kazaljke na satu. Proces se nastavlja za svaki koeficijent polinoma, uključujući nule, sa negativnim koeficijentima „koji ide unazad“. Postupak ponavljamo sve dok ne konstruišemo nadovezanu duž koja odgovara koeficijentu a_n. Iscrtavanjem poslednje nadovezane duži dobijamo krajnju tačku putanje.

[9] Feliks Kristijan Klajn (Nemačka, 25. april 1849 – 22. jun 1925), nemački matematičar, poznat po svome radu na teoriji grupa, teoriji funkcija, neeuklidskoj geometriji i na povezivanju geometrije sa teorijom grupa

$$p(x) = 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x - 1$$

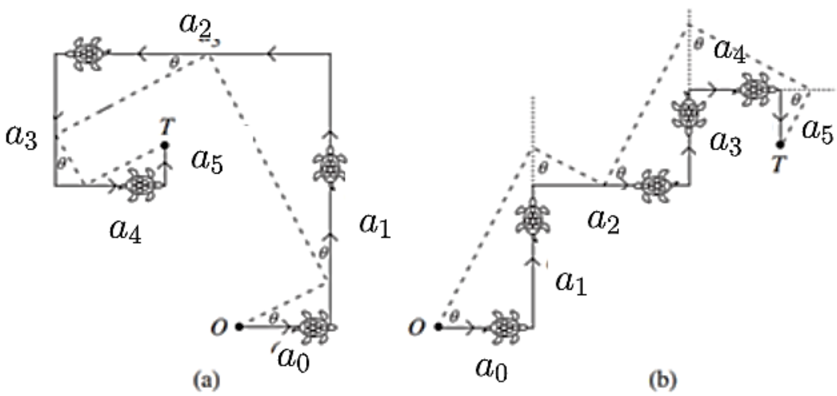


Slika 2

Uopštenje date metode:

Ako koeficijenti a_{k-1} i a_k imaju isti znak (slika 1), duž koja odgovara a_k je 90° u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu u odnosu na duž koja odgovara a_{k-1}. Ako koeficijenti a_{k-1} i a_k imaju različite znake (slika 2, $a_1 > 0, a_2 < 0$), duž koja odgovara a_k je 90° u smeru kazaljke na satu u odnosu na duž koja odgovara a_{k-1}. Važnije zapažanje je da kada koeficijenti a_k i a_{k-2} imaju isti znak, segmenti odgovarajući a_k i a_{k-2} idu u suprotnim smerovima.

Neka je T završna tačka usmerene duži koeficijenta a_n. Nakon toga određujemo novu putanju od O ka T: iz tačke O pod uglom θ, u odnosu na usmerenu duž a_0, crtamo pravu p_0; zatim crtamo pravu p_1 - rotacijom prave p_0 za 90° u tački preseka prave p_0 i prave na kojoj je predstavljen koeficijent a_1; zatim crtamo pravu p_2 - rotacijom prave p_1 za 90° u tački preseka prave p_1 i prave na kojoj je predstavljen koeficijent a_2, itd. Ako poslednja prava p_{n-1} sadrži tačku T, onda je $-tg\ \theta$ koren polaznog polinoma.



Slika 3: Lilova metoda sa svim pozitvnim koeficijentima (levo) i (desno) sa koeficijentima $a_2, a_3, a_5 < 0$, $a_0, a_1, a_4 > 0$

Pretpostavimo da su svi naši koeficijenti pozitivni (Slika 3. levo). Primetimo da su duži nove putanje hipotenuze sličnih pravouglih trouglova. Da je x = $-tg\,\theta$ zaista jedan od korena algebarske jednačine, lako potvrđujemo izračunavanjem dužina y_k koje odgovaraju stranama sličnih pravouglih trouglova naspram ugla θ u trouglu čija je strana uz θ deo segmenta dužine a_k. Tada ćemo dobiti :

$$y_n = (tg\theta)a_n = -x \cdot a_n$$

$$y_{n-1} = (tg\theta)\big(a_{n-1} - (-x \cdot a_n)\big) = -x \cdot (a_{n-1} + x \cdot a_n)$$

$$y_{n-2} = (tg\theta)\Big(a_{n-2} - \big(-x \cdot (a_{n-1} + x \cdot a_n)\big)\Big) = -x \cdot (a_{n-2} + x \cdot (a_{n-1} + x \cdot a_n))$$

...

$$y_1 = -x \cdot (a_1 + x \cdot \big(a_2 + \cdots + x \cdot \big(a_{n-2} + x \cdot (a_{n-1} + x \cdot a_n)\big) \ldots \big)),$$

Primećujemo da je poslednji odnos identičan polaznoj jednačini iako je dat u drugačijem obliku.

Pokazaćemo na primeru $p(x) = x^2 + 2x + 1$ sa koeficijentima $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ upravo izvedene formule.

$$y_2 = (tg45°)a_2 = -x \cdot a_2$$

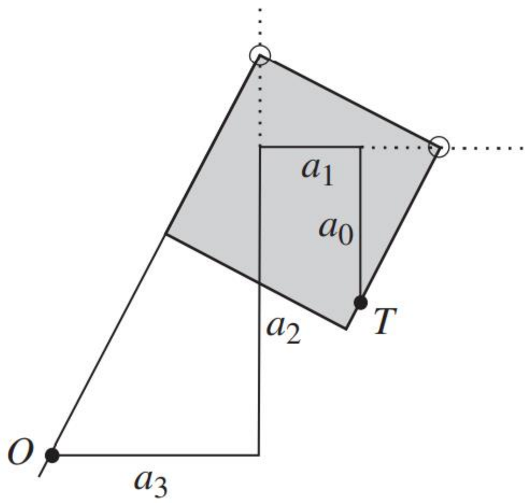
$$y_2 = 1 \cdot 1 = -x \cdot 1 \Longrightarrow x = -1$$

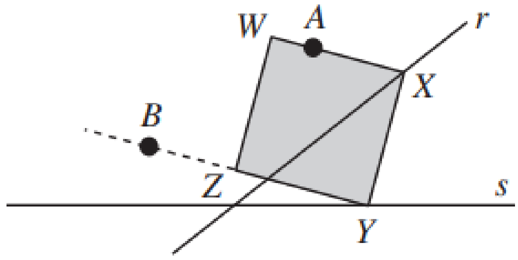
$$y_1 = (tg45°)(a_1 - (-x \cdot a_2))$$

$$y_1 = 1(2 - 1) = 1$$

Za svaku realnu nulu polinoma, postojaće jedan jedinstveni početni ugao i put koji će se spustiti na kraj. Na primer, kvadratna jednačina sa dva realna korena, imaće tačno dva ugla koja zadovoljavaju gornje uslove. Dok će kubna jednačina u geometrijskom smislu imati ista rešenja koja možemo dobiti i primenom konstrukcije Belohovog[10] kvadrata, koji se koristi u metodi savijanja papira - Origami. Staza po kojoj bi se kretala gore pomenuta kornjača na Slici 3, uočavamo na Slici 4 da postoje 4 strane a_3, a_2, a_1, a_0, a tri puta od tačke O do T. Ako tačka O bude A, a T bude B, a linije a_2 i a_1 budu linije r i s, tada Belohov kvadrat sa susednim uglovima na r i s i suprotnim stranama prolaze kroz tačke O i T i daju nam putanju. Zato su ove dve metode usko povezane.

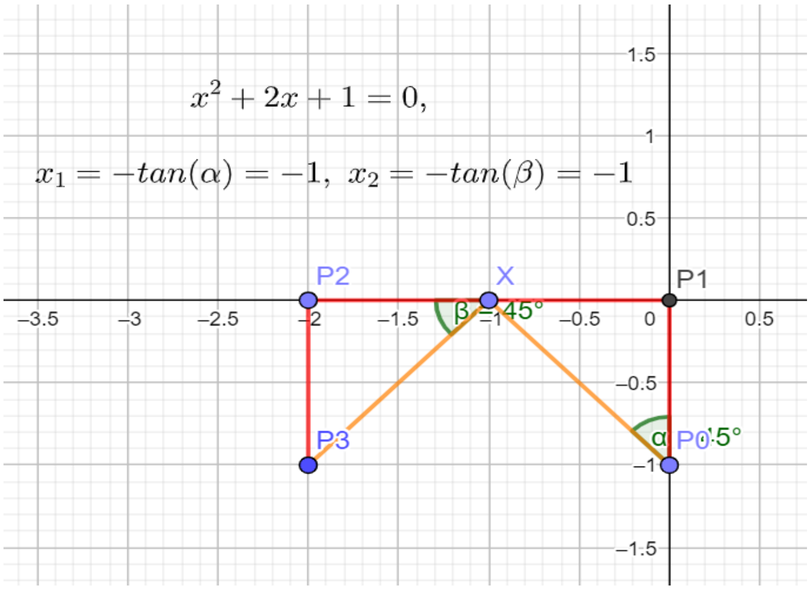
[10] Margarita Beloch (1879-1976) naučnica, prva osoba koja je uočila da konstrukcije origamija mogu da reše opšte kubne jednačine





Slika 4: (levo) Lilova metoda - grafički prikaza rešenja kubne jednačine u kojem se uočava konstrukcija Belohov kvadrata (desno) Belohov kvadrat

Da bismo razumeli Lilov metod predstavljanja polinoma, možemo posmatrati polinom $p(x) = x^2 + 2x + 1$ sa koeficijentima $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$. Koreni ovog polinoma su $x_1 = x_2 = -1$.



Slika 5

Put rešenja je kreiran segmentom P_0X i segmentom XP_3. Opšte je pravilo polaziti od P_0 kreiranjem segmenta P_0X koji preseca segment koji odgovara koeficijentu a_{n-1}. Segment P_0X čini ugao θ sa segmentom P_0P_1. Iz X kreiran je drugi segment koji čini ugao θ sa segmentom koji odgovara a_{n-1}, a novi segment će presecati segment koji odgovara koeficijentu a_{n-2} ili njegovom produžetku. Proces se ponavlja sve dok se ne dobije segment $X_{n-1}P_{n+1}$. Na slici možemo videti da su dva uzastopna segmenta sa putanje rešenja uvek normalna. Dakle, segment XP_3 je normalan na segment P_0X. Rešenje je dato formulom $x = -tg(\theta) = \frac{P_1X}{P_1P_0}$. U našem primeru $x = -1$ i θ= 45°. Dakle, ugao θ je pozitivan ako je u smeru suprotnom od kazaljke na satu, a negativan ukoliko je u smeru kazaljke na satu.

3.1 Kvadratna jednačina

Jednačina oblika $ax^2 + bx + c = 0$, gde su $a,\ b\ i\ c$ neki realni brojevi i pri čemu je $a \neq 0$, naziva se kvadratna jednačina po x sa koeficijentima $a,\ b\ i\ c$. Ako je $a = 0$, jednačine navedenog oblika su linearne.

Rešiti kvadratnu jednačinu $ax^2 + bx + c = 0$ u skupu R znači naći sve realne brojeve x koji zadovoljavaju jednakost $ax^2 + bx + c = 0$.

Kvadratna jednačina je **potpuna** ako su koeficijenti $b \neq 0\ i\ c \neq 0$. Ako je $b = 0$ ili c = 0 (ili oba), onda je jednačina **nepotpuna**.

Primer 1: ***Rešiti jednačinu*** $\mathbf{5x^2 = 0}$

Ova kvadratna jednačina je nepotpuna, a = 5, b = 0, c = 0.

Pomnožimo jednačinu sa $\frac{1}{5}$

$$5x^2 = 0 / \cdot \frac{1}{5}$$

$$x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

(Za svaki realan broj x važi: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$*)*

Jednačina ima jedno rešenje.

Primer 2: ***Rešiti jednačinu*** $\mathbf{x^2 - 9 = 0}$

Jednačina $x^2 - 9 = 0$ je takođe nepotpuna (a = *1*, b = *0*, c = -9).

Koristimo formulu za razliku kvadrata [$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b) = 0$]:

$$x^2 - 9 = (x - 3) \cdot (x + 3) = 0$$

Sada, koristeći ekvivalenciju $A(x) \cdot B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \vee B(x) = 0$

dobijamo rešenja jednačine

$$x^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3) \cdot (x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

Dakle, jednačina ima dva rešenja u skupu realnih brojeva : $x_1 = 3 \; i \; x_2 = -3$.

<u>Primer 3:</u> Rešiti jednačinu $\boldsymbol{x^2 + 9 = 0}$

Jednačina $x^2 + 9 = 0$ je nepotpuna (*a = 1, b = 0, c = 9*).

$$x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9$$

Kvadrat bilo kog realnog broja mora biti nenegativan , pa zaključujemo da data jednačina nema rešenja u skupu realnih brojeva.

<u>Primer 4:</u> Rešiti jednačinu $\boldsymbol{x^2 + 2x - 3 = 0}$

Za rešavanje date jednačine koristićemo metod dopunjavanje izraza $x^2 + m$ do kvadrata binoma, pri čemu je $m \in R, m \neq 0$.

Kvadrat binoma:

$$\boldsymbol{(a \mp b)^2 = a^2 \mp 2ab + b^2}$$

$$\boldsymbol{x^2 + mx + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{m}{2} \cdot x + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2}$$

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = 0$$

$[izraz\; x^2 + 2x\; dopunjujemo\; do\; kvadrata\; binoma]$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \big((x + 1 - 2) \cdot (x + 1 + 2)\big) = 0 \text{ [razlika kvadrata]}$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$

Razmotrimo i postupak rešavanja potpune kvadratne jednačine na sledeći način:

$ax^2 + bx + c = 0$ (*podelimo obe strane jednačine sa a*)

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} = 0$ *(Dopunili smo $x^2 + \frac{b}{a}x$ do kvadrata binoma)*

$\Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$

$\Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$ (*)

Dalji tok rešavanja jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ zavisi od toga da li je $b^2 - 4ac$ pozitivno, negativno ili je jednako nuli.

- Ako je $b^2 - 4ac > 0$, tada se jednačina (*) može zapisati u obliku
  $(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})^2 = 0$
  Primenom formule za razliku kvadrata, levu stranu ove jednačine rastavljamo na činioce.
  $\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = 0$
  $\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0 \quad \vee \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0$
  $\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \vee \quad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
  U ovom slučaju jednačina $ax^2 + bx + c = 0$ ima dva realna rešenja:
  $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
  Uobičajeno je da se ova činjenica zapisuje i na sledeći način: $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- Ako je $b^2 - 4ac = 0$, tada je jednačina (*) zapravo jednačina $(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$.
  Ova jednačina je ekvivalentna sa $x + \frac{b}{2a} = 0$, pa ima samo jedno realno rešenje $x = -\frac{b}{2a}$. I u ovom slučaju možemo koristiti formulu koju smo dobili u prethodnom slučaju : $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b\pm0}{2a} = \frac{-b}{2a}$.
  Kažemo da kvadratna jednačina ima dva jednaka realna rešenja: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

- Ako je Ako je $b^2 - 4ac < 0$, tada je izraz na levoj strani jednačine (*) zapravo zbir izraza čije su vrednosti uvek nenegativne i pozitivne konstante. Kao takav, izraz sa leve strane ne može biti jednak nuli ni za jednu vrednost promenljive x.

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \underbrace{(x + \frac{b}{2a})^2}_{\textit{Nenegativno za svako realno x}} + \underbrace{\left(-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}_{\textit{Pozitivna konstanta}} > 0$$

Dakle, u ovom slučaju jednačina $ax^2 + bx + c = 0$ nema realnih rešenja.

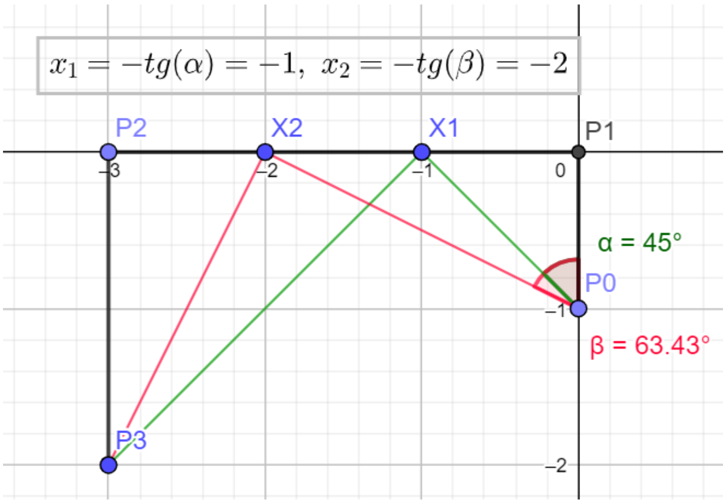
Priroda rešenja kvadratne jednačine

Diskriminanta (D) kvadratne jednačine $ax^2 + bx + c = 0$ je izraz $b^2 - 4ac$. Za kvadatnu jednačinu sa realnim koeficijentima važi:

1) **Jednačina ima dva različita realna rešenja ako i samo ako je D > 0**
2) **Jednačina ima jedno dvostruko realno rešenje ako i samo ako je D = 0**
3) **Jednačina ima jedan par konjugovano kompleksnih rešenja ako i samo ako D<0.**

Primer 5:

$$\boldsymbol{x^2 + 3x + 2 = 0}$$



Slika 6

$$\mathrm{D} = b^2 - 4ac$$
$$= 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2$$
$$= 1$$

Diskriminanta kvadratne jednačine je veća od nule, pa jednačina ima dva različita realna rešenja.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

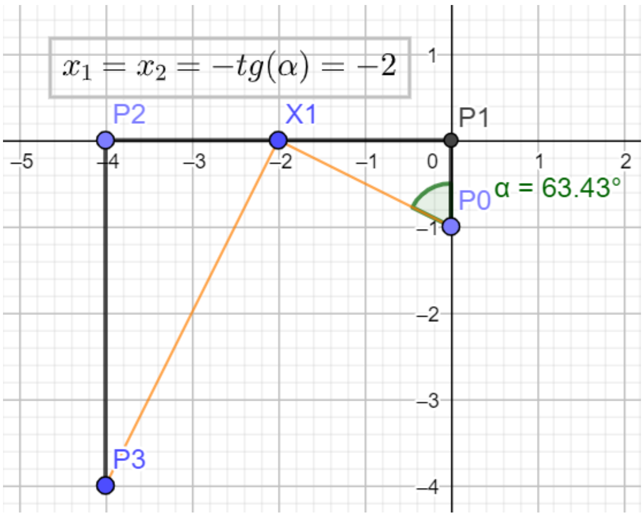
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-3 \pm 1}{2} => \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Posmatramo polinom $p(x) = x^2 + 3x + 2$ sa koeficijentima $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$. Započinjemo vertikalnu liniju dužine $P_0P_1 = |a_0| = 1$, zatim pod pravim uglom idemo ulevo za dužinu $P_1P_2 = |a_1| = 3$ i na kraju, takođe pod pravim uglom idemo nadole za dužinu $P_2P_3 = |a_2| = 1$. Rešenje je jos jedna smanjena staza, tačnije pravougli put koji se formira između početne i krajnje tačke izvorne pravougle putanje jednačine, ali sa jednim segmentom manje. Smanjena staza počinje na južnom kraju linije, koja je ujedno i početna tačka. Zatim se pod uglom α kreće prema segmentu a_1 i reflektuje se iz nje pod pravim uglom, tako da se završava na otvorenom kraju segmenta a_2, gde se put jednačine završava. Rešenje jednačine je $x_1 = -tg(\alpha)$. Obzirom da je diskriminanta veća od 0, jednačina će imati dva rešenja. Ponavljamo postupak za novi ugao β. Drugo rešenje jednačine je $x_2 = -tg(\beta)$.

__Primer 6:__

$$\boldsymbol{x^2 + 4x + 4 = 0}$$



Slika 7

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$= 16 - 16$$

$$= 0$$

Diskriminanta kvadratne jednačine je jednaka nuli, pa jednačina ima jedno dvostruko realno rešenje.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

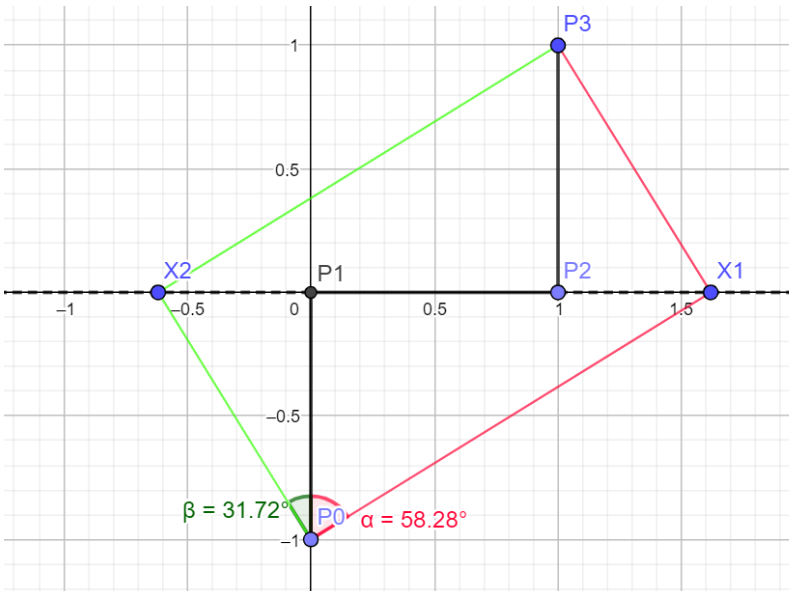
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-4 \pm 0}{2} = \frac{-4}{2} => \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Kao u prethodnom primeru posmatramo polinom $p(x) = x^2 + 4x + 4$ sa koeficijentima $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 4$. Započinjemo vertikalnu liniju dužine $P_0P_1 = |\, a_0 \,| = 1$, zatim pod pravim uglom idemo ulevo za dužinu $P_1P_2 = |\, a_1 \,| = 4$ i na kraju, takođe pod pravim uglom idemo nadole za dužinu $P_2P_3 = |\, a_2 \,| = 1$. Rešenje je pravougli put koji se formira između početne i krajnje tačke izvorne pravougle putanje jednačine, ali sa jednim segmentom manje. Nova putanja počinje u početnoj tački P_0, zatim se pod uglom α kreće prema segmentu a_1 i reflektuje se iz nje pod pravim uglom, tako da se završava u krajnjoj tački prve putanje. Obzirom da je diskriminanta jednaka nuli i da će jednačina imati jedno dvostruko realno rešenje, tada je $\alpha = \beta$. Rešenje jednačine je $x_1 = x_2 = -tg(\alpha) = -2$.

Primer7:

$$\boldsymbol{x^2 - x - 1 = 0}$$



Slika 8

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$= 1 + 4$$

$$= 5$$

Diskriminanta kvadratne jednačine je veća od nule, pa jednačina ima dva različita realna rešenja.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} => \begin{cases} x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Posmatrajmo polinom $p(x) = x^2 - x - 1$ sa koeficijentima $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = -1$.

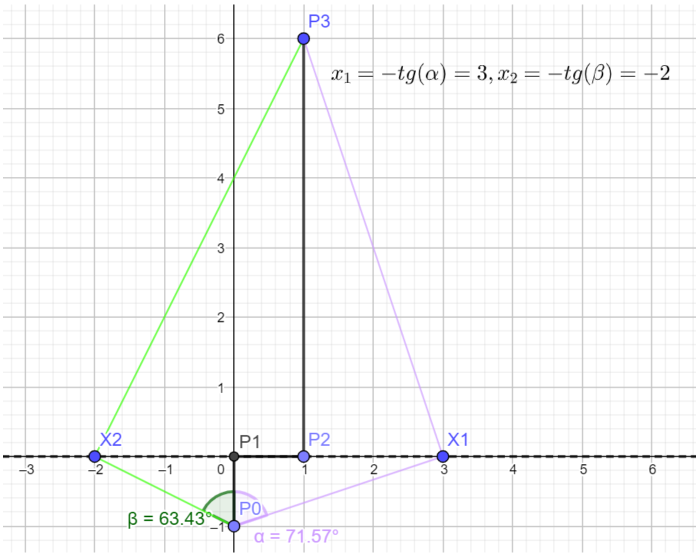
Započinjemo vertikalnu liniju dužine $P_0P_1 = |\, a_0 \,| = 1$, zatim pod pravim uglom idemo udesno za dužinu $P_1P_2 = |\, a_1 \,| = 1$ jer je koeficijent a_1 negativan i na kraju, takođe pod pravim uglom idemo nagore (jer je koeficijent a_2 negativan) za dužinu $P_2P_3 = |\, a_2 \,| = 1$.

Rešenje je pravougli put koji se formira između početne i krajnje tačke izvorne pravougle putanje jednačine.

Za razliku od prethodna dva primera u primeru 7 vidimo da segment P_0X presreće tačkasti produžetak P_1P_2. U prethodnim primerima, segmenti P_0X i XP_3 nalaze se na levoj strani P_1P_2, dok u ovom primeru vidimo da je segment XP_3 prešao na desnu stranu P_1P_2. Takođe primećujemo da bi ugao β trebalo da bude negativan, pošto je u smeru kazaljke na satu u odnosu na P_0P_1. Opažamo i da su dva uzastopna segmenta koji pripadaju putu rešenja normalni jer je XP_3 normalan na segment P_0X.

<u>Primer 8:</u>

$$\boldsymbol{x^2 - x - 6 = 0}$$



Slika 9

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$$

$$= 1 + 24$$

$$= 25$$

Diskriminanta kvadratne jednačine je veća od nule, pa jednačina ima dva različita realna rešenja.

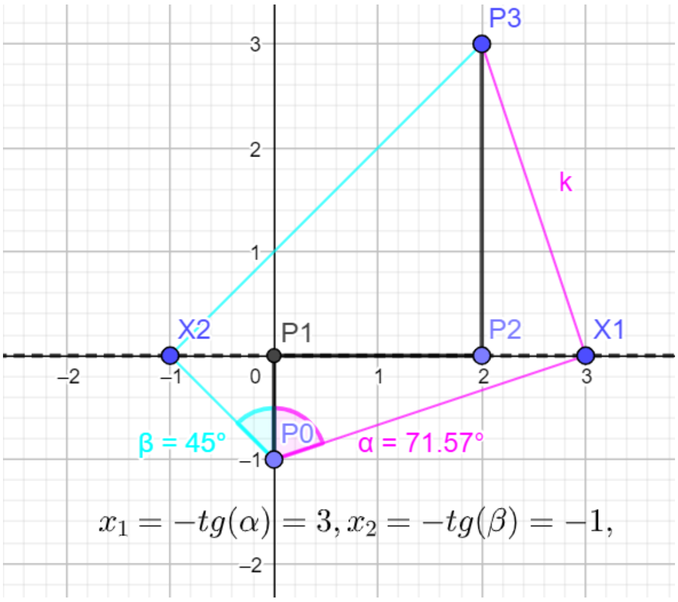
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm 5}{2} => \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Primer 9:

$$\boldsymbol{x^2 - 2x - 3 = 0}$$



Slika 10

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$$

$$= 4 + 12$$

$$= 16$$

Diskriminanta kvadratne jednačine je veća od nule, pa jednačina ima dva različita realna rešenja.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{2 \pm 4}{2} => \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Primer 11: $$\boldsymbol{x^2 + 3x + 6 = 0}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$$

$$= 9 - 24 = -15$$

Pošto je $D < 0$, rešenje je konjugovano kompleksno, pa je nemoguće geometrijski prikazati na do sada opisan način. Detaljnije rešenje jednačina sa imaginarnim rešenjima u daljem radu.

Primer 10:

$$\boldsymbol{\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}}$$

Rešenje:

Najpre rastavimo na činioce

$$\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{8}{(x-2)\cdot(x+2)} \rightarrow Množi\ se\ sve\ sa\ NZS = (x-2)\cdot(x+2),$$
$$x \neq 2, x \neq -2$$

$$x \cdot (x+2) - 3 \cdot (x-2) = 8$$

$$x^2 + 2x - 3x + 6 - 8 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)$$

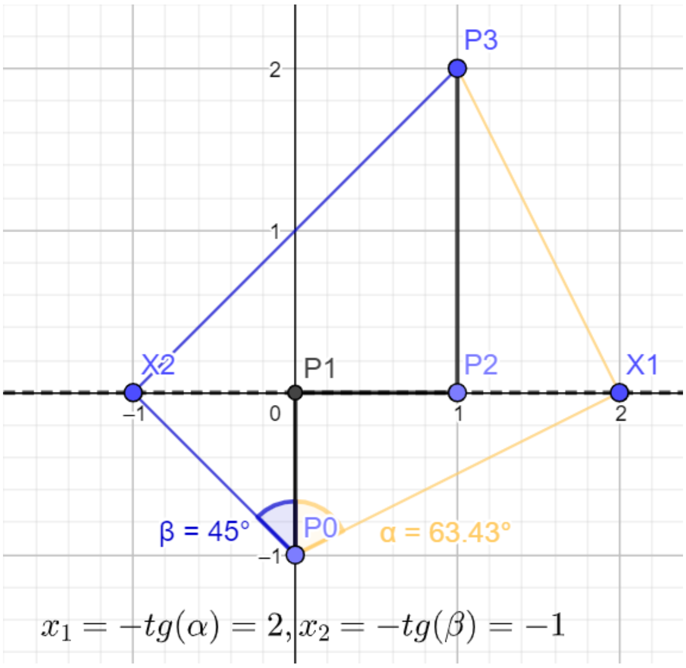
$$= 1 + 8 = 9$$

Diskriminanta kvadratne jednačine je veća od nule, pa jednačina ima dva različita realna rešenja.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm 3}{2} => \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$



Slika 11

3.2 Bikvadratna jednačina

Bikvadratna jednačina je jednačina oblika $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Uvodimo smenu $x^2 = t$ i dobijamo jednačinu oblika $at^2 + bt + c = 0$ i nađemo rešenja $t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Vratimo se u smenu:

$$x^2 = t_1, \qquad x_{1,2} = \pm\sqrt{t_1}$$

$$x^2 = t_2, \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{t_2}$$

<u>Primer 1:</u>

$$\boldsymbol{x^4 - 5x^2 + 4 = 0}$$

$$smena: x^2 = t$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$= 25 - 16 = 9$$

Diskriminanta kvadratne jednačine je veća od nule, pa jednačina ima dva različita realna rešenja.

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

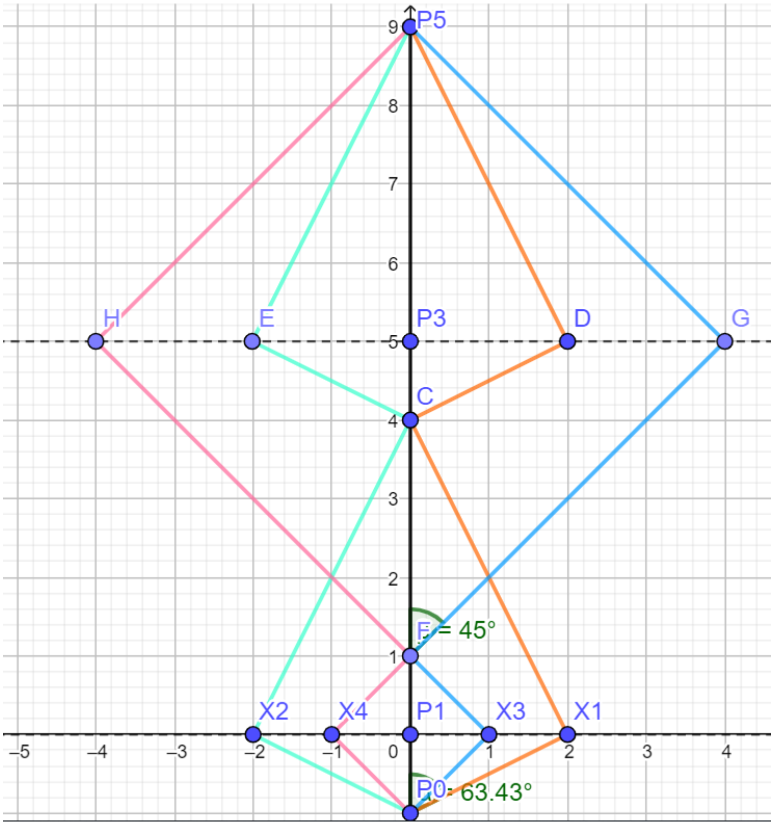
$$= \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{5 \pm 3}{2} => \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

$$vratimo\ u\ smenu:$$

$$x^2 = 4, \qquad x_{1,2} = \pm 2$$

$$x^2 = 1, \qquad x_{3,4} = \pm 1$$



Slika 12

$P_1 = P_2$, $P_3 = P_4$

Kada su srednji koeficijenti jednaki nuli, tada pravougaona staza i dalje radi sa produžetkom linije na koju pada koeficijent, iako ima nultu vrednost.

Započinjemo vertikalnu liniju uz y-osu po vrednosti koeficijenta $|a_0|$ do koordinatnog početka. Obzirom da je vrednost koeficijenta $|a_1|$ nula, nema skretanja. Nastavljamo dalje po vrednosti koeficijenta $|a_2|$ nagore jer su koeficijenti a_0 i a_2 različitog znaka, te imaju isti smer. Vrednost koeficijenta $|a_3|$ je takođe nula, pa ni ovde nema skretanja i staza ide nagore po vrednosti koeficijenta $|a_4|$.

Nova staza kreće iz početne tačke P_0 pod određenim uglom α, odbija se od x-ose pod pravim uglom (produžena linija gde je koeficijent jednak nuli) i seče segment P_2P_3. Zatim se opet pod pravim uglom odbija i seče pravu y = 5 (produženi segment $P_3 = P_4$). Iz presečne tačke, pod pravim uglom staza se završava u krajnjoj tački P_5. Jednačina je četvrtog stepena, što znači da imamo četiri rešenja, tačnije četiri različita ugla pod kojima staza kreće iz početne tačke.

Primer 2:

$$(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)=3$$

$$smena: \ x^2-2x=t$$

$$t^2-2t-3=0$$

$$\text{D}=b^2-4ac$$

$$=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)$$

$$=4+12$$

$$=16$$

Diskriminanta kvadratne jednačine je veća od nule, pa jednačina ima dva različita realna rešenja.

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}$$

$$=\frac{2\pm 4}{2}=>\begin{cases} t_1=3 \\ t_2=-1 \end{cases}$$

$$Vratimo\ u\ smenu:$$

$$x^2-2x=3$$

$$x^2-2x-3=0$$

$$\text{D}=b^2-4ac$$

$$=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)$$

$$=4+12$$

$$=16$$

Diskriminanta kvadratne jednačine je veća od nule, pa jednačina ima dva različita realna rešenja.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}$$

$$=\frac{2\pm 4}{2}=>\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

$$Vratimo\ u\ smenu\ za\ drugo\ t:$$

$$x^2 - 2x = -1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\text{D}= b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$= 4 - 4$$

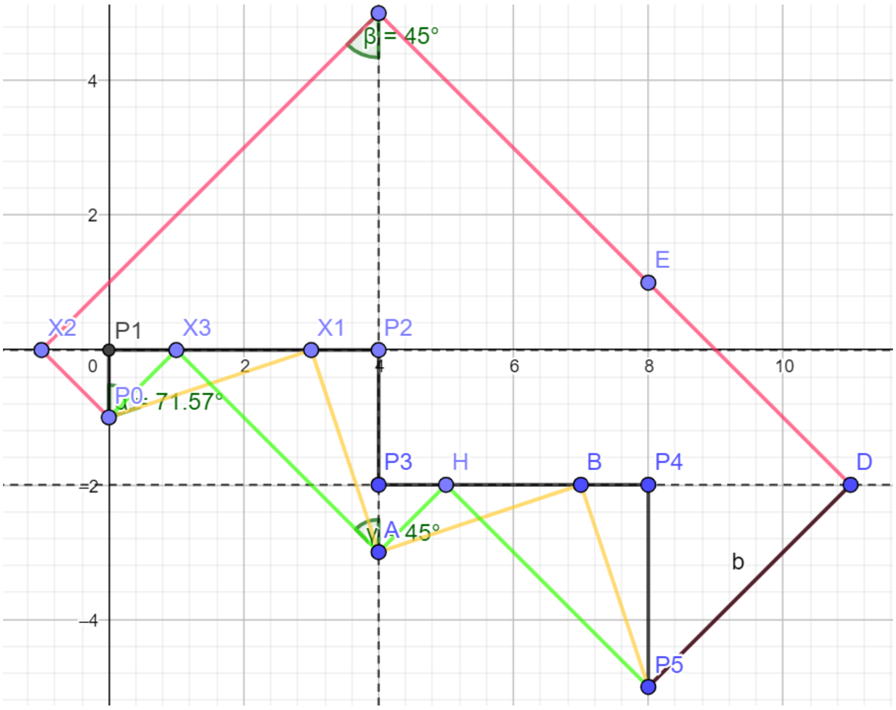
$$= 0$$

Diskriminanta kvadratne jednačine je jednaka nuli, pa jednačina ima jedno dvostruko realno rešenje.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

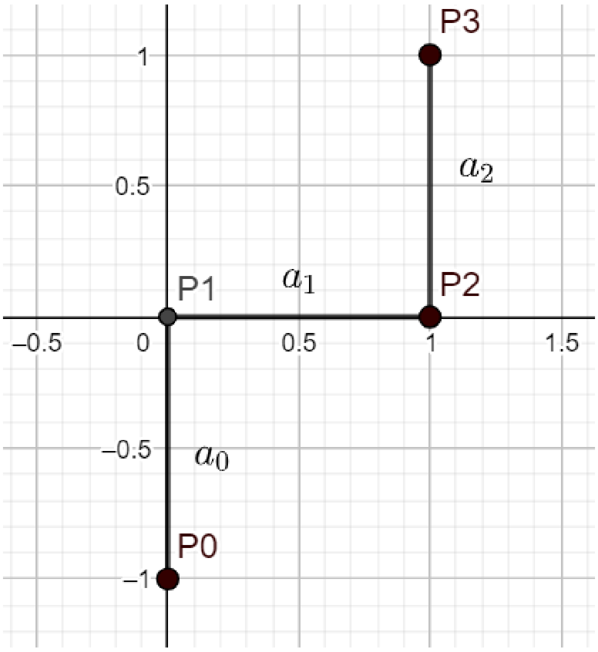
$$= \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} => \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$



Slika 13

3.3 Zlatna kvadratna jednačina

Koristićemo posebnu kvadratnu jednačinu $p(x) = x^2 - x - 1$. Ova jednačina ima koren $x_1 = \varphi(zlatni\ presek) \approx 1.618033\ i\ x_2 = -\varphi$ (*negativna recipročna vrednost zlatnog preseka*)≈ -0.618033.



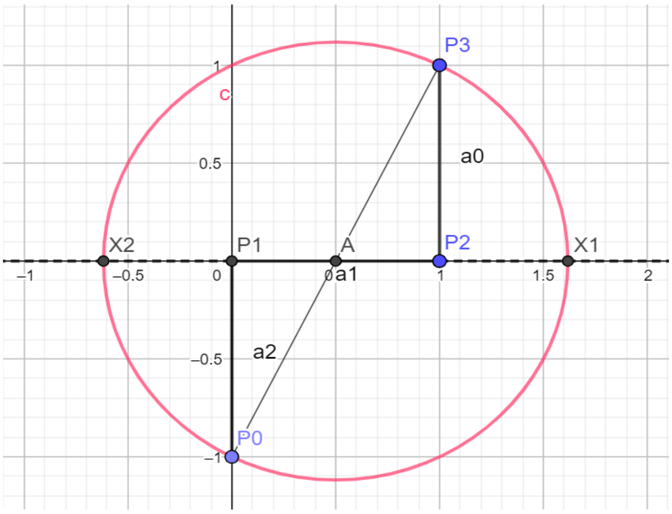
Slika 14

Segment P_0P_1 predstavlja koeficijent a_0, P_1P_2 predstavlja koeficijent a_1, a segment P_2P_3 predstavlja koeficijent a_2.

Sada kada imamo osnovno Lilovo predstavljanje, pokazaćemo dve tehnike za rešavanje p(x) na grafički način.

Karlilov krug

Prva metoda koristi Karlilov krug ili Lilov krug. Karlilov krug je otkrio **Tomas Karlil** pre nego što je Eduard Lil razvio svoj metod predstavljanja polinomnih jednačina. Karlilov krug uveo je **Dzon Lesli** u svojoj knjizi “Elementi geometrije i trigonometrija ravni “.

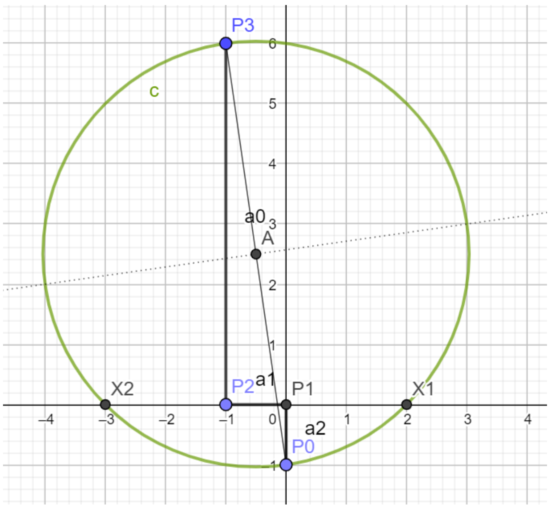


Slika 15

Za bilo koji Lilov prikaz polinoma drugog stepena p(x), središte Lilovog kruga smešteno je u srednjoj tački A segmenta P_0P_3, a poluprečnik je $r = P_0A = AP_3$. Ako polinom p(x) ima realne korene, Lilov krug će presecati produženu ispresecanu liniju koja prolazi kroz P_1 i P_2 u tački ili tačkama koje daju rešenja kvadratne jednačine.

Primer:

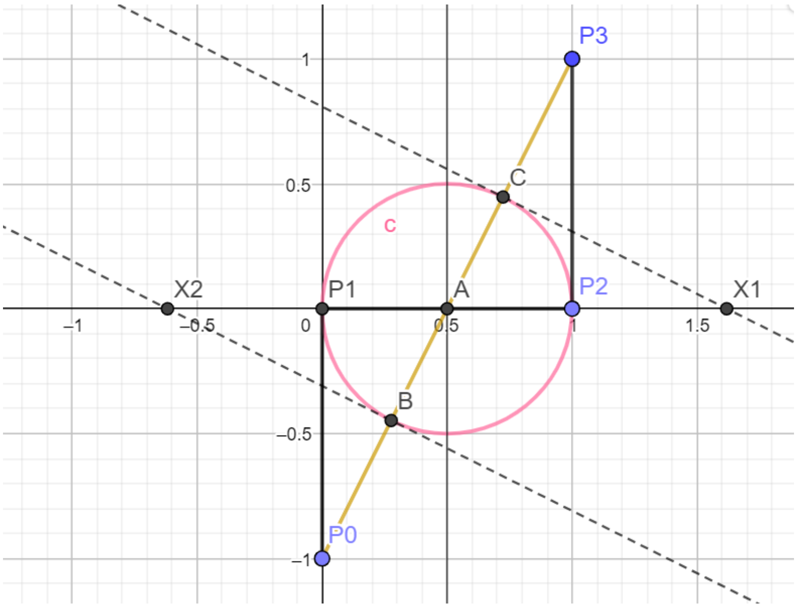
$$\boldsymbol{x^2 + x - 6 = 0}$$



Slika 16

Papusova metoda za rešavanje kvadratne jednačine

Ovo je još jedna metoda predstavljena u knjizi o geometriji Dzonija Leslija. Metoda zahteva da pronađemo sredinu A segmenta P_1P_2. Zatim napravimo krug sa centrom u tački A i poluprečnikom $AP_1=AP_2$. Zatim konstruišemo segment P_0P_3. Ako polinom p(x) ima realne korene, krug bi trebao seći segment P_0P_3 u jednoj ili dve tačke, recimo B i C. Iz tačaka B i C konstruišemo normalne prave na segment P_0P_3. Rešenja dobijamo u preseku tih pravih i prave koja prolazi kroz segment P_1P_2.

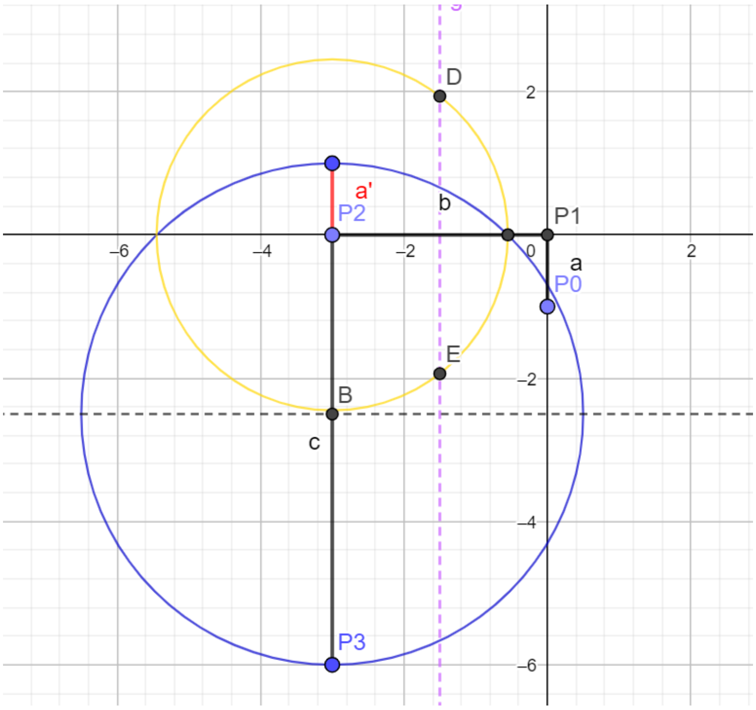


Slika 17

3.4 Kvadratna jednačina sa imaginarnim rešenjima

Primer 1:

$$\boldsymbol{x^2 + 3x + 6 = 0}$$



Slika 18

Slika pokazuje kvadratnu jednačinu sa imaginarnim rešenjima. Prvo crtamo putanju pod pravim uglom na isti način kao što je prethodno opisano. Zatim premeštamo a segment na c segment (crveni segment). Crtamo krug (plavi) čiji je poluprečnik $r = \frac{a+c}{2}$. Presek plave kružnice i b segmenta određuje poluprečnik žutog kruga koji je centriran u tački P_2 (presek b i c segmenta). Vrednost imaginarnog dela rešenja jednačine data je vertikalnim rastojanjem duž prave $x = -\frac{b}{2}$ između b segmenta i njenog preseka sa žutim krugom. Ova udaljenost je prikazana kao tanka isprekidana ljubičasta linija koja se proteže iznad i ispod b segmenta duž prave $x = -\frac{b}{2}$ za vrednost jednaku imaginarnom delu kompleksnog rešenja kvadratne jednačine.

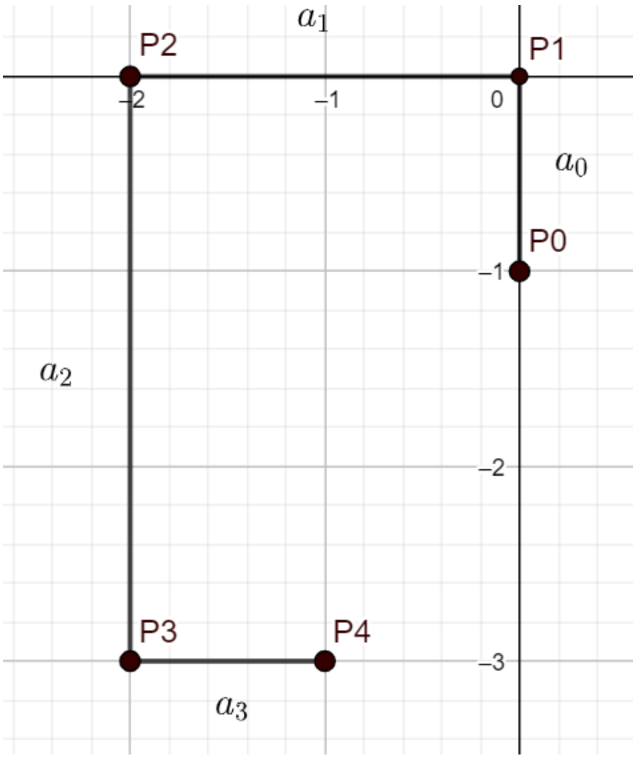
3.5 Kubna jednačina

Kubne jednačine obično se prikazuju na sledeći način:

$$\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0}$$

Algebarsko rešenje kubne jednačine nalazi se u mnogim referencama o algebri, kao što je “Priručnik za primenjenu matematiku” Karla Pearsona. Međutim, algebarsko rešenje je komplikovano i obično nije predstavljeno samo jednom jednačinom, već nizom jednačina sa posredničkim vrednostima , od kojih su neki kompleksni brojevi. U stvarnoj praksi češće je rešavanje kubnih jednačina grafičkim putem.

Postupak za rešavanje kubnih jednačina Lilovom metodom identičan je rešavanju kvadratne jednačine. Neka je $p(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ pravi polinom. Prvi korak Lilove metode je crtanje pravouglog koordinatnog sistema. Počinjemo crtanjem segmenta uz y-osu do koordinatnog početka na udaljenosti $|a_0|$. Zatim okrećemo za 90° I prelazimo udaljenost $|a_1|$ itd. Svaki zaokret je obrnut u odnosu na smer kazaljke na satu ukoliko su koeficijenti pozitivni, a u smeru kazaljke na satu ako su koeficijenti negativni.

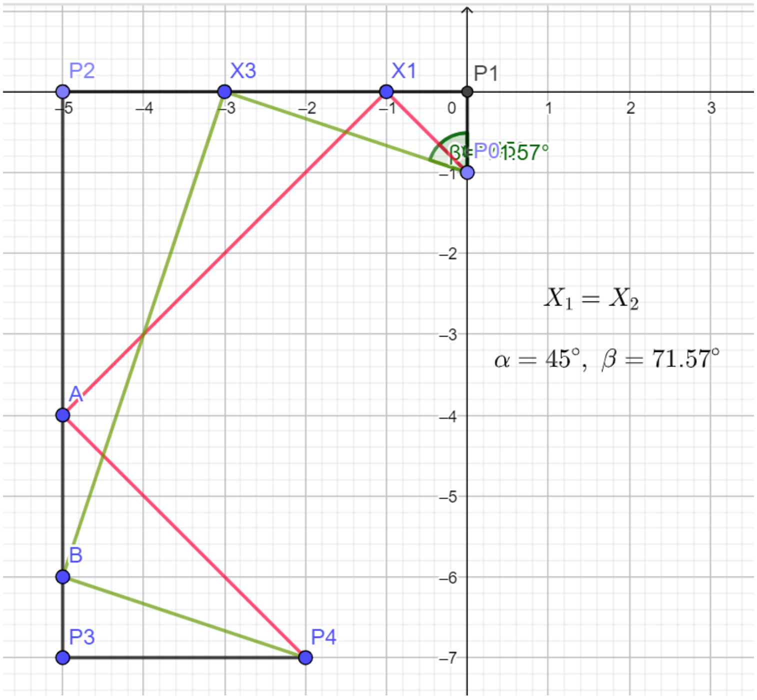


Slika 19

Krećemo pod određenim uglom θ iz tačke P_0, zatim se pod uglom od 90° odbijamo od segmenta a_1 i presecamo segment a_2, pa takođe pod uglom od 90° odbijamo se od segmenta a_2 i završavamo u tački P_4. $-\operatorname{tg}(\theta)$ je koren ovog polinoma. Obzirom da je jednačina trećeg stepena, imaće tri korena, zapravo tri različita ugla pod kojim krećemo iz tačke P_0.

Primer 1:

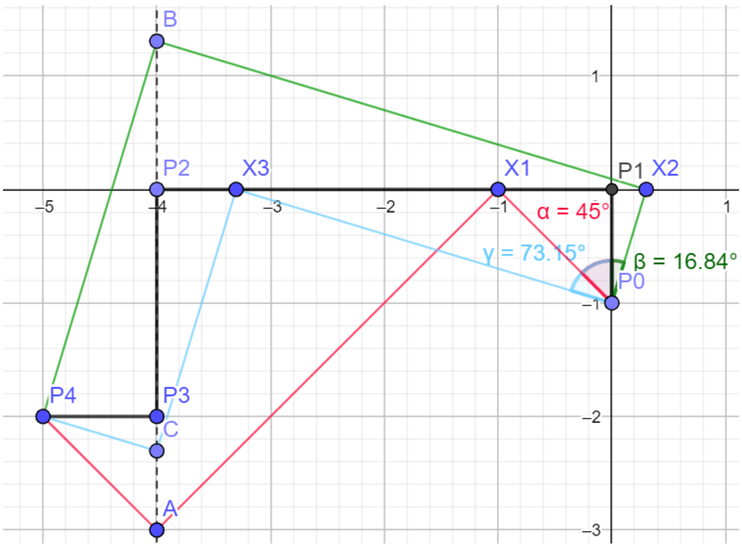
$$\boldsymbol{x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0}$$



Slika 20

Primer 2:

$$\boldsymbol{x^3 + 4x^2 + 2x - 1 = 0}$$



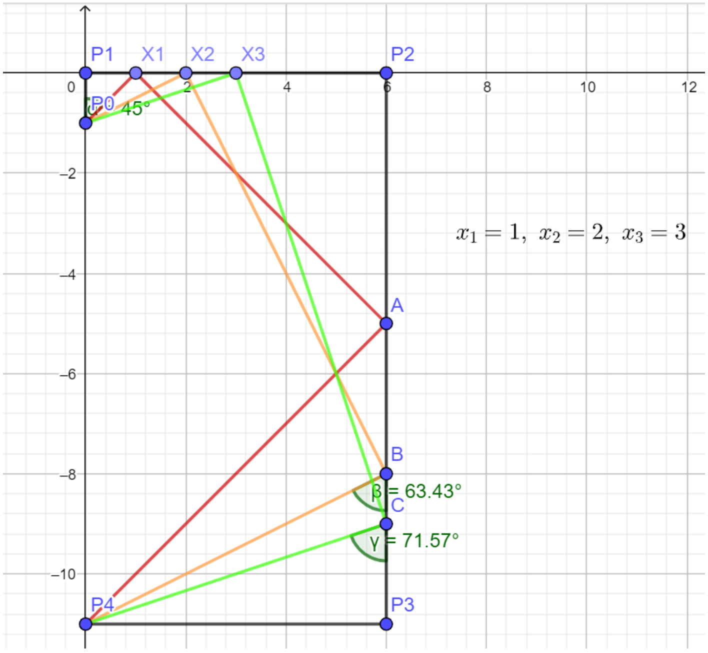
Slika 21

$$x_1 = -tg(\alpha) = -1$$

$$x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Primer 3:

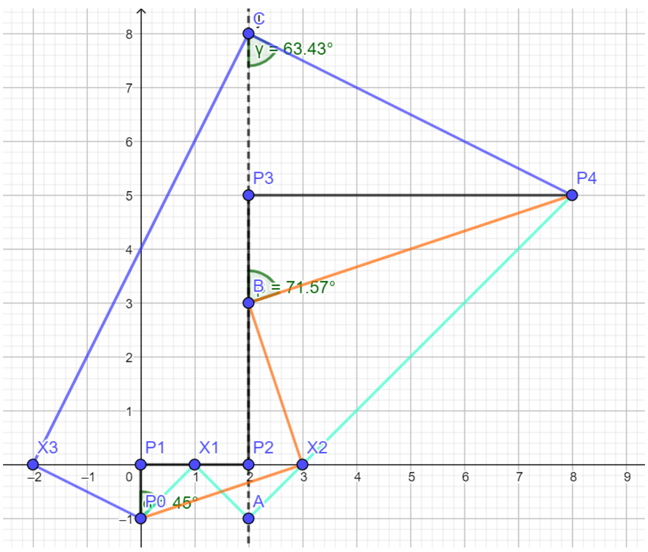
$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$



Slika 22

Primer 4:

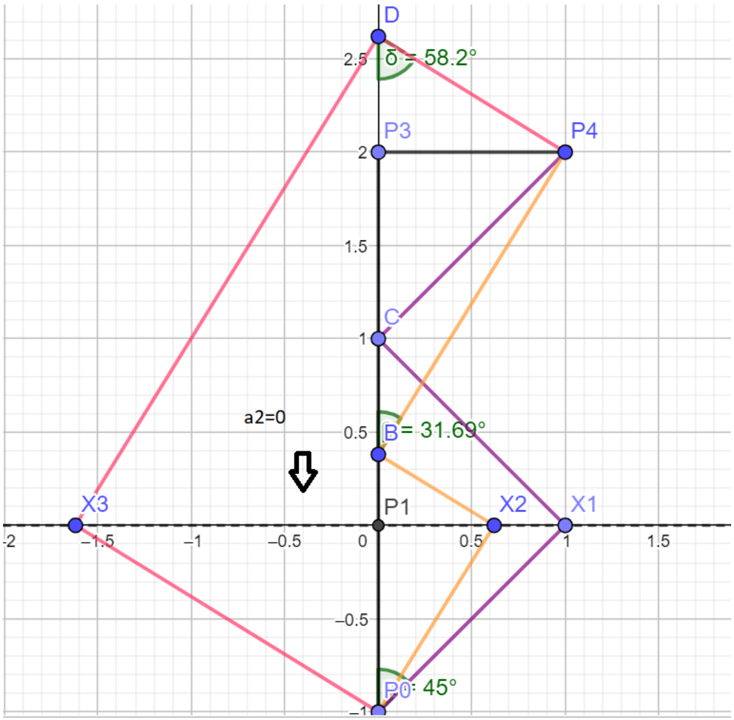
$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$



Slika 23

Primer 5:

$$\boldsymbol{x^3 - 2x + 1 = 0}$$



Slika 24

4. Zaključak

Poslednjih godina, sve više se govori o osavremenjivanju nastave matematike. Računari i internet predstavljaju našu svakodnevnicu pri čemu se teži i njihovoj primeni u nastavi. Programski paket GeoGebra, predstavlja dinamički softver koji omogućava interaktivno učenje matematike i u Lilovoj metodi.

U ovom radu je prikazana vizuelizacija Lilove metode u programskom paketu GeoGebra. Vizuelizacija gradiva je veoma bitna za učenike, jer ona omogućava da se mnogi apstraktni pojmovi približe učenicima. Lilova metoda se može uvesti učenicima druge godine srednjih škola kada već steknu potrebno znanje o kvadratnim jednačinama. Pored klasičnog rešavanja kvadratnih jednačina, učenici će moći i geometrijski da reše jednačine upravo u pomenutomm paketu GeoGebra.

Cilj ovog rada jeste da se uobičajeno rešavanje jednačina višeg reda prikaže na zanimljiviji i lakši način i da otvori vidike ka daljoj upotrebi metode u Origamiju, posebnoj tehnici savijanja papira i pravljenja raznih geometrijskih oblika od njega. Otvara mogućnost rešavanje problema trisekcije ugla i konstrukcije kvadrata što dovodi do presavijanja papira metodom pronalaženja realnih korena proizvoljne kubne jednačine, upravo primenom Lilove metode.

5. Literatura

[1] Solving cubics with creases: the work of Beloch and Lill, *T. Hull*

[2] Matematika 2, udžbenik sa zbirkom zadataka za drugi razred gimnazije, *Nebojša Ikodinović, Slađana Dimitrijević, Suzana Aleksić*

[3] Geometric Solutions of Algebraic Equations, *M. Riaz*

[4] Uncommon mathematical excursions. Polynomia and related realms, *D. Kalman*

[5] Lill's Method and the Sum of Arctangents, *Raul Prisacariu*

[6] Lill's Method and Graphical Solutions to Quadratic Equations, *Raul Prisacariu*

[7] Linearna algebra, *Gradimir V. Milovanović, Radosav Ž. Đorđević*

[8] http://www.mi.sanu.ac.rs/~gvm/Teze/LinearAlgebra.pdf

[9] https://sr.wikipedia.org/sr-ec/

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Lill%27s_method

[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Eduard_Lill