Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Master rad

Enumeracija pri dejstvu grupe

Mentor:
Dr Tanja Stojadinović

Student:
Katarina Brkić
1079/2018

Beograd,
2020.

Sadržaj

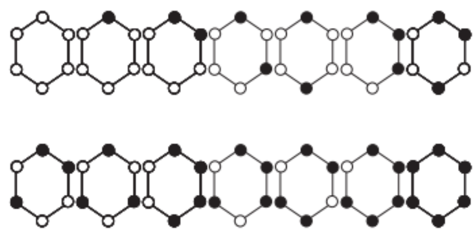
1 Uvod

Pri odredjivanju broja elemenata skupa koji ima neku unutrašnju simetriju, dva elementa tog skupa ćemo poistovetiti ili reći da su ekvivalentni ako se jedan može transformisati u drugi pomoću tih simetrija. Zanima nas, dakle, koliko ima neekvivalentnih objekata u tom skupu. Najveći doprinos u pronalaženju metoda koje daju odgovor na ovo pitanje dao je madjarski matematičar Djerdj Polja. U isto vreme do sličnih rezultata je nezavisno došao i američki matematičar Džon Hauard Redfild, tako da se skup tehnika koje se koriste u rešavanju ovih zadataka zove Polja-Redfild teorija. Ova teorija je odličan primer kako se algebarski aparat može efikasno koristiti u rešavanju problema iz kombinatorike. U ovom radu ćemo se baviti brojanjem neekvivalentnih konfiguracija u odnosu na zadatu grupu permutacija i predstaviti Polja-Redfild teoriju. Krenućemo od pojma dejstva grupe, navesti teoremu o orbiti i stabilizatoru i Bernsajdovu lemu. Definisaćemo ciklus indikator grupe i predstaviti teoremu o enumeraciji Polje i Redfilda. U radu će biti predstavljeno mnoštvo primera koji ilustruju primenu ovog rezultata.

2 Dejstvo grupe - osnovne definicije i primeri

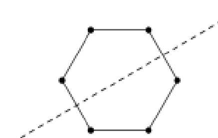
Pretpostavimo da skup kojem želimo odrediti broj elemenata ima neku unutrašnju simetriju. Tada dva elementa tog skupa možemo nazvati istim ili ekvivalentnim ako se jedan može transformisati u drugi pomoću tih simetrija. Prirodno je postaviti pitanje:
Koliko ima neekvivalentnih (različitih) objekata u tom skupu?
Da bismo bolje shvatili prirodu problema koju želimo da rešimo, počnimo sa jednim sasvim jednostavnim primerom.

Primer 1. *Sva temena pravilnog šestougla se boje sa dve boje. Dva bojenja smatramo istim ako se jedno može dobiti od drugog rotacijom šestougla oko centra opisane kružnice. Koliko ima različitih bojenja? Koliko postoji različitih bojenja ako posmatramo i osne simetrije?*
Rešenje možemo dobiti "ispisujući" sva rešenja.

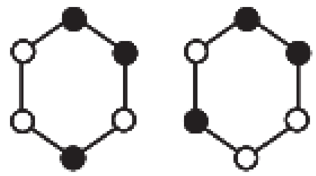


Slika 2.1 Sva različita bojenja temena šestougla sa dve boje,
koja se ne mogu identifikovati rotacijama.

Jasno je da su svi šestouglovi kod kojih je pet temena obojeno jednom bojom, a šesto drugom bojom ekvivalentni jer se mogu dobiti odgovarajućom rotacijom. Analogno važi i za šestouglove sa dva, tri, četiri temena različite boje, ukoliko se temena istih boja nalaze jedna do drugih.
Kao sto možemo videti sa slike iznad, postoji 14 različitih bojenja temena pravilnog šestougla sa dve boje.
Drugo pitanje na koje treba da odgovorimo odnosi se na simetrije šestougla. Jedna od njih prikazana je na slici:



Ako sada posmatramo osne simetrije pravilnog šestougla, onda možemo zaključiti da su naredna dva bojenja sa slike 2.2 ista(ekvivalentna).



Slika 2.2 Dva bojenja koja su različita pri rotacijama, a ista ako im se dozvole osne simetrije.

U ovom primeru možemo zaključiti da postoji 13 različitih bojenja temena pravilnog šestougla. U prethodnim koracima nismo brojali sva moguća bojenja, već smo na skupu svih bojenja definisali relaciju ekvivalencije i onda izbrojali klase ekvivalencije.

Pri tom, relacija ekvivalencije je definisana nekom "unutrašnjom simetrijom" objekta koji se posmatra. Ista ideja se koristi i u rešavanju komplikovanijih zadataka ovog tipa. Sam autor ove teorije, Djerdj Polja je ovu metodu nazivao "Brojanje neekvivalentnih konfiguracija s obzirom na zadatu grupu permutacija."

Počećemo sa defnicijama nekih osnovnih pojmova.

Definicija 1. *Grupa je algebarska struktura* $(G, \cdot)$, *gde je* G *neprazan skup, a* $\cdot$ *binarna operacija na skupu* G *za koju važi:*
1.$(\forall x, y, z \in G)(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
2.$(\exists e \in G)(\forall x \in G) x \cdot e = e \cdot x = x$;
3.$(\forall x \in G)(\exists \tilde{x} \in G)(x \cdot \tilde{x} = \tilde{x} \cdot x = e)$

Ekvivalentna datoj je i sledeća definicija:

Definicija 2. *Grupa je algebarska struktura* $(G, \cdot, ', 1)$ *gde je* G *neprazan skup,* $\cdot$ *binarna operacija na skupu* G, $'$ *unarna operacija na skupu* G *i* 1 *izabrani element iz skupa* G, *za koje važi:*
1.$(\forall x, y, z \in G)(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
2.$(\forall x \in G) x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$;
3.$(\forall x \in G) x \cdot x' = x' \cdot x = 1$;

Neka je X neki skup i neka je $\mathbb{S}_X$ grupa svih permutacija skupa X. On ima strukturu grupe u odnosu na operaciju slaganja (kompozicije) preslikavanja. Neutral te grupe je identičko preslikavanje skupa X, a inverz svakog elementa je permutacija inverzna datoj.
$\mathbb{S}_X = \{\pi \colon X \to X | \ \pi \text{ je bijekcija } \}$.

Primer 2. *Karte su označene brojevima 1-12 poredjane kao na prvoj slici. Karte se skupljaju po vrstama, zatim ponovo dele, ali po kolonama, tako da se dobije sledeći raspored kao na drugoj.*

1	*2*	*3*
4	*5*	*6*
7	*8*	*9*
10	*11*	*12*

1	*3*	*4*
6	*2*	*7*
5	*10*	*11*
8	*9*	*12*

Koliko puta treba da se ponavlja postupak kako bi se karte vratile u početnu poziciju?

Sa slike možemo videti da je 1 fiksirana, ostaje na svom mestu. Na mestu dva se sada našla 3, na mestu 3 sada je 4 itd...
Dobijamo da se drugi kvadrat dobija iz prvog kada se izvrši permutacija π*:*
π=(1)(2 3 4 6 7 5)(8 10)(9 11)(12)
Lako se dobija da je $\pi^6=\epsilon$*.*
Dakle π^6 *je identičko preslikavanje, nakon šest ponovljenih postupaka dobijamo početni raspored.*

Definicija 3. *Reći ćemo da neka grupa* $(G, *)$ *dejstvuje na skupu* X *ako je svakom elementu grupe* $g \in G$ *dodeljena neka permutacija* $\pi_g \in \mathbb{S}_X$ *(* π_g *je bijekcija na* X*) tako da za sve* $g, h \in G$ *i sve* $x \in X$ *važi:*
$\pi_{g*h}(x)=(\pi_g \circ \pi_h)(x)$*. Drugim rečima, dejstvo grupe* G *na skupu* X *je homomorfizam grupe* G *u* $\mathbb{S}_X$*. Stoga neutralan element grupe* G *odgovara identičkom preslikavanju na* X*.*

Navešćemo nekoliko primera dejstva grupe.

1. Neka je $G=(\mathbb{R},+)$ i neka G dejstvuje na skupu $X=\mathbb{R}^2$ na sledeći način:
$a \in G, (x,y) \in X, a((x,y))=(x+a,y)$
Geometrijski, realan broj a dejstvuje na koordinatnu ravan X tako što svaku tačku (x,y) translira desno za a.

2. Ista grupa $G=(\mathbb{R},+)$ na skupu $X=\mathbb{R}^2$ može dejstvovati i sasvim drugačije: realan broj σ dejstvuje na X tako što svaku tačka (x,y) zarotira u smeru kazaljke na satu za σ radijana.

3. Na skupu temena pravilnog n-tougla $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ dejstvuju prirodno dve grupe:
-Diedarska grupa $\mathbb{D}_n$- grupa svih izometrija pravilnog n-tougla.

Ta grupa je reda $2n$, sa n rotacija i n osnih simetrija.
-Grupa rotacija.To je podgrupa $\mathbb{D}_n$ koju čine samo rotacije. Izomorfna je sa cikličnom grupom Z_n.

4. Dejstvo bilo koje grupe je potpuno odredjeno ako nam je poznato dejstvo generatora. Na primer, dejstvo grupe $G = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ na skupu $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ je potpuno odredjeno ako opišemo kako dejstvuje generator 1. Ako je njemu dodeljena permutacija π_1
$\pi_1 = \binom{abcdef}{bcaefd}$
tada je, iz defnicije dejstva grupe odredjena i permutacija π_2:
$\pi_2 = \pi_{1+1} = \pi_1 \cdot \pi_1 = \binom{abcdef}{cabfde}$

5. Dejstvo grupe $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ na $X = \{a, b, c, d\}$ je zadano sa
$\pi_{(1,0)} = \binom{abcd}{bacd}$; $\pi_{(0,1)} = \binom{abcd}{abdc}$

6. Ista grupa $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ na istom skupu X može dejstvovati i ovako:
$\pi_{(1,0)}=\binom{abcd}{bacd}$; $\pi_{(0,1)}=\binom{abcd}{cdab}$

Konačan skup X identifikovaćemo sa $[n]$, gde je $[n]$ skup $\{1, 2, ..., n-1, n\}$, a grupu permutacija $\mathbb{S}_X$ sa simetričnom grupom $\mathbb{S}_n$. U kombinatorici nas ne zanima sama grupa G, već nas interesuje šta dejstvo grupe G učini sa konačnim skupom X. Zato se apstraktna grupa G može identifikovati sa slikom G pri homomorfizmu koji definiše dejstvo G na X. Stoga, u daljem tekstu smatramo da je G podgrupa simetrične grupe $\mathbb{S}_n$.

Definicija 4. *Neka grupa G dejstvuje na skupu X. Za svaki $x \in X$ definišu se dva važna pojma:*

- ***orbita elementa*** *x: $\Omega(x)= \{\pi(x) \,/\pi \in G\} \subseteq X$.*

-***stabilizator elementa*** *x: $G_x=\{\pi \in G/\, \pi(x)=x\} < G$*

Orbita $x \in X$ je podskup skupa X koji čine svi elementi u koje se x može preslikati permutacijama iz G. Stabilizator elementa x je podgrupa grupe G koju čine permutacije kojima je x fiksna tačka.

Takodje, za sve $\pi \in G$ se definiše skup fiksnih tačaka sa
Fix(π)$=\{x \in X : \pi(x)=x\} \subseteq X$.
Dejstvo grupe G na skupu X definiše relaciju ekvivalencije:
$x \sim y \Leftrightarrow$ postoji $\pi \in G$ tako da je $\pi(x)=y$
Dokazaćemo da je uvedena relacija zaista relacija ekvivalencije, odnosno da je refleksivna, tranzitivna i simetrična:
1. Relacija jeste refleksivna, $x \sim x$, jer $\epsilon \cdot x = x$
2. Relacija jeste simetrična, $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, jer ako je $\pi \cdot x = y$, tada je $\pi^{-1} \cdot y = x$

3. Relacija jeste tranzitivna, $x \sim y$ i $y \sim z \Rightarrow x \sim z$, jer ako je π takvo da $\pi \cdot x = y$ i σ takvo da $\sigma \cdot y = z$, tada je $\sigma \cdot \pi \cdot x = z$
Dakle relacija ispunjava sve osobine relacije ekvivalencije.

Primer 3. *Odrediti orbite i stabilizatore u prethodno navedenim primerima u dejstvu grupe.*

1. Orbitu elementa (x_0, y_0) čine sve tačke sa horizontalne prave $y = y_0$. Sve orbite pri ovom dejstvu su horizontalne prave. Stabilizator je trivijalna podgrupa.

2. Ako je $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, orbita je kružnica sa centrom u koordinatnom početku. Stabilizator tog elementa je $\{2k\pi : \text{k} \in \text{Z}\}$. Tačka $(0, 0)$ je fiksna tačka za sve elemente iz grupe G i njen stabilizator je cela grupa.

3. U oba slučaja je celi skup X jedna orbita. Kada se to desi kažemo da je dejstvo G na skupu X tranzitivno. Pri dejstvu grupe rotacija stabilizator svakog elementa je trivijalna podgrupa. Ako se posmatra dejstvo diedarske grupe $\mathbb{D}_n$ na skupu temena, stabilizator svakog temena x_i je dvočlan. Pored identitete tu je i osna simetrija čija osa prolazi kroz tačku x_i.

4. Ovde su orbite {a, b, c} i {d, e, f}. Stabilizator svakog elementa je trivijalan.

5. U ovom slučaju su orbite {a, b} i {c, d}. Stabilizator elementa a je $G_a = \{\text{Id}, \pi_{(0,1)}\}$.

6. Postoji samo jedna orbita, odnosno, dejstvo grupe G je tranzitivno. Stabilizator svakog elementa iz X je trivijalan.

Teorema 1. *(Teorema o orbiti i stabilizatoru)*

Neka konačna grupa G dejstvuje na skupu X. Tada za proizvoljan $x \in X$ važi: $|G_x| \cdot |\Omega(x)| = |G|$.

Dokaz: Za zadani $x \in X$ posmatrajmo multiskup
$M = \{\pi(x) : \pi \in G\}$ sa tačno |G| elemenata.
Tvrdjenje leme se dobije kada uočimo da elementi orbite Ω_x čine osnovni skup na kojem je multiskup M definisan, i da je svaki y $\in M$ multipliciteta $|G_x|$.
Zaista, ako je $y = \pi(x) \in M$, tada je $y \in \Omega_x$.
Za svaki σ iz stabilizatora G_x i $(\pi \circ \sigma)$(x) $\in M$. Skup $\{\pi \circ \sigma | \sigma \in G_x\} \subseteq G$ ima $|G_x|$ različitih elemenata.

Dalje, ako za neki $\tau \in G$ važi $\tau(x) = y$, tada je $\pi^{-1} \circ \tau \in G_x$. Stoga je svaki element y $\in M$ multipliciteta $|G_x|$.

□

3 Bernsajdova lema

Neka je $\sim$ relacija zadata sa $x \sim y \Leftrightarrow x$ i y su u istoj orbiti, odnosno postoji $g \in G$ tako da je $y = g(x)$. Ova relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije. X/G je skup svih klasa ekvivalencije relacije ekvivalencije $\sim$. Sada možemo opisati osnovno sredstvo za odredjivanje broja orbita pri dejstvu grupe G na skupu X. Sledeće tvrdjenje je poznato pod imenom Bernsajdova lema.

Lema 1. *(Bernsajd)*

Neka je X konačan skup i neka na njemu dejstvuje konačna grupa G. Broj orbita pri tom dejstvu je

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |Fix(\pi)|$$

Dokaz:
Posmatrajmo skup F=$\{(x, \pi) : x \in X, \pi \in G, \pi(x) = x\}$. Pomoću principa dvostrukog prebrojavanja dobijamo

$$|F| = \sum_{\pi \in G} |Fix(\pi)| = \sum_{x \in X} |G_x|$$

Ukoliko iskoristimo rezultat iz teoreme o orbiti i stabilizatoru, dobićemo da važi:

$$\sum_{\pi \in G} |Fix(\pi)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|\Omega_x|},$$

odnosno

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |Fix(\pi)| = \sum_{x \in X} \frac{1}{|\Omega_x|}.$$

Ako je O neka orbita iz X/G sa k elemenata, razlomak $\frac{1}{k}$ se pojavi u sumi $\sum_{x \in X} \frac{1}{|\Omega_x|}$ po jednom za svaki element $x \in$ O, dakle k puta ukupno.
Stoga, svaka orbita iz X/G u toj sumi doprinese 1, pa je

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |Fix(\pi)| = \sum_{x \in X} \frac{1}{|\Omega_x|} = \sum_{O \in X/G} 1 = |X/G|$$

$\square$

4 Bojenja - primeri

Sada možemo rešiti problem enumeracije različitih bojenja nekog skupa pri dejstvu konačne grupe. Neka je X konačan skup sa n elemenata i neka je G podgrupa grupe $\mathbb{S}_X$. Ako je $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ skup boja koje imamo na raspolaganju, uočimo da grupa G dejstvuje i na skupu

$$Y = \{f | f : X \to B\}$$

koji čine sva bojenja elemenata skupa X bojama iz B. Dejstvo grupe G na skupu Y je prirodno definisano sa

$$(\pi(f)) = f(\pi(x)).$$

Dva bojenja f_1, f_2 elemenata iz X smatramo istim pri dejstvu grupe G ako postoji $\pi \in G$ tako da je $\pi(f_1) = f_2$. Drugim rečima, bojenja f_1 i f_2 su ista u odnosu dejstvo grupe G ako i samo ako su u istoj orbiti Y pri dejstvu G. Dakle, broj različitih bojenja elemenata iz X bojama iz B je jednak broju elemenata u Y/G. Taj broj možemo odrediti pomoću Bernsajdove leme.

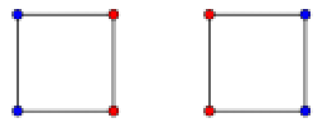
Primer 4. *Na koliko različitih načina možemo obojiti temena kvadrata sa dve boje?*

Sa X ćemo da obeležimo temena kvadrata, dakle $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Tada Y čine sva moguća bojenja tog skupa sa dve boje. Grupa koja dejstvuje na Y biće diedarska grupa $\mathbb{D}_4 = \{\epsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma\}$, σ refleksija u odnosu na vertikalnu osu, odnosno $\sigma = (12)(34)$, ρ je rotacija za $90°$ oko centra kvadrata, odnosno $\rho = (1234)$. Ostali elementi se dobijaju njihovim kompozicijama.
Red ove diedarske grupe je 8. Ukupan broj mogućih bojenja je $2^4 = 16$, jer imamo 4 temena, a 2 boje. Pomoću Bernsajdove leme ćemo izračunati različita bojenja.
Potrebno je pronaći koliko bojenja kvadrata svaki element grupe G fiksira.

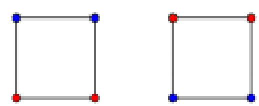
Identitet, ϵ fiksira svih 16 bojenja.

ρ i ρ^3 fiksiraju samo dva bojenja, gde su sva temana obojena istom bojom.

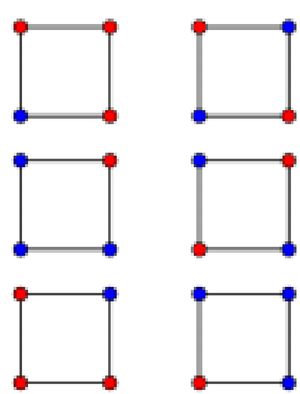
ρ^2 *fiksira ista bojenja kao i* σ*. Bojenja su prikazana na slici:*



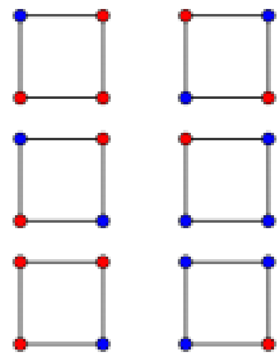
$\rho\sigma$ *fiksira sledeća bojenja:*



$\rho^2\sigma$ *fiksira:*



$\rho^3\sigma$ *fiksira:*



Iskoristićemo sada Bernsajdovu lemu kako bi izračunali broj orbita $\mathbb{D}_4$ na skupu X.

$$|Y/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}|Fix(\pi)| = \frac{1}{8}(16+2+4+2+4+4+8+8) = 6$$

Zaključujemo da postoji 6 *različitih bojenja temena kvadrata sa dve boje.*

Primedba:
Pretpostavimo da elemente n-točlanog skupa X bojimo sa m boja iz B. Podsetimo se da su elementi grupe G identifikovani sa permutacijama iz $\mathbb{S}_n$.

Neko bojenje $f : X \to B$ iz Y je fiksirano permutacijom π (to jest, $f \in Fix_Y(\pi)$) ako i samo ako je f konstantno na svim ciklusima permutacije π. Ako je $c(\pi)$ broj ciklusa u permutaciji π tada je $|Fix_Y(\pi)| = m^{c(\pi)}$.
Na osnovu Bernsajdove leme zaključujemo da je broj svih različitih bojenja skupa X sa m boja pri dejstvu grupe G jednak

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G} m^{c(\pi)} \quad (1)$$

Posmatrajmo rotaciju prostora koja datu kocku ostavlja invarijantnom kao skup tačaka. Dakle, temena se rotiraju medjusobno, stranice i ivice takodje, ali pozicija kocke u prostoru ostaje nepromenjena.

Ovakvo preslikavanje zove se koincidencija i jeste rotacija (za nula stepeni), i ostavlja kocku tu gde jeste.
Ako imamo jednu rotaciju u prostoru, to je geometrijski gledano rotacija oko tačke za ugao α. Ta rotacija ima inverz, to je rotacija oko iste tačke za 2π-α.

To možemo videti videti kao rotaciju za ugao α u jednom, odnosno u drugom smeru.
Ako α ne menja poziciju kocke, znači da α slika kocku $ABCDEFGH$ u kocku $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ pri čemu

$$\{A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1\} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}.$$

Dakle, rotacija za -α je rotacija koja takodje ostavlja kocku u istoj poziciji.

Dakle, skup svih rotacija koje datu kocku ostavljaju na istoj poziciji u prostoru jeste u odnosu na uobičajenu kompozicijom permutacija. Ovaj skup obelažavamo sa O i želimo da vidimo koliko ima elemenata i kako ti elementi zapravo izgledaju.

Kao što smo rekli, tu je koincidencija. To je prva rotacija.
Sada posmatramo stranicu $ABCD$. Neka je X presek dijagonala ovog kvadrata. Neka je p prava iz tačke X normalna na $ABCD$. Ova prava prolazi kroz presek dijagonala $EFGH$. Rotacije za 90° i za 180° i za 270° oko ove prave ostavljaju kocku na mestu.
Rotacija za 90° šalje A u B, B u C, C u D, D u A, E u F, F u G, G u H, H u E.

Rotacija za 180° šalje A u C, B u D, C u A, D u B, E u G, F u H, G u E, H u F.
Rotacija za 270° šalje A u D, B u A, C u B, D u C, E u H, F u E, G u F, H u G.

Dakle, imamo tri rotacije oko prave p.
Neka je q prava kroz presek dijagonala $ABEF$ i presek dijagonala $CDGH$, oko koje imamo tri rotacije kao i oko prave p.
Neka je r prava kroz presek dijagonala $ADEH$ i presek dijagonala $BCFG$ oko koje imamo tri rotacije, slično kao i oko prave p.
Dakle, na ovaj način imamo 9 rotacija koje kocku ostavljaju na svom mestu.

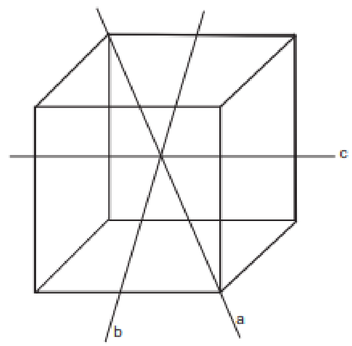
Neka je a prava kroz sredinu ivice AB i sredinu ivice GH. Jedina moguća rotacija oko ove prave jeste za π. Neka je b prava kroz sredinu ivice BC i sredinu ivice EH, oko nje imamo jednu rotaciju. Neka je c prava kroz sredinu ivice CD i sredinu ivice EF, oko koje imamo jednu rotaciju. Neka je d prava kroz sredinu ivice AD i sredinu ivice FG, oko nje imamo jednu rotaciju.
Neka je e prava kroz sredinu ivice AE i sredinu ivice CG, i oko nje imamo jednu rotaciju.
Neka je f prava kroz sredinu ivice BF i sredinu ivice DH, i oko nje imamo jednu rotaciju. Dakle, u zbiru imamo 6 rotacija.

Neka je g prostorna dijagonala AG. Oko nje imamo dve rotacije za 120° (jedna u suprotnom smeru od druge, jedna inverzna u odnosu na drugu).
Takodje, imamo dve rotacije oko prostorne dijagonale BF, dve rotacije oko prostorne dijagonale CE i dve rotacije oko prostorne dijagonale DF. Ovo nam daje

ukupno 8 rotacija.

Dakle, grupa rotacija kocke ima $1 + 9 + 6 + 8 = 24$ rotacija (elementa).

Primer 5. *Šest strana kocke želimo da obojimo sa tri boje. Dva bojenja smatramo istim ako se rotacijama kocke jedno može transformisati u drugo. Koliko ima različitih bojenja?*



Slika 5.1. Rotacija kocke

Grupa rotacija kocke G ima 24 elementa. Opišimo ih:
tip a: rotacije oko glavne dijagonale (prava a na slici 5.1.). Postoje četiri takve prave i oko svake od njih po dve neidentičke rotacije, za 120° i 240°.

tip b: rotacije za 180° oko prave koja prolazi kroz središta naspramnih ivica (na slici 5.1 to je prava b). Postoji šest takvih pravih i ukupno šest rotacija ovog tipa.

Kod prave koja sadrži centre naspramnih strana kocke (prava c na slici 5.1) postoje dve "vrste" rotacija. Postoje tri takve prave.

tip c_1: rotacije oko c za 90° (odnosno 270° stepeni) koje su reda tri. Ukupno ima šest takvih rotacija.

tip c_2: rotacije oko c za 180° koje su reda dva. Postoje tri ovakve rotacije.

tip e: Identičko preslikavanje je takodje u grupi rotacija kocke.

Lako je primetiti da permutacije istog tipa fiksiraju isti broj bojenja strana kocke. Da bismo mogli primeniti formulu (1) izračunajmo $|Fix_Y(\pi)|$ za sve $\pi \in G$:

tip per.	broj per. tog tipa	broj ciklusa c(π)	doprinos u (1)
a	8	2	$8\cdot 3^2$
b	6	3	$6\cdot 3^3$
c_1	6	3	$6\cdot 3^3$
c_2	3	4	$3\cdot 3^4$
e	1	6	3^6

Sada dobijamo da je traženi broj različitih bojenja kocke sa tri boje jednak

$$\frac{1}{24}(72+162+162+243+729)=\frac{1368}{24}=57$$

.

Dakle, sada znamo da odgovorimo na pitanje koliko ima različitih bojenja konačnog skupa X pri dejstvu $G<\mathbb{S}_X$ bojama iz skupa B.

Medjutim, možemo postaviti i još konkretnije pitanje: Koliko ima bojenja strana kocke crvenom, plavom i belom bojom, u kojima se crvena boja upotrebi tri puta, plava dva i bela jedan put?

Još opštije je sledeće pitanje: Neka je X skup sa n elemenata i neka na X dejstvuje konačna grupa G. Neka je B skup boja kojima se boje elementi iz X. Koliko ima različitih bojenja elemenata iz X pri dejstvu grupe G u kojima se boja b_1 upotrebi n_1 puta, boja b_2 se upotrebi n_2 puta, . . ., boja b_k se upotrebi n_k puta? Pri tome je $n_1+n_2+...+n_k=n$. Primetimo da u ovom slučaju skup boja može da bude i beskonačan!

Odgovor na postavljeno pitanje ćemo potražiti u obliku funkcija generatrisa. Neka je $B=\{b_1,b_2,...\}$ dozvoljen skup boja za bojenje n-točlanog skupa X na kojem dejstvuje grupa $G<\mathbb{S}_X$.

Za niz ili uredjenu m-torku $(n_1,n_2,n_3,...)$ (u zavisnosti od toga da li je skup boja B končan ili nije), za koju je $\sum_{k\in N} n_k=n$ sa $k(n_1,n_2,n_3...)$ označimo broj različitih bojenja X u kojima se boja b_1 upotrebi n_1 put, boja b_2 se upotrebi n_2 puta itd...

Dakle, odgovor na postavljeno pitanje su koeficijenti polinoma ili stepenog reda (ako je skup boja beskonačan)

$$F_G(x_1,x_2,...)=\sum_{(n_1,n_2,...);\sum n_k=n} k(n_1,n_2,n_3,...)x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}...$$

Primer 6. *Odrediti polinome $F_{\mathbb{Z}_6}$ i $F_{\mathbb{D}_6}$ pri bojenju temena šestougla sa dve boje.*

Direktnim prebrojavanjem sa slike 2.1 dobijamo

$$F_{\mathbb{Z}_6}(x_1,x_2)=x_1^6+x_1^5x_2+3x_1^4x_2^2+4x_1^3x_2^3+3x_1^2x_2^4+x_1x_2^5+x_2^6.$$

Taj polinom je neznatno drugačiji, ako se posmatraju bojenja sa dve boje pri dejstvu diedarske grupe $\mathbb{D}_n$:
$F_{\mathbb{D}_6}(x_1, x_2) = x_1^6 + x_1^5 x_2 + 3x_1^4 x_2^2 + 3x_1^3 x_2^3 + 3x_1^2 x_2^4 + x_1 x_2^5 + x_2^6$.

Iz polinoma (ili reda) F_G se lako dobije broj različitih bojenja elemenata skupa X bojama iz B pri dejstvu grupe $G < \mathbb{S}_x$. To je naprosto zbir svih koeficijenata F_G, odnosno $F_G(1, 1, ...)$. U prethodnom primeru je
$F_{\mathbb{Z}_6}(1, 1) = 14$ *i* $F_{\mathbb{D}_6}(1, 1) = 13$.

Primer 7. *Strane paralelograma (koji nije kvadrat) treba obojiti crvenom ili plavom bojom. Koliko je ovde bojenja, ako bojenja koja se mogu dobiti jedno od drugog rotacijom smatramo identičnim?*

Grupa o kojoj je ovde reč jeste diedarska grupa reda 2, poznata kao $\mathbb{D}_2$, koja ima sledeća četiri elementa:

1. Identička transformacija- koincidencija

2. Centralna simetrija u odnosu na tačku koja predstavlja presek dijagonala tog paralelograma

3. Refleksija oko kraće strane. Označimo paralelogram sa $ABCD$, pri čemu su AB i CD duže stranice. Neka je tačka E središte stranice AD i tačka F središte stranice BC. Pravu koja sadrži tačku E i tačku F označimo sa p. Refleksija oko kraće strane predstavlja miror simetriju oko prave p.

4. Refleksija oko duže strane. Označimo sa M središte stranice AB, N središte stranice CD i sa n pravu koja sadrži te dve tačke. Refleksija oko duže strane predstavlja miror simetriju oko prave n.

Sada možemo ponovo iskoristiti Bernsajdovu lemu:
Identiteta fiksira $2^4 = 16$ elemenata. Nema restrikcije na stranama.
Centralna simetrija fiksira $2^2 = 4$ elemenata. Duže strane se moraju slikati jedna u drugu, a isto tako i kraće strane.
Refleksija oko kraće strane fiksira $2^3 = 8$ elemenata. Kraće strane se moraju slikati u sebe.
Refleksija oko duže strane fiksira $2^3 = 8$ elemenata. Duže strane se moraju slikati u duže.

Ovo daje ukupno $\frac{1}{4}(16 + 4 + 8 + 8) = 9$ orbita.

Primer 8. *Šest istovetnih lopti treba rasporediti u tri istovetne kutije. Koliko postoji načina da se ovo uradi?*

Na prvi pogled ovo ne liči na nešto što se rešava Bernsajdovom lemom. Medjutim, ipak se može rešiti njenom primenom. Grupa koju posmatramo je $\mathbb{S}_3$, koja ima sledeće elemente:

1. Ne diraj kutije

2. Razmeni prvu i drugu kutiju

3. Razmeni prvu i treću kutiju

4. Razmeni drugu i treću kutiju

5. Pomeri prvu kutiju tamo gde je druga, drugu pomeri gde je treća, a treću premesti na mesto gde je bila prva.

6. Pomeri prvu kutiju gde je bila treća, drugu pomeri gde je bila prva, a treću pomeri gde je bila druga.

Predstavićemo kao permutacije:

(1, 2, 3) ostaje (1, 2, 3)

(1, 2, 3) postaje (2, 1, 3)

(1, 2, 3) postaje (3, 2, 1)

(1, 2, 3) postaje (1, 3, 2)

(1, 2, 3) postaje (2, 3, 1)

(1, 2 ,3) postaje (3, 1, 2)

Ovog puta možemo pojednostaviti:
Identiteta fiksira sve moguće konfiguracije.
Tri permutacije koje razmenjuju dve kutije fiksiraju konfiguracije u kojima je sadržaj kutija koje menjamo isti.

Dve permutacije koje rotiraju kutije fiksiraju konfiguracije u kojima je sadržina svih kutija ista.
Problem, sada, jeste da se izračuna koliko ima mogućih konfiguracija u svakoj mogućnosti.

Slučaj identiteta je najteži. Možemo zamisliti da je sada kutije moguće razlikovati. U ovom slučaju ih ne pomeramo. Ovaj problem stavljanja 6 istovetnih lopti u 3 različite kutije se može rešiti tako što ćemo ispisati sve mogućnosti.

Neka su kutije označene sa X, Y i Z.

1. Svih 6 kuglica u jednoj kutiji: 3 načina

2. Pet kuglica u jednoj, jedna kuglica u drugoj i treća prazna: 6 načina (U X možemo staviti pet kuglica, u Y jednu, u Z nijednu; U X pet, u Y nula i u Z jedna;u X jednu, u Y pet,u Z nula; u X nula, u Y pet, u Z jednu; u X jednu, u Y nula, u Z pet; u X nula, u Y jednu, u Z pet);

3. Četiri kuglice u jednoj, jedna u drugoj i jedna u trećoj: 3 načina (u X četiri, u Y i Z po jedna; u Y četiri, u X i Z po jedna; u Z četiri u X i Y po jedna)

4. Četiri kuglice u jednoj, dve u drugoj, treća prazna: 6 načina (u X četiri, u Y dve, u Z nijedna; u X četiri, u Y nijednu, u Z dve; u X dve, u Y četiri, u Z nula; u X nula, u Y četiri, u Z dve; X dve, u Y nula, u Z četiri; u X nula, u Y dve, u Z četiri)

5. Tri kuglice u jednoj, tri u drugoj i treća prazna: 3 načina (u X tri, u Y tri i Z prazna;u X tri, Y prazna i u Z tri; X prazna, u Y tri i u Z tri;)

6. Tri kuglice u jednoj, dve u drugoj i trećoj jedna:6 načina (u X tri, u Y dve i u Z jedna; u X tri, u Y jedna i u Z dve; u X dve, u Y tri i u Z jedna; u X jedna, u Y tri i u Z dve; u X dve, u Y jedna i u Z tri; u X jedna, u Y dve i u Z tri)

7. Po dve kuglice u svakoj kutiji: 1 način (dve u X, dve u Y i dve u Z)
U ovom slučaju ukupno $= 3 + 6 + 3 + 6 + 3 + 6 + 1 = 28$

Drugi slučaj, kada su dve kutije razmenjene je lakši, jer možemo razložiti na slučajeve. Sadržina dve razmenjene kutije mora biti 0, 1, 2 ili 3 lopte svaka, i sadržaj ostalih kutija sledi iz toga, 6, 4, 2 ili 0 tim redom. Postoje 4 konfiguracije za svaki par razmenjenih kutija.

Treći, gde su kutije rotirane, je najjednostavniji: pošto sve moraju imati isti broj lopti, svaka kutija ponaosob mora imati 2 lopte. To je dakle samo jedna konfiguracija u ovom slučaju.
Kada sve saberemo dobijamo:
$\frac{1}{6}(28 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1) = 7$

5 Poljina teorema o prebrojavanju

Da bismo odredili F_G posmatramo polinom- ciklus indikator grupe G.

Definicija 5. *Neka je G podgrupa simetrične grupe $\mathbb{S}_n$. Ako je type$(\pi) = (c_1, c_2, ..., c_n)$ tip neke permutacije π iz G (c_k je broj k-ciklusa u π), tada se* *permutaciji π dodeljuje monom $Z_\pi = z_1^{c_1} z_2^{c_2} ... z_n^{c_n}$. Polinom*

$$Z_G(z_1, z_2, ..., z_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} Z_\pi$$

po promenljivim $z_1, z_2, ..., z_n$ se naziva ciklus indikator grupe G.

Primer 9. *Izračunati ciklus indikatore grupe iz primera 1 (grupe $\mathbb{Z}_6$ i $\mathbb{D}_6$) i primera 5 (G je grupa rotacija kocke).*

Svaku od posmatranih grupa identifikujemo sa odgovarajućom podgrupom simetrične grupe. Za sve elemente grupe odredimo strukturu ciklusa. Na primer, četiri rotacije tipa a u primeru 5 imaju dva ciklusa dužine tri, šest rotacija tipa c_1 imaju dva ciklusa dužine jedan i jedan ciklus dužine četiri, tri rotacije tipa c_2 imaju dva ciklusa dužine jedan i dva ciklusa dužine dva... Tako dobijamo:

$$Z_{\mathbb{Z}_6} = \frac{1}{6}(z_1^6 + z_2^3 + 2z_3^2 + 2z_6);$$

$$Z_{\mathbb{D}_6} = \frac{1}{12}(z_1^6 + 4z_2^3 + 2z_3^2 + 2z_6 + 3z_1^2 z_2^2);$$

$$Z_G = \frac{1}{24}(z_1^6 + 8z_3^2 + 6z_2^3 + 6z_1^2 z_4 + 3z_1^2 z_2^2)$$

Koristeći ranije uvedene oznake sada možemo iskazati glavni rezultat u teoriji Polje i Redfilda.

Teorema 2 (Polja). *Polinom F_G se dobija tako što promenljivu z_i u ciklus indikatoru Z_G zamenimo sa sumom $x_1^i + x_2^i + ...$, odnosno:*

$$F_G(x_1, x_2, ...) = Z_G(x_1 + x_2 + ..., x_1^2 + x_2^2 + ..., x_1^n + x_2^n + ...)$$

.

Dokaz:

Neka je X skup od n elemenata i neka na X dejstvuje neka grupa G. Podsetimo se da je G podgrupa simetrične grupe S_n.
Neka je $B = \{b_1, b_2, ...\}$ skup boja i neka je $Y = \{f | f : X \to B\}$ skup svih bojenja elemenata iz X bojama iz B.

Za niz $\eta = (n_1, n_2, n_3, ...)$ u kojem je $n_1 + n_2 + n_3 + ... = n$ uočimo :

$Y_\eta = \{f \in Y|$ za sve k je $|f^{-1}(b_k)| = n_k\} \subseteq Y$.

Dakle, skup Y_η čine ona bojenja elemenata skupa X bojama iz B u kojima se boja b_k koristila tačno n_k puta.
Uočimo da za sve $\pi \in G$ i $f \in Y$ bojenja f i $\pi(f)$ svaku boju iz B upotrebe isti broj puta.
Dakle, ako je $f \in Y_\eta$, tada je i $\pi(f) \in Y_\eta$.

Broj orbita u Y_η pri dejstvu grupe G je baš $k(n_1, n_2, ...)$, odnosno koeficijent uz $x^{n_1}x^{n_2}$ ... u polinomu (redu) F_G. Taj broj možemo odrediti uz pomoć Bernsajdove leme.

Primetimo da je bojenje f iz Y_η fiksno za π iz G, odnosno $f \in Fix_{Y_\eta}(\pi)$, ako i samo ako važi:
- f je konstantna na svim ciklusima u π, to jest, elementi iz istog ciklusa permutacije π su obojeni istom bojom.
- za sve k se boja b_k pojavljuje n_k puta.

Posmatrajmo polinom (red):

$$F_\pi = \prod_j (x_1^j + x_2^j + ...)^{c_j(\pi)} = Z_\pi(x_1 + x_2 + ..., x_1^2 + x_2^2 + ..., ...)$$

.

Ako polinom F_π zapišemo kao zbir monoma, primetimo da se monom $x_1^{n_1}x_2^{n_2}...$ u F_π pojavi tačno $|Fix_{Y_\eta}(\pi)|$ puta.
Zaista, izbor nekog x_k^j iz činioca $(x_1^j + x_2^j + ...)^{c_j(\pi)}$ odgovara bojenju j elementa jednog od $c_j(\pi)$ ciklusa dužine j bojom b_k. Ako se u tom monomu pojavi $x_k^{n_k}$, tada je boja b_k upotrebljena ukupno n_k puta.

Stoga je

$$F_\pi = \sum_\eta |Fix_{Y_\eta}(\pi)| x_1^{n_1} x_2^{n_2} ...$$

Sumiranjem po svim $\pi \in G$ i deljenjem sa $|G|$ dobijamo

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} F_\pi = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} Z_\pi(x_1 + x_2 + ..., x_1^2 + x_2^2 + ..., ...)$$

$$= Z_G(x_1 + x_2 + ..., x_1^2 + x_2^2 + ..., ...).$$

Sa druge strane, kada promenimo poredak sumiranja, dobijamo:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} F_\pi = \sum_{\eta = (n_1, n_2, ...)} (\frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |Fix_{Y_\eta}(\pi)|) x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... =$$

na osnovu Bernsajdove leme primenjene na Y_η
$= F_G(x_1, x_2, ...)$

$\square$

Iskoristićemo ovu teoremu na već poznatom primeru 5, tj. na bojenju strana kocke sa tri boje pri dejstvu grupe rotacija kocke. Ako iskoristimo rešenja iz primera 9 dobićemo:

$$F_G(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{24}((x_1 + x_2 + x_3)^6 + 8(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)^2 +$$

$6(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^3+6(x_1+x_2+x_3)^2(x_1^4+x_2^4+x_3^4)+3(x_1+x_2+x_3)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2)$

Broj različitih bojenja strana kocke sa tri crvene, dve plave i jednom belom bojom možemo prepoznati kao koeficijent uz $x_1^3x_2^2x_3$ u razvoju ovog polinoma. Rešavanjem svakog sabirka unutar zagrade dobijamo sledeće:
$(x_1 + x_2 + x_3)^6 = ((x_1 + x_2) + x_3)^2)^3 = ((x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2)x_3 + x_3^2)^3 = ((x_1+x_2)^2+2(x_1+x_2)x_3)^3+3((x_1+x_2)^2+2\cdot(x_1+x_2)x_3)^2x_3^2+3((x_1+x_2)^2+2(x_1+x_2)x_3)x_3^4+x_3^6$.
Ovde nas zanima samo $((x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2)x_3)^3 = (x_1 + x_2)^6 + 3(x_1 + x_2)^4 2(x_1+x_2)x_3+3(x_1+x_2)^2 4(x_1+x_2)^2x_3^2+8\cdot(x_1+x_2)^3x_3^3$. Kako razmatramo samo sabirke u kojima se pojavljuje $x_1^3x_2^2x_3$, onda posmatramo

$$3\cdot(x_1 + x_2)^4 2(x_1 + x_2)x_3 = 6\cdot(x_1 + x_2)^5x_3$$

.Kada razvijemo pomoću binomne formule, zanimaće nas samo koeficijent koji stoji uz $x_1^3x_2^2x_3$, a to je $6\cdot 10 = 60$. Kada to podelimo sa brojem ispred zagrade dobijamo da je doprinos iz prvog sabirka $\frac{60}{24} = \frac{5}{2}$

Posmatramo sada drugi sabirak: $(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)^2 = x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + 2x_1^3x_2^3 + 2x_1^3x_3^3+2x_2^3x_3^3$. Zaključujemo da se ovde ne pojavljuje $x_1^3x_2^2x_3$, pa je doprinos 0. Nastavljamo dalje:
$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^3 = ((x_1^2 + x_2^2)^3 + 3(x_1^2 + x_2^2)^2x_3^2 + 3\cdot(x_1^2 + x_2^2)x_3^4 + x_3^6)$, doprinos je 0.
$(x_1+x_2+x_3)^2(x_1^4+x_2^4+x_3^4) = x_1^4(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^4(x_1+x_2+x_3)^2+x_3^4(x_1+x_2+x_3)^2$, doprinos je 0.
I na kraju:
$(x_1+x_2+x_3)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2 = (x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2$ $= x_1^2(x_1^2 + x_2^2 + x_2^2)^2 + x_2^2(x_1^2 + x_2^2 + x_2^2)^2 + x_3^2(x_1^2 + x_2^2 + x_2^2)^2 + 2x_1x_2(x_1^2 + x_2^2 + x_2^2)^2 + 2x_1x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_2^2)^2 + 2x_2x_3(x_1^2 + x_2^2 + x_2^2)^2$.
Nas zanima samo ovaj deo: $2x_1x_3(x_1^4+x_2^4+x_3^4+2x_1^2x_2^2+2x_1^2x_3^2+2x_2^2x_3^2)$, tačnije kada se pomnoži dobija se da uz $x_1^3x_2^2x_3$ stoji koeficijent 4. Kada koeficijent 4 pomnožimo sa $\frac{1}{8}$ doprinos je $\frac{1}{2}$.

Uz pomoć ovog računa, dobijamo da postoje tri takva bojenja, jer je

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

.

Primer 10. *Ogrlica dužine n je aranžman n dragulja na kružnici, tako da je udaljenost dva susedna dragulja uvek ista. Ako na raspolaganju imamo b različitih vrsta dragulja, i ako postoji dovoljan broj dragulja svake vrste, zanima nas koliko različitih ogrlica dužine n možemo napraviti.*

Ako dragulje zamislimo kao tačke, ogrlicu dužine n sa b vrsta dragulja možemo interpretirati kao bojenje temena pravilnog n-tougla sa b boja.
Dve ogrlice smatramo istim ako se rotacijom jedne može dobiti druga. Dakle, grupa koja dejstvuje na skupu svih ogrlica sa n dragulja je ciklična grupa izomorfna sa $\mathbb{Z}_n$. Da bismo mogli primeniti Poljinu teoremu, potrebno je odrediti ciklus indikator $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}_n}$. U tome će nam pomoći sledeća lema.

Definicija 6. *Ojlerova funkcija $\phi(n)$ pozitivnog broja n se definiše kao broj pozitivnih celih brojeva koji su manji ili jednaki sa n i koji su uzajamno prosti sa n.Specijalno, $\phi(1) = 1$, jer je 1 uzajamno prost sa samim sobom (i jedini je broj sa tim svojstvom).*

Na primer:
$\phi(5) = |\{x \in \{1, 2, 3, ..., 5\} : nzd(x, 5) = 1\}| = |\{1, 2, 3, 4\}| = 4$
$\phi(9) = |\{x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} : nzd(x, 9) = 1\}| = |\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}| = 6$

Lema 2. *Neka je n proizvoljan prirodan broj. Za svaki $d \in \mathbb{N}$ koji deli broj n, u cikličnoj grupi $\mathbb{Z}_n$ postoji $\phi(d)$ elemenata reda d (ϕ je Ojlerova funkcija). Ako $\mathbb{Z}_n$ interpretiramo kao podgrupu $\mathbb{S}_n$, tada svaki element reda d ima $\frac{n}{d}$ ciklusa dužine d.*

Dokaz:
Red elementa $m \in \mathbb{Z}_n$ je najmanji prirodan broj d takav da je $m \cdot d = k \cdot n$ za neki prirodan broj k. Ako je (m, n) najveći zajednički delitelj brojeva m i n, tada je

$$d \cdot \frac{m}{(m, n)} = k \cdot \frac{n}{(m, n)}.$$

Kako su brojevi $\frac{m}{(m,n)}$ i $\frac{n}{(m,n)}$ uzajamno prosti, a d najmanji prirodan broj sa traženim svojstvom, onda je $d = \frac{n}{(n,m)}$ i $k = \frac{m}{(m,n)}$.
Dakle, red proizvoljnog elementa $m \in \mathbb{Z}_n$ je $\frac{n}{(n,m)}$, što je svakako delitelj broja n.

Sada nas još zanima za proizvoljan broj d koji deli n, koliko u grupi $\mathbb{Z}_n$ ima različitih elemenata reda d?
Iz prethodnog razmatranja možemo zaključiti da je svaki $m \in \mathbb{Z}_n$ reda d oblika $m = k \cdot \frac{n}{d}$, pri čemu su brojevi k i d uzajamno prosti i $k \leq d$.

Različitih izbora za takav $k \in \mathbb{N}$ ima tačno $\phi(d)$. Ocigledno sve orbite nekog elementa π reda d su oblika $\{x, \pi(x), \pi^2(x), ..., \pi^{d-1}(x)\}$ i dužine d. Tih orbita ima $\frac{n}{d}$.

□

Iz prethodne leme dobijamo da je

$$Z_{\mathbb{Z}_n}(z_1, z_2, ..., z_n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \phi(d) z_d^{\frac{n}{d}}.$$

Kada primenimo formulu iz Poljine teoreme, dobijamo:

$$F_{\mathbb{Z}_n}(x_1, x_2, ..., x_b) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \phi(d)(x_1^d + x_2^d + ..., x_b^d)^{\frac{n}{d}}.$$

Specijalno, broj ogrlica dužine n sačinjenih od b vrsta dragulja dobijamo kada u $F_{\mathbb{Z}_n}$ uvrstimo $x_1 = x_2 = ... = x_b = 1$;

$$\frac{1}{n}\sum_{d|n} \phi(d) b^{\frac{n}{d}}$$

.
Ako u prethodnu formulu uvrstimo $n = 6$ i $b = 2$ dobijamo rešenje iz primera 1 sa početka:

$$\frac{1}{6}(\phi(1)2^6 + \phi(2)2^3 + \phi(3)2^2 + \phi(6)2^1) = \frac{84}{6} = 14$$

6 Teorema Polje - primeri

Ciklusni indeks grupe rotacija $n-$tougla

Rotacija za D_6:

Ciklusna struktura permutacija rotacija za D_6 je:
$\epsilon = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$
$\rho_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$
$\rho_2 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6)$
$\rho_3 = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$
$\rho_4 = (1\ 5\ 3)(2\ 6\ 4)$
$\rho_5 = (1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$
Uporedjivanjem imamo:
Ciklusni indeks$=1 \cdot a_1^6 + 1 \cdot a_2^3 + 2a_3^2 + 2 \cdot a_6 = \sum_{d|6} a^{\frac{6}{d}}$
Ciklusni indeks$=\phi(1)a_1^6 + \phi(2)a_2^3 + \phi(3)a_3^2 + \phi(6)a_6$
Kako je:
$\phi(1) = |\{x \in \{1\} : nzd(x, 1) = 1\}| = |\{1\}| = 1$

$\phi(2) = |\{x \in \{1,2\} : nzd(x,2) = 1\}| = 1$
$\phi(3) = |\{x \in \{1,2,3\} : nzd(x,3) = 1\}| = 2$
$\phi(6) = |\{x \in \{1,2,3,4,5,6\} : nzd(x,6) = 1\}| = 2$
Dakle,

$$Z_{D_6} = 1 \cdot a_1^6 + 1 \cdot a_2^3 + 2 \cdot a_3^2 + 2 \cdot a_6$$

Rotacija za D_7:

Ciklusna struktura rotacije za D_7 je:
$\epsilon = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$
$\rho_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$
$\rho_2 = (1\ 3\ 5\ 7\ 2\ 4\ 6)$
$\rho_3 = (1\ 4\ 7\ 3\ 6\ 2\ 5)$
$\rho_4 = (1\ 5\ 2\ 6\ 3\ 7\ 4)$
$\rho_5 = (1\ 6\ 4\ 2\ 7\ 5\ 3)$
$\rho_6 = (1\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$
Uporedjivanjem imamo:
Ciklusni indeks$=1 \cdot a_1^7 + 6 \cdot a_7 = \sum_{d|7} a^{\frac{7}{d}}$
Ciklusni indeks$=\phi(1) \cdot a_1^7 + \phi(7) a_7$
Kako je:
$\phi(1) = |\{x \in \{1\} : nzd\{x,1\} = 1\}| = 1$
$\phi(7) = |\{x \in \{1,2,3,4,5,6,7\} : nzd\{x,7\} = 1\}| = 6$
Dakle,

$$Z_{D_7} = 1 \cdot a_7 + 6 \cdot a_7$$

Rotacija za D_8:

Ciklusna struktura rotacije za D_8 je:
$\epsilon = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$
$\rho_1 = (1\ 3\ 5\ 7\ 2\ 4\ 6\ 7\ 8)$
$\rho_2 = (1\ 3\ 5\ 7)(2\ 4\ 6\ 8)$
$\rho_3 = (1\ 4\ 7\ 2\ 5\ 8\ 3\ 6)$
$\rho_4 = (1\ 5)(2\ 6)(3\ 7)(4\ 8)$
$\rho_5 = (1\ 6\ 3\ 8\ 5\ 2\ 7\ 4)$
$\rho_6 = (1\ 7\ 5\ 3)(2\ 8\ 6\ 4)$
$\rho_7 = (1\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$
Uporedjivanjem imamo:
Ciklusni indeks$=1 \cdot a_1^8 + 2 \cdot a_4^2 + 4 \cdot a_8 = \sum_{d|8} a_d^{\frac{8}{d}}$
Ciklusni indeks$=\phi(1) \cdot a_1^8 + \phi(2) a_2^4 + \phi(4) a_4^2 + \phi(8) a_8$
Kako je:
$\phi(1) = |\{x \in \{1\} : nzd\{x,1\} = 1\}| = 1$

$\phi(2) = |\{x \in \{1,2\} : nzd\{x,2\} = 1\}| = 1$
$\phi(4) = |\{x \in \{1,2,3,4\} : nzd\{x,4\} = 1\}| = 2$
$\phi(8) = |\{x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\} : nzd\{x,8\} = 1\}| = 4$
Dakle,

$$Z_{D_8} = 1 \cdot a_1^8 + 1 \cdot a_2^4 + a \cdot a_4^2 + 4 \cdot a_8$$

Rotacija za D_9:

Ciklusna struktura rotacije za D_9 je:
$\epsilon = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)$
$\rho_1 = (1\ 3\ 5\ 7\ 2\ 4\ 6\ 7\ 8\ 9)$
$\rho_2 = (1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 2\ 4\ 6\ 8)$
$\rho_3 = (1\ 4\ 7)(2\ 5\ 8)(3\ 6\ 9)$
$\rho_4 = (1\ 5\ 9\ 4\ 8\ 3\ 7\ 2\ 6)$
$\rho_5 = (1\ 6\ 2\ 7\ 3\ 8\ 4\ 9\ 5)$
$\rho_6 = (1\ 7\ 4)(2\ 8\ 5)(3\ 9\ 6)$
$\rho_7 = (1\ 8\ 6\ 4\ 2\ 9\ 7\ 5\ 3)$
$\rho_8 = (1\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$
Uporedjivanjem imamo:
Ciklusni indeks$=1 \cdot a_1^9 + 2 \cdot a_3^3 + 6 \cdot a_9 = \sum_{d|9} a_d^{\frac{9}{d}}$
Ciklusni indeks$=\phi(1) \cdot a_1^9 + \phi(3)a_3^3 + \phi(9)a_9$
Kako je:
$\phi(1) = |\{x \in \{1\} : nzd\{x,1\} = 1\}| = 1$
$\phi(3) = |\{x \in \{1,2,3\} : nzd\{x,3\} = 1\}| = |\{1,2\}| = 1$
$\phi(9) = |\{x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} : nzd\{x,9\} = 1\}| = |\{1,2,4,5,7,8\}| = 6$

Dakle,

$$Z_{D_9} = 1 \cdot a_1^9 + 2 \cdot a_3^3 + 6 \cdot a_9$$

Rotacija za D_{10}

Ciklusna struktura rotacije D_{10} je:
$\epsilon = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)$
$\rho_1 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)$
$\rho_2 = (1\ 3\ 5\ 7\ 9)(2\ 4\ 6\ 8\ 10)$
$\rho_3 = (1\ 4\ 7\ 10\ 3\ 6\ 9\ 2\ 5\ 8)$
$\rho_4 = (1\ 5\ 9\ 3\ 7)(2\ 6\ 10\ 4\ 8)$
$\rho_5 = (1\ 6)(2\ 7)(3\ 8)(4\ 9)(5\ 10)$
$\rho_6 = (1\ 7\ 3\ 9\ 5)(2\ 8\ 4\ 10\ 6)$
$\rho_7 = (1\ 8\ 5\ 2\ 9\ 3\ 6\ 10\ 7\ 4)$
$\rho_8 = (1\ 9\ 7\ 5\ 3)(2\ 10\ 8\ 6\ 4)$
$\rho_9 = (1\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2)$
Uporedjivanjem imamo:
Ciklusni indeks$=1 \cdot a_1^1 0 + 1 \cdot a_2^5 + 4 \cdot a_5^2 + 4 \cdot a_1 0 = \sum_{d|10} a_d^{\frac{10}{d}}$

Ciklusni indeks$=\phi(1)a_1^{10}+\phi(2)a_5^2+\phi(10)a_{10}$
Kako je : $\phi(1)=|\{x\in\{1,2\}:nzd(x,1)=1\}|=|\{1\}|=1$
$\phi(2)=|\{x\in\{1,2\}:nzd(x,2)=1\}|=|\{1\}|=1$
$\phi(5)=|\{x\in\{1,2,3,4,5\}:nzd(x,5)=1\}|=|\{1,2,3,4\}|=4$
$\phi(10)=|\{x\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,19\}:nzd(x,10)=1\}|=|\{1,3,7,9\}|=4$
Dakle:

$$Z_{D_{10}}=1\cdot a_1^{10}+1\cdot a_2^5+4\cdot a_5^2+4\cdot a_{10}$$

7 Zakljucak

Poljina teorema nam daje mehanički način da se izračuna broj neekvivalentnih bojenja različitih tipova. U opštem slučaju, najveći deo posla je izračunati ciklusni indeks relevantne grupe, i iz ovog razloga je navedena mala lista korisnih ciklusnih indeksa. Drugi zadatak jeste da se proširi izraz koji smo dobili tako što se a_i zameni sa nekim izrazom , i dakle, nadje se ciklusni indeks.

Literatura

[1] Duško Jojić, *Elementi enumerativne kombinatorike*, Naša knjiga, Beograd, 2011.

[2] Zoran Petrović, Algebra 1, predavanja za školsku 2014/2015

[3] Muhammad Badar, Ansir Iqbal "Polya's Enumeration Theorem" (Master teza na Linnaeus Univerzitetu)