Matematički fakultet, univerzitet u Beogradu

MASTER RAD NA TEMU:

Statistički testovi saglasnosti zasnovani na empirijskoj funkciji raspodele

Mentor:

dr Vesna Jevremović

mr Marko Obradović

Student:

Mladen Manojlović

Beograd, 2013 godine

1. UVOD

Mnoge statističke metode pretpostavljaju određenu raspodelu u izvođenju rezultata i zaključaka. Međutim, kada pretpostavljamo preciziranu raspodelu, prihvatamo određenu dozu rizika. Ako se takva raspodela ne uklapa, tada bi dobijeni rezultati bili nekorektni. Zato je potrebno pažljivo proveriti pretpostavke vezane za raspodelu. Jedan pristup su empirijske procedure, koje su lake za razumevanje i implementiranje, i zasnovane su na intuitivnim i grafičkim analiziranjem funkcije na koju sumnjamo. Postoje druge, formalnije metode i procedure pristupanja pretpostavkama vezanim za raspodele. To su testovi saglasnosti, zasnovani na statističkoj teoriji. Sastoje se iz raznih proračunavanja i često zahtevaju korišćenje specifičnog softvera da bi se prošlo kroz dug i komplikovan račun, ali rezultati su kvantitativni, i kao takvi, mnogo pouzdaniji od empirijskih procedura. Testovi saglasnosti su, u suštini, zasnovani na dva elementa raspodele: funkciji raspodele i funkciji gustine verovatnoća. Hi-kvadrat test je zasnovan na gustini, dok su Kolmogorov-Smirnov i Anderson-Darling testovi zasnovani na empirijskoj funkciji raspodele. Prvo je potrebno postaviti početnu hipotezu, kao i oceniti njene parametre. Obično je to hipoteza o normalnosti. Zatim se upoređuje konkretna, empirijska, funkcija raspodele, dakle raspodela konkretnog uzorka, sa pretpostavljenom funkcijom raspodele. Ako se te dve raspodele slažu (probabilistički), tada možemo pridodati veliki značaj našim pretpostavkama. Možemo reći da se izabrana raspodela dobro uklapa sa datim podacima. Generalna procedura se sastoji u definisanju test-statistike koja je mera udaljenosti pretpostavljene raspodele i konkretnog uzorka. Zatim se, na osnovu zahtevanog nivoa značajnosti, određuje kritična vrednost testa. To je prag tolerancije udaljenosti pretpostavljenih od ostvarenih podataka. Ako teorijska i empirijska raspodela imaju veću meru udaljenosti od kritične, tada imamo razloga da odbacimo pretpostavku o sumnjanoj raspodeli. Najčešće je slučaj da je pretpostavljena raspodela normalna, a ako je odbacimo, definišemo koju raspodelu uzimamo kao alternativu nultoj hipotezi. To mogu biti eksponencijalna, beta, itd. Neki od testova imaju veću sposobnost detektovanja posmatranog neslaganja teorijskih sa empirijskim podacima. Za takve testove kažemo da imaju veću moć od drugih, čija je sposobnost odbacivanja netačne pretpostavke manja.

Postoje brojni testovi saglasnosti koji su zasnovani na empirijskoj funkciji raspodele: Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Kramer fon Mizes, Kuiperov test, Nojmanov test itd. Svi su zasnovani na merenju udaljenosti teorijske od empirijske raspodele, ali koriste različite mere udaljenosti, odnosno test-statistike. Te test-statistike, kao funkcije uzorka, i same predstavljaju slučajnu promenljivu koja može slediti neku određenu raspodelu. U zavisnosti od osobina raspodele test-statistike, razlikujemo i različite osobine pomenutih testova, različite kritične vrednosti i moći. Ove osobine zavise i od definisane alternativne raspodele.

- Empirijska funkcija raspodele

Dat je uzorak od n promenljivih i od tog uzorka formiran varijacioni niz $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Empirijska funkcija raspodele$F_n(x) = \frac{broj\ x_i{-}ova\ koji\ su \leq x}{n}$.

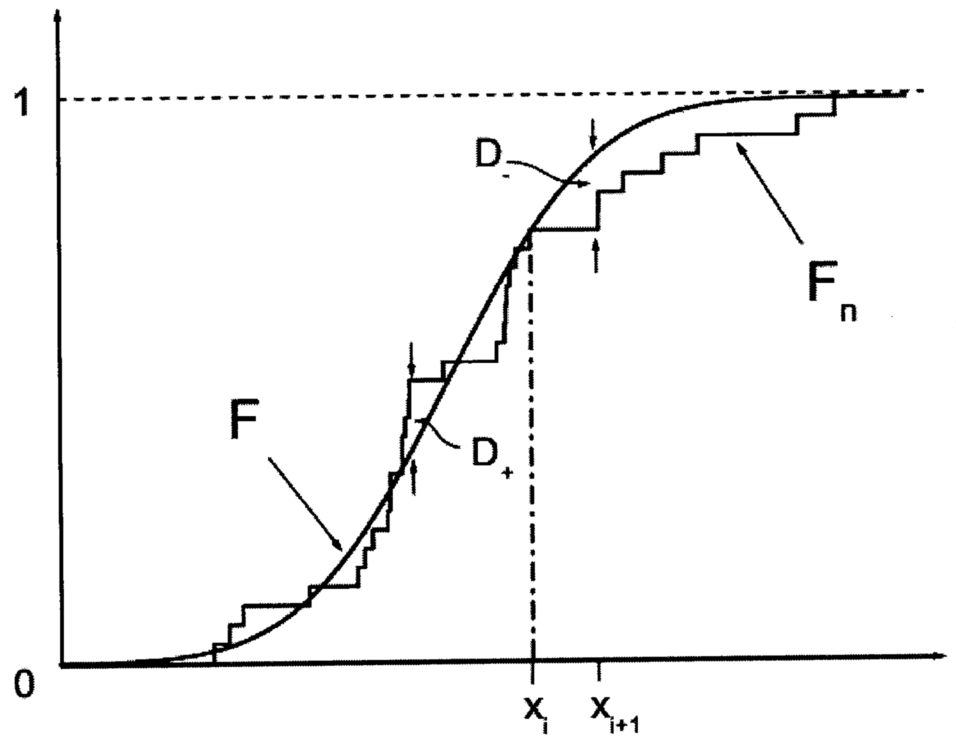
tj.$Fn(x) = \sum_1^n I(Xi \leq x)$

$F_n(x) = 0 \qquad x < X_1$

$F_n(x) = \frac{i}{n} \qquad X_i \leq x < X_{i+1}$

$F_n(x) = 1 \qquad Xn \leq x$

$F_n(x)$je stepenasta funkcija koja se upoređuje sa raspodelom $F(x)$ koja važi pri hipotezi H_0.



Grafik 1 – upoređivanje empirijske i teorijske raspodele.

- PIT (eng. Probability Integral Transformation)

$Z = F(x)$ transformiše gustinu raspodele $f(x)$ u gustinu $f^*(z)$ uniformne raspodele $U[0,1]$. $f^*(z) = 1$, $F^*(z) = z$ za $0 \leq z \leq 1$.

Razlog za uvođenje ove transformacije je što je računanje sa funkcijom F^* dosta prostije od računanje sa F. Izraz $F_n(x) - F(x)$ se transformiše u $F_n^*(z) - z$. Pokažimo ovu tvrdnju:

Neka je F_x funkcija raspodele slučajne promenljive X. Iz transformacije $Z = F_X(X)$ sledi$F_z(Z) = P(Z<z) = P(F_X(x)<z) = P(X<F_X^{-1}(z)) = F_X(F_X^{-1}(z)) = z$ za z iz intervala $[0,1]$, dakle z sledi uniformnu $U[0,1]$. Na primer, ako X ima eksponencijalnu raspodelu sa funkcijom raspodele $F(x) = 1 - e^{-x}$ tada $Y = 1 - e^{-x}$ima $U[0,1]$ raspodelu i $Y' = e^{-x}$ takođe, zbog simetrije.

Značajna familija testova podobnosti (kraće: **GoF**; eng. *goodness of fit*) koristi PIT da prvo transformiše posmatrani uzorak u $U[0,1]$, raspodelu $F(X)$ standardizuje tj. bilo koju na uniformnu, pa se kaže da su ovi testovi slobodni od raspodele. Ipak, PIT ne mora očuvati sve bitne karakterisitike GoF-a. Veoma je koristan jer omogućava standardizaciju, ali postoje ograničenja.

- Supremum statistike

Definišimo sledeće statistike koje se odnose na najveće odstupanje teorijske od empirijske funkcije raspodele:

$$D^+ = sup_x \quad (F_n(x) - F(x))$$

$$D^- = \sup_x (F(x) - F_n(x))$$

$$D = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

$V = D^+ + D^-$

Ove supremum statistike su invarijantne u odnosu na PIT postupak.

• Integralne kvadratne devijacije

Kramer fon Mizes familija testova meri integralna kvadratna odstupanja $F_n(x)$ od $F(x)$ odgovarajuće ponderisana težinskom funkcijom Ψ: $Q = n * \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x)) * \Psi(x)dF$ ili, u standardizovanoj formi (posle primene PIT) $Q = n * \int_0^1 (F_n^*(z) - z)^2 * \Psi(z)dZ$.

Pošto konstrukcija $F_n^*(z)$ uključuje integraciju, $F_n^*(z_1)$ i $F_n^*(z_2)$ nisu nezavisni.

Kada je $\Psi(x) \equiv 1$, dobijamo statistiku Kramer fon Mizesa, $W^2 = n * \int_0^1 (F_n^*(z) - z)^2 dz$, a za $\Psi(x) \equiv 1 / (z * (1 - z))$dobijamo statistiku Anderson-Darlinga, A^2.

A^2 teži ka oštrim odstupanjima blizu $z = 0$ i $z = 1$ zbog z - $F_n^*(z) = 0$ blizu $z = 0$ i $z = 1$.

Vontson je predložio statistiku na krugu: $U^2 = n * \int_0^1 (F_n^*(z) - z - \int_0^1 (F_n^*(z) - z)dz)^2 dz$.

• Nojmanov statistički test

Alternativna hipoteza ovog testa odgovara raspodeli eksponencijalne familije $g_k(z) = C\ (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) * exp\ (\sum_1^k \theta_i\ \pi_i(z))$, g_k su glatke alternative uniformnosti, π_iLežandrovi polinomi reda i, $\theta_i$slobodni parametri, a C funkcija normalizacije. Test-statistike $N_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (\sum_1^n \pi_i(z_j))^2$ za velike vrednosti N_k imaju približno χ_k^2.

• Kuiperova test-statistika

Ranije smo definisali supremum statistike D^+ i D^-. Ako obeležimo $Z_i = F(X_i)$ gde je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ prost slučajan uzorak obima n, ove statistike možemo izraziti i kao $D^+ = max(\frac{i}{n} - z_i)$ i $D^- = max\ (z_i - \frac{i-1}{n})$. Kuiperova statistika se definiše kao zbir D^+ i D^-, tj. $V = D^+ + D^-$, ili drugačije, $V = \sup_x |F_n(x) - F(x)| - \inf_x |F_n(x) - F(x)|$. Test je osetljiv na male promene na repovima i oko medijane.

Primer 1.

Testiramo hipotezu da se računari kvare u nekim dobima godine više nego u drugim. Da bismo ovo testirali, moramo prvo prikupiti datume na koje su se test računari kvarili i izgraditi empirijsku funkciju raspodele F_n. Nulta hipoteza je: kvarovi su ravnomerno raspoređeni. Kuiperova statistika se ne menja ako promenimo početak godine. Ako se kvarovi dešavaju uglavnom vikednom, mnogi K-S testovi bi to propustili jer su vikendi ravnomerno raspoređeni tokom godine. Ova nesposobnost da se razlikuju raspodele sa oblikom češlja („češljaste raspodele") ključan je problem sa svim statistikama na osnovu varijanata K-S testova. Kuiperov test primenjen na događaj po modulu jedne nedelje je u stanju da otkrije takav obrazac.

2. Glivenko-Kantelijeva teorema

U svim testovima koji koriste empirijsku funkciju raspodele koristimo osobinu da se stvarna funkcija raspodele i empirijska funkcija raspodele ne razlikuju značajno, pod nultom hipotezom.

Neka je $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prost slučajan uzorak iz raspodele $F(x)$. Za dato $x \in R$ možemo zaključiti da važi $F_n(x) \to F(x)$, gde je F_n empirijska funkcija raspodele. Primenjujući jaki zakon velikih brojeva na niz indikatora $I(x_i < x)$ (dovoljno je da važi $E|I(x_i < x)| < \infty$, što je trivijalno jer je $|I| < 1$). U ovom smislu $F_n(x)$ je razumna ocena za $F(x)$, za dato $x \in R$; ali da li je $\widehat{F_n} = F$ u smislu funkcija od x. Odgovor na to daje Glivenko-Kantelijeva teorema (**G-K** teorema):

Neka je $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prost slučajan uzorak sa funkcijom raspodele F. Tada važi sledeće:

$$\sup_{x \in R} |F_n(x) - F(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Ovaj rezultat je možda najstariji i najpoznatiji na velikom polju teorije empirijskih procesa, koja je u centru moderne ekonometrije.

Statistika $sup_{x\in R}|F_n(x) - F(x)|$je statistika Kolmogorov-Smirnova. Dokaz će ići u više etapa (tri leme i sam dokaz teoreme).

<u>Lema 1</u>: Ako je F funkcija raspodele na R, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačna podela brojevne ose $-\infty = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = \infty$, takvi da za $0 \le j \le k-1$ važi:

$$F(t_{j+1}^-) - F(t_j) \le \varepsilon$$

<u>Dokaz</u>: *Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno $t_0 = -\infty$, za skup B $\forall j \ge 0$ definišemo*

$$t_{j+1} = sup\{z | F(z) \le F(t_j) + \varepsilon|\} = supB$$

Pokažimo da važi $F(t_{j+1}) \geq F(t_j) + \varepsilon$.

Kada bi $F(t_{j+1})$ *bilo manje od* $F(t_j) + \varepsilon$, *mogli bismo se približiti levoj strani nejednakosti proizvoljno blizu (zbog desne neprekidnosti funkcije raspodele). Dakle,* $F(t_{j+1} + \delta) < F(t_j) + \varepsilon$, *pa bi* $t_{j+1} + \delta \in B$, *a* $t_{j+1} = supB$, *a* $t_{j+1} + \delta > t_{j+1}$, *što je kontradiktorno.*

Dakle važi $F(t_{j+1}) \geq F(t_{j+1}) + \varepsilon$, *tj. između* t_1 *i* t_{j+1} *postoji skok bar* ε. *Pošto je* $F \in [0,1]$ *i skok je ograničen sa donje strane. Onda imamo konačan broj podele* $-\infty = t_0 <$ $< t_1 < t_2 < \cdots < t_k = \infty$, *za* $k < \infty$. *Za* $t_{j+1}^- = t_{j+1} - \delta \in B$ *jer je* $t_{j+1} = supB$, *a za* B *važi po definiciji* $F(t_{j+1} - \delta) \leq F(t_j) + \varepsilon$ *tj.* $F(t_{j+1}^-) \leq F(t_j) + \varepsilon$, *odnosno* $F(t_{j+1}^-) - F(t_j) \leq \varepsilon$,*što je i trebalo dokazati.*

Lema 2: Neka su F_n i F empirijska i teorijska funkcija raspodele tako da važi $F_n(x) \to F(x)$ i $F_n(x^-) \to F(x^-)$, za svako x$\in R$. Tada $\sup_{x \in R}|F_n(x) - F(x)| \to 0$.

Dokaz: *Neka je* $\varepsilon > 0$ *proizvoljno. Treba pokazati da*$\exists N = N(\varepsilon)$, *tako da svako* $n > N$ *i svako* $x \in R$ *važi* $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$.

Neka je $-\infty = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = \infty$ *podela takva da za svako* j, $0 \leq j \leq k-1$ *važi* $F(t_{j+1}^-) - F(t_j) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. *Postojanje ovakve podele garantuje lema 1. Za svako* $x \in R$ *postoji* j, *tako da je* $t_j \leq x \leq t_{j+1}$. *Za takvo* j *važi:*

$$F_n(t_j) \leq F_n(x) \leq F_n(t_{j+1}^-)$$

$$F(t_j) \leq F(x) \leq F(t_{j+1}^-)$$

Zato što su obe F_n *i* F *rastuće funkcije. To dalje implicira:*

$$F_n(t_j) - F(t_{j+1}^-) \leq F_n(x) - F(x) \leq F_n(t_{j+1}^-) - F(t_{j+1}^-)$$

$$F_n(t_j) - F(t_j) + F(t_j) - F(t_{j+1}^-) \leq F_n(x) - F(x)$$

$$F_n(t_{j+1}^-) - F(t_{j+1}^-) + F(t_{j+1}^-) - F(t_j) \geq F_n(x) - F(x)$$

$$F_n(t_j) - F(t_j) - \frac{\varepsilon}{2} \leq F_n(x) - F(x)$$

$$F_n(t_{j+1}^-) - F(t_{j+1}^-) + \frac{\varepsilon}{2} \geq F_n(x) - F(x)$$

Za $\forall j\ N_j = N_j(\varepsilon)$ *takvo da za* $n > N_j$, $F_n(t_j) - F(t_j) > -\frac{\varepsilon}{2}$ *i za* $\forall j\ j\ M_j = M_j(\varepsilon)$ *takvo da za* $n > M_j\ F_n(t_j^-) - F(t_j^-) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Neka je $N = \max_j\{N_j, M_j\}$, *za* $n > N$ *i* $x \in R$ *imamo da je* $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$.

„Napadnemo" li ovu nejednakost sa $\sup\limits_x$ *prvo, a potom „pustimo"* $\lim\limits_{n\to\infty}$, *dobijamo tvrđenje obe leme:* $\sup\limits_x|F_n(x) - F(x)| \to_{n\to\infty} 0.$ ■

<u>Lema 3</u>: Neka $F_n(x) \to F(x)$ za $\forall x \in Q$ i neka je $F_n(x) - F_n(x^-) \to F(x) - F(x^-)$ za sve tačke skoka od F. Tada za $\forall x \in R$ važi:

$$F_n(x) \to F(x) \text{ i } F_n(x^-) \to F(x^-)$$

<u>Dokaz</u>: *Neka je* $x \in R$. *Prvo pokažimo da* $F_n(x) \to F(x)$. *Neka su* $s, t \in Q$ *takvi da je* $s < x < t$. *Prvo pretpostavimo da je x tačka u kojoj je F neprekidna. Pošto je* $F_n(s) \leq F_n(x) \leq F_n(t)$, *sledi:*

$$F(s) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(t)$$

$$\lim_{s\to x^-} F(s) = \lim_{t\to x^+} F(t) = F(x)$$

$$\left(F(x^-) = F(x^+) = F(x)\right)$$

Odatle sledi $F_n(x) \to F(x)$ *za sve tačke x neprekidnosti od F. Sada pretpostavimo da je x tačka skoka od F.*

$$F_n(s) + F_n(x) - F_n(x^-) \leq F_n(x) \leq F_n(t)$$

$$F(s) + F(x) - F(x^-) \leq \liminf F_n(x) \leq \limsup F_n(x) \leq F(t)$$

Pošto je

$$\lim_{s \to x^-} F(s) = F(x^-)$$

$$\lim_{t \to x^+} F(t) = F(x)$$

pa i u ovom slučaju $F_n(x) \to F(x)$.

Dokažimo još i $F_n(x^-) \to F(x^-)$.

Neka je x tačka neprekidnosti od F. Pošto je $F_n(x^-) \leq F_n(x)$,

$$limsup F_n(x^-) \leq limsup F_n(x) = F(x) = F_n(x^-).$$

Za svako $s \in Q$, $s < x$ *imamo* $F_n(s) \leq F_n(x^-)$, *pa je* $F(s) < liminf F_n(x^-)$

$$\lim_{s \to x^-} F(s) = F(x^-)$$

$$F(s) \leq liminf\ F_n(x^-) \leq limsup F_n(x^-) \leq F(x^-), pa\ odatle$$

$$F_n(x^-) \to F(x^-).$$

Ako je x tačka skoka od F, onda pošto

$$F_n(x) - F_n(x^-) \to F(x) - F(x^-)(\text{prethodne leme})$$

$$F_n(x) \to F(x)(\text{već dokazano})$$

$$F_n(x^-) \to F(x^-)$$

Ovim je puno tvrđenje ove leme dokazano. ■

• Dokaz Glivenko-Kontelijeve teoreme

Kada bismo dokazali da postoji skup N takav da $P(N) = 0$ i za $\forall\omega \notin N$ $F_n(x,\omega) \to F(x)$ za $\forall x \in Q$ i $F_n(x,\omega) - F_n(x^-,\omega) \to F(x) - F_n(x^-)$ za sve tačke skoka funkcije F, što znači da su uslovi leme 3 zadovoljeni, pa važi njeno tvrđenje $F_n(x) \to F(x)\ i\ F_n(x^-) \to F(x^-)$, a to su uslovi leme 2, po kojoj dalje sledi tvrđenje teoreme.

Dakle, za $\forall x \in Q$ neka je N_x skup takav da $P(N_x) = 0$ i za $\forall\omega \notin N$ $F_n(x,\omega) \to F(x)N_1 = \cup_{x\in Q} N_x$, za $\forall\omega \notin N_1 F_n(x,\omega) \to F(x)$ po konstrukciji, a pošto je Q prebrojiv skup, važi $P(N_1) = 0$.

Za celobrojno $i \geq 1$ neka J_i označava skup tačaka skoka od F veličine bar $\frac{1}{i}$. Za svako iJ_i je konačno. Sa $J = \cup_{1\leq i<\infty} J_i$ označimo skup svih tačaka skoka od F. Za $\forall x \in J$ neka je M_x skup takav da je $P(M_x) = 0$ i za $\forall\omega \notin M_x F_n(x,\omega) - F_n(x^-,\omega) \to F(x) - F_n(x^-)$. Neka je $N_2 = \cup_{x\in J} M_x$. Pošto je skup J prebrojiv, onda je i $P(N_2) = 0$. Neka je $N = N_1 \cup N_2$, po konstrukciji za $\forall\omega \notin N$ važi

$F_n(x,\omega) \to F(x)$ za $\forall x \in Q$ i

$F_n(x,\omega) - F_n(x^-,\omega) \to F(x) - F_n(x^-)$ za $\forall x \in J$ i

$P(N) = 0.$

Po lemi 2 važi $\sup_x |F_n(x) - F(x)| \to_{n\to\infty} 0$, čime je tvrđenje G-K teoreme dokazano.■

Primenimo sada teoremu da bismo dokazali da $Med\, F_n \to Med\, F$ (odgovarajuće medijane). Neka je $m = Med\, F = \inf(x|F(x) \geq \frac{1}{2})$. Pokažimo da je prirodno oceniti $Med\, F$ sa $Med\, F_n$.

$$F(t) > \frac{1}{2} \text{za } t > m, \quad F(t) < \frac{1}{2} za\ t < m$$

Neka je dato $\varepsilon > 0$. Želimo pokazati da postoji $N = N(\varepsilon)$, da za $n > N$ važi $|Med\ F_n - Med\ F| < \varepsilon$. Izaberimo $\delta > 0$, takvo da je

$$\delta < \frac{1}{2} - F(m-\varepsilon)$$

$$\delta < F(m+\varepsilon) - \frac{1}{2}$$

$$F(m-\varepsilon) < \frac{1}{2} - \delta \quad (1)$$

$$F(m+\varepsilon) > \frac{1}{2} + \delta \quad (2)$$

Izaberimo N tako da $\forall n > N$ važi $\sup\limits_{x\in R}|F_n(x) - F(x)| < \delta$. To smo u mogućnosti uraditi upravo zbog G-K teoreme. Neka je $m_n = Med\ F_n$. Za takvo n, $m_n > m - \varepsilon$, jer bi u suprotnom bilo $m_n < m - \varepsilon$, pa $F(m-\varepsilon) > F_n(m-\varepsilon) - \delta > \frac{1}{2} - \delta$, što je u kontradikciji sa (1).

Slično tome, $m_n < m + \varepsilon$, u suprotnom, ako bi bilo $m_n > m + \varepsilon$, bilo bi

$$F(m+\varepsilon) < F_n$$

$$m_n > (m+\varepsilon) + \delta \leq \frac{1}{2} + \delta$$

što je opet u kontradikciji sa (2). Dakle:$m - \varepsilon$

$$m_n < m + \varepsilon$$

$$m_n \in (m-\varepsilon, m+\varepsilon), \text{tj.}$$

$$|m_n - m| < \varepsilon$$

$$|Med\ F_n - Med\ F| < \varepsilon$$

$$Med\ F_n \underset{n\to\infty}{\to} Med\ F, \text{po definiciji.}$$

3. Kolmogorov-Smirnov test

Neparametarski test Kolmogorov-Smirnova (kraće **K-S** test) može biti primenjen u slučaju ispitivanja saglasnosti podataka iz uzorka sad određenom raspodelom, i za testiranje hipoteze da dva uzorka potiču iz populacija sa istom raspodelom. U oba slučaja se koriste kumulativne frekvencije za uzorke, i na osnovu maksimalne devijacije između odgovarajućih funkcija, zaključuje se o prihvatanju, odnosno o odbacivanju formulisane hipoteze. Statistika koja se koristi je jednostavna i ima raspodelu koja je specifična za ovaj test. Dobra osobina ovog testa je da raspodela test-statistike sama po sebi ne zavisi od ispitivane raspodele, tj. uvek ima svoju specifičnu raspodelu, bez obzira na koju raspodelu testiramo uzorak. Druga dobra osobina je ta da je test egzaktan. Uprkos ovim dobrim svojstvima, ovaj test ima nekoliko važnih ograničenja:

1. Odnosi se samo na neprekidne raspodele;
2. Osetljiviji je blizu centra raspodele nego na repovima;
3. Možda i najveći nedostatak je taj što raspodela mora biti potpuno određena (ako postoje podaci koji moraju biti ocenjeni, kritične vrednosti date K-S tablicom nisu više validne i ti kvantili moraju se odrediti simulacijom).

Kolmogorov-Smirnov test-statistika je definisana na sledeći način:

$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$, gde je $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i < x)$ empirijska funkcija raspodele zadatog uzorka $X_1, X_2, \ldots, X_n$, a funkcija F je ispitivana raspodela. Statistika D_n može biti izražena kao veća od supremum statistika D^+ i D^- definisanih u prethodnom poglavlju.

$D_n$može biti izražena kao $D_n = \max_{1 \le i \le n} (F(Y_i) - \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} - F(Y_i))$, gde je $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ varijacioni niz datog uzorka.

- Raspodela test-statistike D_n

$lim_{n\to\infty} P(\sqrt{n}\ \ D_n < \lambda) = K(\lambda)$, gde je $K(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$, za $\lambda > 0$ i $K(\lambda) = 0$ za $\lambda \leq 0$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2\lambda^2} = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} e^{-2k^2\lambda^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda} * \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{(2k-1)^2\pi^2}{8\lambda^2}}$

$K = \sup_{t\in[0,1]} |B(t)|$, gde je B Braunovski most (eng. *Brownian bridge*).

Braunovski most $B(t)$ je neprekidni stohastički proces čija raspodela verovatnoća je uslovna raspodela Vinerovog procesa $W(t)$, data uslovom $B(1) = 0$, odnosno:

$B(t) \stackrel{\text{def}}{=} (W_t \mid W_1 = 0,\ t \in [0,1])$

Očekivana vrednost „mosta“ je 0, a varijansa $t * (1 - t)$, zbog čega je veća nesigurnost na sredini mosta nego na krajevima. Ako je $W(t)$ standardni Vinerov proces, normalno raspoređen, sa očekivanjem 0 i varijansom t, a elementi su stacionarni i nezavisni, tada je $B(t) = W(t) - t * W(1)$ Braunovski most. Važi i obratno, $W(t) = B(t) + t * Z$ je Vinerov proces za $t \in [0,1]$. Ako $t \in [0, T]$, uopštenije je $W(t) = B(\frac{t}{T}) + \frac{t}{\sqrt{T}} * Z$, gde je Z normalno raspoređena promenljiva.

Druga reprezentacija $B(t) = (1 - t) * W(\frac{t}{1-t})$, za $t \in [0,1]$, a za $t \in [0, \infty]$ $W(t) = (1 + t)\ B(\frac{t}{1+t})$. Braunovski most može biti takođe prikazan preko Furijeovog reda sa stohastičkim koeficijentima:

$B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k * \frac{\sqrt{2}\sin(k\pi t)}{k\pi}$, gde je Z_i: $N(0,1)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Dakle, $\sqrt{n}D_n \xrightarrow{n\to\infty} \sup_t |B(F(t))|$, pod uslovom da važi nulta hipoteza: uzorak dolazi iz raspodele $F(x)$. Kritične vrednosti funkcije K, odnosno $P(K > \lambda_\alpha) = \alpha$, nalazimo iz tabele. Test-statistike i asimptotske raspodele izneo je Andrej Kolmogorov (Андре́й Никола́евич Колмого́ров, 1903 - 1987.), dok je tablicu raspodela objavio Nikolaj Vasiljevič Smirnov (Николай Васильевич Смирнов, 1900 - 1966.).

Odbacujemo hipotezu da uzorak potiče iz date raspodele ako je vrednost test-statistike veća od kritične vrednosti iz tabele. Postoji nekoliko varijacija ovih tabela u literaturi koje koriste nešto različite skale za kritične oblasti. Ove alternativne formulacije bi trebalo da budu ekvivalentne, ali je neophodno da se osiguramo da je test-statistika računata na način koji je konzistentan načinu na koji su dobijene kritične vrednosti.

Primer 1.

U 150 merenja jedne karakteristike kvaliteta X, dobijeni su podaci dati u tabeli. Da li se može smatrati da X ima N(40.48, 32.59)?

x	f_k	$F_n(x)$	$\frac{x-m}{\sigma}$	$F(x)=\Phi(\frac{x-m}{\sigma})$	$\lvert F_n(x)-F(x)\rvert$
- 30.5	*5*	*0.0333*	*-1.75*	*0.0401*	*0.0068*
30.5 – 33.5	*13*	*0.12*	*-1.22*	*0.1112*	*0.088*
33.5 – 36.5	*23*	*0.2733*	*-0.7*	*0.2420*	*0.0313*
36.5 – 39.5	*22*	*0.42*	*-0.17*	*0.4325*	*0.0125*
39.5 – 42.5	*29*	*0.6133*	*0.35*	*0.6368*	*0.0253*
42.5 – 45.5	*29*	*0.8067*	*0.88*	*0.8106*	*0.0039*
45.5 – 48.5	*16*	*0.9113*	*1.4*	*0.9192*	*0.0079*
48.5 -	*13*	*1*	*2.46*	*0.9930*	*0.0070*

H_0: *X: N(40.48, 32.59)*

H1: X nema N(40.48, 32.59)

$D_n = \max_x |F_n(x) - F(x)| = 0.0313$; *ako za nivo značajnosti uzmemo* $\alpha = 0.05$, *kritična vrednost iz tablice je* $D_0 = 0.1340$ *i na osnovu toga donosimo zaključak da uzarak ne upada u kritičnu oblast jer je* $D_n < D_0$, *pa ne odbacujemo nultu hipotezu* H_0: *X: N(40.48, 32.59).*

Test Kolmogorov-Smirnova primenjuje se i kao test saglasnosti, što podrazumeva da je obeležje koje se posmatra kvantitativno, da je za elemente iz uzorka moguće odrediti kumulativne relativne frekvencije i raspodelu na populaciji opisati funkcijom raspodele. Kako se statistika testa bazira na razlikama ove dve funkcije, a ne na samim vrednostima obeležja, ovaj test je moguće primeniti i u testiranju raspodele nekih kvalitativnih obeležja. U okviru nulte hipoteze je, u tom slučaju, potrebno definisati pretpostavljenu raspodelu, a obeležje mora biti takvo da je njegove modalitetet moguće rangirati na osnovu stepena izraženosti posmatrane karakteristike, kako bi kumulativne frekvencije imale smisla. Kroz sledeći primer će biti opisan postupak primene K-S testa u rešavanju takvog problema.

Primer 2.

Pretpostavimo da je zadatak istraživača u jednoj fabrici dečjih igračaka da otkrije da li deca više vole lopte svetlijih ili tamnijih tonova. Test se sprovodi na uzorku od 10 mališana i svakome od njih se donosi po pet lopti obeleženih brojevima 1-5. Obeležje čija se raspodela testira je izraženo brojevima i lopte se razlikuju po boji, tako da je brojem jedan označena lopta na kojoj preovlađuju najtamniji tonovi, a brojem 5 lopta sa najsvetlijim tonovima.

Nulta hipoteza: ne postoji razlika u očekivanom broju izbora svih pet tonaliteta i svaka razlika koja se pojavi je slučajna varijacija u uzorku iz uniformne populacije gde je $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5$*; alternativna hipoteza: nisu sve* f_i *jednake. Pretpostavimo da je jedan od mališana odabrao loptu 2, petoro loptu 4 i četvoro loptu 5. Sledeća tabela prikazuje ove podatke i prilagođava ih za primenu K-S testa za jedan uzorak.*

X_i	1	2	3	4	5
f_i	0	1	0	5	4
F_0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1
F_n	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	1
$\lvert F_n(x) - F_0(x)\rvert$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$	0

F_0 je teorijska raspodela kada je hipoteza H_0 tačna, tj. $f_i = \frac{1}{5}$, $D_n = \max_x |F_n(x) - F(x)| = 0.5$, kritična vrednost za $\alpha = 0.05$, $n = 10$ je $D_0 = 0.4864$. Pošto je $D_n > D_0$ zaključujemo da H_0 treba odbaciti u korist H_1: mališani preferiraju svetlije boje lopti.

• Kolmogorov-Smirnov za dva uzorka

K-S test se koristi i za testiranje da li dva nezavisna uzorka potiču iz iste populacije (ili iz populacija sa istom raspodelom). Dvostrani test je osetljiv na bilo koju razliku u raspodelama iz koje su dva uzorka bila izvučena, dok se jednostrani test koristi za odlučivanje da li su ili ne vrednosti populacije iz koje je izvučen jedan od uzoraka stohastički veće od vrednosti populacije iz koje je izvučen drugi uzorak. Ovakav test bi se, na primer, mogao koristiti za testiranje pretpostavke da će rezultati eksperimentalne grupe biti bolji od onih iz kontrolne grupe. Kao K-S test za jedan uzorak, i ovaj test se odnosi na slaganje između empirijskih raspodela. Ako su dva uzorka izvučena iz iste raspodele, može se očekivati da će empirijske raspodele oba uzorka biti bliske, obe će pokazati samo slučajnu devijaciju od raspodele populacije. Ako su, međutim, empirijske raspodele dva uzorka mnogo „razdvojene“ u nekoj tački, može se smatrati da su uzorci potekli iz različitih populacija. Zbog toga je devijacija između empirijskih funkcija raspodele, koja je veća od kritične vrednosti testa za dati nivo značajnosti, dokaz za odbacivanje H_0.

Da bi se primenio K-S test za dva uzorka, potrebno je formirati raspodelu empirijskih funkcija za svaki uzorak, koristeći iste intervale za obe raspodele. Za svaki interval računamo razlike odgovarajućih vrednosti empirijskih funkcija raspodele. Test se fokusira na najveću od dobijenih devijacija.

K-S test-statistika je definisana izrazom $D = \max_X |F_{n1}(x) - F_{n2}(x)|$.

Nulta hipoteza je odbačena na nivou značajnosti α, ako je $D > c(\alpha) * \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 * n_2}}$. Vrednosti $c(\alpha)$ su date sledećom tabelom, za neke vrednosti α:

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
$c(\alpha)$	1.22	1.36	1.48	1.63	1.73	1.95

Primetimo da K-S za dva uzorka proverava da li su podaci iz dva uzorka potekli iz iste raspodele, ne precizirajući koja bi ta raspodela trebalo da bude.

K-S test može, osim toga što proverava da li je uzorak izvučen iz raspodele na koju sumnjamo, da se iskoristi u drugom smeru. Ako izaberemo određeni nivo značajnosti α, kritična vrednost testa za dato α je D_α, tj. $P(D_n > D_\alpha) = \alpha$, tada interval $[F_n - D_\alpha,\ F_n + D_\alpha]$ sadrži $F(x)$ sa verovatnoćom $1 - \alpha$, tako da, ako ne znamo koja raspodela je u pitanju, možemo na osnovu ovog intervala poverenja za vrednost $F(x)$ saznati više o samoj raspodeli F. Ovo poslednje svojstvo direktno sledi iz definicije test-statistike i kritične vrednosti testa:

$$P(D_n > D_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow P(D_n < D_\alpha) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P(\sup|F_n - F| < D_\alpha) =$$

$$= P(F_n(x) - D_\alpha < F(x) < F_n(x) + D_\alpha) = 1 - \alpha$$

Mnogi statistički testovi i procedure su zasnovani na preciziranim pretpostavkama raspodele. Pretpostavka o normalnosti je posebno odgovarajuća u klasičnim testovima. Mnogo pouzdanije modeliranje je zasnovano na pretpostavci da podaci potiču iz Vejbulove raspodele.

Postoji mnogo neparametarskih i „robustnih" metoda koje nisu zasnovane na kompletnom preciziranju raspodele. Pod pojmom „robustne" podrazumevamo tehnike koje se primenjuju samo pod određenim širokim skupom uslova i pretpostavki. Ipak, tehnike zasnovane na pretpostavci o raspodeli su generalno mnogo moćnije od „robustnih" metoda. Ako, pak, ne mogu biti potvrđene pretpostavke o raspodeli, tada se parametarske tehnike generalno preporučuju.

• Kolmogorov-Smirnov test za desno cenzurisane podatke

Neka su dati podaci tokom vremena. Ako su oni „vidljivi" samo do nekog događaja od interesa u budućnosti, do nekog zadatog vremena, tj. samo sa gornjom (ili donjom) granicom iščezavanja. Posebno, kada su podaci dobijeni tokom fiksnog vremenskog perioda, vreme nekih subjekata je jedino naznačeno kao manje od neke unapred određene vrednosti. Ovaj tip je nazvan cenzurisani podaci tipa *I*. Preciznije, ako je posmatrano n subjekata tokom limitiranih vremenskih perioda L_1, L_2, ..., L_n, tako da individualna vremena $T_i \leq L_i$, $i = 1, 2, ..., n$. Ovi podaci mogu biti predstavljeni parovima promenljivih (t_i, δ_i), gde je t_i = $min(T_i, L_i)$ i $\delta_i = \begin{cases} 1, Ti \leq Li \\ 0, Ti > Li \end{cases}$.

Kada je $L_1 = L_2 = ... = L$ kaže se da su podaci jednostruko (tipa I) cenzurisani.

K-S statistika za ovu vrstu podataka ima malo modifikovani oblik:

$D_{n,p} = \sup\limits_{(-\infty,L]} |F_n(x) - F(x)|$, gde je $p = F(L)$

Izražena u funkciji varijacionog niza uzorka $Y_1 < Y_2 < ... < Y_n$, ova statistika ima korisnu alternativnu formu za računske svrhe: $D_{n,\,p} = \max\limits_{1<x\leq r}\left(max\left(\frac{i}{n} - F(Y_i), F(Y_i) - \frac{i-1}{n}\right)\right)$, gde r predstavlja broj opservacija manjih ili jednakih datom L-u, tj. r je broj necenzurisanih podataka.

4. Anderson-Darling test

Anderson-Darling test (kraće **A-D** test) se koristi za testiranje da li je uzorak potekao iz potpuno određene raspodele. Ovaj test je modifikacija K-S testa, dajući više značajnosti repovima raspodele nego K-S test. Ovaj test je slobodan od raspodele u smislu da kritične vrednosti ne zavise od precizirane raspodele na koju testiramo uzorak. Test koristi preciziranu raspodelu u računanju kritičnih vrednosti. Ovo svojstvo je prednost zato što dozvoljava osetljivo i precizno testiranje, ali istovremeno i mana, jer kritične vrednosti moraju biti izračunate za svaku raspodelu posebno, kada raspodela nije potpuno precizirana.

A-D test-statistika spada u integralne kvadratne statistike tipa

$$Q = n * \int_{-\infty}^{\infty} \left(F(x) - F_n(x)\right)^2 * \Psi(x) dF$$

sa ponder-funkcijom $\Psi(x) = \frac{1}{F(x)*(1-F(x))}$, dakle

$$A^2 = n * \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(F(x) - F_n(x)\right)^2}{F(x) * \left(1 - F(x)\right)} dF(x)$$

Zbog osobina fuknkcije $\Psi(x)$, test daje značajnosti repovima više nego druge statistike ovog tipa.

Test-statistika može biti prikazana i na sledeći način, praktičniji za računanje:

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) * \left(lnF(Y_i) + \ln\left(1 - F(Y_{n+1-i})\right)\right),$$

gde je $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$varijacioni niz datog uzorka $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Velika vrednost A^2je prouzrokovana lošim uklapanjem stvarne raspodele iz koje je ispitivani uzorak potekao sa sumnjanom raspodelom. Statistika A^2 brzo teži odgovarajućoj raspodeli, već za obim uzorka $n>$ 5 može se aproksimirati da A^2 već ima tu raspodelu.

Kada su svi parametri raspodele koju ispitujemo $F(x) = F(x, \theta)$ poznati, tada statistika A^2 ima uvek istu raspodelu. To je zato što PIT pretvara uređene vrednosti uzorka $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ u $Z_i = F(Y_i, \theta)$ uređene vrednosti iz uniformne $U\ [0, 1]$ raspodele. Statistika A^2 je tada funkcija od uređenih $U\ [0, 1]$ vrednosti. Ako, pak, θ sadrži nepoznate parametre, onda uzimamo $Z_i = F(Y_i, \hat{\theta})$, gde je $\hat{\theta}$ ocena za θ. Tada Z_i neće biti uređene slučajne promenljive iz $U\ [0, 1]$ raspodele, pa određivanje raspodele za A^2 postaje dosta teže. Ta raspodela zavisi od obima uzorka i od vrednosti nepoznatih parametara.

Procedura će biti ilustrovana za slučaj testiranja na normalnu raspodelu $N(\mu, \sigma^2)$. Razlikujemo tri slučaja:

1. μ je nepoznato, ocenjeno je sa $\bar{X}$, a σ^2 je poznato;
2. μ je poznato, a σ^2 ocenjeno sa $s^2 = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$
3. oba parametra su nepoznata i ocenjena.

U ovim slučajevima računanje se vrši na sledeći način

$$W_i = \begin{cases} \dfrac{Y_i - \bar{X}}{\sigma}, \text{za slučaj 1} \\ \dfrac{Y_i - \mu}{s}, \text{za slučaj 2} \\ \dfrac{Y_i - \bar{X}}{s}, \text{za slučaj 3} \end{cases}$$

$Z = P(Z \leq W_i)$, $Z: N(0,1)$, tj. Z_i je kumulativna verovatnoća standardizovane normalne raspodele koja odgovara vrednosti W_i. Računamo test-statistiku po formuli:

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n}(2i - 1) * (lnZ_i + \ln(1 - (Z_{n+1-i}))$$

i upoređujući je sa kritičnom vrednošću iz tablice za dati prag značajnosti, donosimo odluku o prihvatanju ili neprihvatanju hipoteze o normalnosti

Primer 1.

Testiramo sledeći uzorak na normalnu raspodelu: 338.7 308.5 317.7 313.1 322.7 294.2 Pošto nije precizirano koja bi to normalna raspodela trebalo biti, moramo prvo oceniti nepoznate parametre: $\hat{\mu} = \bar{X} = 315.82$, $\hat{\sigma} = s^2 = 14.9$. *Za svaku vrednost* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_6$ *varijacionogniza datog uzorka računamo* $Wi = \frac{Y_i - 315.82}{14.9}$, *a zatim i* $Z_i = \Phi(W_i)$ *i te vrednosti iskoristimo u izrazu za test-statistiku* A^2. *Za slučaj kada je potrebno oceniti parametre, odnosno kada raspodela nije precizirana potpuno, koristimo sledeću modifikaciju test-statistike* A^2:

$$A^{*^2} = A^2 * \left(1 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2}\right),$$

a zatim tu modifikovanu vrednost upoređujemo sa kritičnom vrednošću iz tabele, i na osnovu toga donosimo zaključak. Na primer, za nivo značajnosti $\alpha = 0.05$, *kritična vrednost je 0.752. Vrednost* A^{*^2} *je izračunata na prethodno pokazan način i iznosti 0.2017. Detaljni koraci u njenom računanju su prikazani u sledećoj tabeli:*

i	*X*	$F(W_i)$	$lnF(W_i)$	$n+1-i$	$F(W_{n+1-i})$	$1-F(W_{n+1-i})$	$lnF(W_{n+1-i})$
1	*294.2*	*0.0727*	*-2.6212*	*6*	*0.9383*	*0.0617*	*-2.7856*
2	*308.5*	*0.3110*	*-1.1678*	*5*	*0-6784*	*0.3215*	*-1.1345*
3	*313.1*	*0.4273*	*-0.8502*	*4*	*0.5503*	*0.4496*	*-0.7993*
4	*317.7*	*0.5504*	*-0.5971*	*3*	*0.4273*	*0.5726*	*-0.5574*
5	*322.7*	*0.6784*	*-0.3879*	*2*	*0.3110*	*0.6889*	*-0.3725*
6	*338.7*	*0.9383*	*-0.0636*	*1*	*0.0727*	*0.9272*	*-0.0755*

U ovom primeru po A-D testu je opravdano pretpostaviti da uzorak potiče iz normalne $N(315.8, 14.9^2)$ *raspodele.*

Ako bismo hteli da testiramo uzorak na log-normalnu raspodelu, možemo iskoristiti navedenu proceduru, ali je prethodno potrebno logaritmovati sve podatke iz uzorka i na tako transformisane podatke primeniti testiranje na normalnost. Ako su originalni podaci iz log-

-normalne raspodele, tada su logaritmovane vrednosti tih podataka iz normalne raspodele. Koristeći tu činjenicu, testiranje na log-normalnu raspodelu se direktno svodi na testiranje na normalnost.

- Testiranje na eksponencijalnu raspodelu

Procedura je slična kao za normalnost. Računamo $Z_i = 1 - e^{-\frac{Y_i}{\bar{X}}}$, $i = 1, 2, ..., n$, gde je Y_i varijacioni niz uzorka, a $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$ ocenjena vrednost parametra λ eksponencijalne raspodele $F(x, \lambda) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0$. I u ovom slučaju postoji modifikacije izračunate test-statistike koja se računa po uvek istoj formuli, ali je modifikacija nešto drugačija:

$$A^{*^2} = A^2 * \left(1 + \frac{0.3}{n}\right).$$

Upoređujući tu vrednost sa kritičnim vrednostima iz tabele donosimo zaključak o prihvatanju ili neprihvatanju hipoteze o eksponencijalnosti.

Ako je data uopštena eksponencijalna raspodela $F(x, \alpha, \beta) = 1 - e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}, x > \alpha$, α i β su nepoznati parametri, transformacijom $y_i = Y_{i+1} - Y_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ vrednosti y_i imaju eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $\lambda = \frac{1}{\beta}$, što svodi proceduru na malopređašnji slučaj. Nedostatak ove modifikacije je taj što se obim uzorka smanjuje za 1, ali zato je velika prednost to što se oslobađamo parametra α.

- Testiranje na Vejblovu raspodelu

Kroz sledeći primer će biti pokazan postupak korišćenja A-D testa pri testiranju na Vejblovu raspodelu.

Primer 2.

Raspolažemo sledećim uzorkom: 11.7216 10.4286 8.0204 7.5778 1.4298 4.1154

Potrebno je prvo oceniti nepoznate parametre Vejblove raspodele: $F(x,\alpha,\beta) = 1 - e^{-(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}$. *Na ovom uzorku dobijamo* $\hat{\alpha} = 8.7, \hat{\beta} = 1.3$. *Sada računamo vrednost test-statistike A-D testa, ali na nešto drugačiji način:*

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} (2i-1)(ln(1-e^{Z_i}) - Z_{n*1-i}),$$

a modifikovana verzija koja se koristi u slučaju kada je potrebno oceniti parametre:

$$A^{*^2} = A^2 * \left(1 + \frac{0.2}{\sqrt{n}}\right), gde\ je\ Z_i = \left(\frac{Y_i}{\hat{\alpha}}\right)^{\hat{\beta}}.$$

Koristimo princip p-vrednosti testa, ako je $p < \alpha = 0.05$ *tada odbacujemo pretpostavku o Vejblovoj raspodeli. P-vrednost testa se ovde računa po sledećoj formuli:*

$$p = \frac{1}{1 + e^{-0.1+1.24 * ln\left(A^{*^2}\right)+4.48 * A^{*^2}}}.$$

Nakon proračuna dobijamo $A^2 = 0.3794$, $A^{*^2} = 0.4104, p = 0.3466 > 0.05$, *pa zaključujemo da dati uzorak potiče iz Vejblove raspodele sa parametrima* $\alpha = 8.7$, $\beta = 1.3$.

Testiranje na eksponencijalnu raspodelu se može i izvršiti procedurom za testiranje Vejblove sa $\beta = 1$, jer je eksponencijalna raspodela samo specijalan slučaj Vejblove.

Vratimo se sada na slučaj testiranja normalnosti. Alternativna verzija računanja test-statistike A-D testa data je sledećom formulom:

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} (2i-1) * \ln \Phi(Y_i) + (2*(n-i)+1) * \ln\big(1-\Phi(Y_i)\big).$$

Ako dobijemo ocenjenu vrednost za $\sigma = 0$, ili ako je bilo koja od $\Phi(Y_i)$ jednaka 0 ili 1, tada A^2 ne može biti proračunata, odnosno nedefinisana je.

Pokazano je da ovaj test čak postaje bolji kada se nepoznati parametri ocene iz uzorka nego u slučaju kada su potpuno poznati.

• O teorijskoj raspodeli integralnih kvadratnih statistika

Neka je $u = F_0(x), u_i = F_0(x_i), i = 1, 2, \dots, n \; u_{(i)} = F_0\big(x_{(i)}\big)$, gde je $x_{(i)}$ varijacioni niz uzorka. Neka je G_n empirijska funkcija raspodele za $u_1, u_2, \dots u_n$, $G_n(n) = \frac{k}{n}, 0 \le n \le 1$, gde je k vrednosti od $u_1, u_2, \dots u_n$ manje od u, a isto toliko k vrednosti uzorka $x_1, x_2, \dots x_n$ je manje od x, pa je zbog toga:

$$G_n\big(F_0(x)\big) = F_n(x)$$

$$G_n = F_n \circ F_0^{-1} \text{ i}$$

$$W_n^2 = n * \int_0^1 (G_n(u) - u)^2 * \Psi(u) du$$

kada je nulta hipoteza $H_0\colon F = F_0$ tačna. Za svako $u \; (0 \le u \le 1) Y_n = \sqrt{n}|(G_n(u) - u)$ je slučajna promenljiva, a njihov skup može biti smanjen za stohastički proces sa parametrom u. Tada je

$$P(W_n^2 < z) = P\left(\int_0^1 Y_n^2(u) * \Psi(u)du < z\right) = A_n(z).$$

Za fiksiran skup od u_1, u_2, ... u_k k-dimenzionalna raspodela od $Y_n(u_1), Y_n(u_2), \ldots, Y_n(u_k)$ teži višedimenzionalnoj normalnoj raspodeli, kada $n \to \infty$, sa sredinom i funkcijom kovarijanse:

$EY_n(u) = 0$ i $\mathcal{E}Y_n(u)Y_n(v) = \min(u, v) - u * v$.

Dakle, aproksimirajući proces procesa $\{Y_n(u)\}$ je Gausov proces $y(u)$ sa sredinom 0 i funkcijom kovarijanse $\mathcal{E}y(u)y(v) = \min(u, v) - u * v$. Neka je

$$a(z) = P\left(\int_0^1 y^2(u) * \Psi(u)du \le z\right), \text{tada } A_n(z) \to a(z), 0 \le z < \infty.$$

Problem kod statistike Anderson-Darlinga je naći raspodelu $a(z)$ kada je

$$\Psi(u) = \frac{1}{u * (1 - u)}.$$

U kratkim crtama će biti pokazano kako naći raspodelu za $\int_0^1 Z^2(u)du$, gde je $Z(u)$ Gausov stohastički proces sa očekivanjem 0. Kada je jezgro neprekidno i kvadrat-integrabilno (kao u ovom slučaju), funkcija kovarijanse se može predstaviti kao

$$K(u, v) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} * f_j(u) * f_j(v),$$

gde su λ_j sopstene vrednosti, a $f_j(u)$ odgovarajuće ortonormirane sopstvene fukncije sledeće integralne jednačine:

$$\lambda * \int_0^1 K(u, v) * f(u)du = f(v),$$

$$\int_0^1 f_j^2(u)du = 1, \int_0^1 f_i(u) * f_j(u)du = 0 \text{ za } i \ne j.$$

Proces *Z(u)* se može zapisati i kao

$$Z(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} * X_j * f_j(u),$$

gde su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne veličine iz standardizovane normalne raspodele. Tada je

$$\int_0^1 Z^2(u)du = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} * X_j^2$$

sa karakterističnom funkcijom

$$Eexp\left(it \int_0^1 Z^2(u)du \right) = \prod_{j=1}^{\infty} Eexp(it \frac{X_j^2}{\lambda_j}) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2it}{\lambda_j}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Proces $Y_n^*(u) = \sqrt{\Psi(u)} * Y_n \ (u)$ima funkciju kovarijanse

$$K(u,v) = \sqrt{\Psi(u) * \Psi(v)} * (min(u,v) - u * v).$$

Kada $n \to \infty$,proces Y_n^* teži ka procesu $y^*(u) = \sqrt{\Psi(u)} * z + y(u)$, sa gorenavedenom kovarijansom.

Karakteristična funkcija za graničnu raspodelu od nW^2 je $\sqrt{\frac{\sqrt{2it}}{\sin \sqrt{2it}}}$, za $\Psi(u) \equiv 1$, a karakteristična funkcije granične raspodele za A_m^2 je $\sqrt{\frac{-2\pi it}{\cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+8it}}}$ za $\Psi(u) \equiv \frac{1}{u(1-u)}$.

Karakteristična funkcija $\theta(t) = \sqrt{\frac{-2\pi it}{\cos(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+8it}}}$ može takođe biti izražena sa

$$\theta(t) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 - 2it}{\sqrt{j * (j+1)}} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda_j it}} \text{gde je } \lambda_j = \frac{1}{j(j+1)}$$

što je upravo karakteristična funkcija sume nezavisnih $\chi^2(1)$ promenljivih sa težinama λ_j.

5. Kramer fon Mizes test

Ovaj test je jedna od modifikacija K-S testova. O test-statistici je ranije bilo reči, dakle za uopštene kvadratne statistike, uzimajući ponder funkciju $\Psi(x)$ identički jednaku jedinici, dobijamo statistkiku Kramer fon Mizesa (kraće **KvM** statistika):

$$W^2 = n * \int_{-\infty}^{\infty} \left(F_n(x) - F(x)\right)^2 dF(x)$$

Ovaj izraz se može redukovati na oblik:

$$W^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left(F(Y_i) - \frac{2i-1}{2n}\right)^2.$$

Dokažimo ovo tvrđenje:

Neka je $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ varijacioni niz datog uzorka $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Podelimo brojevnu osu (skup $\mathbb{R}$) na $(-\infty, Y_1) \cup (Y_1, Y_2) \cup \ldots \cup (Y_n, \infty)$. Tada je

$$W^2 = \int_{-\infty}^{Y_1} + \int_{Y_1}^{Y_2} + \cdots + \int_{Y_n}^{\infty} \left(n * \left(F_n(x) - F(x)\right)^2 dF(x)\right)$$

$$= n * \left[\int_{-\infty}^{Y_1} \left(\frac{0}{n} - F(x)\right)^2 dF(x) + \int_{Y_1}^{Y_2} \left(\frac{1}{n} - F(x)\right)^2 dF(x) + \cdots \right.$$

$$\left. + \int_{Y_{n-1}}^{Y_n} \left(\frac{n-1}{n} - F(x)\right)^2 dF(x) + \int_{Y_n}^{\infty} \left(\frac{n}{n} - F(x)\right)^2 dF(x) \right]$$

Posle smene $u = F(x)$, $du = dF(x)$, granice se modifikuju na $F(-\infty) = 0, F(Y_1), F(Y_2), \ldots, F(Y_n), F(\infty) = 1$, a izraz se dalje računa na sledeći način:

$$n * \left[\int_{0}^{F(Y_1)} (-u)^2\, du + \int_{\llbracket F(Y) \rrbracket_1)}^{\llbracket F(Y) \rrbracket_2)} \left(\frac{1}{n} - u\right)^2 du + \cdots + \int_{F(Y_{n-1})}^{F(Y_n)} \left(\frac{n-1}{n} - u\right)^2 du + \int_{\llbracket F(Y) \rrbracket_n)}^{F(\infty)} (1-u)^2 du \right]$$

$$=$$

$$= \frac{n}{3} * \left[F^3(Y_1) - (\frac{1}{n} - F(Y_2))^3 + (\frac{1}{n} - F(Y_1))^3 - (\frac{2}{n} - F(Y_3))^3 + (\frac{2}{n} - F(Y_2))^3 - \cdots \right.$$

$$\left. - (\frac{n-1}{n} - F(Y_n))^3 + (\frac{n-1}{n} - F(Y_{n-1}))^3 - 0 + (1 - F(Y_n))^3 \right] =$$

$$= \frac{n}{3} * \left[(\frac{1}{n} - F(Y_1))^3 - (\frac{0}{n} - F(Y_1))^3 + \right.$$

$$+ (\frac{2}{n} - F(Y_2))^3 - (\frac{1}{n} - F(Y_2))^3 +$$

$$+ (\frac{3}{n} - F(Y_3))^3 - (\frac{2}{n} - F(Y_3))^3 +$$

...

$$+ (1 - F(Y_n))^3 - (\frac{n-1}{n} - F(Y_n))^3.$$

Svaki od sabiraka u poslednjem zbiru je oblika a^3-b^3, gde je $b = a - \frac{1}{n}$, pa je

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = \frac{1}{n}\left(a^2 + a^2 - \frac{a}{n} + a^2 - \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(3a^2 - 3\frac{a}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\left[3\left(a^2 - \frac{a}{n} + \frac{1}{4n^2}\right) - \frac{3}{4n^2} + \frac{1}{n^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left(3\left(a - \frac{1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{4n^2}\right).$$

Pošto je u ovom slučaju $a = \frac{i}{n} - F(Y_i)$, tada gornji izraz postaje

$$\frac{1}{n}(3(\frac{i}{n} - F(Y_i) - \frac{1}{2n})^2 + \frac{1}{4n^2}) = \frac{3}{n}\left(\frac{2i-1}{2n} - F(Y_i)\right)^2 + \frac{1}{4n^3}$$

$$W^2 = \frac{n}{3}\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{2n} - F(Y_i)\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4n^3}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{2n} - F(Y_i)\right)^2 + \frac{\cancel{n}}{3} * \cancel{n} * \frac{1}{4n^{\cancel{3}}}$$

$$W^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n}\left(F(Y_i) - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 \blacksquare$$

- Kramer fon Mizes za dva uzorka

Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_N$ i $y_1, y_2, \ldots, y_M$ vrednosti obeležja iz dva uzorka sa po N i M elemenata, respektivno. Neka su $r_1, r_2, \ldots, r_N$ rangovi vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_N$, a $s_1, s_2, \ldots, s_M$ rangovi od $y_1, y_2, \ldots, y_M$ u objedinjenom uzorku. U ovom slučaju koristimo sledeći izraz za test-statistiku:

$$T = \frac{U}{NM(N+M)} - \frac{4NM-1}{6(N+M)}, \text{gde je} U = N * \sum_{i=1}^{N}(R_i - i)^2 + M * \sum_{j=1}^{M}(S_j - j)^2$$

Za slučaj kada je $x_i = x_j$ za neko i i j, onda uzimamo $r_i = r_j = \frac{i+j}{2}$.

- Anderson-Darling i Kramer fon Mizes za cenzurisane podatke (tipa I)

U ranijem tekstu je bilo više reči o ovoj grupi i navedena je modifikovana verzija Kolmogorov--Smirnov test-statistike. Anderson-Darling test-statistika je definisana na sledeći način:

$$A_{n,p}^2 = n * \int_{-\infty}^{L} \frac{\left(F_n(x) - F_0(x)\right)^2}{F_0(x)\left(1 - F_0(x)\right)} dF_0(x),$$

Ili, u alternativnoj formi:

$A_{n,p}^2 = -\sum_{i=1}^{r}(\frac{2i-1}{n}) * [\log(1 - F(Y_i)) - \log F(Y_i)]$-

$$-2\sum_{i=1}^{r} \log(1 - F_0(Y_i)) + n * \left[\frac{2r}{n} - \left(\frac{r}{n}\right)^2 - 1\right] * \log\left(1 - F_0(L)\right) + \frac{r^2}{n}\log p - n * F_0(L)$$

Kramer fon Mizes test-statistika za ovaj tip podataka je

$$W_{n,p}^2 = n * \int_{-\infty}^{L} \left(F_n(x) - F_0(x)\right)^2 dF_0(x),$$

sa svojom alternativnom verzijom, pogodnijom za račun datom sa

$$W_{n,p}^2 = \sum_{i=1}^{r} (F_0(Y_i) - \frac{i - 0.5}{n})^2 + \frac{r}{12n^2} - \frac{n}{3} * \left(\frac{r}{n} - F_0(L)\right)^3.$$

U oba slučaja je, kao i kod K-S za ovu vrstu podataka $p = F_0(L)$ i tačno je r broj vrednosti u uzorku koje su manje ili jednake datom L.

6. Simuliranje kvantila raspodela test-statistika D_n, A^2 i W^2 i određivanje moći testova pri testiranju na pojedine raspodele

Većina od pomenutih test-statistika ima osnovni, teorijski oblik, i oblik pogodniji za računanje. Ti izrazi su često funkcija od uređenog uzorka, odnosno varijacionog niza datog uzorka.

$$D_n = \max_{1 \le i \le n} \left(F(Y_i) - \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} - F(Y_i)\right),$$

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} (2i-1) * \left(lnF(Y_i) + \ln\left(1 - F(Y_{n+1-i})\right)\right),$$

$$W^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left(F(Y_i) - \frac{2i-1}{2n}\right)^2.$$

Neka je, na početku, nulta hipoteza: uzorak potiče iz normalne $N(\mu, \sigma^2)$ raspodele. Da bismo našli kritičnu vrednost date raspodele neke od navedenih test-statistika, za određen nivo značajnosti, potrebno je napraviti veliki uzorak iz te raspodele, i naći odgovarajući percentil koji odgovara datom nivou značajnosti. Koristimo svojstvo (Glivenko-Kantelijeva teorema) da teorijsku raspodelu možemo dobro objasniti empirijskom raspodelom. Ovo važi i za raspodele pomenutih test-statistika. Prvo, potrebna je funkcija koja računa date test-statistike, koju, u ovom slučaju, možemo primeniti za proizvoljne μ iσ^2. U glavnom program ćemo pozvati funkciju na uzorak koji je generisan istom raspodelom. Tako ćemo dobiti jednu generisanu vrednost uzorka. Ponovimo li to n puta, dobićemo uzorak obima n iz date raspodele, čiji poligon frekvencija počinje da "liči"na gustinu teorijske raspodele, za dovoljno veliko n. Tako ćemo oceniti kritičnu vrednost raspodele koja odgovara, na primer, značajnosti 5%, kao onu vrednost u uzorku od koje je veće 5% vrednosti uzorka, tj. kao 95.percentil uzorka.

• Funkcije za računanje test-statistika

Funkcija ima za argument neki niz koji predstavlja dati uzorak iz odgovarajuće raspodele, kao i dve realne vrednosti m i s, koje predstavljaju sredinu i standardnu devijaciju normalne raspodele na koju ispitujemo uzorak. Za neke funkcije je potrebno urediti uzorak u varijacioni niz. To je urađeno pozivanjem funkcije ***sort(x)***, koja dati niz x sortira u neopadajućem poretku. Računanje vrednosti funkcije raspodele, pod nultom hipotezom(normalna raspodela), vršimo pomoću funkcije ***pnorm(x,mean=m,sd=s)***koja za datu vrednost(ili niz vrednosti) *x* računa verovatnoću $P(X<x)$, gde $X:N(m,s^2)$.

Navedimo sve funkcije potrebne za računanje test-statistika:

Kolmogorovljeva test-statistika:

```
KSTest<-function(x,m,s)
{
n=length(x)
z=array(1:10000)
ed=array(1:10000)
d=array(1:10000)
z<-pnorm(x,mean=m,sd=s)
for(i in 1:n)
{  ed[i]<-EDF(x,x[i])
  d[i]=abs(z[i]-ed[i])
}
c=max(d)
```

```
KSTest<-c
return(KSTest)
}
```

koja u sebi poziva empirijsku funkciju raspodele EDF(x,t) datog uzorka x od argument realnog t:

```
EDF<-function(x,t)
{
b=0
n=length(x)
for(i in 1:n)
{ if(x[i]<t)
  b<-b+1
}
z=b/n
EDF<-z
return(EDF)
}
```

Test-statistika Anderson-Darlinga:

```
ADTest<-function(x,m,s){
y<-sort(x)
```

```
n=length(x)

ad=0

z<-pnorm(y,mean=m,sd=s)

for(i in seq(along=z)) {

ad=ad+(2*i-1)*(log(z[i])+log(1-z[n+1-i])) }

ad=(-1/n)*ad-n

ADTest<-ad

return(ADTest)

}
```

Test-statistika Kramer fon Mizesa:

```
CvMTest<-function(x,m,s){

y<-sort(x)

n=length(x)

cm=1/(12*n)

z<-pnorm(y,mean=m,sd=s)

for(i in seq(along=z)) {

cm=cm+(z[i]-(2*i-1)/2*n)^2 }

CvMTest<-cm

return(CvMTest)

}
```

Na primer, vrednosti test-statistika za testiranje na normalnu *N(3,4)*možemo dobiti tako što prvo generišemo slučajan uzorak iz date raspodele, koristeći funkciju ***rnorm:***

x<-rnorm(1000,mean=3,sd=2) ,

a zatim pozovemo funkcjije koje redom računaju vrednosti D_n, A^2, W^2 :

KSTest(x,3,2)

Rezultat:[1] 0.03331693

ADTest(x,3,2)

Rezultat:[1] 1.385496

CvMTest(x,3,2)

Rezultat:[1] 0.1938553

Ako *x* uzmemo iz normalne *N(0,1)* raspodele, a testiranje vršimo na ocenjene parametre aritmetičke sredine i standardne devijacije, funkcijama mean i sd, dobijamo sledeće rezultate:

x<-rnorm(10000,mean=0,sd=1)

mean(x)

[1] 0.0006973887

sd(x)

[1] 0.9918713

KSTest(x,0.000697,0.9918)

Rezultat: [1] 0.01004823

ADTest(x,0.000697,0.9918)

Rezultat: [1] 1.235788

CvMTest(x,0.000697,0.9918)

Rezultat:[1] 0.1800063

• Vrednosti pojedinih kvantila test-statistika pri testiranju na normalnu raspodelu

Pomoću navedenih funkcija, u mogućnosti smo da izračunamo jednu vrednost test-statistike za jedan uzorak iz normalne raspodele. Na taj način smo generisali jednu vrednost uzorka raspodele iz koje ta statistika potiče (ili asimptotski teži). Generišimo na taj način dovoljno veliki uzorak iz raspodele te test-statistike, tako što ćemo pozvati odgovarajuću funkciju onoliki broj puta, koliku hoćemo veličinu uzorka, na primer 10000. Zatim, u sortiranom nizu izračunatih vrednosti, pronađemo onu od koje je veće onoliko vrednosti koliko nivo značajnosti nalaže.

Funkcije KScv, Adcv i CvMcv računaju kritične vrednosti za zadati nivo značajnosti *alpha*:

```
KScv<-function(m,s,alpha) {
ks=array(1:10005)
for(i in 1:10000)
{ x<-rnorm(1000,mean=m,sd=s)
mo<-mean(x)
so<-sd(x)
 ks[i]<-KSTest(x,mo,so)
}
y<-sort(ks)
z<-y[10000-alpha*10000]
KScv<-z
```

```
return(KScv)

}



ADcv<-function(m,s,alpha) {
ad=array(1:10005)
for(i in 1:10000)
{ x<-rnorm(10000,mean=m,sd=s)
mo<-mean(x)
so<-sd(x)
  ad[i]<-ADTest(x,mo,so)
}
y<-sort(ad)
z<-y[10000-alpha*10000]
ADcv<-z
return(ADcv)
}



CvMcv<-function(m,s,alpha) {
cm=array(1:10005)
for(i in 1:10000)
{ x<-rnorm(10000,mean=m,sd=s)
mo<-mean(x)
so<-sd(x)
  cm[i]<-CvMTest(x,mo,so)
}
```

```
y<-sort(cm)
z<-y[10000-alpha*10000]
CvMcv<-z
return(CvMcv)
}
```

Kada je raspodela potpuno određena, tada su i ti kvantili potpuno određeni, i nezavisni od raspodele, a kada se parametri raspodele ocene, tada ovim simulacijama dolazimo do kvantila u odgovarajućem slučaju. Zato nakon svakog generisanja niza iz date raspodele, funkcije za računanje test-statistika primenjujemo za ocenjene vrednosti mo i so.

Iskoristimo sada ove funkcije da izračunamo kvantile za neke nivoe značajnosti i za neke parametre normalne raspodele. Na primer, za najčešće korišćenu značajnost od 5%, kritične vrednosti testova Kolmogorov-Smirnova, Anderson-Darlinga i Kramer fon Mizesa dobijamo kada redom primenimo odgovarajuće funkcije *KScv(0,1,0.05), ADcv(0,1,0.05)* i *CvMcv(0,1,0.05).*dobijamo sledeće vrednosti: 0.365972, 1.963827, 0.482874

Funkcije možemo primeniti za bilo koju normalnu raspodelu, za bilo koju značajnost.

Primeri:

Ako testiranje vršimo na uzorku iz normalne *N(3,2)* raspodele, testiramo uzorak na normalnu raspodelu. Potrebno je prvo oceniti parametre, pa izračunati test-statistiku kao funkciju ocenjenih parametara i uporediti sa odgovarajućom kritičnom vrednošću.

```
x<-rnorm(10000,mean=3,sd=2)
mo<-mean(x)
so<-sd(x)
TS1<-KSTest(x,mo,so)rezultat:[1] 0.01001983
CV1<-KScv(mo,so,0.05) rezultat: [1] 0.247554
TS2<-ADTest(x,mo,so)rezultat  [1] 0.549884
CV2<-ADcv(mo,so,0.05)rezultat:2.479366
TS3<-CvMTest(x,mo,so)rezultat:[1] 0.08760063
CV3<-CvMcv(mo,so,0.05)rezultat:[1] 0.1281427
```

U sva tri slučaja je TS<CV, pa zaključujemo da uzorak potiče iz ispitivane raspodele.

Ako bismo testiranje vršili na uzorku koji stvarno potiče iz eksponencijalne raspodele sa parametrom na pr 0.33 (ne znamo koja je raspodela a znamo da je sredina date raspodele oko 3,odnosno približno 1/0.33), odlučimo da testiramo na normalnu. U ovom slučaju bi trebalo odbaciti nultu hipotezu, što pokazuju i sledeći rezultati(sve tri test-statistike su veće od kritičnih vrednosti, uzorci su u kritičnoj oblasti) :

```
x<-rexp(10000,rate=0.33)

mo<-mean(x)

so<-sd(x)

TS1<-KSTest(x,mo,so)   rezultat: [1] 0.157696

CV1<-KScv(mo,so,0.05) rezultat: [1] 0.04252722

TS2<-ADTest(x,mo,so)   rezultat: [1] 475.287

CV2<-ADcv(mo,so,0.05)  rezultat: [1] 2.628506

TS3<-CvMTest(x,mo,so)  rezultat: [1] 81.6313

CV3<-CvMcv(mo,so,0.05 ) rezultat: [1] 0.4561487
```

- Vrednosti pojedinih kvantila test-statistika pri testiranju na eksponencijalnu, Vejbulovu, log-normalnu i Beta raspodelu

Na sličan način računamo test-statistike i kritične vrednosti pri testiranju na eksponencijalnu i Vejbulovu raspodelu, sa razlikom što koristimo funkcije ***rexp(n,rate=lambda)*** koja generiše uzorak obima *n* iz eksponencijalne raspodele sa parametrom *lambda*, ***pexp(x,rate=lambda)*** koja računa vrednosti funkcije eksponencijalne raspodele, kao i ***rweibull(n,shape=a,skale=b)*** koja generiše uzorak obima *n* iz Vejbulove raspodele sa parametrima *a* i *b* i ***pweibull(x,shape=a,skale=b)***koja računa vrednost Vejbulove funkcije raspodele u datoj tački(ili vektoru) x:$F(x,a,b) = 1 - e^{-(\frac{x}{a})^b}$

Redom navedene funkcije za računanje test-statistika i kritičnih vrednosti testova Kolmogorov-Smirnova, Anderson-Darlinga i Kramer fon Mizesa za eksponencijalnu, Vejbulovu, lognormalnu i Beta raspodelu:

Test-statistika K-S i računanje kritičnih vrednosti pri testiranju na eksponencijalnu raspodelu

```
KSTestExp<-function(x,lambda)
{
n=length(x)
z=array(1:10000)
ed=array(1:10000)
d=array(1:10000)
z<-pexp(x,rate=lambda)
for(i in 1:n)
{
 ed[i]<-EDF(x,x[i])
 d[i]=abs(z[i]-ed[i])
}
c=max(d)
KSTestExp<-c
return(KSTestExp)
}
```

```
KScvExp<-function(lambda,alpha) {
ks=array(1:10005)
for(i in 1:10000)
```

```
{ x<-rnorm(10000,rate=lambda)
 cm[i]<-CvMTestExp(x,lambda)
}
y<-sort(ad)
z<-y[10000-alpha*10000]
CvMcvExp<-z
return(CvMcvExp)
}
```

Test-statistika K-S i računanje kritičnih vrednosti pri testiranju na Vejbulovu raspodelu

```
KSTestVejb<-function(x,a,b)
{
n=length(x)
z=array(1:10000)
ed=array(1:10000)
d=array(1:10000)
for(i in 1:n)
{
 z[i]<-1-exp(-(x[i]/a)^b)
 ed[i]<-EDF(x,x[i])
  d[i]=abs(z[i]-ed[i])
}
c=max(d)
KSTestVejb<-c
return(KSTestVejb)
}
```

```
KScvVejb<-function(a,b,alpha) {
ks=array(1:10005)
for(i in 1:10000)
{ x<-rweibull(1000,shape=a,skale=b)
  ks[i]<-KSTestVejb(x,a,b)
}
y<-sort(ks)
z<-y[10000-alpha*10000]
KScvVejb<-z
return(KScvVejb)
}
```

Test-statistika A-D i računanje kritičnih vrednosti pri testiranju na Vejbulovu raspodelu

```
ADTestVejb<-function(x,a,b){
y<-sort(x)
n=length(x)
ad=0
z<-pweibull(y,shape=a,skale=b)
for(i in seq(along=z)) {
ad=ad+(2*i-1)*(log(z[i])+log(1-z[n+1-i])) }
ad=(-1/n)*ad-n
ADTestVejb<-ad
return(ADTestVejb)
```

```
}
```

```
ADcvVejb<-function(a,b,alpha) {
ad=array(1:10005)
for(i in 1:10000)
{ x<-rweibull(10000,shape=a,skale=b)
  ad[i]<-ADTestVejb(x,a,b)
}
y<-sort(ad)
z<-y[10000-alpha*10000]
ADcvVejb<-z
return(ADcvVejb)
}
```

Test-statistika KvM i računanje kritičnih vrednosti pri testiranju na Vejbulovu raspodelu

```
CvMTestVejb<-function(x,a,b){
y<-sort(x)
n=length(x)
cm=1/(12*n)
z<-pweibull(y,shape=a,skale=b)
for(i in seq(along=z)) {
cm=cm+(z[i]-(2*i-1)/(2*n))^2 }
CvMTestVejb<-cm
return(CvMTestVejb)
```

```
}

CvMcvVejb<-function(a,b,alpha) {
ad=array(1:10005)
for(i in 1:10000)
{ x<-rweibull(10000,shape=a,skale=b)
 cm[i]<-CvMTestVejb(x,a,b)
}
y<-sort(ad)
z<-y[10000-alpha*10000]
CvMcvVejb<-z
return(CvMcvVejb)
}
```

Test-statistika K-S i računanje kritičnih vrednosti pri testiranju na Beta raspodelu

```
KSTestBeta<-function(x,a,b)
{
n=length(x)
z=array(1:10000)
ed=array(1:10000)
d=array(1:10000)
z<-pbeta(x,shape1=a,shape2=b)
for(i in 1:n)
{
 ed[i]<-EDF(x,x[i])
```

```
 d[i]=abs(z[i]-ed[i])
}
c=max(d)
KSTestBeta<-c
return(KSTestBeta)
}
```

```
KScvBeta<-function(a,b,alpha) {
ks=array(1:10005)
for(i in 1:10000)
{ x<-rbeta(1000,shape1=a,shape2=b)
 ks[i]<-KSTestBeta(x,a,b)
}
y<-sort(ks)
z<-y[10000-alpha*10000]
KScvBeta<-z
return(KScvBeta)
}
```

Test-statistika A-D i računanje kritičnih vrednosti pri testiranju na Beta raspodelu

```
ADTestBeta<-function(x,a,b){
y<-sort(x)
n=length(x)
ad=0
```

```
{ x<-rexp(10000,rate=lambda)
 ad[i]<-ADTestExp(x,lambda)
}
y<-sort(ad)
z<-y[10000-alpha*10000]
ADcvExp<-z
return(ADcvExp)
}
```

Test-statistika KvM i računanje kritičnih vrednosti pri testiranju na eksponencijalnu raspodelu

```
CvMTestExp<-function(x,lambda){
y<-sort(x)
n=length(x)
cm=1/(12*n)
z<-pexp(y,rate=lambda)
for(i in seq(along=z)) {
cm=cm+(z[i]-(2*i-1)/(2*n))^2 }
CvMTestExp<-cm
return(CvMTestExp)
}
```

```
CvMcvExp<-function(lambda,alpha) {
ad=array(1:10005)
for(i in 1:10000)
```

```
z<-pbeta(y,shape1=a,shape2=b)
for(i in seq(along=z)) {
ad=ad+(2*i-1)*(log(z[i])+log(1-z[n+1-i])) }
ad=(-1/n)*ad-n
ADTestBeta<-ad
return(ADTestBeta)
}
```

```
ADcvBeta<-function(a,b,alpha) {
adr=array(1:10005)
for(i in 1:10000)
{ x<-rbeta(10000,shape1=a,shape2=b)
 adr[i]<-ADTestBeta(x,a,b)
}
y<-sort(adr)
z<-y[10000-alpha*10000]
ADcvBeta<-z
return(ADcvBeta)
}
```

Test-statistika KvM i računanje kritičnih vrednosti pri testiranju na Beta raspodelu

```
CvMTestBeta<-function(x,a,b){
y<-sort(x)
n=length(x)
cm=1/(12*n)
```

```
z<-pbeta(y,shape1=a,shape2=b)
for(i in seq(along=z)) {
cm=cm+(z[i]-(2*i-1)/(2*n))^2 }
CvMTestBeta<-cm
return(CvMTestBeta)
}
```

```
CvMcvBeta<-function(a,b,alpha) {
cms=array(1:10005)
for(i in 1:10000)
{ x<-rbeta(10000,shape1=a,shape2=b)
  cms[i]<-CvMTestBeta(x,a,b)
}
y<-sort(cms)
z<-y[10000-alpha*10000]
CvMcvBeta<-z
return(CvMcvBeta)
}
```

Primeri:

Testiramo uzorak na eksponencijalnu raspodelu. Neka to bude prvo uzorak iz eksponencijalne raspodele sa parametrom $\lambda = 2$. Prvo je potrebno oceniti vrednost parametra λ. Ocenjena vrednost, metodom maksimalne verodostojnosti jednaka je recipročnoj vrednosti aritmetičke sredine uzorka.

```
x<-rexp(10000,rate=2)

mo<-mean(x)

lambdao<-1/mo

TS1<-KSTestExp(x,lambdao)          rezultat: [1] 0.076034

CV1<-KScvExp(lambdao,0.05)         rezultat: [1] 0.375649

TS2<-ADTestExp(x,lambdao)          rezultat: [1] 0.659344

CV2<-ADcvExp(lambdao,0.05)         rezultat: [1] 1.735248

TS3<-CvMTestExp(x,lambdao)         rezultat: [1] 0.068347

CV3<-CvMcvExp(lambdao,0.05)        rezultat: [1] 0.382349
```

Primenimo sada funkcije za testiranje Vejbulove raspodele. Generišimo uzorak iz pomenute raspodele, sa parametrima na pr. a=3 i b=2, i testirajmo uzorak na raspodelu sa ocenjenim parametrima

```
x<-rweibull(10000,shape=3,skale=2)

TS1<-KSTestVejb(x,3,2)             rezultat: [1] 0.006582

CV1<-KScvVejb(3,2,0.05)            rezultat: [1] 0.035628

TS2<-ADTestVejb(x,mo,so)           rezultat: [1] 0.756290

CV2<-ADcvVejb(mo,so,0.05)          rezultat: [1] 0.500743

TS3<-CvMTestVejb(x,mo,so)          rezultat: [1] 2.368103

CV3<-CvMcvVejb(mo,so,0.05)         rezultat: [1] 4.534369
```

Krititične vrednosti

Primetimo da bismo dobili isti rezultat kada primenimo funkcije za eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ i funkcije za Vejbulovu raspodelu sa parametrima a=1/ λ i b=1.

• Funkcije za računanje moći testa pri nekim alternativnim hipotezama

Moć testa predstavlja verovatnoću odbacivanja netačne hipoteze. Drugim rečima, znamo da je alternativna hipoteza u stvarnosti tačna, i moćniji je onaj test koji će to "najpre" da zaključi. Potrebno je generisati uzorak iz alternativne raspodele, i izračunati verovatnoću da test-statistika bude u kritičnoj oblasti, tj. bude veća od odgovarajuće kritične vrednosti. Tu verovatnoću aproksimiramo, kao i do sada, uzoračkom proporcijom.

Funkcije za računanje moći testova K-S, A-D i KvM pri:H_0 :$N(m,s^2)$ protiv H_1: $\varepsilon(lambda)$, parametri *m,s,lambda* su argument funkcije koji se mogu proizvoljno zadati:

```
POWNexpKS<-function(m,s,lambda,alpha)
{
M<-array(1:10000)
for(i in 1:10000)
{
  x<-rexp(10000,rate=lambda)
  M[i]<-KSTest(x,m,s)
}
c<-KScv(m,s,alpha)
y<-sort(M)
n<-length(y)
i=1
while(y[i]<c)
i=i+1
POW=(n-i+1)/n
POWNexpKS<-POW
return(POWNexpKS)
```

```
}

POWNexpAD<-function(m,s,lambda,alpha)
{
M<-array(1:10000)
for(i in 1:10000)
{
  x<-rexp(10000,rate=lambda)
  M[i]<-ADTest(x,m,s)
}
c<-ADcv(m,s,alpha)
y<-sort(M)
n<-length(y)
i=1
while(y[i]<c)
i=i+1
POW=(n-i+1)/n
POWNexpKS<-POW
return(POWNexpAD)
}

POWNexpCvM<-function(m,s,lambda,alpha)
{
M<-array(1:10000)
for(i in 1:10000)
```

```
POWexpWbllAD<-POW
return(POWexpWbllAD)
}
```

```
POWexpWbllCvM<-function(a,b,lambda,alpha)
{
M<-array(1:10000)
for(i in 1:10000)
{
  x<-rweibull(10000,shape=a,skale=b)
  M[i]<-CvMTestExp(x,lambda)
}
c<-CvMcvExp(lambda,alpha)
y<-sort(M)
n<-length(y)
i=1
while(y[i]<c)
i=i+1
POW=(n-i+1)/n
POWexpWbllCvM<-POW
return(POWexpWbllCvM)
}
```

Funkcije za računanje moći testova K-S, A-D i KvM pri: H_0 :$N(m,s^2)$ protiv H_1: $B(a,b)$, parametri m,s,a,b su argumenti funkcije koji se mogu proizvoljno zadati:

```
{ x<-rexp(1000,rate=lambda)
 ks[i]<-KSTestExp(x,lambda)
}
y<-sort(ks)
z<-y[10000-alpha*10000]
KScvExp<-z
return(KScvExp)
}
```

Test-statistika A-D i računanje kritičnih vrednosti pri testiranju na eksponencijalnu raspodelu

```
ADTestExp<-function(x,lambda){
y<-sort(x)
n=length(x)
ad=0
z<-pexp(y,rate=lambda)
for(i in seq(along=z)) {
ad=ad+(2*i-1)*(log(z[i])+log(1-z[n+1-i])) }
ad=(-1/n)*ad-n
ADTestExp<-ad
return(ADTestExp)
}
```

```
ADcvExp<-function(lambda,alpha) {
ad=array(1:10005)
for(i in 1:10000)
```

```
POWNbetaKS<-function(m,s,a,b,alpha)
{
M<-array(1:10000)
for(i in 1:10000)
{
  x<-rbeta(10000,shape1=a,shape2=b)
  M[i]<-KSTest(x,m,s)
}
c<-KScv(m,s,alpha)
y<-sort(M)
n<-length(y)
i=1
while(y[i]<c)
i=i+1
POW=(n-i+1)/n
POWNbetaKS<-POW
return(POWNbetaKS)
}
```

```
POWNbetaAD<-function(m,s,a,b,alpha)
{
M<-array(1:10000)
for(i in 1:10000)
{
  x<-rbeta(10000,shape1=a,shape2=b)
```

```
  M[i]<-ADTest(x,m,s)
}
c<-ADcv(m,s,alpha)
y<-sort(M)
n<-length(y)
i=1
while(y[i]<c)
i=i+1
POW=(n-i+1)/n
POWNbetaAD<-POW
return(POWNbetaAD)
}



POWNbetaCvM<-function(m,s,a,b,alpha)
{
M<-array(1:10000)
for(i in 1:10000)
{
  x<-rbeta(10000,shape1=a,shape2=b)
  M[i]<-CvMTest(x,m,s)
}
c<-CvMcv(m,s,alpha)
y<-sort(M)
n<-length(y)
i=1
while(y[i]<c)
```

```
i=i+1
POW=(n-i+1)/n
POWNbetaCvM<-POW
return(POWNbetaCvM)
}
```

Što se tiče log-normalne raspodele, iskoristimo njeno svojstvo koje glasi: ako obeležje X ima log-normalnu raspodelu, tada $logX$ ima normalnu raspodelu. Da bismo generisali uzorak iz log-normalne raspodele, generišimo prvo uzorak Y koji ima normalnu raspodelu. Tada možemo smatrati da smo sa X=exp(Y) generisali uzorak iz log-normalne raspodele. Funkcije koja računaju moći testova K-S, A-D i KvM pri testiranju normalne protiv log-normalne raspodele su:

```
POWNlogNKS<-function(m,s,alpha)
{
M<-array(1:10000)
for(i in 1:10000)
{
  z<-rnorm(10000,mean=m,sd=s)
  x<-exp(z)
  M[i]<-KSTest(x,m,s)
}
c<-KScv(m,s,alpha)
y<-sort(M)
n<-length(y)
i=1
while(y[i]<c)
i=i+1
POW=(n-i+1)/n
```

```
POWNlogNKS<-POW
return(POWNlogNKS)
}


POWNlogNAD<-function(m,s,alpha)
{
M<-array(1:10000)
for(i in 1:10000)
{
    z<-rnorm(10000,mean=m,sd=s)
    x<-exp(z)

  M[i]<-ADTest(x,m,s)
}
c<-ADcv(m,s,alpha)
y<-sort(M)
n<-length(y)
i=1
while(y[i]<c)
i=i+1
POW=(n-i+1)/n
POWNlogNAD<-POW
return(POWlogNAD)
}


POWNlogNCvM<-function(m,s.alpha)
```

```
{
M<-array(1:10000)
for(i in 1:10000)
{
    z<-rnorm(10000,mean=m,sd=s)
    x<-exp(z)

  M[i]<-CvMTest(x,m,s)
}
c<-CvMcv(m,s,alpha)
y<-sort(M)
n<-length(y)
i=1
while(y[i]<c)
i=i+1
POW=(n-i+1)/n
POWNlogNCvM<-POW
return(POWNlogNCvM)
}
```

Sve do sada navedene funkcije se mogu iskoristiti za računanje moći raznih testova, za više alternativnih hipoteza, za više nivoa značajnosti, pritom uzimajući bilo koje vrednosti parametara datih raspodela.

Ispitajmo i uporedimo moći testova na konkretnim primerima (konkretna značajnost,napr. 5% i za konkretno izabrane parametre raspodela). Poređenje možemo vršiti po raznim testovima za fiksiranu alternativnu raspodelu, kao i obratno-fiksirajući vrstu testa, i poredeći sa moći pri različitim alternativama.

Na sličan način računanje moći navedenih testova kada za alternativnu hipotezu imamo uniformnu $U(a,b)$ raspodelu $F(x)=(x-a)/(b-a)$ ili Gumbelovu raspodelu $F(x)=exp(-exp(-ax))$ izvršićemo pomoću malih modifikacija do sada navedenih funkcija. Promene će biti samo u delu kada generišemo uzorak, u ovom slučaju navodeći direktno izraze za funkcije raspodela, i u broju i vrsti argumenata. Time smo dobili još 6 različitih funkcija: *POWNUKS(m,s,a,b,alpha)*, *POWNUAD(m,s,a,b,alpha)*, *POWNUCvM(m,s,a,b,alpha)*, *POWNGumbKS(m,s,a,alpha)*, *POWNGumbAD(m,s,a,alpha) i POWNGumbCvM(m,s,a,alpha)* kojima računamo moći testova kada za alternative imamo uniformnu i Gumbelovu raspodelu.

Sve do sada navedene funkcije se mogu iskoristiti za računanje moći raznih testova, za više alternativnih hipoteza, za više nivoa značajnosti, pritom uzimajući bilo koje vrednosti parametara datih raspodela.

Ispitajmo i uporedimo moći testova na konkretnim primerima (konkretna značajnost,napr. 5% i za konkretno izabrane parametre raspodela). Poređenje možemo vršiti po raznim testovima za fiksiranu alternativnu raspodelu, kao i obratno-fiksirajući vrstu testa, i poredeći sa moći pri različitim alternativama.

U sledećoj tabeli su prikazane izračunate vrednosti moći testova K-S, A-D i KvM pri nultoj hipotezi $H_0: X: N(m, s^2)$. Računanje vršimo za vrednosti parametara $m=4$, $s=3$, i sledeće vrednosti parametre alternativnih hipoteza, datih u prvoj koloni tabele: za eksponencijalnu raspodelu *lambda=0.21*, za Vejbulovu i Beta raspodelu $a=3$, $b=3$, za Gumbelovu $a=1.25$, i uniformnu $a=1.75$, $b=6.25$. Neka je nivo značajnosti *alpha=0.05*, ili 5%. Naziv odgovarajuće funkcije koju primenjujemo možemo pročitati iz tabele tako što u prvoj vrsti koja predstavlja vrstu testa, umesto donje crte umetnemo odgovarajući naziv za alternativnu hipotezu, datoj u prvoj koloni tabele, zajedno sa odgovarajućim parametrima koje ona nosi. Na primer, polje u tabeli označeno zvezdicom predstavlja rezultat dobijen primenom funkcije POWNbetaAD(4,3,3,3,0.05) i predstavlja moć testa koji testira na normalnu $N(4,9)$ raspodelu, pri alternativi da uzorak potiče iz beta raspodele $B(3,3)$. Zbog osobina beta raspodele, najviše ima smisla testirati na jednake vrednosti parametara zbog toga što tek tad ova raspodela postaje simetrična, i ima smisla upoređivati je sa normalnom, koja je uvek simetrična.

	POWN_KS (m,s,	*POWN_AD (m,s*	*POWN_CvM (m,s,*
exp lambda,alpha)	0.897657	0.900562	0.775089
Wbll a,b,alpha)	0.756678	0.820544	0.884725
logN alpha)	0.488403	0.733386	0.629677
Beta a,b,alpha)	0.377803	* 0.684502	0.356626
U a,b,alpha)	0.300523	0.395731	0.529558
Gumb a,alpha)	0.389334	0.284034	0.639171

Tabela moći testova za alpha=0.05

Primetimo na osnovu ovih rezultata, da su svi testovi generalno moćniji pri odbacivanju alternative da uzorak ima eksponencijalnu, Vejbulovu, ili log-normalnu raspodelu, nego pri odbacivanju alternative da uzorak potiče iz beta, Gumbelove, ili uniformne raspodele. Pri ispitivanju uzorka na normalnu raspodelu, koji stvarno potiče iz alternativne raspodele, u nekim slučajevima je teže, a u drugim lakše odbaciti početnu hipotezu o normalnosti, i doneti ispravnu odluku. Ovi rezultati se ne mogu odmah uopštiti za bilo koje parametre funkcija. Ovde smo izabrali da testiramo neke intuitivne vrednosti parametara, na primer, ako smo testirali na normalnu raspodelu sa očekivanjem 2, onda je logično da ćemo, ako za alternativu uzimamo eksponencijalnu raspodelu, uzeti onu koja će imati približno isto očekivanje, pa parametar lambda treba uzeti približno vrednosti 0.5, beta raspodelu sa jednakim vrednostima oba parametra da bi bila simetrična itd.

Takođe primetimo da K-S test generalno manje moćniji od testova A-D i KvM, K-S test se pokazao moćniji pri alternativnoj hipotezi o Gumbelovoj raspodeli, i to samo od A-D testa, a od KvM testa je moćniji u slučaju alternativne eksponencijalne ili beta raspodele. Najveću moć, u ovom primeru, pokazao je A-D test (0.900562), pri alternativi o eksponencijalnoj raspodeli, približno istu moć ima, u ovom slučaju, i K-S test (0.89765). Najslabije su se pokazali A-D i K-S pri alternativi Gumbelove i uniformne raspodele (0.284034, 0.300523).

Izračunajmo sada moći testova sa istim parametrima, ali sa nivoom značajnosti alpha=0.01. Njivove vrednosti su date u sledećoj tabeli:

	POWN_KS (m,s,	***POWN_AD (m,s***	***POWN_CvM (m,s,***
exp lambda,alpha)	0.697445	0.849332	0.769930
Wbll a,b,alpha)	0.784001	0.761103	0.984725
logN alpha)	0.639881	0.711152	0.508206
Beta a,b,alpha)	0.229104	* 0.428540	0.69663
U a,b,alpha)	0.584511	0.421762	0.300267
Gumb a,alpha)	0.472291	0.680471	0.385583

Tabela moći testova za alpha=0.01

I u ovom slučaju se pokazalo da su generalno testovi sposobniji da detektuju netačnu hipotezu o normalnosti kada uzorak potiče iz eksponencijalne, Vejbulove ili log-normalne raspodele, nego ako potiču iz uniformne, beta, ili Gumbelove raspodele, u izuzetku slučaja moći KvM testa kada je u pitanju beta raspodela (0.69663). Najmoćniji se pokazao KvM test u slučaju Vejbulove alternative (0.984725), a najslabiji K-S u slučaju beta raspodele (0.229104). Ovim vrednostima moći testova ujedno su određene greške druge vrste, koje predstavljaju greške neodbacivanja netačne hipoteze, kao vrednosti moći oduzete od jedinice.

Sve navedene funkcije za računanje test-statistika, kritičnih vrednosti i moći testova možemo, kao što je bilo pomenuto, primeniti za proizvoljne argumente tj. parametre raspodele i nivoe značajnosti, i upotrebiti rezultate koji su nam potrebni u konkretnom slučaju testiranja hipoteza, kao i u svrhe ispitivanja osobina raspodela (ili asimptotskih raspodela) datih testova.

7. ZAKLJUČAK

Od svih testova slaganja sa ispitivanom raspodelom, koji koriste empirijsku funkciju raspodele pri testiranju, najviše je bilo reči o Kolmogorov-Smirnovu, Anderson-Darlingu i Kramer fon Mizes testu. U prvom delu je bilo reči o izrazima za test-statistike, i o teorijskim raspodelama koje te test-statistike imaju, uz osvrt na Glivenko-Kantelijevu teoremu. U drugom delu su izračunate konkretne vrednosti test-statistika velikih uzoraka, korišćenjem statističkog softvera ***R***, kao i kritične vrednosti za određene nivoe značajnosti. Dalje su, korišćenjem izračunatih kritičnih vrednosti, izračunate moći testova, kao procenat broja elemenata u uzorku iz raspodele koju ima sama test-statistika, koje su veće od unapred izračunate kritične vrednosti, pritom vrednosti test-statistika su računate na uzorku koji stvarno potiče iz alternativne raspodele. Na osnovu dobijenih rezultata možemo zaključiti da je generalno veća moć testova Anderson-Darlinga Kramer fon Mizesa od moći testa Kolmogorov-Smirnova, kao i da su testovi moćniji kada je u pitanju detektovanje neslaganja normalne raspodele sa eksponencijalnom, Vejbulovom i log-normalnom raspodelom. Pošto je raspodela test-statistika potpuno poznata kada se tačno precizira raspodela koja se ispituje, tj navedu se tačno njeni parametri, tada su moći i kvantili određeni i ne zavise od raspodele. U slučaju nepoznavanja parametara, što je u praksi čest slučaj, raspodela test-statistika se menja kada je potrebno oceniti odgovarajuće parametre, pa se samim tim moći testova i kvantili razlikuju u raznim slučajevima. Ovim simulacijama je moguće odrediti kvantile i moć testa u raznim slučajevima, menjajući argumente funkcija.

LITERATURA:

[1] R. V. Hogg, J. W. McKean, A. T. Craig, *Introduction to matematical statistic*, Iowa, 1970.

[2] V. Jevremović, J. Mališić, D. Đorić, E. Nikolić-Đorić *Atlas raspodela*, Beograd, 2007.

[3] Y. Nikitin, *Large deviation of U-empirical Kolmogorov-Smirnov tests and their efficiency*, St.Pererburg, 1985.

[4] R. R. Bahadur, *Some limit theorems in statistics*, SIAM, Philadelphia, 1971.

[5] A. I. Ahmad, A. I. Alwasel, *A goodnes of fit test for exponenciality based on the memoryless property*, 1998.

[6] P. Mladenović, *Verovatnoća i statistika*, Beograd, 2005.

[7] V. Jevremović, *Statistička analiza i slučajni procesi*, Beograd,1991.

[8] R. Bispo, T. A. Marques, D. Pestana, *Statistical power of goodness of fit tests based on empirical distribution function for type I-right-censored data,* Jurnal of statistic computation and simulation, 2011.

[9] G. Marsaglia, *Evaluating the Anderson-Darling Distribution*, Florida, 1992.

[10] Glivenko-Cantelli theorem
http://uflprob.files.wordpress.com/2013/01/glivenko-cantelli-shaikh.pdf

[11] Distribution theory based on sample distribution
file:///C:/Users/Djomla/Desktop/master/Distribution%20Theory%20for%20Tests%20Based%20on%20Sample%20Distribution%20Function%20-%20J.%20Durbin%20-%20Google%20Books.htm

[12] http://manuals.bioinformatics.ucr.edu/home/programming-in-r

[13] http://science.webhostinggeeks.com/programiranje-u-r

[14] http://encyclopedia.thefreedictionary.com/Kuiper's%20test

[14] R Core Team (2013). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL http://www.R-project.org/.

SADRŽAJ