МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

БЕОГРАД

ДИПЛОМСКИ (МАСТЕР) РАД

ВАЖНОСТ ГРАФИЧКОГ ПРИСТУПА У РАЗУМЕВАЊУ КОНЦЕПТА ФУНКЦИЈЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Ментор:

др Милан Божић

Студент:

Мирјана Никшић 1136/2010

Београд, септембар 2012

Комисија која је прегледала рад и одобрила одбрану:

Ментор: Проф. др Милан Д. Божић

Члан: Проф. др Миодраг С. Матељевић

Члан: Проф. мр Иван Р. Анић

ПРЕДГОВОР

Функције, њихове особине и графици функција, представљају једну од најтежих области за изучавање и разумевање код ученика основних и средњих школа.

Важност графичког приступа у разумевању концепта функције подразумева то да ученици могу са графика да „прочитају“ ток и понашање функције.

Такође, рад се посебно односи на испитивање тока функције аналитичким путем, којим треба да се дође до сазнања о понашању функције, као и њеним значајним тачкама у координантном систему, те да се на основу добијених резултата нацрта график те функције. Суштина је у томе да ученици савладају све те особине и самостално нацртају график, без помоћи графичких калкулатора, који постају све већи тренд на западу и Америци.

Овај мастер рад има за циљ да представи велики број појмова које ће бити од помоћи онима који се сусрећу са задацима, за чије је решавање потребно детаљније познавање особина функција и њихових графика.

Мастер рад је пре свега намењен ученицима средњих (у малом делу и основних) школа. Међутим, рад садржи основне појмове, тврђења и особине функција, тако да могу да га користе математичари свих узраста, студенти на факултетима и наставници и професори у школама у виду подсетника.

Овом приликом желим да се захвалим свим професорима на помоћи у стицању знања током студија. Посебно бих желела да се захвалим свом ментору др Милану Божићу. Такође се захваљујем професорима др Миодрагу Матељевићу и мр Ивану Анићу, који су пристали да буду чланови комисије у оцени мог рада.

Београд, 2012.

Мирјана Никшић

САДРЖАЈ

I. УВОД

Квалитетно образовање и васпитање, које омогућава стицање језичке, математичке, научне, уметничке, културне, здравствене, еколошке и информатичке писмености, неопходне за живот у савременом и сложеном друштву. Развијање знања, вештина, ставова и вредности које оспособљавају ученика да успешно задовољава сопствене потребе и интересе, развија сопствену личност и потенцијале, поштује друге особе и њихов идентитет, потребе и интересе, уз активно и одговорно учешће у економском, друштвеном и културном животу и доприноси демократском, економском и културном развоју друштва.

Мастер рад је посвећен изучавању значаја и важности графикичког приказа елементарних функција као и испитивању вредности тока функције како би се нацртао график те функције. Оне су садржај градива још у нижим разредима основне школе, знање се продубљује кроз средњошколско образовање, одлазак на такмичења и слично. Елементарне функције представљају добар „приручник“ матеметичарима, физичарима, инжењерима, механичарима, статистичарима, економистима. Примена графикона је заступљена у математичкој анализи, геометрији, теорији вероватноће, матеметичкој статистици, математичкој обради података, линеарног и динамичког програмирања као и у теоријској и примењеној математици.

Циљ мастер рада је обрада и примена концепта функције и њихов графички приказ у настави математике у основној и средњој школи, као и припреми за такмичења и полагање пријемних испита за факултете. Рад обухвата синтезу теорије са применом, што је стандард савремене литературе.

Рад је на око 90 страница, подељен на пет поглавља, укупан број слика 44. Прво поглавље обухвата сам уводни део. Друго поглавље се односи на циљеве и задатке наставе математике, као и на образовне стандарде о темељним знањима и вештинама које ученици треба да стекну до одређеног нивоа у образовању. У трећем поглављу се налази сама срж овог рада. Прво је описан историјски преглед настанка координатног система и, у сажетом облику, живот и дело његовог творца. Затим сам појам функције, посебно појам реалне функције реалне променљиве, а затим и основне особине реалних функција једне реалне променљиве, односно испитивање тока функције, као што су: парност и непарност, периодичност, монотоност, конвексност, појам граничних вредности реалних функција, особине граничних вредности, појам непрекидности функција, као и особине непрекидних функција..., што је битно за сам график функције. Такође је дефинисан и појам инверзне функције, као и појмови функције задате параметарски и имплицитно задате функције. Поред овога дат је преглед елементарних функција, њихове особине и основни графици тих функција. У четвртом поглављу је представљена CASE студија, базирана на једном Америчком истраживању које се односи на испитивање ефекта графичког приступа на учениково разумевање алгебрских функција, и поређење успеха код ученика који су користили графичке калкулаторе и оних који нису. У петом поглављу су закључна разматрања рада.

II. ОПШТИ ЦИЉЕВИ И ЗАДАЦИ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ

Циљ наставе математике јесте да ученици усвоје елементарна математичка знања која су потребна за схватање појава и зависности у животу и друштву. Она, пре свега, треба да оспособи ученике за примену усвојених математичких знања у решавању разноврсних задатака из животне праксе. Математика има за циљ да омогући ученику успешно настављање математичког образовања и самообразовање, као и да допринесе развијању менталних способности, формирању научног погледа на свет и свестраном развитку личности ученика. Циљ наставе математике у основној школи јесте: да се осигура да сви ученици стекну базичну језичку и математичку писменост и да напредују ка реализацији одговарајућих стандарда образовних постигнућа, да се оспособе да решавају проблеме и задатке у новим и непознатим ситуацијама, да изразе и образложе своје мишљење и дискутују са другима, развију мотивисаност за учење и заинтересованост за предметне садржаје, као и да усвоје елементарне математичке компетенције (знања, вештине и вредносне ставове) која су потребне за схватање појава и законитости у природи и друштву; да оспособи ученике за примену усвојених математичких знања у решавању разноврсних задатака из животне праксе, да представља основу за успешно настављање математичког образовања и за самообразовање; као и да доприносе развијању менталних способности, формирању научног погледа на свет и свестраном развитку личности ученика.

Задаци наставе математике су многобројни. Они се, пре свега, односе на то да ученици:

- развијају логичко и апстрактно мишљење;
- развијају способности јасног и прецизног изражавања и коришћења основног математичко-логичког језика;
- развијају способности одређивања и процене квантитативних величина и њиховог односа;
- разликују геометријске објекте и њихове узајамне односе и трансформације;
- разумеју функционалне зависности, њихово представљање и примену;
- развијају систематичност, уредност, прецизност, темељност, истрајност, критичност у раду, креативност;
- развијају радне навике и способности за самостални и групни рад;
- формирају систем вредности;
- стичу знања и вештине корисне за трансфер у друге предмете и развијају способности за правилно коришћење стручне литературе;
- формирају свест о универзалности и примени математичког начина мишљења;

- буду подстакнути за стручни развој и усавршавање у складу са индивидуалним способностима и потребама друштва;
- развијају способности потребне за решавање проблема и нових ситуација у процесу рада и свакодневном животу;
- стичу знања неопходна за разумевање квантитативних и просторних односа и законитости у разним појавама у природи, друштву и свакодневном животу;
- стичу основну математичку културу потребну за откривање улоге и примене математике у различитим подручјима човекове делатности (математичко моделовање), за успешно настављање образовања и укључивање у рад;
- развијање ученикове способности посматрања, опажања и логичког, критичког, аналитичког и апстрактног мишљења;
- развијање културних, радних, етичких и естетских навика ученика, као и математичке радозналости;
- стицање способности изражавања математичким језиком, јасност и прецизност изражавања у писменом и усменом облику;
- припрема ученика за разумевање одговарајућих садржаја природних и техничких наука;
- изграђивање позитивних особина ученикове личности, као што су: систематичност, упорност, тачност, уредност, објективност, самоконтрола и смисао за самостални рад;
- стицање навика и умешности у коришћењу разноврсних извора знања;
- стварање разноврсних могућности да кроз различите садржаје и облике рада током наставе математике сврха, циљеви и задаци образовања, као и то да циљеви наставе математике буду у пуној мери реализовани.

Основне карактеристике програма математике су: усклађеност са програмом математике за основну школу; заступљеност заједничких садржаја из програма математике за гимназије и стручне средње школе; логичка повезаност садржаја, посебно са аспекта развоја математике; настојање, где год је то било могуће да садржаји математике претходе садржајима других предмета у којима се математика примењује; заступљеност оних елемената развоја математике који чине основу математичке културе свих свршених ученика гимназије; хоризонтална и вертикална усклађеност између програма математике за поједине смерове у гимназији (распоред тема по разредима, њихов обим, основни захтеви и сл.). Програми садрже готово све елементе досадашњих програма математике који су битни за математичко образовање на овом когнитивном нивоу. Извршена су извесна сажимања садржаја и успостављање адекватнијег односа између садржаја програма и фонда часова, с тим што се инсистира и на постизању веће ефикасности наставе методичком обновом и подесним структурирањем садржаја. При томе је узет у обзир опште културни значај математике, тј. да се математика и њој својствен стил мишљења посматра и као битни елемент опште културе данашњег човека, без обзира којом се активношћу бави. Зато се неки садржаји из старијих разреда основне школе и на овом узрасту даље утврђују, продубљују, допуњују и заокружују тако да представљају тај неопходни део савремене опште културе образовних људи. При избору садржаја програма била је врло значајна образовна функција наставе математике (стицање нових математичких знања, подизање нивоа математичког образовања ученика) и њен допринос даљем оспособљавању ученика да логички мисле и стваралачки приступају решавању различитих проблема. Таква оспособљеност (захваљујући адекватним математичким садржајима и методама) има широки утицај на многобројне делатности и омогућава касније ефикасно учење. Неодвојива од образовне је и васпитна функција наставе математике. Ученик се васпитава да доноси правилно мишљење. Васпитање доприноси изграђивању низа позитивних особина личности. За реализацију циља и задатака наставе математике изабрани садржаји програма у основи су довољно приступачни свим ученицима. Они такође могу и стимулативно деловати на ученике, јер ови имају могућност да их усвоје и на нешто вишем нивоу (већи степен апстракције и генерализације, синтезе и примене, стваралачко решавање проблема). Строгост у интерпретацији садржаја треба да буде присутна у прихватљивој мери, уз ослањање на математичку интуицију и њено даље развијање, тј. мотивација и интуитивно схватање проблема треба да претходе строгости и критичности, а излагање градива мора бити праћено добро одабраним примерима и тек након довољног броја урађених таквих примера треба приступити генералисању појма, чињенице и слично. Наиме, „школска“ математика не може бити сасвим формализована, то јест изложена искључиво дедуктивно. Колико ће она строга бити одређују уџбеник и наставник математике (у зависности од фонда часова, састава одељења и предзнања ученика). Да би се остварио постављени циљ, наставе математике, неопходно је у току наставе успешно реализовати одређене образовне, васпитне и практичне задатке, истакнуте, на почетку програма. Услови за успешну реализацију програма математике су: правилно планирање и редовно припремање наставника за извођење наставе; целисходно коришћење фонда часова и добро организован наставни процес; комбинована примена савремених наставних метода и разноврсност облика рада са ученицима, уз смишљено одабирање и припремање примера и задатака и употребу одговарајућих наставних средстава, учила за наставу математике и рачунара. Све то треба да одрази интенције програма: подизање нивоа наставе и њену актуелизацију, стварање услова у којима ће ученици сопственим напорима усвајати трајна и активна математичка знања и оспособљвати се за примену тих знања и стицање нових знања. Тако организована и извођена настава математике, уз пуно интелектуално ангажовање ученика у свим фазама наставног процеса, у већој мери јеефикасна и продуктивна. Такође, подстиче самоиницијативу ученика у стицању знања и доприноси изграђивању радних навика и подизању радне културе ученика (што је и важан васпитни задатак наставе). Својом структуром математика томе доста погодује. Реализација програма математике у средњој школи треба да представља природан прелаз од наставе у основној школи и да се заснива на већ стеченим математичким знањима ученика (што омогућава доста добра вертикална повезаност програма математике у средњим школама и основној школи). Објективна ситуација изискује и извесно систематско утврђивање и обнављање оних садржаја из програма основне школе на којима се заснива обрада садржаја у средњој школи, а то се може постићи ингегрисањем појединих садржаја из основне школе у обраду нових садржаја на оном месту где је то потребно и у оној фази наставе када је то актуелно (обнављање на самом часу и самостално обнављање од стране ученика кроз домаћи рад и друго). То претпоставља смишљено и студиозно планирање градива од стране наставника. У погледу математичке терминологије мора постојати континуитет у односу на коришћену (прописану) терминологију у основној школи. Ради осавремењивања наставе математике и ефикаснијег усвајања садржаја, пожељно је да се обезбеди и присуство рачунарске подршке у настави математике (у почетној фази у фронталном облику рада и уз коришћење узорних демонстрационих програмских апликација, уколико нема услова за масован индивидуални рад ученика на рачунару у оквиру наставе математике). Током остваривања програма потребно је уважити високу образовну и мотивациону вредност активних и интерактивних (кооперативних) метода наставе и учења те кроз све програмске целине доследно осигурати да најмање једна трећина наставе буде организована употребом ових метода. У настави користити, најмање у трећини случајева, задатке који захтевају примену наученог у разумевању и решавању свакодневних проблемских ситуација, а приликом оцењивања обезбедити да су ученици информисани о критеријумима на основу којих су оцењивани.

2.1. Образовни стандарди

Образовни стандарди (*Чапрић,* 2011) су искази о темељним знањима, вештинама и умењима које ученици треба да стекну до одређеног нивоа у образовању. Стандарди артикулишу најважније захтеве школског учења и наставе и исказују их као исходе видљиве у понашању и расуђивању ученика. Преко стандарда се образовни циљеви и задаци преводе на много конкретнији језик који описује постигнућа ученика, стечена знања, вештине и умења. нивое образовања који се експлицитно наводе у наставним програмима за поједине предмете. Формулације стандарда су конкретне, оперативне и дате у исказима шта ученик зна, може и уме и могуће их је проверити тестирањем или посматрањем. Нивои постигнућа - образовни стандарди формулисани су на три нивоа постигнућа. Нивои образовних стандарда описују захтеве различите тежине, когнитивне комплексности и обима знања, од једноставнијих ка сложеним. Сваки наредни ниво подразумева да је ученик савладао знања и вештине са претходног нивоа. Образовни стандарди формулисани су на три нивоа постигнућа. Нивои образовних стандарда описују захтеве различите тежине, когнитивне комплексности и обима знања, од једноставнијих ка сложеним. Сваки наредни ниво подразумева да је ученик савладао знања и вештине са претходног нивоа. Постоје три нивоа образовних стандарда:

1. Основни ниво,
2. Средњи ниво, и
3. Напредни ниво.

Основни ниво: На првом нивоу описани су захтеви који представљају базични или основни ниво знања, вештина и умења. Очекује се да ће скоро сви, а најмање 80% ученика/ученица постићи тај ниво. На базичном нивоу налазе се темељна предметна знања и умења, то су функционална и трансферна знања и умења неопходна, како за сналажење у животу, тако и за наставак учења. Знања и умења са основног нивоа најчешће су мање сложена од оних са средњег и напредног нивоа, али то није увек случај. Овде су смештена и она знања и умења која нису једноставна, али су тако темељна да заслужују посебан напор, који је потребан да би њима овладали готово сви ученици.

Средњи ниво: На другом нивоу описани су захтеви који представљају средњи ниво знања, вештина и умења. Он описује оно што просечан ученик/ученица може да достигне. Очекује се да ће око 50% ученика/ученица постићи или превазићи тај ниво.

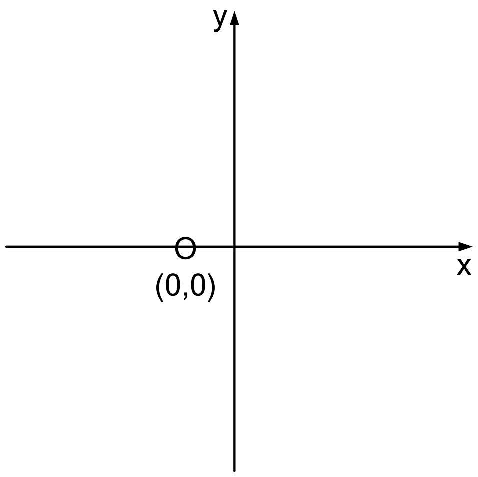
Напредни ниво: На трећем нивоу описани су захтеви који представљају напредни ниво знања, вештина и умења. Очекује се да ће око 25% ученика/ученица постићи тај ниво. Знања и умења са овог нивоа су трансферна, пре свега за наставак школовања. Компетенције са напредног нивоа су по правилу и когнитивно сложеније од оних са базичног и средњег нивоа. То значи да се од ученика очекује да анализира, упоређује, разликује, критички суди, износи лични став, повезује различита знања, примењује их и сналази се и у новим и нестандардним ситуацијама.

Образовни стандарди објективизују и стандардизују школско оцењивање знања. На школским оценама су засноване далекосежне животне одлуке, као што је избор школе и професије. Међутим, критеријуми оцењивања које примењују наставници могу бити субјективни. Проблем са различитим критеријумима оцењивања не може бити решен без усаглашених стандарда ученичких постигнућа. Када су критеријуми јасно и прецизно дефинисани, као што је то случај са образовним стандардима, наставник може лако да их примени. Тиме се повећава објективност свакодневног школског оцењивања, као и упоредивост школских оцена, што уједначава шансе ученика при упису у наредни ниво школовања. Уз то, стандарди омогућавају одговарајућим стручним институцијама да развијају наставне материјале који ће бити квалитетна подршка наставнику и ученицима у њиховом свакодневном раду. Образовни стандарди су основ за развијање инструмената који служе самовредновању рада школа, наставника и ученика. Стандарди ће помоћи наставницима да јасније сагледају хијерархију образовних циљева и задатака и да усмере напоре ка налажењу оних наставних облика, метода и средстава који у највећој мери доприносе њиховом остваривању. Стандарди ће омогућити ученицима увид у то шта се од њих очекује, шта треба да науче и како ће се њихово учење проверавати, што ће им помоћи да усмере додатну пажњу и напоре на суштинске делове градива. Ученици ће моћи да преузму већу одговорност за сопствено учење када знају шта се од њих очекује и које стандарде треба да остваре. Такође, њима се унапређује комуникација између школе и родитеља који сада тачно знају шта могу да очекују од школе у погледу образовања деце и могу активно да помогну у раду школе. Образовни стандарди представљају, прво, опис пројектованих и очекиваних домета образовног система у одређеној фази или етапи образовања, и друго, јасан и усаглашен инструмент за праћење и вредновање његове ефикасности. Применом стандарда можемо да добијемо податке о томе да ли мере које су предузете у образовном систему дају очекиване ефекте. Примена таквог система вредновања допринеће квалитетнијем планирању у области образовања и доношењу одлука које су засноване на емпиријски добијеним подацима.

III. ФУНКЦИЈЕ И ЊИХОВА ГРАФИЧКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА

3.1.Историјски осврт

График функције се, у основној и средњој школи, представља Декартовим координантним системом. Декартов координанти систем се користи у математици за једнозначно дефинисање положаја тачака у простору. Карактеристика овог система је да су његове координатне осе међусобно нормалне. Декартов координатни систем је измислио француски математичар и филозоф Рене Декарт, који је, између осталих ствари, покушавао да споји алгебру и Еуклидску геометрију. Овај његов рад је много утицао на развој аналитичке геометрије, рачуна и картографије.



Слика 1: Декартов координатни систем

Идеја о Декартовом координантном систему је развијена 1637. године у два Декартова дела. У другом делу свог Метода предавања, Декарт је увео нову идеју одређивања положаја тачке или предмета на површини, користећи две нормалне осе као помагало за мерење. У Геометрији, Декарт је даље објаснио горе споменути концепт. Дводимензиони координатни систем се користи да једнозначно одреди сваку тачку у равни помоћу два броја, који се обично означавају са $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, дакле Декартов координатни систем је дефинисан са две осе (x-оса или апциса и y-оса или ордината). Коришћењем Декартовог координатног система геометријске фигуре (као што су криве) се могу исказати алгебарским једначинама, тј. једначинама које задовољавају координате на тачкама које леже на фигури (на пример, круг полупречника 2 се може приказати формулом $x^2 + y^2 = 4$).

Декартов координатни систем се може користити у простору (где се користе три координате: x, y и z) и у вишедимензионалним системима.

Рене Декарт (лат. *Renatus des Cartes*, фр. *René Descartes*) био је математичар, филозоф и научник чије је дело „Геометрија“ (*La geometrie*) поставило основе данашњој аналитичкој геометрији. Зачетник је нововековног филозофског правца рационализма, а често се каже да се у његовом делу могу наћи и неке од првих емпиристичких теза.

Слика 2: Рене Декарт

Рођен је 31. марта 1596. године у Ла Еју (*La Haue*, данас *La Haue Descartes*) у Француској. Образовање је стекао у Ањону уписавши Језуитску школу у Ла Флешу са само осам година (1604). Ту је провео осам година учећи логику, математику и традиционалну Аристотелову филозофију. Једини предмет којим је био задовољан била је математика. Ово сазнање не само што је утицало на његов начин размишљања, већ и на његов целокупни рад. По завршетку школе преселио се у Париз и после неког времена уписао је Универзитет у Пуатијеу (*Poitiers*). Дипломиравши права 1616. године, пријавио се за војну школу у Бредау (*Breda*). 1618. године почео је да учи математику и механику код холандског научника Исака Бекмана (*Isaac Beeckman*), спознајући јединство природних наука. После две године проведене у Холандији, путовао је по Европи, да би се 1619. године прикључио Баварској војсци. У периоду од 1620. до 1628. године Декарт је путовао по Европи, боравећи у Чешкој (1620), Мађарској (1621), Немачкој, Холандији и Француској (1622 – 1623). У Паризу је 1623. упознао Марена Мерсена (*Marina Mersenne*) који му је постао доживотни пријатељ и веза с многим тадашњим ученим људима. Из Париза је отпутовао у Италију, где је неко време боравио у Венецији, да би се поново 1625. године вратио у Француску. Декарт се временом уморио од силних путовања и одлучио да се скраси. Дуго је бирао земљу која би одговарала његовој природи и на крају се одлучио за Холандију. Ту је живео током следећих двадесет година. Непосредно после настањења у Холандији, Декарт је почео да ради на својој првој великој тези у области физике, под називом „Свет“ (*Le Monde,* *ou Traité de la Lumiere*). При завршетку овог рада до њега је стигла вест да је Галилеј осуђен на кућни затвор. Декарт је одлучио да не ризикује објављујући свој рад, тако да је Свет објављен само делимично после његове смрти. У Холандији је Декарт имао много пријатеља међу научницима. И даље је одржавао пријатељство са Бекманом и Мерсеном. Контактирао је и са многим другим научницима и мислиоцима свога времена. Године 1649. шведска краљица Кристина убедила је Декарта да дође у Стокхолм. Двадесеттрогодишња краљица је желела да је Декарт подучава филозофији у пет сати ујутро, због њених државничких дужности само је тада имала времена. Желећи да својим саветима утиче на ћудљиву владарку тада моћне земље како би тиме учинио нешто за мир у свету, Декарт је подносио сурове услове у земљи стена и глечера. После само неколико месеци проведених на хладној северној клими, ходајући свако јутро до палате, Декарт је умро 11. фебруара 1650. године од запаљења плућа, у педесет и четвртој години.

Далеко најзначајнији део његове тезе била је Геометрија. То је био први корак ка стварању појма инваријантности и у том делу Декарт представља аналитичку геометрију као метод помоћу кога се геометријске фигуре приказују помоћу алгебарских једначина. Тиме је Декарт алгебру довео у везу са геометријом. Алгебра је у његовом приказу омогућила препознавање типичних геометријских проблема и довела у везу неке проблеме који са геометријске тачке гледишта немају ништа заједничко. Такође, алгебра је у геометрију увела најприродније пропорције и хијерархије метода. Не само да су се геометријски проблеми решавали елегантно, брзо и потпуно, него се без одговарајуће алгебре ти проблеми и не би могли решити. Декарт је у овом делу увео и познате конвенције за означавање константи са a, b, c... затим променљивих са x, y, z... и степених функција са експонентима какве данас познајемо x^2, x^3, метод за изолацију корена познатији као Декартово правило знакова, и тако даље. Неке идеје у Геометрији су можда потекле или су биле под утицајем ранијих радова појединих математичара, али нико до Декарта није повезао алгебру и геометрију.

3.2. Тематске целине у којима се примењује графички приказ

У средњој школи график функције се обрађује у следећим наставним темама: аналитичка геометрија у равни, функције, тригонометријске функције, квадратна једначина и квадратна функција, експоненцијална и логаритамска функција, извод функције. Поред ових тематских целина које се раде у средњој школи, постоје и неке које се обрађују у основној, а оне су: линеарна функција и њен график, графичко представљање статистичких података.

Линеарна функција и њен график. – Објаснити појам линеарне функције не уводећи општи појам функције. Детаљно обрадити линеарну функцију и њена својства и научити ученике да цртају графике и читају њихова својства.

Графичко представљање статистичких података. – За примере статистичких података наведених у садржају програма бирати податке које ученици овог узраста разумеју и који за њих имају релевантно значење: школске оцене и просеци, резултати медицинских мерења и сличне податке из свакодневног живота.

Аналитичка геометрија у равни. – Основни циљ у реализацији ове теме јесте да ученици схвате суштину координатног метода и његову ефикасну примену. Посебно, на основу својстава праве и кривих линија другог реда, ученици треба да умеју да формирају њихове једначине и испитују међусобне односе тих линија. Указати и на примену аналитичког апарата при решавању одређених задатака из геометрије. У оквиру ове теме ученици треба да продубе и прошире знање о системима линеарних једначина, упознају системе линеарних неједначина са две непознате и упознају суштину проблема линеарног програмирања. Ови садржаји пружају могућност за повезивање раније стечених знања о једначинама, неједначинама и неким геометријским појмовима.

Функције. – Овде треба допунити и систематизовати ученичка знања о функцији и њеним основним својствима, а затим направити преглед елементарних функција. Упознавање граничне вредности и непрекидности функције треба да буде на основу интуитивног приступа тим појмовима. Није потребно дуже задржавање на техници одређивања граничне вредности разних функција, већ акценат треба да буде на неколико карактеристичних лимеса.

Извод функције. – Прво ученике треба упознати са појмовима прираштаја независно промењиве и прираштаја функције и, полазећи од појма средње брзине и проблема тангенте на криву, формирати појам количника прираштаја функције и прираштаја независно промењиве, а затим дефинисати извод функције као граничну вредност тог количника када прираштај независно промењиве тежи нули. Указати на основне теореме о изводу и изводе неких елементарних функција. Уз појам диференцијала и његово геометријско значење треба указати и на његову примену код апроксимације функција. Посветити пажњу испитивању функција и цртању њихових графика, користећи извод функције (не узимајући сувише компликоване примере).

Квадратна једначина и квадратна функција. – Садржаји ове теме значајни су са становишта систематског изграђивања алгебре и практичних примена. Треба решавати и једначине са непознатом у имениоцу разломка, које се своде на квадратне једначине, као и једноставније једначине са параметрима. Потребну пажњу ваља посветити примени квадратних једначина и неједначина у решавању разноврсних, а једноставнијих проблема. Неопходно је да ученици добро науче да скицирају и „читају“ график квадратне функције. При испитивању квадратне функције у већој мери треба користити управо њен график (његову скицу), не инсистирајући много на одређеној „шеми испитивања функције“ у којој цртање графика долази тек на крају. Квадратне неједначине треба решавати користећи знања о знаку квадратног тринома, као и знања о решавању линеарних неједначина. Решавати само простије ирационалне једначине.

Експоненцијална и логаритамска функција. – Приликом обраде ових функција, за уочавање њихових својстава користити првенствено графичке интерпретације. На једноставним примерима упознати одређивање логаритама без таблица (у циљу продубљивања појма логаритма). Логаритмовање обрадити у мери неопходној за практичне примене (уз коришћење логаритамских таблица и џепних рачунара).

Тригонометријске функције. – При дефинисању и уочавању својстава тригонометријских функција ма ког угла у тзв. свођењу на први квадрант треба користити тригонометријску кружницу, као и симетрију (осну и централну). Упоредо са одређивањем вредности тригонометријских функција, треба решавати и тригонометријске једначине облика: $sinax = b$, $cosax = b$, $tg\ ax = b$. Ученици треба да схвате да се многи научни и технички проблеми моделују тригонометријским функцијама, па је зато неопходно настојати да упознају основна својства ових функција, а првенствено да умеју скицирати и „читати“ њихове графике. Посебну целину у тригонометријским садржајима представљају адиционе теореме и њихове последице. Оне су значајне не само за одређене идентичне трансформације у самој тригонометрији, већ и за примене у неким другим предметима. Зато овој целини треба посветити велику пажњу и градиво добро увежбати. Упознавањем синусне и косинусне теореме ученици треба да схвате да се проширују могућности примене тригонометрије на решавање ма којег троугла, као и на решавање разних проблема из метричке геометрије, физике и посебно техничке праксе.

3.3. Појам функције

Функције су моћне алатке којима се могу представити велики број реалних проблема у реалном свету. Читав свет се састоји из безброј функција. У ствари, функција је неки процес где се нешто одвија. Изучавање функција доводи до сталног проучавања промена. Многе величине у природи и у животу су зависне од других величина. Цена неког производа расте пропорционално са повећањем његове масе. Запремина коцке и површина квадрата зависе од дужине странице. Обим круга зависи од полупречника, цена дијаманта од његове тежине, чистоће, манама, брушењу, успех на испиту од уложеног труда, наставни материјали од склоности према предмету. Пример када се две величине мењају, а трећа је константна, је пример вожње константном брзином, број пређених километара зависи од времена. Дакле, не постоји ни једна теорема у математици, која се не може применити у стварном животу.

Функцијско размишљање утиче на математичко образовање и омогућава боље разумевање других наставних садржаја и добра је припрема ученика за будућа математичка знања и примене математике.

Савремена математика скоро у свим својим дисциплинама користи функције. Сви математички модели су засновани на постављању веза између елемената неких скупова, тј. на функцијама. Теорија група је у основи теорија група трансформација (бијективних функција). Линеарна алгебра је теорија линеарних функција.

Математичка анализа је теорија непрекидних функција. Диференцијалне једначине описују функције у науци и техници. Теорија рекурзија описује функције на дискретним структурама и има значајне примене у програмирању. Због свега тога је изучавање функција на свим образовним нивоима један од најважнијих сегмената у настави математике.

У класичној настави математике, при изучавању функција се користе визуелна средства, а графичко приказивање функција се користи као алат који успоставља везу између реалног и идеалног света. Коришћењем великог броја алата који графички представљају објекте, од ученика се очекује да схвате суштину веза између величина.

Некада су ученици у основним школама савладавали појам функције интуитивно, без строгих математичких дефиниција. Тај начин учења је био примерен узрасту и олакшавао им је каснији сусрет са строгом математичком дефиницијом функције. Велики недостатак је и ретко објашњавана теорија скупова, која би им олакшала разумевање математичке дефиниције скупова. Функције се уводе у 7. разреду и то помоћу записа линеарне функције који се одмах повезује са правцем. Ретко ко од ђака када дођу у средњу школу знају шта је заправо функција. У алгебри, а посебно у теорији алгебарских структура, уобичајено је да се појам функције уводи помоћу појмова: релација и пресликавање.

Ако су X и Y два непразна скупа, тада се за сваки подскуп ρ скупа $X \times Y$ каже да је релација ρ у скупу $X \times Y$. Дакле, свака релација ρ у скупу $X \times Y$ је скуп извесних уређених парова (x, y), таквих да је $x \in X$ и $y \in Y$, тј. увек је $(x, y) \in X \times Y$, али су само неки $(x, y) \in \rho$. (*Миловановић*, *Ђорђевић*, 2005).

Све релације које ћемо овде разматрати односе се на скупове $X \times Y$, где су X и Y подскупови скупа реалних бројева $\mathbb{R}$. При томе, ако су непразни скупови X и Y $(X, Y \subset \mathbb{R})$ посматраћемо само оне релације $\rho \subset X \times Y$ које имају особину да за сваки елемент $x \in X$ постоји само један елемент $y \in Y$ такав да $(x, y) \in \rho$. За сваку такву релацију ρ говорићемо да је пресликавање или функција са скупа X у скуп Y, а уместо $(x, y) \in \rho$ уобичајено је да се та чињеница означава са $y = \rho(x)$. Штавише, уместо ρ најчешће се користи ознака f.

Исто тако, чињеницу да је нека релација $f \subset X \times Y$ пресликавање, тј. функција, означаваћемо са $f: X \to Y$ или са $X \xrightarrow{f} Y$, говорећи да се елемент x пресликава у елемент $y = f(x) \in Y$. То ћемо симболизовати и са $x \to y = f(x)$ или краће $x \to f(x)$.

Елемент x зовемо *оригинал*, док за елемент $y = f(x)$ користимо термин *слика елемента* x при пресликавању f или *вредност функције* у тачки x. У случају када x представља произвољан елемент из X кажемо да је x *аргумент* или *независно промењива*, а y $(= f(x))$ *зависно промењива*. (*Миловановић*, *Ђорђевић*, 2005).

Скуп слика свих елемената $x \in X$ обележавамо са $f(X)$. Очигледно је да је $f(X) \subseteq Y$.

Скуп X који пресликавамо зовемо *област дефинисаности* или *домен* функције f а скуп слика $f(X)$ називамо *скуп вредности* или *кодомен* функције f. Понекад се област дефинисаности функције f означава са $D(f)$, а скуп њених вредности са $R(F)$.

На основу претходног можемо дати формалну дефиницију функције (*Миловановић, Ђорђевић*, 2005):

Дефиниција 3.3.1. За релацију $f \subset X \times Y$ кажемо да је функција $f\colon X \to Y$ ако:

1. $(\forall x \in X)\,(\exists y \in Y)\;\;(x, y) \in f$,

2. $(x, y) \in f \;\wedge\; (x, z) \in f \;\;\Rightarrow\;\; y = z$.

Особина 1. позната је под именом *дефинисаност*, а особина 2. *једнозначност*.

Напомена 3.3.1. Ако је $c \in Y$, тада за пресликавање $f\colon X \to Y$, дефинисано помоћу $f(x) = c$ за свако $x \in X$, кажемо да је *константно пресликавање*. Такође, каже се и да је функција f константа.

Ако је $Y = X$ тада се пресликавање $f\colon X \to X$, дефинисано помоћу $f(x) = x$ за свако $x \in X$, назива *идентичко пресликавање* у X.

Дефиниција 3.3.2. За две функције $f\colon X \to Y$ и $g\colon U \to V$ кажемо да су једнаке ако је $X = U$ и $Y = V$ и ако је:

$$(\forall x \in X)\quad f(x) = g(x).$$

Ако је, међутим, $X \subset U$ и ако важи $(\forall x \in X)\;\; f(x) = g(x)$, рећиђемо да је f *сужење* или *рестрикција* функције g (са скупа U на скуп X), тј. да је g *проширење* или *екстензија* функције f (са скупа X на скуп U).

Скуп $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ назива се ***график*** функције f. Ако су $X \subset \mathbb{R}$ и $f(X) \subset \mathbb{R}$, график функције се може представити као скуп тачака у *Декартовој равни* Oxy.

Напомена 3.3.2. Функције $f\colon X \to Y$ са којима се најчешће срећемо су реалне, тј. такве да је $Y = \mathbb{R}$, а $X \subset \mathbb{R}^n$, где је $n \geq 1$. Када је $n = 1$ имамо случај реалних функција једне реалне променљиве. Случај $n > 1$ доводи нас до тзв. реалних функција више променљивих, тачније реалних функција n променљивих. Дакле, уређеној n-торки $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ придружује се вредност $y = f((x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}$, при чему пишемо једноставно $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Код пресликавања $f: X \to Y$ разликоваћемо следећа два могућа случаја (*Миловановић*, *Ђорђевић*, 2005):

1. $f(X) = Y$, и
2. $f(X) \subset Y$.

У првом случају кажемо да је скуп X пресликан **на** скуп Y, а у другом да је скуп X пресликан **у** скуп Y. Постоје, дакле, са тог становишта две врсте пресликавања: пресликавање на скуп и пресликавањ у скуп. За *пресликавање на скуп* каже се да је *сурјекција* или *сурјективно пресликавање* („*НА*“ пресликавање).

Ако је пресликавање $f: X \to Y$ такво да из једнакости $f(x_1) = f(x_2)$ следује $x_1 = x_2$, каже се да је f *ињекција* или *ињективно пресликавање*. Према томе, код овог пресликавања, уколико су слике једнаке морају бити једнаки и оригинали. За ово пресликавање користимо и термин пресликавање „*1-1*“.

За свако пресликавање које је истовремено сурјекција и ињекција (односно „*1-1*“ и „*НА*“) каже се да је *бијекција* или *бијективно пресликавање*. Такође, за такво пресликавање кажемо да је *биунивоко* или *обострано једнозначно пресликавање*.

У ствари, сложена функција $h = g \circ f$ пресликава елементе x скупа X у елементе $z = h(x)$ скупа Z посредно, помоћу функција f и g, на следећи начин: прво елементе x скупа X функцијом f пресликава у елементе $y = f(x)$ скупа Y, а затим тако добијене елементе $y = f(x) \in Y$ функцијом g пресликава у елементе $z = g(y) = g(f(x))$ скупа Z.

Пресликавања f и g су, у ствари, међупресликавања. Наравно, једно сложено пресликавање може бити реализовано и са више међупресликавања.

Понекад се каже да сва та међупресликавања чине ланац пресликавања, а она сама су карике ланца. Ако су сва међупресликавања једног сложеног пресликавања биунивока пресликавања, тада је и сложено пресликавање биунивоко.

Теорема 3.3.1. Нека су X, Y, Z, W непразни скупови и нека $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$, тј. $X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z \overset{h}{\to} Z$. Тада је:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Теорема 3.3.2. Нека је $f: X \to Y$ биунивоко пресликавање. Тада постоји једно и само једно биунивоко пресликавање $\bar{f}: Y \to X$, за које важи:

1. $(\forall x \in X) \qquad \bar{f} \circ f(x) = x,$

2. $(\forall y \in Y) \qquad f \circ \bar{f}(y) = y.$

Приметимо да услови 1. и 2. показују да су композиције $\bar{f} \circ f$ и $f \circ \bar{f}$ идентичка пресликавања у X и Y, респективно.

На основу претходног могуће је дати дефиницију ***инверзне*** функције (*Миловановић, Ђорђевић*, 2005):

Дефиниција 3.3.3. Нека је $f: X \to Y$ биунивоко пресликавање. За пресликавање $f^{-1}: Y \to X$, за које је $f^{-1} \circ f$ идентичко пресликавање у X и $f \circ f^{-1}$ идентичко пресликавање у Y, кажемо да је инверзно пресликавање за f.

Дакле, пресликавања $f: X \to Y$ и $f^{-1}: Y \to X$ су биунивока и за њих важи:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad f\left(f^{-1}(y)\right) = y \quad (x \in X,\ y \in Y).$$

Дефиниција 3.3.4. За функцију $f: X \to \mathbb{R}$ кажемо да има инфимум (супремум) ако постоји инфимум (супремум) скупа $f(X)$.

Ако функцију f третирамо као пресликавање у проширени скуп реалних бројева $\overline{\mathbb{R}}(= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$, тада инфимум и супремум у $\overline{\mathbb{R}}$ увек постоје тако да имамо:

$$m = \inf_{x \in X} f(x) = \inf f(X),$$

$$M = \sup_{x \in X} f(x) = \sup f(X).$$

За бројеве m и M користе се и термини доња и горња међа функције на X. Ако је м коначан број, за функцију f кажемо да је ограничена одоздо. Исто тако, ако је M коначан број, кажемо да је функција f ограничена одозго.

Ако у X постоји тачка ξ таква да је $f(\xi) = m$, тада кажемо да је m минимум функције f на X. Слично се дефинише максимум функције на X.

Дефиниција 3.3.5. За функцију $f: X \to \mathbb{R}$ $(X \subset \mathbb{R})$ кажемо да је ограничена ако је скуп вредности функције $\mathcal{R}(f)$ ограничен скуп. За функцију која није ограничена, кажемо да је неограничена.

Другим речима, функција f је ограничена на X ако је

$$-\infty < \inf_{x \in X} f(x) \leq \sup_{x \in X} f(x) < +\infty$$

а неограничена ако је:

$$\inf_{x \in X} f(x) = -\infty$$

и / или

$$\sup_{x \in X} f(x) = +\infty$$

Дефиниција 3.3.6. Нека је функција $x \to f(x)$ ограничена на X. За број

$$\Omega(f) = M - m = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)$$

кажемо да је *осцилација функције* f на X.

3.3.1. Начини задавања функције

Имамо три основна начина задавања функције, тј. описивања функцијских зависности: таблично, графички и формулом (аналитичким изразом). Свакако, сваки од тих начина има својих предности и мана. Предност табличног задавања или описивања функције је да је понекад то једини начин задавања, а мана је да не знамо вредности функције изван области података таблице и између вредности у којима је позната функција. Ако имамо графички задату функцију, онда су предности верност, компактност, прегледност, док су мане нетачност очитавања и немогућност коришћења вредности изван цртаног подручја. За функцију задату формулом предност је да знамо све о функцији, док је мана нетривијалност долажења до тих информација. Прелажење из једног облика у други је могуће, али у неким случајевима је то врло тешко.

3.3.1.1. *Таблични начин*

Овај начин представљања често користимо у природним и техничким наукама, у експерименталним истраживањима и слично. Свуда око нас постоје величине које су зависне једна од друге, тј. неким вредностима аргумената x_1, x_2, …, x_n придружујемо зависно промењиве y_1, y_2, …, y_n и изражавамо их преко разних таблица:

x	x_1	x_2	…	x_n
$y = f(x)$	y_1	y_2	…	y_n

3.3.1.2. *Аналитички начин*

Аналитички начин задавања функције састоји се у томе да закон пресликавања f представимо математичким изразом или формулом. Домен функције задате у аналитичком облику одређујемо из самог израза, односно проналазимо скуп свих могућих решења за које израз има смисла. Постоје три основна облика аналитичког приказа:

1. експлицитни облик $y = f(x)$,
2. имплицитни облик $f(x, y) = 0$,
3. параметарски облик $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$.

3.3.1.3. *Графички начин*

Функције се верно приказују графиком. Проблем је у томе што је графички приказ функције ученицима тешко разумљив.

Графички начин представљања функције састоји се из геометријске презентације једне функције у координатном систему, где сваки уређени пар бројева $\left(x,\ f(x)\right)$, где је x – аргумент, а $f(x)$ – зависно промењива функција, замишљамо као пар координата тачке у координатном систему у равни. Скуп свих таквих тачака у равни xOy чије су апцисе вредности аргумената x, а ординате одговарајуће вредности функције $f(x)$, зовемо график функције:

$$G_f = \left(x, f(x)\right): \ x \in \mathrm{X}$$

График на видан начин приказује понашање функције, тј. њену монотоност, максималну и минималну вредност, вредности аргумента, нуле функције, односно све особине које су саставни део функције.

Ученик би требало да зна да израчуна тачке и сам схвати како се црта график. График је добро цртати класичним методама – креда, плоча, израчунавање тачака. Међутим, данас је све то могуће урадити помоћу програма за цртање графика на рачунару.[1] Могуће је помоћу њих манипулисати функцијама, њеним својствима, нулама, екстремима…

Графички приказ можемо користити као помоћ у решавању многобројних типова задатака, а не само оних у којима се тражи да се нацрта график функције. Решавање једначина и неједначина, одређивање највеће или најмање вредности на неком интервалу, тражење нула, уочавање слике функције, одређивање геометријског места тачака које задовољавају неко својство и још пуно тога. У свим таквим задацима график нам помаже при решавању задатака.

3.4. Појам графика функције

Дефиниција 3.4.1. Нека је X ($\subset \mathbb{R}$) област дефинисаности функције $f\colon X \to \mathbb{R}$, тада се скуп:

$$\Gamma(f) \ = \ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x), x \in X\}$$

зове ***график функције*** f и он се може представити као скуп тачака у равни Oxy. (*Миловановић*, *Ђорђевић*, 2005).

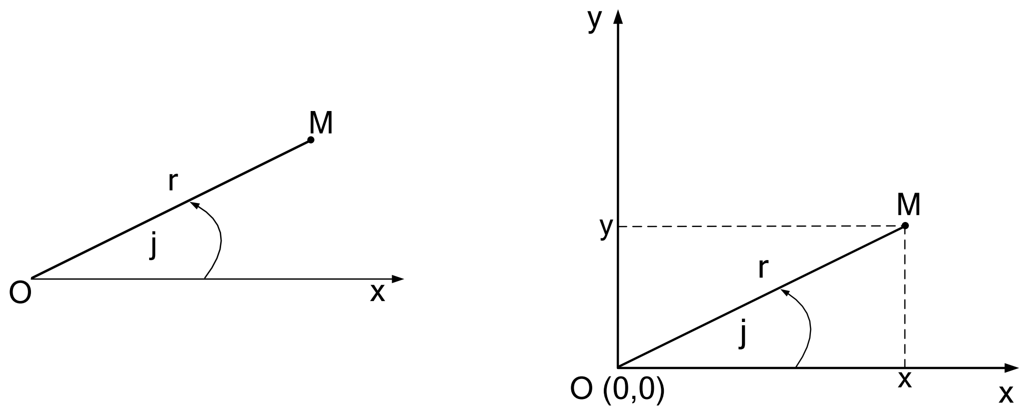
[1] У раду ће бити интерпретиран један научно истраживачки рад у оквиру студије случаја, где се ученици служе графичким калкулаторима за решавање задатака из графичког приказа функције (Source: *Journal for Research in Mathematics Education*).

Тај скуп тачака геометријски у неким деловима (или у целости) може представљати линију и/или неки скуп изолованих тачака. Када је у питању линија, за график функције f кажемо да представља криву $y = f(x)$.

Уместо правоуглог координатног система, за представљање графика функције може се користити и неки други координатни систем, на пример, поларни координатни систем,[2] који ћемо увести на следећи начин. У равни R изаберимо тачку O и полуосу Ox за које кажемо да су пол и поларна оса. Произвољна тачка M у равни R може се потпуно описати помоћу растојања ρ између тачака O и M и угла φ који заклапа дуж $\overline{OM}$ са поларном осом узет у смеру супротном кретању казаљке на часовнику (видети слику 3.). За бројеве ρ и φ кажемо да су *поларне координате* тачке M у равни R. Број ρ се назива *поларни радијус*, а φ *поларни угао*. Могуће вредности поларних координата су, дакле,

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Пол O се представља само једном координатом $\rho = 0$. За поларни угао пола O кажемо да није одређен.



Слика 3: Пол и поларна оса

Напомена 3.4.1. За поларни угао φ могу се узети вредности из интервала $(-\pi, +\pi]$. Ако на поларну осу Ox у равни R поставимо под правим углом осу Oy, добијамо Декартов правоугли координатни систем у равни R. Веза између поларних координата (ρ, φ) и правоуглих (x, y) дата је са:

[2] Поларни координатни систем не обрађује се у основној ни у средњој школи па ће овде бити само поменут.

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi$$

односно:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\rho}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\rho}\ .$$

Како је $\rho \geq 0$, у поларном координатном систему има смисла посматрати само функције $\varphi \to \rho = f(\varphi)$, где је $f(\varphi) \geq 0$.

3.5. Испитивање тока функције и цртање графика

Функције могу имати извесне особине које их карактеришу у читавој њиховој области дефинисаности или само у неким деловима те области. То су, на пример, парност, периодичност, монотоност, конвексност, непрекидност и диференцијабилност на сегменту. Те особине су опште особине функција. Поред ових општих постоје и тзв. локалне особине функција, тј. особине које функције имају у појединим тачкама својих области дефинисаности. Те тачке су, на пример: изоловане тачке, тачке прекида функције или тачке у којима функција није диференцијабилна. Међутим, у области дефинисаности функција има и других тачака у којима се „нешто дешава“ у односу на посматране функције. Оне су, на известан начин, особене за те функције и за њих кажемо да су карактеристичне тачке тих функција.

Испитивање тока функције $y = f(x)$ подразумева да се аналитичким путем дође до сазнања о понашању функције, као и њеним значајним тачкама у координантном систему, те да се на основу добијених резултата нацрта график те функције. Да би испитали ток фунције и нацртали њен график график, потребно је испитати следеће:

1. домен функције, односно област дефинисаности;
2. нуле функције;
3. знак функције;
4. парност функције;
5. периодичност;
6. први извод функције;
7. монотоност;
8. екстремне тачке функције (минимум и максимум);

9. асимптоте;
10. конвексност, конкавност и превојне тачке функције (други извод функције);
11. цртање графика.

3.5.1. Домен (област дефинисаности) функције

Нека је, дакле, дата функција $f: X \to \mathbb{R}$, чија је област дефинисаности (домен) $X \subset \mathbb{R}$.

Дефиниција 3.5.1.1. Област дефинисаности једне реалне функције $f: X \to \mathbb{R}$ може бити било који непразан подскуп од $\mathbb{R}$: интервал (a, b), сегмент $[a, b]$, полусегменти $[a, b)$ и $(a, b]$, уније било којих од ових скупова, укључујући, евентуално, и изоловане тачке. (*Миловановић*, *Ђорђевић*, 2005):

У посебном случају, када је функција f задата „аналитички", тј. формулом, од интереса је наћи тзв. природну област дефинисаности такве функције. То је, у ствари, скуп свих реалних бројева $x \in \mathbb{R}$ за које таква формула има смисла, тј. за које је $f(x) \in \mathbb{R}$. Често се уместо функције $f: X \to \mathbb{R}$ посматра њена рестрикција на неко D $(\subset X)$. Ако не може доћи до забуне, рестрикцију $f^*: D \to \mathbb{R}$ означаваћемо једноставно са $f: D \to \mathbb{R}$.

3.5.2. Нуле функције

Нула функције, уређени скуп параметара за кога је је вредност неке функције једнака нули. Нуле функције су места где график сече x осу, а добијају се као решења једначине $y = \big(= f(x)\big) = 0$.

Многи професори воле да се у оквиру ове тачке нађе и пресек графика са у осом. Њега добијамо када у датој функцији ставимо да је $x = 0$ (наравно, ако је 0 у области дефинисаности) и нађемо вредност за y (то је уствари $f(0)$).

3.5.3. Знак функције

Одређивање знака функције представља одређивање интервала у ком је функција позитивна и интервала у којем је функција негативна.

Где је $y > 0$, односно $f(x) > 0$ ту је функција *позитивна*, а њен график је *изнад* x осе. Где је $y < 0$, односно $f(x) < 0$ ту је функција *негативна*, а њен график је *испод* x осе.

3.5.4. Парност функције

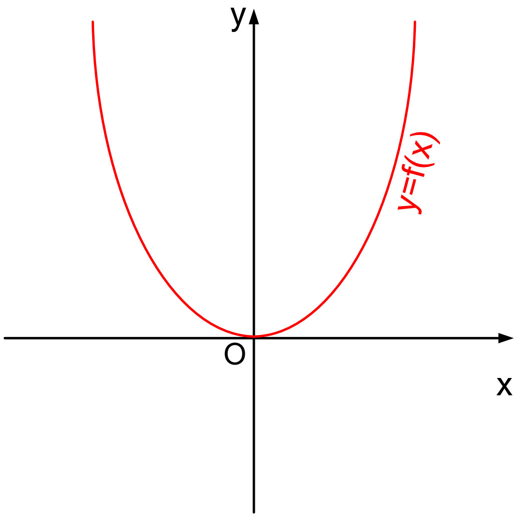
У математици, парне функције и непарне функције су математичке функције које задовољавају одређене релације симетричности. Важне су у математичкој анализи, посебни у теорији степених редова и Фуријеових редова. Назване су по парности степена њихових степених редова који задовољавају сваки од услова: функција x_n је парна функција ако је n паран цео број, а непарна је функција ако је n непаран цео број.

Нека је X ($\subset \mathbb{R}$) такав да ако је $x \in X$ следује да је и $-x \in X$. (*Миловановић, Ђорђевић*, 2005). За такав скуп кажемо да је симетричан скуп. Могућа су следећа три случаја:

1. За свако $x \in X$ важи $f(-x) = f(x)$;
2. За свако $x \in X$ важи $f(-x) = -f(x)$;
3. Не важи ни случај под 1. ни под 2., осим, можда, за неке $x \in X$.

Дефиниција 3.5.4.1. Ако за свако $x \in X$ важи $f(-x) = f(x)$, кажемо да јефункција $x \rightarrow f(x)$ ***парна*** функција (симетрична у односу на y-осу).

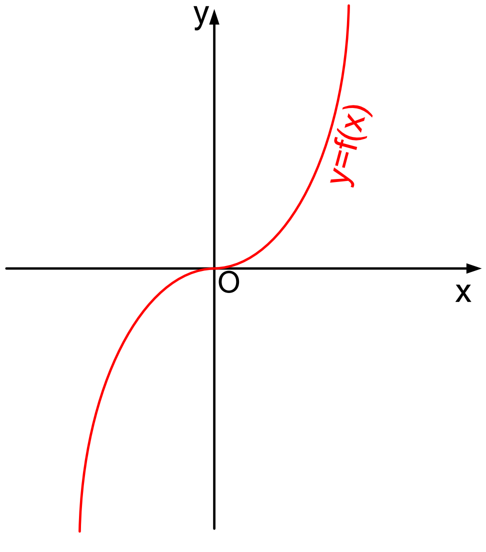
На следећој слици дат је пример једне парне функције.



Слика 4: Парна функција

Дефиниција 3.5.4.2. Ако за свако $x \in X$ важи $f(-x) = -f(x)$, кажемо да је функција $x \to f(x)$ ***непарна*** функција (симетрична у односу на координантни почетак).

На следећој слици дат је пример једне парне функције.



Слика 5: Непарна функција

Теорема 3.5.4.1. Свака функција $x \to f(x)$, дефинисана на симетричном скупу X $(\subset \mathbb{R})$, може се представити као збир једне парне и једне непарне функције.

Доказ. Посматрајмо функције $x \to \varphi(x)$ и $x \to \psi(x)$ $(x \in X)$, одређне са

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) \quad \text{и} \quad \psi(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big).$$

Није тешко проверити да је φ парна, а ψ непарна функција. Међутим, очигледно је $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. ■

Напоменимо да се чињеница да је нека функција парна или непарна може искористити код скицирања њеног графика.

Наиме, како су тачке $M(x, f(x))$ и $N(-x, f(x))$ симетричне у односу на y-осу, закључујемо да је график парне функције $x \to f(x)$ симетричан у односу на осу Oy координатног система Oxy. Што значи да график функције остаје непромењен после рефлексије око y осе.

Исто тако, график непарне функције $x \to f(x)$ је симетричан у односу на координатни почетак O јер су тачке $M(x, f(x))$ и $N(-x, -f(x))$ симетричне у односу на тачку O. Што значи да график функције остаје непромењен после координатне ротације за 180° око координатног почетка.

Основна својства, која се односе на парност (тј. непарност) неке функције, су следећа:

~ Једина функција која је у исто време и парна и непарна је константна функција једнака нули (тј. $f(x) = 0$ за свако x).

~ Збир парне и непарне функције није ни парна ни непарна функција, осим ако једна од те две функције није једнака нули.

~ Збир две парне функције је парна функција, и резултат сваког множења парне функције константом је такође парна функција.

~ Збир две непарне функције је такође непарна функција, и резултат сваког множења непарне функције константом је непарна функција.

~ Производ две парне функције је парна функција.

~ Производ две непарне функције је парна функција.

~ Производ парне и непарне функције је непарна функција.

~ Количник дељења две парне функције је парна функција.

~ Количник дељења две непарне функције је парна функција.

~ Количник дељења парне и непарне функције је непарна функција.

~ Извод парне функције је непарна функција.

- ~ Извод непарне функције је парна функција.
- ~ Композиција две парне функције је парна, а композиција две непарне функције је непарна функција.
- ~ Композиција парне и непарне функције је парна функција.
- ~ Композиција било које функције са парном функцијом је парна функција (али не важи обратно).
- ~ Интеграл непарне функције од $-A$ до $+A$ је нула (где је A коначно, а функција нема вертикалних асимптота између $-A$ и A).
- ~ Интеграл парне функције од $-A$ до $+A$ је двоструко већи од интеграла од 0 до $+A$ (где је A коначно, а функција нема вертикалних асимптота између $-A$ и A).

3.5.5. Периодичност

Посматрајмо функцију $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Дефиниција 3.5.5.1. Ако постоји позитиван број τ такав да је за свако $x \in \mathbb{R}$

$$f(x+\tau) = f(x),$$

кажемо да је функција $x \to f(x)$ периодична функција, а да је τ њен период. Ако је T најмањи од свих таквих бројева τ, кажемо да је T основни период периодичне функције f. (*Миловановић, Ђорђевић*, 2005).

Приметимо да за периодичну функцију f, такође, важи:

$$f(x-\tau) = f(x).$$

Из дефиниције непосредно следује следеће тврђење:

Теорема 3.5.5.1. Ако је T период периодичне функције $x \to f(x)$ и $k \in H$, тада је и kT период функције f.

Теорема 3.5.5.2. Ако је $\lambda \neq 0$ и $x \to f(x)$ периодична функција са основним периодом T, тада је и функција $x \to f(\lambda x)$ периодична са основним периодом $T/|\lambda|$. (*Миловановић, Ђорђевић*, 2005).

Доказ. Дефинишимо функцију φ помоћу $\varphi(x) \ = \ f(\lambda x)$. Тада је:

$$\varphi\left(x+\frac{T}{\lambda}\right)=f\left(\lambda x+T\cdot\frac{\lambda}{|\lambda|}\right)=f(\lambda x+T\cdot sgn\lambda)=f(\lambda x)=\varphi(x).$$

Дакле, основни период функције $x \to f(\lambda x) = f(x)$ је $T/|\lambda|$. ■

3.5.6. Први извод функције

У математичкој анализи, грани математике, извод је мера како (колико брзо) функција мења своје вредности када јој се улазне вредности мењају. Извод криве у некој тачки представља коефицијент правца тангенте дате криве у тој тачки.

Претпоставимо да је функција $x \to f(x)$ дефинисана у околини $U(a)$ тачке $x = a$ и да је непрекидна у тој околини. За величине

$$x-a \qquad \text{и} \qquad f(x)-f(a)$$

кажемо, редом, да су прираштај аргумента и прираштај функције у тачки $x = a$.

Разумљиво, када $x \to a$, величина $x - a$ је бесконачно мала величина, а због претпоставке о непрекидности функције f, бесконачно мала величина је и $f(x) - f(a)$. Као што ћемо видети, интересантно је проучити однос ових двеју бесконачно малих величина. Зато ћемо посматрати граничну вредност количника

$$\frac{(x)-f(a)}{x-a} \qquad \text{када} \qquad x\to a.$$

Дефиниција 3.5.6.1. Ако је функција $x \to f(x)$ непрекидна у околини $U(a)$ и ако постоји коначна гранична вредност количника $\frac{(x)-f(a)}{x-a}$ када $x \to a$, кажемо да функција f има извод у тачки $x = a$, у ознаци $f'(a)$, и пишемо:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Дефиниција 3.5.6.2. Извод функције $f(x)$ у тачки a се дефинише као:

$$f'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

уколико лимес постоји.

Иначе, извод можемо схватити и као линеарни оператор. Поступак проналажења извода функције се назива диференцијацијом. Основна теорема анализе каже да је диференцијација процес обратан у односу на интеграљење.

Изводи су користан алат за испитивање графика функција. Све тачке унутар домена реалних функција које представљају локалне екстремуме имају за први извод нулу.

Како количник $\frac{(x)-f(a)}{x-a}$ представља коефицијент правца сечице S која пролази кроз тачке $A\big(a, f(a)\big)$ и $M\big(x, f(x)\big)$ (видети слику 4.), важи једнакост:

$$\frac{f(x) \ - f(a)}{x - a} \ = tg\varphi \ ,$$

где је φ угао који сечица S заклапа са позитивним смером x-осе. Очигледно, угао φ зависи од положаја тачке М, што значи да зависи од x. С обзиром да $x \to a$, сечица S тежи тангенти T, која у тачки A додирује криву $y = f(x)$, и у граничном случају за угао φ важи једнакост:

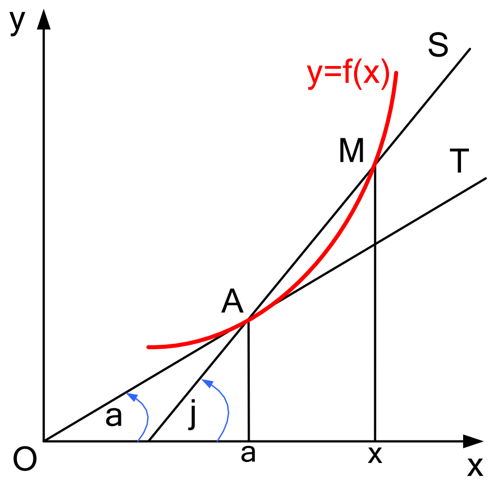
$$\lim_{x \to a} \varphi = \alpha \ ,$$

где је α угао који тангента T заклапа са позитивним делом x-осе. Ово значи да једначина тангенте T гласи:

$$y - f(a) = tg\alpha \cdot (x - a) \ , \qquad \text{тј.} \qquad y - f(a) = \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \cdot (x - a) \ ,$$

или на основу $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \ \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a).$$



Слика 4.

Према томе, геометријски, извод $f'(a)$ представља коефицијент правца тангенте T на криву $y = f(x)$ у тачки $A(a, f(a))$.

Приметимо да, ако је $f'(a) \neq 0$, права:

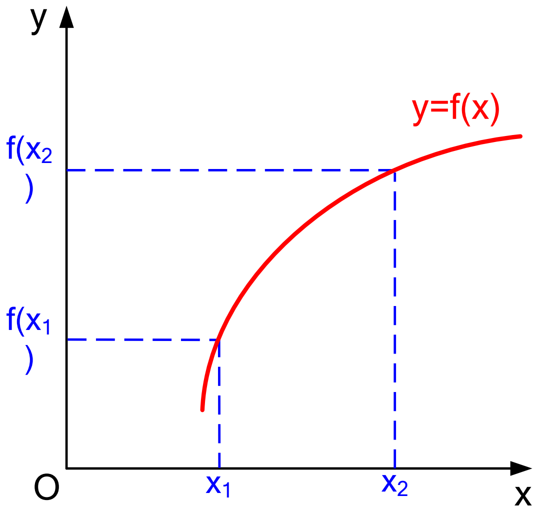
$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

такође пролази кроз тачку $A(a, f(a))$ и са тангентом $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ заклапа прав угао. За праву $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ кажемо да је нормала на криву $y = f(x)$ у тачки $A(a, f(a))$.

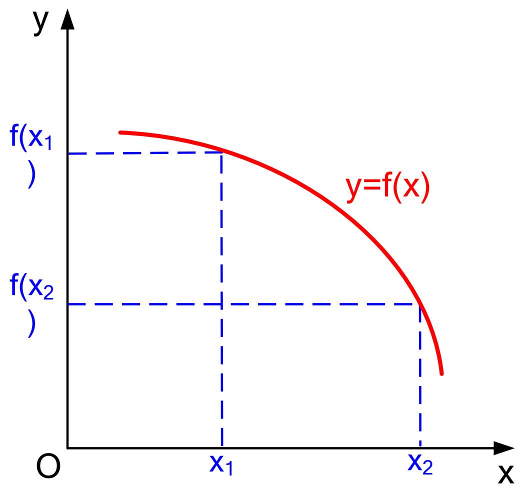
3.5.7. Монотоност

Монотоност функције у математици означава њено својство да јој се са порастом вредности аргумента вредности нижу од већих ка мањим или од мањих ка већим. Графички представљено, ово даје линију која изгледа као узлазна или силазна линија, а функција са овим својством се зове монотона функција. Вредности не морају бити стриктно узлазне, тј. дозвољена је појава више једнаких врености. У том случају, функција би била монотно нерастућа или монотоно неопадајућа. Уколико до овога не долази, ради се о монотоно опадајућој или монотоно растућој функцији.

Дефиниција 3.5.7.1. Нека је на интервалу (a, b) дефинисана функција $y = f(x)$. Ако за било које $x_1, x_2 \in (a, b)$ из пртпоставке да је $x_1 < x_2$ следи да је $f(x_1) < f(x_2)$ онда кажемо да је функција $y = f(x)$ *монотоно растућа*. Ако из исте претпоставке да је $x_1 < x_2$ следи да је $f\ (x_1) > f\ (x_2)$ онда кажемо да је функција $y = f(x)$ *монотоно опадајућа*. (*Миловановић*, *Ђорђевић*, 2005).



монотоно растућа функција



монотоно опадајућа функција

Слика 5: Монотоност функција

Нека је дата функција $f: X \to \mathbb{R}$ и нека је $D \subset X \subset \mathbb{R}$.

Дефиниција 3.5.7.2. Функција f је неопадајућа на D ако за сваки пар различитих вредности $x_1, x_2 \in D$ важи импликација: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. У случају строге неједнакости кажемо да је f растућа функција на D.

Дефиниција 3.5.7.3. Функција f је нерастућа на D ако за сваки пар различитих вредности $x_1, x_2 \in D$ важи импликација: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. У случају строге неједнакости кажемо да је f опадајућа функција на D.

Напоменимо да импликацијама у претходним дефиницијама одговарају неједнакости:

$$(x_1 - x_2) \cdot \big(f(x_1) - f(x_2)\big) \geq 0 \qquad \text{и} \qquad (x_1 - x_2) \cdot \big(f(x_1) - f(x_2)\big) \leq 0.$$

Дефиниција 3.5.7.4. За функције одређене дефиницијама *3.5.7.2.* и *3.5.7.3.* кажемо да су *монотоне функције* на D.

Из ових дефиниција, непосредно, следе следећа тврђења (*Миловановић, Ђорђевић*, 2005):

Теорема 3.5.7.1. Ако је функција $x \to f(x)$ неопадајућа, растућа, нерастућа или опадајућа на D, тада је функција $x \to -f(x)$, респективно, нерастућа, опадајућа, неопадјућа или растућа на D.

Теорема 3.5.7.2. Ако су функције $x \to f(x)$ и $x \to g(x)$ неопадајуће на D, таква је и функција $x \to f(x) + g(x)$.

Теорема 3.5.7.3. Ако је $x \to f(x)$ неопадајућа на D и ако је $\alpha > 0$, тада је и функција $x \to \alpha \cdot f(x)$ неопадајућа на D.

Теорема 3.5.7.4. Ако су $x \to f(x)$ и $x \to g(x)$ ненегативне опадајуће функције на D, таква је и функција $x \to f(x) \cdot g(x)$.

Теорема 3.5.7.5. Ако је $x \to f(x)$ позитивна и неопадајућа функција на D, тада је функција

$$x \to \frac{1}{f(x)}$$

нерастућа на D.

Теорема 3.5.7.6. Диференцијабилна функција $x \to f(x)$ је неопадајућа у интервалу (a, b) ако и само ако за свако $x \in (a, b)$ важи неједнакост $f'(x) \geq 0$, а нерастућа је само ако је $f'(x) \leq 0$ за свако $x \in (a, b)$.

Доказ. Нека је $f(x)$ неопадајућа функција у интервалу (a, b). Ако је x_0 било која тачка из (a, b) и $\Delta x > 0$. Тада је $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$, одакле закључујемо да је и $\Delta y / \Delta x \geq 0$, тј. важи

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \geq 0.$$

Претпоставимо сада да је $f'(x) \geq 0$ за свако x из интервала (a, b). Ако су x_1 и x_2 произвољне тачке из (a, b) за које је $x_1 < x_2$, тј. $x_1 - x_2 < 0$ тада на основу Лагрангеове формуле важи једнакост:

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi) \cdot (x_1 - x_2) \qquad (x_1 < \xi < x_2),$$

одакле, због $x_2 - x_1 > 0$ и $f'(x) \geq 0$, следује неједнакост

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \qquad (a < x_1 < x_2 < b).$$

Функција f је, према томе, неопадајућа у интервалу (a, b). На сличан начин доказује се и други део тврђења теореме. ■

Напомена 3.5.7.1. *Теорема 3.5.7.6.* важи и у случају када је f непрекидна функција која само у коначном броју тачака интервала (a, b) није диференцијабилна.

Теорема 3.5.7.7. Ако за свако $x \in (a, b)$ важи неједнакост $f'(x) > 0$, диференцијабилна функција $x \to f(x)$ је растућа у интервалу (a, b). Ако је, међутим, $f'(x) < 0$, функција је опадајућа у интервалу (a, b). (*Миловановић*, *Ђорђевић*, 2005).

Теорема 3.5.7.8. Нека је $x \to f(x)$ $(a < x < b)$ диференцијабилна функција и нека је $\alpha \in (a, b)$. Ако је $f'(\alpha) > 0$, тада постоји околина $U(\alpha, \delta)$ у којој је функција f растућа. Ако је $f'(\alpha) < 0$, тада постоји околина $U(\alpha, \delta)$ у којој је функција f опадајућа. (*Миловановић*, *Ђорђевић*, 2005).

Због тога се често каже да ако је $f'(\alpha) > 0$ да функција f расте у тачки $x = \alpha$. Исто тако, ако је $f'(\alpha) < 0$ каже се да у тачки $x = \alpha$ функција f опада.

3.5.8. Екстремне тачке функције (минимум и максимум)

Дефиниција 3.5.8.1. Функција $f(x)$ дефинисана на (a, b) имаће *максимум* у тачки $x_1 \in (a, b)$ ако и само ако је $f(x) < f(x_1)$ за свако x које припада некој околини те тачке.

Дефиниција 3.5.8.2. Функција $f(x)$ дефинисана на (a, b) имаће *минимум* у тачки $x_2 \in (a, b)$ ако и само ако је $f(x) > f(x_1)$ за свако x које припада некој околини те тачке.

Минимум и максимум функције се називају ***екстремима функције***.

Каже се да функција $x \to f(x)$ $(x \in D)$ има *минимум*, у ознаци $\min_{x \in D} f(x)$, ако постоји $\inf_{x \in D} f(x)$ и ако тај инфимум припада скупу вредности функције f, тј. ако $\inf_{x \in D} f(x) \in f(D)$. То, у ствари, значи да функција $x \to f(x)$ има минимум ако у скупу D постоји тачка $x = \alpha$, таква да је:

$$f(\alpha) = \inf_{x \in D} f(x) = \inf \big(f(D)\big).$$

Исто тако, каже се да функција $x \to f(x)$ $(x \in D)$ има *максимум*, у ознаци $\max_{x \in D} f(x)$, ако постоји $\sup_{x \in D} f(x)$ и ако тај супремум припада скупу вредности функције f, тј. ако $\sup_{x \in D} f(x) \in f(D)$. Дакле, то значи да функција $x \to f(x)$ има максимум ако у скупу D постоји тачка $x = \beta$, таква да је:

$$f(\alpha) = \sup_{x \in D} f(x) = \sup \big(f(D)\big).$$

Као што видимо, овако дефинисани минимум је заиста најмања, а максимум највећа вредност функције $x \to f(x)$. Због тога се, понекад, за тако дефинисани минимум каже да је то *апсолутни минимум*, а за максимум да је *апсолутни максимум* функције f.

Напоменимо да је увек:

$$f(D) \subseteq \left[\inf_{\mathrm{x \in D}} f(x), \sup_{\mathrm{x \in D}} f(x)\right].$$

Само се по себи разуме: ако је $f(D)$ интервал, полусегмент (полуинтервал) или сегмент, онда су вредности $\inf_{x \in D} f(x)$ и $\sup_{x \in D} f(x)$ његови крајеви.

Следећим двема дефиницијама увешћемо неке нове појмове.

Дефиниција 3.5.8.3. За тачку $a \in (\alpha, \beta)$ кажемо да је *тачка минимума* функције $x \to f(x)$ $\big(x \in (\alpha, \beta)\big)$ ако постоји $\delta > 0$ такво да је $f(x) \geq f(a)$ за свако $x \in U(a, \delta)$. У том случају, за функцију f кажемо да у тачки a има *минимум* $f(a)$. (*Миловановић, Ђорђевић*, 2005).

Дефиниција 3.5.8.4. За тачку $a \in (\alpha, \beta)$ кажемо да је *тачка максимума* функције $x \to f(x)$ $\big(x \in (\alpha, \beta)\big)$ ако постоји $\delta > 0$ такво да је $f(x) \leq f(a)$ за свако $x \in U(a, \delta)$. У том случају, за функцију f кажемо да у тачки a има максимум $f(a)$. (*Миловановић, Ђорђевић*, 2005).

Није тешко закључити да ако је функција $x \to f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ растућа, да је тада $f(a)$ минимум, а $f(b)$ максимум функције f на сегменту $[a,b]$.

И обрнуто, ако је f опадајућа функција, тада је $f(a)$ максимум и $f(b)$ минимум функције $f(x)$ за $x \in [a,b]$.

За најмању и највећу вредност неке функције, тј. за њен минимум и њен максимум, често се каже да су то њене *екстремне вредности* или да су то њени *екстремуми*.

Теорема 3.5.8.1. Ако функција $x \to f(x)$ у тачки $a \in (\alpha,\beta)$ има екстремум, тада или функција f у тој тачки није диференцијабилна или је $f'(a) = 0$.

Теорема 3.5.8.2. Нека је функција $x \to f(x)$ непрекидна у тачки $x = a$ и нека је диференцијабилна у околини $U(a,\delta) \subset (\alpha,\beta)$, сем можда у тачки a. Ако су вредности $f'(x)$, за свако $x \in U(a_-,\delta)$ и за свако $x \in U(a_+,\delta)$, различитог знака, функција f у тачки $x = a$ има *екстремум*.

Теорема 3.5.8.3. Нека је функција $x \to f(x)$ двапут диференцијабилна у тачки $x = a$ и нека је $f'(a) = 0$ и $f''(a) \neq 0$. Тада функција f у тачки a достиже свој *максимум* ако је $f''(a) < 0$, а *минимум* ако је $f''(a) > 0$.

Теорема 3.5.8.4. Нека је функција $x \to f(x)$ n *пута диференцијабилна* у тачки $x = a$ и нека је:

$$f'(a) = f''^{(a)} = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{и} \quad f^{n}(a) \neq 0 \quad (n \geq 2).$$

Тада, ако је n паран број, функција f у тачки a има екстремум, и то: минимум ако је $f^{n}(a) > 0$, а максимум ако је $f^{n}(a) < 0$.

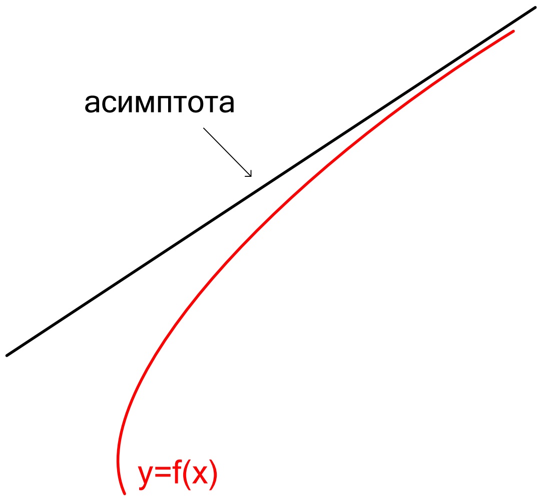
Ако је n непаран број, функција f у тачки a расте ако је $f^{n}(a) > 0$, а опада ако је $f^{n}(a) < 0$.

Довољан услов за постојање екстремума функције: Нека је дата функција $y = f(x)$ непрекидна у тачки x_0 и нека она у тој тачки има први и други извод и нека је $f'(x_0) = 0$:

- ~ Ако је $f''(x_0) < 0$ онда функција $y = f(x)$ у тачки x_0 *има максимум*.
- ~ Ако је $f''(x_0) > 0$ онда функција $y = f(x)$ у тачки x_0 *има минимум*.
- ~ Ако је $f''(x_0) = 0$ онда функција $y = f(x)$ у тачки x_0 *нема екстремну вредност* (у том случају функција у тачки x_0 има превојну тачку).

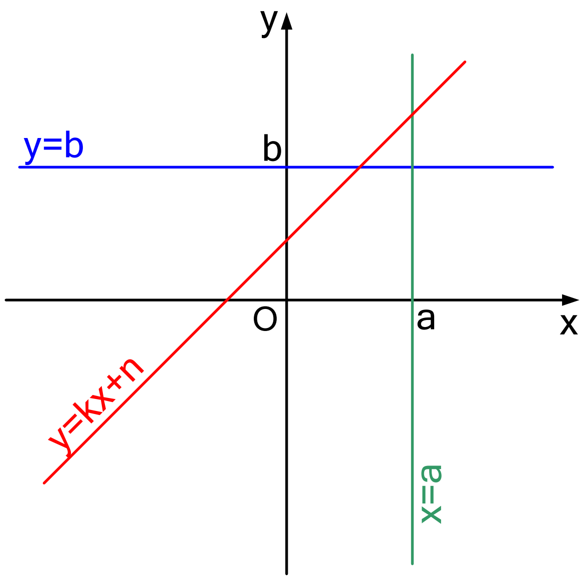
3.5.9. Асимптоте

Асимптота је права која према некој кривој заузима такав положај да јој се та крива стално „приближава“, а никад је не сече.



Слика 6.

Права у координантном систему може да буде; вертикална, хоризонтална, или коса. Те праве као и њихове једначине приказане су на следећој слици:



Слика 7: Вертикална $x = a$, хоризонтална $y = b$, или коса $y = kx + n$ асимптота

Посматрајмо функције $x \to f(x)$ и $x \to g(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Ако је

$$f(x) = g(x) + o(x - a) \qquad (x \to a),$$

за функцију g се каже да је главни део функције f, када $x \to a$. У ствари, тада је

$$f(x) - g(x) = o(x - a) \qquad (x \to a),$$

али и

$$g(x) - f(x) = o(x - a) \quad (x \to a),$$

што значи да је и функција f главни део функције g, када $x \to a$.

Дефинисаћемо сада неке нове појмове који су у непосредној вези са главним деловима двеју функција када x тежи ка a. При томе ћемо, природно, разликовати симболе $-\infty$ и $+\infty$.

Дефиниција 3.5.9.1. За функције $x \to f(x)$ и $x \to g(x)$ кажемо да се *асимптотски* једнако понашају у околини $U\,(\infty, \delta)$ ако $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0$, или да се *асимптотски* једнако понашају у околини $U\,(a, \delta)$ $(-\infty < a < +\infty)$ ако важе једнакости:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0.$$

За функције које се асимптотски једнако понашају, често се каже да су асимптотски једнаке.

Понекад се чињеница да се функције f и g асимптотски једнако понашају, тј. да су асимптотски једнаке, када $x \to \infty$ или када $x \to a$, симболизује са:

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to \infty), \quad \text{тј.} \quad f(x) \sim g(x) \quad (x \to a).$$

Није тешко закључити да је асимптотска једнакост $\sim$ једна релација еквиваленције у скупу функција које се асимптотски једнако понашају у околини $U(\infty, \delta)$ или у околини $U(a, \delta)$.

Дефиниција 3.5.9.2. Ако је функција $x \to f(x)$ асимптотски једнака функцији $x \to g(x)$ када $x \to \infty$, кажемо да је крива $y = g(x)$ *криволинијска асимптота* криве $y = f(x)$. Ако је $g(x) = \alpha x + \beta,\ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, асимптота $y = g(x)$ је *праволинијска*.

Разумљиво, како је асимптотска једнакост обострана, ако је крива $y = g(x)$ криволинијска асимптота криве $y = f(x)$, из *дефиниције 3.5.9.2.* следује да је тада крива $y = f(x)$ криволинијска асимптота криве $y = g(x)$.

Дефиниција 3.5.9.3. За праву $y = \alpha x + \beta$ кажемо да је *коса асимптота* криве $y = f(x)$ ако је:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0 \qquad \text{или} \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0.$$

Према томе, ако је $y = \alpha x + \beta$ коса асимптота криве $y = f(x)$, на основу *дефиниције 3.5.9.1.* закључујемо да важе асимптотске једнакости:

$$f(x) \sim \alpha x + \beta \quad (x \to -\infty) \qquad \text{или} \qquad f(x) \sim \alpha x + \beta \quad (x \to +\infty).$$

Нагласимо да је, према *дефиницији 3.5.9.3.*, права $y = \alpha x + \beta$ коса асимптота криве $y = f(x)$ ако је разлика њихових одговарајућих ордината бесконачно мала величина када $x \to -\infty$ или када $x \to +\infty$.

Дефиниција 3.5.9.4. За праву $y = \beta$ кажемо да је хоризонтална асимптота криве $y = f(x)$ ако је:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - \beta) = 0 \qquad \text{или} \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - \beta) = 0.$$

Дакле, ако је $y = \beta$ хоризонтална асимптота криве $y = f(x)$, важе асимптотске једнакости: $f(x) \sim \beta \quad (x \to -\infty)$ или $f(x) \sim \beta \quad (x \to +\infty)$.

Исто тако, на основу *дефиниције 3.5.9.4.* закључујемо да ако је права $y = \beta$ асимптота криве $y = f(x)$, разлика $f(x) - \beta$ је бесконачно мала величина када $x \to -\infty$ или када $x \to +\infty$.

Дефиниција 3.5.9.5. За праву $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) кажемо да је *вертикална асимптота* криве $y = f(x)$ ако је:

$$\lim_{x \to a_-} f(x) = \pm\infty \qquad \text{или} \qquad \lim_{x \to a_+} f(x) = \pm\infty.$$

На основу *дефиниције 3.5.9.5* није тешко закључити да је права $x = a$ вертикална асимптота криве $y = f(x)$ ако је функција $x \to f(x)$ бесконачно велика величина када $x \to a$. Очигледно, то значи: ако је права $x = a$ вертикална асимптота криве $y = f(x)$, тачка $x = a$ је тачка прекида друге врсте функције f.

Сада ћемо, под претпоставком да крива $y = f(x)$ има косу асимптоту, када на пример $x \to +\infty$, приказати поступак за њено одређивање. Нека је, дакле, права $y = \alpha x + \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) коса асимптота криве $y = f(x)$. Тада је, према *дефиницији 3.5.9.3.*,

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0,$$

односно,

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(\frac{f(x)}{x} - \alpha - \frac{\beta}{x} \right) = 0,$$

што значи да важи једнакост:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \alpha - \frac{\beta}{x} \right) = 0,$$

одакле непосредно следује да је:

$$\alpha = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

јер је:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\beta}{x} = 0.$$

За тако одређено α, из једнакости $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(\alpha x\ +\ \beta))=0$, добијамо:

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x).$$

Разумљиво, крива $y=f(x)$ нема косу асимптоту када $x\to+\infty$, ако бар једна од граничних вредности α или β не постоји.

Ако крива има косу асимптоту када $x\to-\infty$, поступак за њено одређивање је сличан претходном.

Напомена 3.5.9.1. Понекад је могуће косу асимптоту криве $y=f(x)$ одредити и непосредно. Наиме, ако $y=f(x)=\alpha x+\beta+\text{г}(x)$, где је $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$, тада је $x\to\alpha x+\beta$ главни део функције f када $x\to\infty$, тј. $f(x)$ и $\alpha x+\beta$ се асимптотски једнако понашају. Важи, дакле, асимптотска једнакост $f(x)\sim\alpha x+\beta$ када $x\to\infty$, што, заправо, значи да је права $y=\alpha x+\beta$ коса асимптота криве $y=f(x)$.

Одређивање хоризонталних асимптота криве $y=f(x)$, када $x\to-\infty$ или када $x\to+\infty$, врши се непосредно на основу *дефиниције 3.5.9.4.*, тј. тражењем одговарајућих граничних вредности:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0 \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

Није тешко закључити да је хоризонтална асимптота криве $y=f(x)$, у ствари, њена коса асимптота $y=\alpha x+\beta$, за коју је $\alpha=0$. Због тога се одређивање хоризонталних асимптота неке криве може свести на одређивање њених косих асимптота.

Од интереса је нагласити да је понекад важно утврдити понашање криве $y=f(x)$ према својим асимптотама: косој $y=\alpha x+\beta$, хоризонталној $y=\beta$ или вертикалној $x=a$. За косу и хоризонталну асимптоту, то понашање се испитује тако што се у поступку тражења граничних вредности:

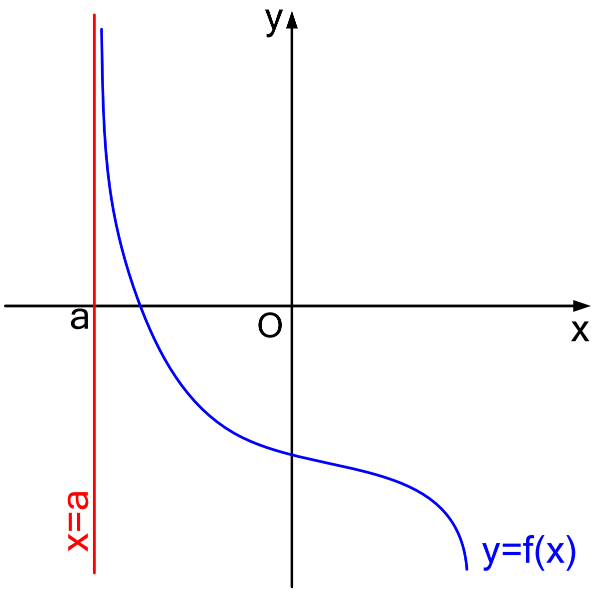
$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-(\alpha x+\beta)) \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\infty}(f(x)-\beta),$$

ако је могуће, констатује знак разлике $f(x)-(\alpha x+\beta)$, тј. $f(x)-\beta$, када x неограничено расте.

Вертикална асимптота. Ако је:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

онда је права $x = a$ вертикална асимптота („кандидати“ за број a у претходном лимесу су тачке прекида или крајеви интервала из домена функције, што значи да вертикалних асимптота може постојати и више од једне).

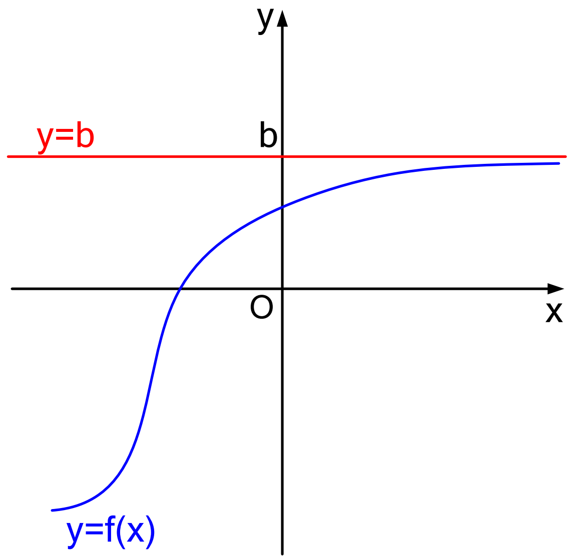


Слика 8: Вертикална асимптота

Хоризонтална асимптота. Ако постоји:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

онда је права $y = b$ хоризонтална асимптота.

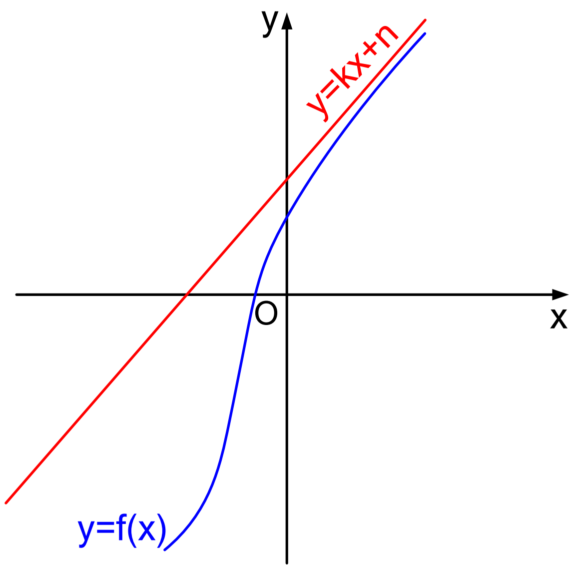


Слика 8: Хоризонтална асимптота

Коса асимптота. Ако постоје лимеси:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{и} \qquad n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - k \cdot x] = b$$

онда је права $y = kx + n$ коса асимптота.



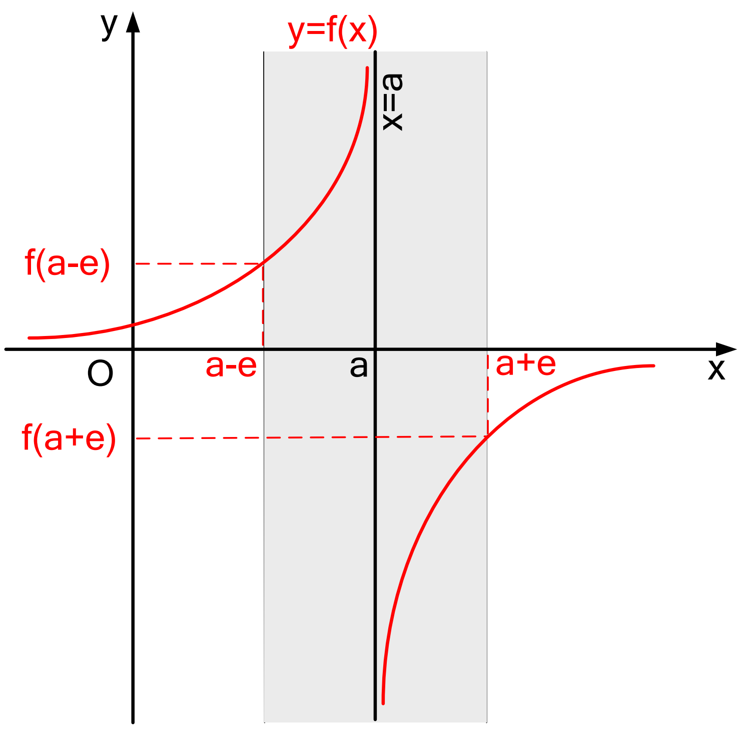
Слика 9: Коса асимптота

Напомена 3.5.9.2. Хоризонтална и коса асимптота се међусобно искључују (ако постоји хоризонтална онда не постоји коса асимптота и обрнуто), тачније, хоризонтална асимптота је специјалан случај косе асимптоте код које је $k = 0$, односно хоризонтална асимптота има једначину: $y = 0 \cdot x + n$.

Леви и десни лимес: Ако испитујемо:

$$\lim_{x \to a} f(x),$$

онда можемо посматрати понашање функције $f(x)$ кад x тежи ка a с лева и кад x тежи ка a с десна. Због тога ћемо узети произвољну ε–*околону* тачке a, то јест посматраћемо понашање функције $f(x)$ у интервалу $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ где је $\varepsilon > 0$ произвољно мали број. Сада можемо дефинисати леви лимес функције $f(x)$ као $\lim_{x \to a-\varepsilon} f(x)$, а десни лимес функције $f(x)$ као $\lim_{x \to a+\varepsilon} f(x)$.

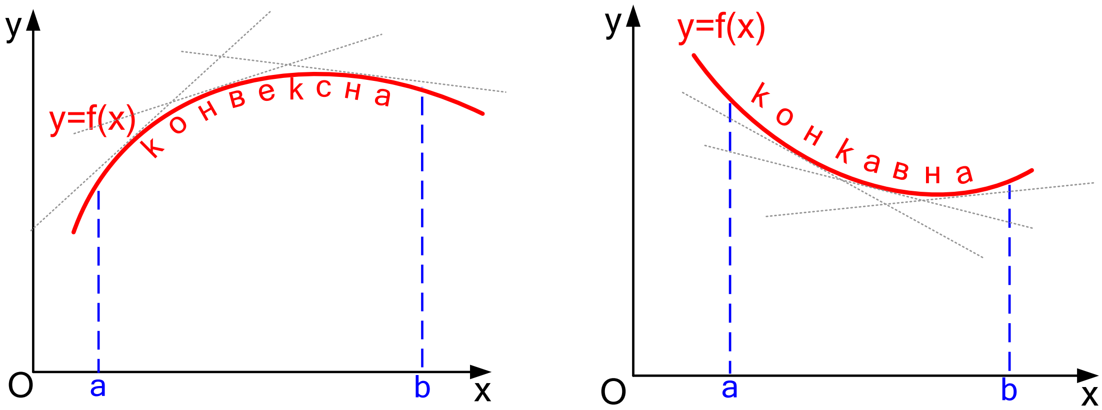


Слика 10: Леви и десни лимес

3.5.10. Конвексност, конкавност и превојне тачке функције

Други извод функције се може користити за испитивање конвексности функције. Превојне тачке (тачке у којима функција прелази из конвексног у конкавни облик) имају за други извод нулу.

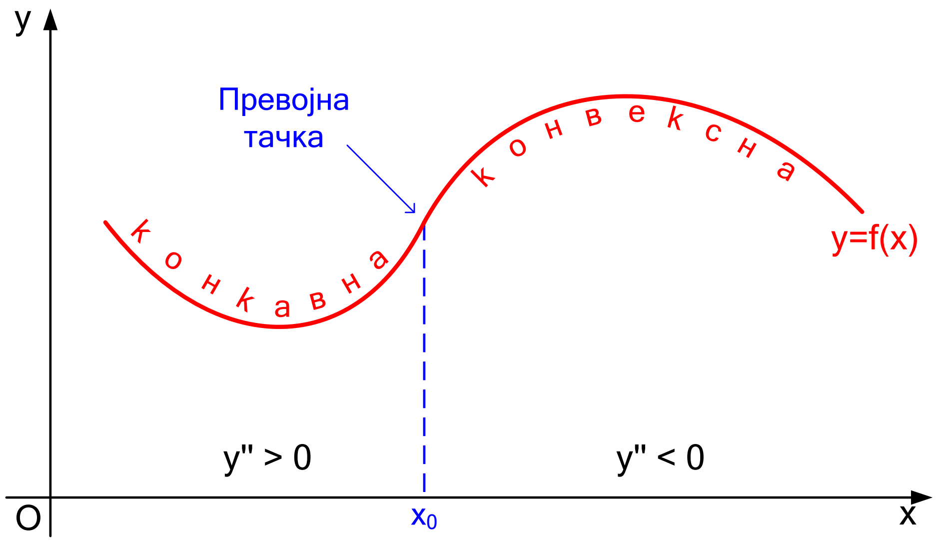
Функција је конвексна на интервалу (a, b) ако се њен график налази испод тангенте конструисане у било којој којој тачки тог интервала. Ако се график налази изнад тангенте конструисане у било којој тачки интервала (a, b) онда је функција конкавна на том интервалу.



Слика 11: Конвексност и конкавност

Теорема 3.5.10.1. Нека је функција $y = f(x)$ непрекидна на интервалу (a, b) и нека она има први и други извод за $\forall x \in (a, b)$, тада важи:

- Ако је $f''(x) > 0$ за $\forall x \in (a, b)$ онда је функција $y = f\,(x)$ *конкавна* на том интервалу.
- Ако је $f''(x) < 0$ за $\forall x \in (a, b)$ онда је функција $y = f(x)$ *конвексна* на том интервалу.
- Ако је $f''(x_0) = 0$ за неко $x_0 \in (a, b)$ онда функција $y = f(x)$ у тачки x_0 има превојну тачку.



Слика 12: Конвексност, конкавност и превојна тачка функције

Функција $x \to f(x)$ конвексна на (a, b) ако и само ако је:

$$(x_2 - x) \cdot f(x_1) + (x_1 - x_2) \cdot f(x) + (x - x_1) \cdot f(x_2) \;\geq\; 0,$$

за сваку тројку вредности $x_1, x, x_2 \in (a, b)$ за коју је $x_1 < x < x_2$.

Теорема 3.5.10.2. Диференцијабилна функција $x \to f(x)$ је конвексна (строго конвексна) на (a, b) ако и само ако је њена изводна функција f' неопадајућа (растућа) на (a, b). (*Миловановић, Ђорђевић*, 2005).

Доказ. Претпоставимо да је f конвексна функција на (a, b), тј. нека за свако x_1, x, x_2 $(a < x_1 < x < x_2 < b)$ важи неједнакост:

$$(x_2 - x) \cdot f(x_1) + (x_1 - x_2) \cdot f(x) + (x - x_1) \cdot f(x_2) \;\geq\; 0.$$

Како је $x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$, претходна неједнакост је еквивалентна неједнакости:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad (x_1 < x < x_2),$$

одакле, једно за другим, добијамо:

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \lim_{x \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f'(x_2) = \lim_{x \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_1 - x} \geq \lim_{x \to x_2} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Према томе, за сваки пар вредности $x_1, x_2 \in (a, b)$, за који је $x_1 < x_2$, важи неједнакост $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, што казује да је f' неопадајућа функција на (a, b). У случају строге конвексности функције f, у $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)- f(x)}{x_2-x}$ важи строга неједнакост, одакле, на основу Лагранжове теореме, следује:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2),$$

где је $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$. Према томе, за свако $x_1 < x_2$ постоје ξ_1 и ξ_2 ($\xi_1 < \xi_2$) за које је:

$$f'(x_1) \leq f'(\xi_1), \qquad f'(\xi_1) < f'(\xi_2), \qquad f'(\xi_2) \leq f'(x_2),$$

односно $f'(x_1) < f'(x_2)$.

Дакле, ако је f строго конвексна функција на (a, b), тада је f' растућа функција на (a, b). Нека је сада функција f' неопадајућа на (a, b). На основу Лагранжове формуле, за $a < x_1 < x < x_2 < b$ имамо:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \qquad \text{и} \qquad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2),$$

где је $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$.

Како је f' неопадајућа функција, важи неједнакост $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, одакле, обзиром на претходне једнакости за $f'(\xi_1)$ и $f'(\xi_2)$, закључујемо да важи неједнакост:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

па, према томе, и њој еквивалентна неједнакост

$$(x_2 - x) \cdot f(x_1) + (x_1 - x_2) \cdot f(x) + (x - x_1) \cdot f(x_2) \ \geq \ 0.$$

Дакле, функција f је конвексна. Ако је f' растућа функција, строга конвексност функције f, тј. строга неједнакост:

$$(x_2 - x) \cdot f(x_1) + (x_1 - x_2) \cdot f(x) + (x - x_1) \cdot f(x_2) \ > \ 0,$$

следује из неједнакости $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$. ■

Теорема 3.5.10.3. Диференцијабилна функција $x \to f(x)$ је конкавна (строго конкавна) на (a, b) ако и само ако је њена изводна функција f' нерастућа (опадајућа) на (a, b). (*Миловановић*, *Ђорђевић*, 2005).

Теорема 3.5.10.4. Диференцијабилна функција $x \to f(x)$ је конвексна на (a, b) ако и само ако важи неједнакост:

$$f(x) - f(\alpha) \geq f'(\alpha)(x - \alpha) \qquad (x, \alpha \in (a, b)).$$

Функција је строго конвексна ако и само ако важи строга неједнакост у претходној неједнакости. (*Миловановић*, *Ђорђевић*, 2005).

Доказ. Нека је f конвексна функција на (a, b). Како је:

$$f(x) - f(\alpha) = f'(\xi)(x - \alpha) \qquad (x < \xi < \alpha \ \text{ или } \ \alpha < \xi < x)$$

претходна неједнакост постаје:

$$\big(f'(\xi) - f'(\alpha)\big)(x - \alpha) \geq 0 \qquad (x < \xi < \alpha \ \text{ или } \ \alpha < \xi < x),$$

и она је тачна јер је, на основу *теореме 3.5.10.2.*, функција f' неопадајућа функција на (a, b). Дакле, под претпоставком да је f конвексна функција, доказали смо да важи неједнакост $f(x) - f(\alpha) \geq f'(\alpha)(x - \alpha)$.

Претпоставимо сада да важи неједнакост $f(x) - f(\alpha) \geq f'(\alpha)(x - \alpha)$, тј.

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \leq f'(\alpha) \quad (x < \alpha) \qquad \text{и} \qquad \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \geq f'(\alpha) \quad (x > \alpha),$$

или, што је исто,

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} \leq f'(x) \quad (x_1 < x) \qquad \text{и} \qquad f'(x) \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad (x < x_2),$$

Из ових неједнакости закључујемо да је:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \qquad (x_1 < x < x_2),$$

одакле, за произвољне вредности $x_1, x_2 \in (a,b)$ за које је $a < x_1 < x < x_2 < b$, следује да је функција f конвексна.

Строга неједнакост у $f(x) - f(\alpha) > f'(\alpha)(x-\alpha)$ је потребан и довољан услов за строгу конвексност функције f на (a,b). ■

Теорема 3.5.10.5. Диференцијабилна функција $x \to f(x)$ је конвексна на (a,b) ако и само ако важи неједнакост:

$$f(x) - f(\alpha) \leq f'(\alpha)(x-\alpha) \qquad (x, \alpha \in (a,b)).$$

Функција је строго конвексна ако и само ако важи строга неједнакост у претходној неједнакости. (*Миловановић*, *Ђорђевић*, 2005).

Теорема 3.5.10.6. Нека је $x \to f(x)$ двапут диференцијабилна функција на (a,b). Функција f је конвексна на (a,b) ако и само ако је $f''(x) \geq 0$, за свако $x \in (a,b)$, а конкавна ако и само ако је $f''(x) \leq 0$, за свако $x \in (a,b)$.

Доказ. Ако је f конвексна функција на (a,b), тада је функција $x \to f'(x)$, $(a < x < b)$, на основу *теореме 3.5.10.2.*, неопадајућа, што на основу *теореме 3.5.10.2.* значи да је $f''(x) \geq 0$ за $x \in (a,b)$. Обрнуто, ако је $f''(x) \geq 0$, на основу *теореме 3.5.10.2.* закључујемо да је функција $x \to f'(x)$, $(a < x < b)$, неопадајућа, што према *теореми 3.5.10.2.* значи да је функција f конвексна на (a,b). Сличан доказ се може дати и за конкавне функције. ■

Дефиниција 3.5.10.1. За тачку $\alpha \in (a, b)$ кажемо да је *превојна тачка функције* $x \to f(x)$ $(x \in (a, b))$ ако постоји $\delta > 0$ тако да је: f строго конвексна за $x \in (\alpha - \delta, \alpha)$ и строго конкавна функција за $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$, или да је: f строго конкавна за $x \in (\alpha - \delta, \alpha)$ и строго конвексна функција за $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$. За тачку $A(\alpha, f(\alpha))$ кажемо да је превојна тачка криве $y = f(x)$. (*Миловановић, Ђорђевић*, 2005).

Као што видимо, у превојној тачки функција мења конвексност у конкавност или обрнуто.

Теорема 3.5.10.7. Ако је $\alpha \in (a, b)$ превојна тачка функција $x \to f(x)$, $(a < x < b)$, тада или функција f у тој тачки није двапут диференцијабилна или је $f''(\alpha) = 0$.

Доказ. Из чињенице да је α превојна тачка функције f следује да у њој функција f мења смисао конвексности. То значи да постоји $\delta > 0$, тако да је, на пример, функција f за $x \in (\alpha - \delta, \alpha)$ конкавна (конвексна) и за $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$ конвексна (конкавна). На основу *теорема 3.5.10.3.* и *3.5.10.2.*, функција $x \to f'(x)$ је нерастућа (неопадајућа) за $x \in (\alpha - \delta, \alpha)$ и неопадајућа (нерастућа) за $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$.

Према томе, функција f' у тачки $x = \alpha$ достиже свој минимум (максимум). Одавде, на основу Ферматове теореме закључујемо: ако постоји $f''(\alpha)$, тада важи једнакост $f''(\alpha) = 0$.

С друге стране, ако $f''(\alpha)$ не постоји, функција f није двапут диференцијабилна у тачки α. ■

Теорема 3.5.10.8. Нека је $x \to f(x)$ $(x \in (a, b))$ трипут диференцијабилна функција и нека је $f''(\alpha) = 0$ и $f'''(\alpha) \neq 0$ $(\alpha \in (a, b))$. Тада је $x = \alpha$ превојна тачка функције f.

Теорема 3.5.10.9. Нека је $x \to f(x)$ $(x \in (a, b))$ n пута диференцијабилна функција у тачки $x = \alpha$ и нека је $f''(\alpha) = f'''(\alpha) = \cdots = f^{(n-1)}(\alpha) = 0$ и $f^{n}(\alpha) \neq 0$ $(n \geq 3)$. Ако је n непаран број, тачка α је превојна тачка функције f, ако је n паран број, тачка α није превојна тачка функције f.

3.6. Елементарне функције

Појам функције је веома важан у настави математике због његовог значаја за математику и њену примену. Функцијско размишљање даје посебну димензију математичком образовању, омогућава боље разумевање и ефикасније поступке у другим наставним садржајима, боље припрема ученика за будућа математичка знања и примене математике. Помоћу функција математичари објашњавају појаве из природе и догађања из свакодневног живота. Функције које се у примени најчешће појављују добиле су током времена посебна имена и ознаку. Најчешће и најједноставније их зовемо елементарним функцијама. Са многима од њих смо се већ сусрели током досадашњег образовања. Елементарне функције имају веома важну улогу међу функцијама у математици. Познавање свих својстава елементарних функција је неопходно у даљем студирању математике, јер омогућава лакше савладавање градива математичке анализе и решавање многих задатака техничке природе.

Међу функцијама које су дате формулом важну улогу имају такозване *елементарне функције*. Познавање својстава елементарних функција омогућава лакше свладавање градива математичке анализе и решавање многих задатака техничке природе.

Дефиниција 3.6.1. (*Миловановић, Ђорђевић*, 2005) Под *основним елементарним функцијама* подразумевају се следеће функције:

~ Константа:

$$x \to const;$$

~ Степена функција:

$$x \to x^{\alpha}, \quad (\alpha \in \mathbb{R});$$

~ Експоненцијалне функције:

$$x \to a^{x}, \quad (a > 0);$$

~ Логаритамске функције:

$$x \to \log_a x, \quad (a > 0,\ a \neq 1);$$

~ Тригонометријске функције:

$$x \longrightarrow \sin x\,, \quad x \longrightarrow \cos x\,, \quad x \longrightarrow tg\ x, \quad x \longrightarrow ctg\ x\ ;$$

~ Инверзне тригонометријске функције:

$$x \longrightarrow \arcsin x\,, \quad x \longrightarrow \arccos x\,, \quad x \longrightarrow arctg\ x, \quad x \longrightarrow arcctg\ x.$$

Напоменимо да су функције $x \longrightarrow \arcsin x$ и $x \longrightarrow \arccos x$ дефинисане на скупу $\mathrm{X} = [-1,\ 1]$, док је област дефинисаности функција $x \longrightarrow arctg\, x$ и $x \longrightarrow arcctg\, x$ скуп $\mathbb{R}$.

Елементарне функције су функције које се могу добити од ових помоћу четири аритметичке операције (сабирањем, одузимањем, множењем и дељењем) и суперпозицијама, тј. образовањем сложених функција, композицијама функција, примијењеним коначан број пута. Извод елементарне функције увек је елементарна функција, али интеграл елементарне функције не мора бити елементарна функција.

Дефиниција 3.6.2. (*Миловановић, Ђорђевић*, 2005). За функције које се добијају коначном применом аритметичких операција и коначним бројем композиција над основним елементарним функцијама кажемо да су *елементарне функције*.

Елементарне функције могу се поделити на алгебарске и трансцендентне. Од ***алгебарских*** функција наводимо следеће:

1. ***Полиноми***. То су функције облика $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, где су a_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ реални бројеви, који се називају коефицијенти полинома. Број n $(n \in \mathbb{N}_0)$ назива се степен полинома. Полином чији је степен нула је константа.

2. ***Рационалне функције***. Нека су $P(x)$ и $Q(x)$ полиноми степена n и m, респективно, и нека је $Z(Q)$ скуп свих тачака $x \in \mathbb{R}$ за које је $Q(x) = 0$. Тада се на скупу $X = \mathbb{R} \setminus Z(Q)$ може дефинисати тзв. рационална функција $R(x)$ помоћу:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n} \;;$$

3. ***Ирационалне функције***. Коначном применом аритметичких операција и коначним бројем композиција над константом и степеном функцијом са рационалним изложиоцем, добијамо ирационалне функције.

У ствари, у општем случају, за сваку функцију $y = f(x)$ која задовољава бар једну једначину облика:

$$P_0(x) \cdot y^n + P_1(x) \cdot y^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(x) \cdot y + P_n(x) = 0$$

где су $P_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ неки полиноми, кажемо да је алгебарска функција.

За све елементарне функције које нису алгебарске кажемо да су ***трансцендентне*** функције. Такве су, на пример:

$$sinx, \quad x^2 + arctg\, x, \quad a^x, \quad \log_a x$$

Сада ћемо посебно дефинисати једну класу трансцендентних функција, познату као хиперболичке функције. То су функције:

1. Синус хиперболички:

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \qquad (x \in \mathbb{R});$$

2. Косинус хиперболички:

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad (x \in \mathbb{R});$$

3. Тангенс хиперболички:

$$thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,, \qquad (x \in \mathbb{R});$$

4. Котангенс хиперболички:

$$cthx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,, \qquad (x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}).$$

Напомена 3.6.1. Све остале функције које нису елементарне су нееелементарне функције.

3.6.1. Линеарна функција и њен график

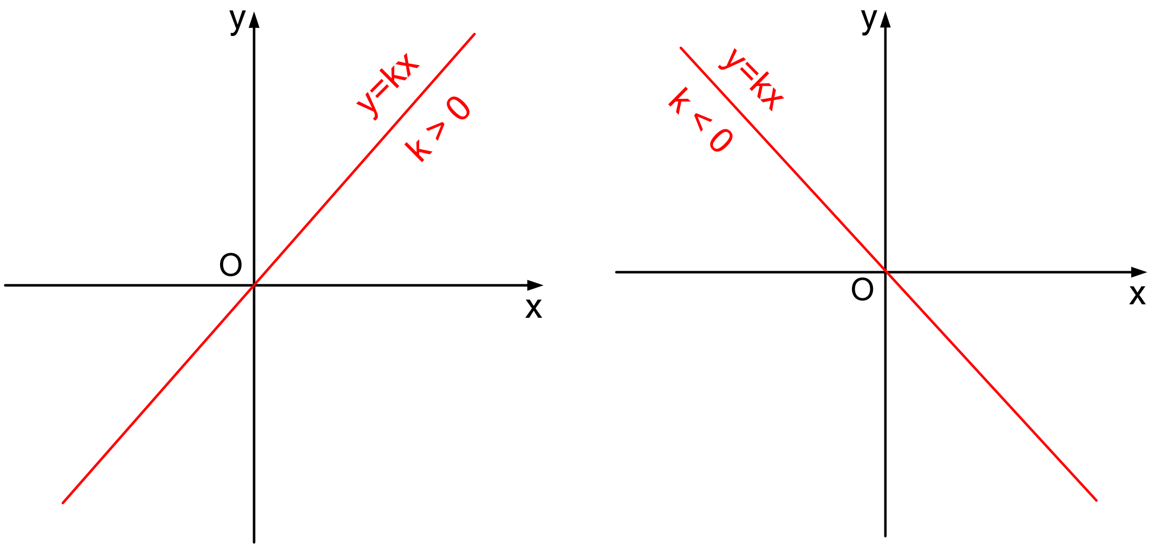
У седмом разреду основне школе уводи се појам линеарне функције као функције облика $y = k \cdot x$: броју x (аргументу функције, независно промењљивој) придружује се број $y = f(x)$, $f(x) = k \cdot x$, (вредност функције, зависно промењлива); k је позната реална константа. У осмом разреду појам се проширује на афино-линеарне функције $f(x) = k \cdot x + n$ (k и n су реалне константе). Линерна функција има следећа основна својства:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

2. $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$.

Линеарна функција је функција одређеног облика. Нажалост, постоје несугласице око тога како овај облик тачно гласи. Најчешћа дефиниција, која се учи у многим школама је облика: $f(x) = k \cdot x + n$, где су k и n константе.

Проблем са овом дефиницијом је да функције овог облика (упркос њеном имену), не задовољавају обавезно услов линеарног пресликавања, уколико је k једнако нула.

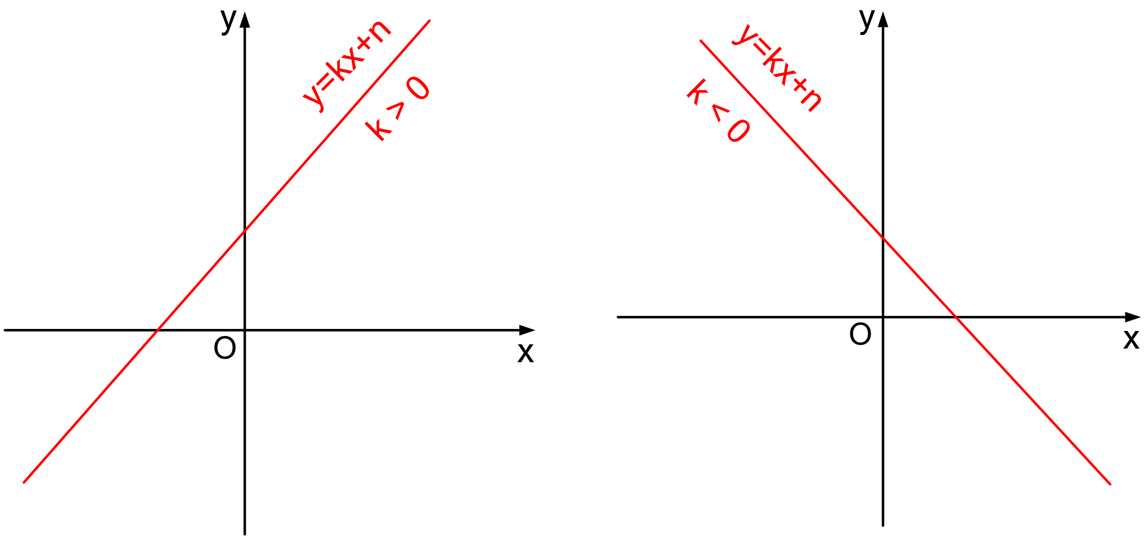


Слика 13: График линеарне функције $y = k \cdot x$

Линеарне функције (такође према горњој дефиницији) се могу написати и у облику:

$$y = k \cdot x + n, \quad (k, n \in \mathbb{R})$$

и нацртати на (x, y) графику. Ова функција формира праву линију, као што и само име говори. Константа k се често назива нагиб, док нам n даје тачку пресека са y-осом.



Слика 14: График линеарне функције $y = k \cdot x + n$

Дефиниција 3.6.1.1. Линеарна функција је врста зависности између две величине, где је сразмера промене зависне величине од независне број - константа (различита од нуле). Зависна (x) и независна (y) величина су код линеарне функције директно пропорционалне (сразмерне).

График линеарне функције $f(x) = k \cdot x + n,\ x \in R$ је права линија која на ординатној оси одсеца одсечак $n = f(0)$. Ако се аргумент x промени у $x + h$ онда се вредност функције мења од $f(x)$ у $f(x + h) = k \cdot (x + h) + n = f(x) + k \cdot h$. Одавде следи:

$$k = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

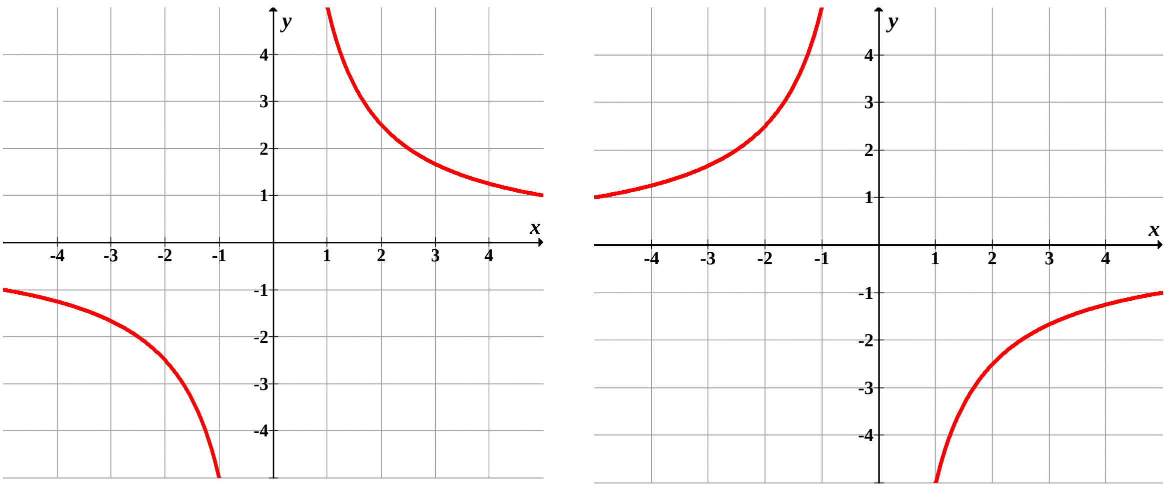
k је однос промене вредности функције и промене аргумента односно брзина промене функције:

- За $k > 0$, вредности функције расту са порастом аргумента, све брже што је k веће.
- За $k < 0$, вредности функције опадају са порастом аргумента, све брже што је к мање.

График функције која брже расте или брже опада је стрмији према x оси.

3.6.2. Функција облика $y = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}$

Поред линеарне функције у облику $y = k \cdot x$, у седмом разреду основне школе уводи се и функција облика $y = \frac{k}{x}$. График функције је хипербола, (*Огњановић, Ивановић*, 2005) дефинисан је за $x \neq 0$. Асимптоте функције су x–оса и y–оса. Када је $k > 0$ график функције се налази у I и II квадранту, а када је $k < 0$ график функције се налази у II и IV квадранту.



$k > 0$ $\qquad$ $k < 0$

Слика 15: График функције $y = \frac{k}{x}$

3.6.3. Квадратна функција и њен график

Квадратна функција представља једну од најважнијих тема целокупне средњошколске математике. Историјски посматрано, квадратне једначине су решаване још у Старом веку.

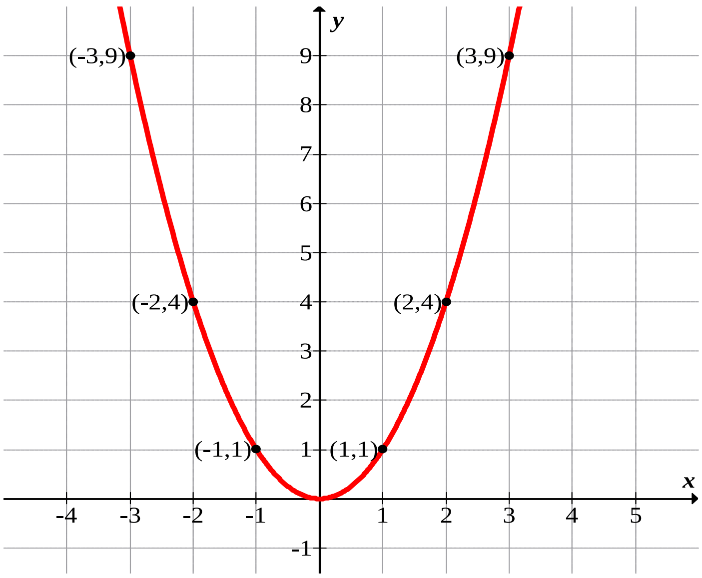
Дефиниција 3.6.3.1. Квадратна функција је функција облика $y = ax^2 + bx + c$, $x \in R$, где су a, b, c реални бројеви и $a \neq 0$.

Крива која представља график квадратне функције $y = ax^2 + bx + c$ у равни xOy је (квадратна) парабола.

3.6.3.1. Ток и график функције $y = x^2$

Најпре ћемо ову функцију представити табеларно, тј. за неке вредности променљиве x, израчунаћемо одговарајуће вредности променљиве за y. Добијене парове (x, y) узимамо као координате тачака графика ове функције у равни xOy.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	9	4	1	0	1	4	9	...
тачке	...	$A(-3,9)$	$B(-2,4)$	$C(-1,1)$	$O(0,0)$	$E(1,1)$	$F(2,4)$	$G(3,9)$	...



Слика 16: Квадратна функција $y = x^2$

Неке особине ове функције могуће је описати помоћу њеног графика, или рачунским путем.

Дефинисаност. Квадрат сваког реалног броја је реалан број. Дакле функција $y = x^2$ је дефинисана за свако реално x. То записујемо:

$$D: \forall x \in R.$$

Нуле функције. Налажење нула функције се своди на одређивање и решавање квадратне једначине $x^2 = 0$. Дакле, $y = 0$, за $x = 0$.

Знак функције. Вредности функције су позитивне за све $x \neq 0$. Пишемо $y > 0$, $\forall x \neq 0$.

Парност функције. Функција је парна па је њен график симетричан у односу на y–осу.

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Раст и опадање функције (монотоност функције). Нека је $x_1 < x_2 < 0$. Тада из $x_1 - x_2 < 0$ и $x_1 + x_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 - x_2^2 > 0$ $\Rightarrow \quad x_1^2 > x_2^2 \quad \Rightarrow \quad y_1 > y_2$.

Дакле функција опада за $x < 0$. Записујемо $y \searrow$ за $x \in (-\infty, 0)$.

За, $x > 0$, на основну парности функције, дакле, симетричности графика у односу на y–осу, можемо закључити да функција расте. Рачуница, слична претходној каже: $0 < x_1 < x_2$. Тада из $x_1 - x_2 < 0$ и $x_1 + x_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad (x_1 - x_2) \cdot (x_1 + x_2) < 0$ $\Rightarrow \quad x_1^2 - x_2^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 < x_2^2 \quad \Rightarrow \quad y_1 < y_2$.

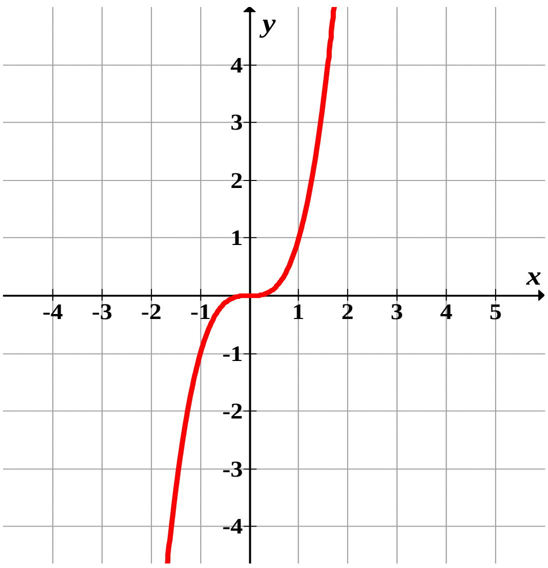
Дакле, функција расте за $x > 0$ и то записујемо са $y \nearrow$ за $x \in (0, +\infty)$.

$\Longrightarrow$ Функција опада за $x < 0$; расте за $x > 0$.

Екстремне вредности функције. За сваки реалан број $x \neq 0$ је $x^2 > 0$, дакле $f(x) > f(0)$, за сваки $x \neq 0$ па функција има минимум. Теме параболе (0,0) је у кординатном почетку и то је тачка минимума.

Ограниченост функције. Одређивање ограничености функције се своди на налажење скупа вредности промењиве y. У овом случају је $0 \leq y < +\infty$. На основу добијених података закључујемо да крива показана на слици 15. заиста представља график функције $y = x^2$. Тачка $O(0,0)$ је теме параболе.

Поред ове функције $y = x^2$, односно $y = x^n$, када је n парно имамо и случај ове фунције, када нам је n непарно, и то се најчешће у задацима (у школи) узма функција $y = x^3$, график ове функције приказан је на следећој слици.



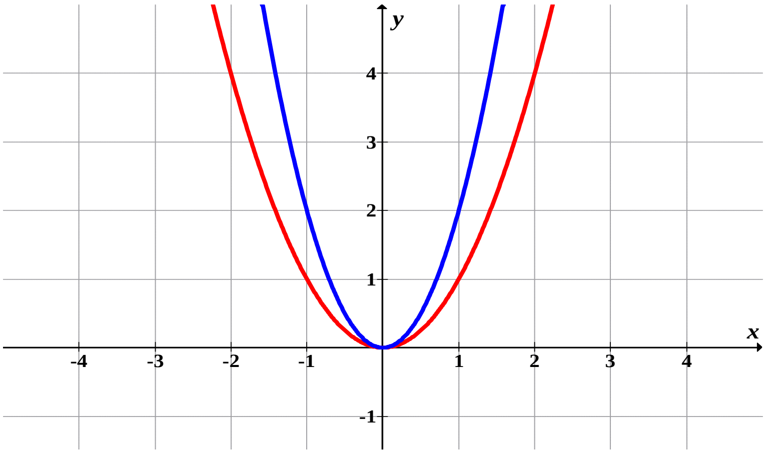
Слика 17: График функције $y = x^3$

3.6.3.2. Ток и график функције $y = ax^2$

Коришћењем графика $y = x^2$ лако се може скицирати график функција $y = ax^2$, $a \neq 0$, и на основу тог графика се може доћи до података о понашању функције $y = ax^2$. Посматраћемо посебно случајеве: $a > 0$ и $a < 0$.

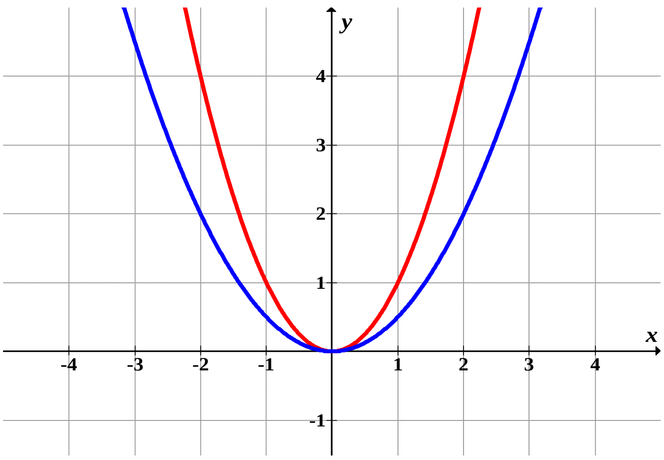
У случају када је $\underline{\boldsymbol{a > 0}}$ раздвојићемо следеће могућности: $a > 1$ и $0 < a < 1$.

$\boldsymbol{a > 1}$**:** У координатном систему xOy скицирамо график функције $y = x^2$. Вредност функције $y = ax^2$, за сваки реалан број x, је a пута већа од вредности функције $y = x^2$, што значи да је ордината одговарајуће тачке на графику a пута већа. На слици 16. поред графика функције $y = x^2$, скициран је и график функције $y = ax^2$ за $a > 1$. Види се да је он „изнад“ графика функције $y = x^2$, а парабола је „ужа“, мање „отворена“. Са графика читамо својства функције: Дефинисана је за све реалне вредности x. Парна је. Реалан број 0 је једина нула функције. Позитивна је $\forall x \neq 0$. Опада за $x < 0$, расте за $x > 0$. Има минимум: $y_{min} = 0$ за $x = 0$. $0 \leq y < +\infty$. График ове функције ($y = ax^2$), као и график функције $y = x^2$ је окренут „отвором нагоре". Теме параболе је тачка $O(0, 0)$.



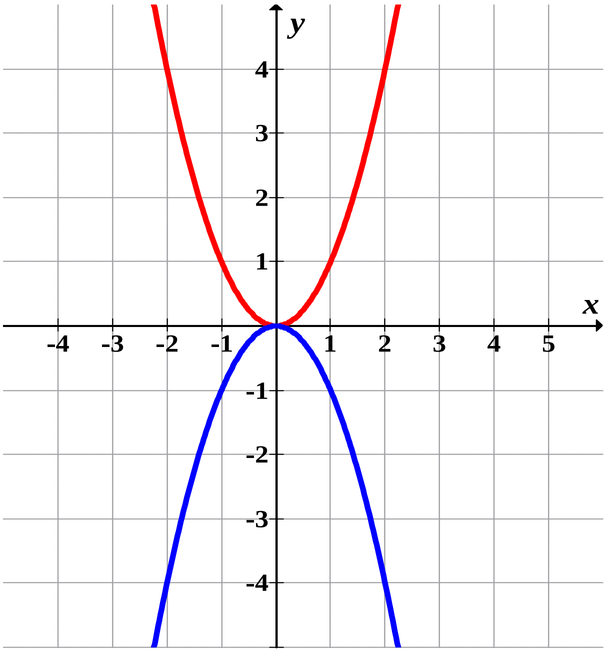
Слика 18: Квадратна функција $y = x^2$ (црвена) и функција $y = ax^2$, за $a > 1$ (плава)

$0 < a < 1$: Резултат множења позитивног броја позитивним бројем, а мањим од 1 је број a пута мањи од броја који се множи. Дакле, вредности функције $y = ax^2$ су a пута мање од одговарајућих вредности функције $y = x^2$. Последица тога је да је парабола $y = ax^2$ „испод" параболе $y = x^2$, више „отворена", „шира", али исто тако, окренута „отвором нагоре" (слике 17.). Својства функције су иста као и у случају када је $a > 1$.



Слика 19: Квадратна функција $y = x^2$ (црвена) и функција $y = ax^2$, за $0 < a < 1$ (плава)

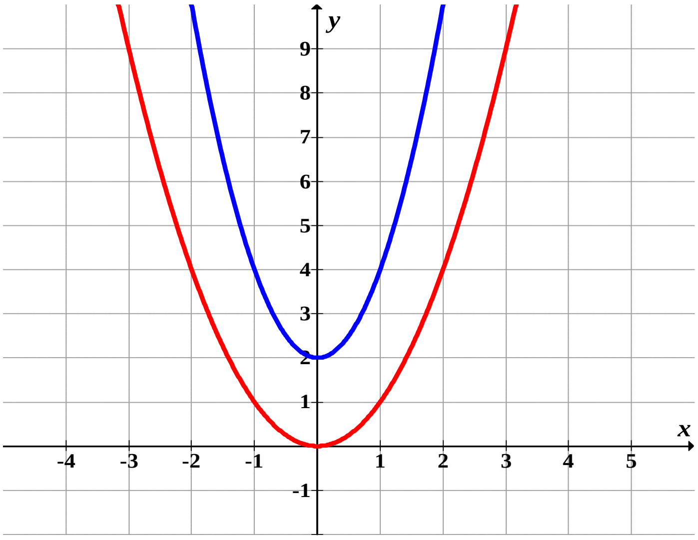
За $\underline{\boldsymbol{a < 0}}$ функцију $y = ax^2$ записаћемо у облику $y = -(-a) \cdot x^2$. Како је $a < 0$ то је $-a > 0$ па су својства функције $y = -ax^2$ добро позната. За свако x је вредност функције $y = -(-a) \cdot x^2$ супротна вредности функције $y = (-a) \cdot x^2$, па су одговарајуће тачке симетричне у односу на Ox–осу (слика 18). Функција $y = ax^2$ има следећа својства: Дефинисана је за све реалне вредности x. Парна је. Реалан број 0 је једина нула функције. Негативна је за $\forall x \neq 0$. Расте за $x < 0$, опада за $x > 0$. Има максимум: $y_{max} = 0$ за $x = 0$. $-\infty < y \leq 0$. График функције је парабола „окренута надоле“.



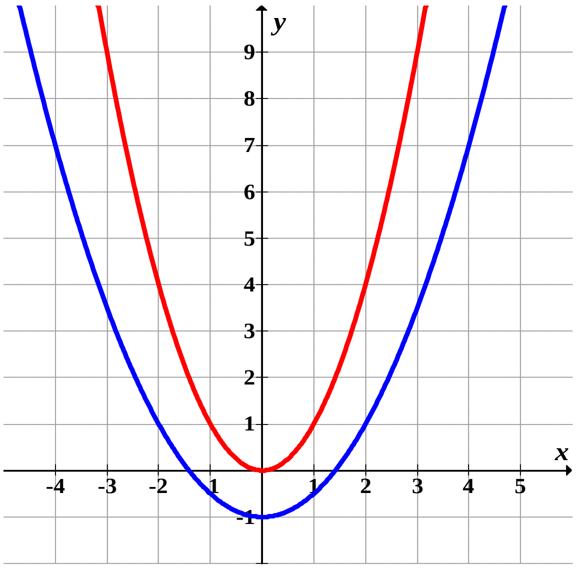
Слика 20: Квадратна функција $y = x^2$ (црвена парабола) и функција $y = ax^2$, за $a < 0$ (плава парабола)

3.6.3.3. Ток и график функције $\boldsymbol{y = ax^2 + \beta}$

До графика ове функције се може доћи помоћу графика функције $y = ax^2$. Помоћни график $y = ax^2$ се помера транслаторно у правцу y–осе за β јединица: навише за $\beta > 0$ (слика 21), а наниже за $\beta < 0$ (слика 22).



Слика 21: Квадратна функција $y = x^2$ (црвена парабола) и функција $y = ax^2 + \beta$, за $a > 1,\ \beta > 0$ (плава парабола)



Слика 22: Квадратна функција $y = x^2$ (црвена парабола) и функција $y = ax^2 + \beta$, за $0 < a < 1,\ \beta < 0$ (плава парабола)

Ако је $a > 0$ график функције $y = ax^2 + \beta$ биће окренут „отвором нагоре“ и за $\beta > 0$ цео ће бити изнад Ox–осе, а за $\beta < 0$ ће сећи $0x$–осу у тачкама са апсцисама $\pm\sqrt{\frac{\beta}{a}}$ (у овом случају то су нуле функције). Ако је $a < 0$, график функције $y = ax^2 + \beta$ је окренут „отвором надоле“ и за $\beta > 0$ ће сећи $0x$–осу у тачкама са апсцисама $\pm\sqrt{\frac{\beta}{a}}$, док ће за $\beta < 0$ цео график функције бити испод Ox–осе. Теме параболе која представља график функције $y = ax^2 + \beta$ је тачка $T(0, \beta)$.

3.6.3.4. *Ток и график функције* $y = a \cdot (x - \alpha)^2$

До графика функције $y = a \cdot (x - \alpha)^2$ се може доћи помоћу графика функције $y = ax^2$, ако се изврши транслација тог дела графика у правцу x–осе за α - јединица. Та транслација се врши на десно ако је $\alpha > 0$, односно на лево ако је $\alpha < 0$. Због тога се функција $y = a \cdot (x - \alpha)^2$ понаша слично као и функција $y = ax^2$. Особине:

~ $D: \forall x \in \mathbb{R}$.

~ Теме добијене параболе је тачка $\mathrm{T}(\alpha, 0)$.

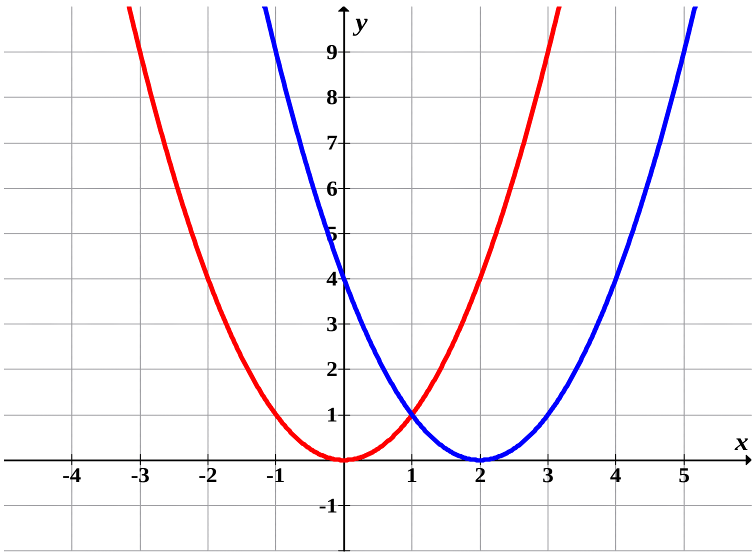
~ Функција има нулу за $x = \alpha$; то је реално двоструко решење једначине $a \cdot (x - \alpha)^2 = 0$.

~ Када је $\alpha \neq 0$ квадратна функција $y = a \cdot (x - \alpha)^2$ није ни парна ни непарна: $a \cdot (-x - \alpha)^2 \neq \pm a \cdot (x - \alpha)^2$.

~ Функција $y = a \cdot (x - \alpha)^2$ расте ($y \nearrow$) за $x \in (\alpha, +\infty)$, а опада ($y \searrow$) за $x \in (-\infty, \alpha)$.

~ $y > 0$, за $x \neq \alpha$ и $a > 0$, а $y < 0$, за $x \neq \alpha$ и $a < 0$.

~ $y_{min} = 0$, за $x = \alpha$ и $a > 0$, а $y_{max} = 0$, за $x = \alpha$ и $a < 0$.

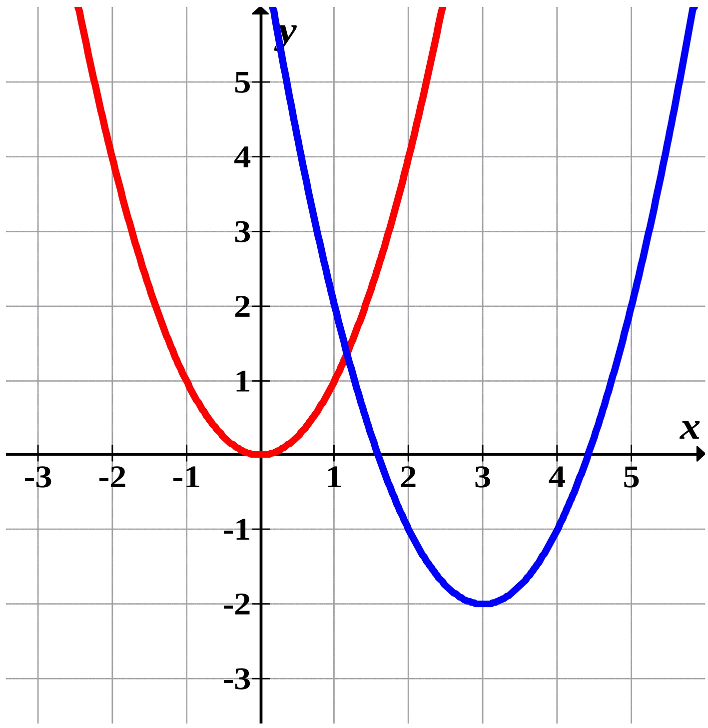


Слика 23: Квадратна функција $y = x^2$ (црвена парабола) и функција $y = a \cdot (x - \alpha)^2$, за $a > 0$ и $\alpha > 0$ (плава парабола)

3.6.3.5. Ток и график функције $y = a \cdot (x - \alpha)^2 + \beta$

До графика функције $y = a \cdot (x - \alpha)^2 + \beta$ може се доћи помоћу графика функције $y = ax^2$ уз две транслације. Једном транслацијом дуж x–осе, добија се график функције $y = a \cdot (x - \alpha)^2$. Тако добијени график се затим помера у правцу y–осе за β јединица: навише за $\beta > 0$, односно наниже за $\beta < 0$. Особине:

- $D: \forall x \in \mathbb{R}$.
- График задате функције је парабола са теменом $T(\alpha, \beta)$.
- Није ни парна ни непарна за $\alpha \neq 0$.
- Функција расте ($y \nearrow$) за $x \in (\alpha, +\infty)$, а опада ($y \searrow$) за $x \in (-\infty, \alpha)$.
- $y_{min} = 0$, за $x = \alpha$ и $a > 0$, а $y_{max} = 0$, за $x = \alpha$ и $a < 0$.
- Остале особине зависе од вредности параметара $a,\ \alpha$ и β.

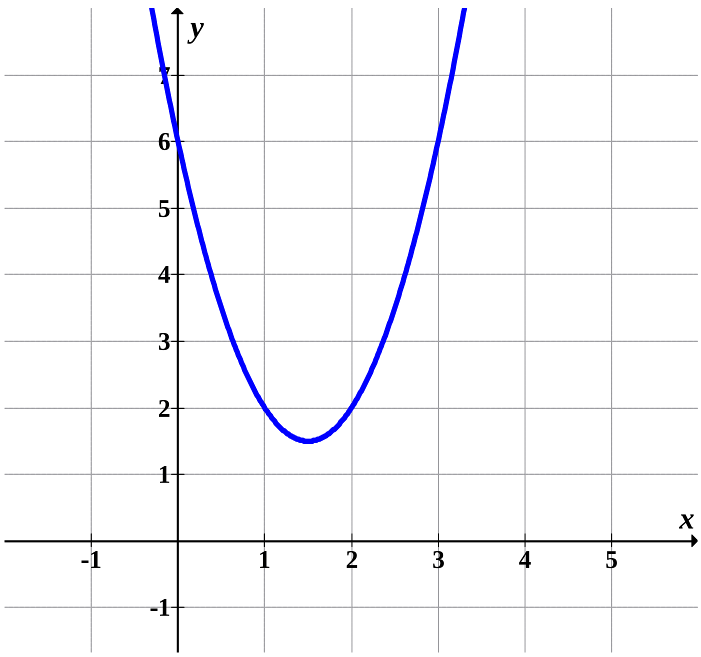


Слика 24: Квадратна функција $y = x^2$ (црвена парабола) и $y = a \cdot (x - \alpha)^2 + \beta$, за $a > 0$, $\alpha > 0$ и $\beta < 0$ (плава парабола)

3.6.3.6. Ток и график функције $y = ax^2 + bx + c$

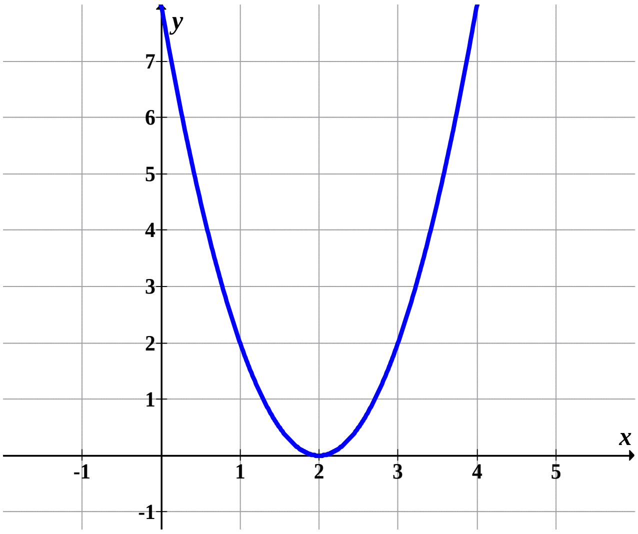
Да ли парабола сече x–осу, тј. да ли функција има нуле, зависи од коефицијената a и од дискриминанте $D = b^2 - 4ac$ одговарајуће квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$. На основу изложеног, закључујемо да је понашање квадратне функције и облик и положај њеног графика у координатном систему одређен коефицијентима, при чему знак коефицијента a и знак дискриминанте квалитативно одређују изглед параболе (да ли је окренута отвором нагоре или надоле; да ли сече Ox-осу у две тачке, да ли додирује Ox-осу у једној тачки или нема заједничких тачака са осом – Ox). С обзиром на знак коефицијента a и знак дискриминанте, разликујемо шест основних случајева.

1. $\boldsymbol{a > 0,\ D < 0}$. Функција је дефинисана за све $x \in \mathbb{R}$. Функција нема нула и позитивна је за све вредности x. Опада за $x < -\frac{b}{2a}$, расте за $x > -\frac{b}{2a}$. Реалан број $-\frac{b}{2a}$ је тачка минимума; минимум је величина $\frac{4ac-b^2}{4a}$. График је скициран на слици 25.



Слика 25: График функције $y = ax^2 + bx + c$, за $a > 0,\ D < 0$

2. $\boldsymbol{a > 0,\ D = 0}$. Функција је дефинисана за све $x \in \mathbb{R}$. Има једну нулу кад је $x = -\frac{b}{2a}$, позитивна је за све $x \neq -\frac{b}{2a}$. Опада за $x < -\frac{b}{2a}$, расте за $x > -\frac{b}{2a}$. Реалан број $-\frac{b}{2a}$ тачка минимума; минимум је 0. График функције скициран је на слици 26.

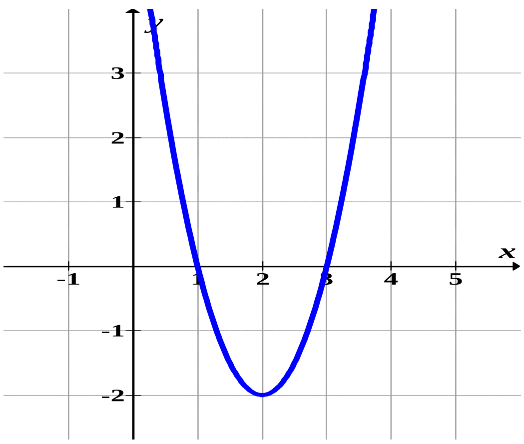


Слика 26: График функције $y = ax^2 + bx + c$, за $a > 0,\ D = 0$

3. $\boldsymbol{a > 0,\ D > 0}$**.** Функција је дефинисана за све $x \in \mathbb{R}$. Има две нуле; то су реални бројеви:

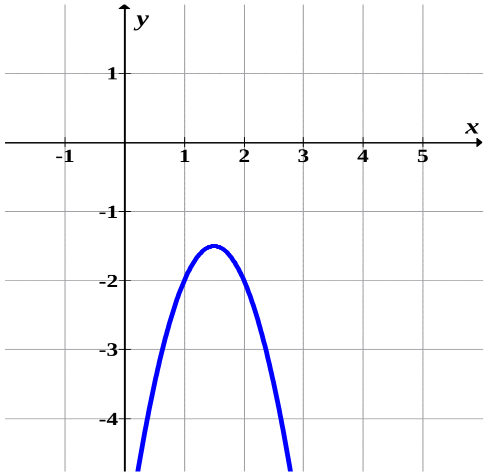
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Позитивна је за реалне бројеве x који задовољавају $x < x_1$ или $x > x_2$; негативна је за реалне бројеве x који задовољавају $x_1 < x < x_2$. Опада за $x < -\frac{b}{2a}$, расте за $x > -\frac{b}{2a}$. Реалан број $-\frac{b}{2a}$ је тачка минимума; минимум је $\frac{4ac-b^2}{4a}$. График функције скициран је на слици 27.



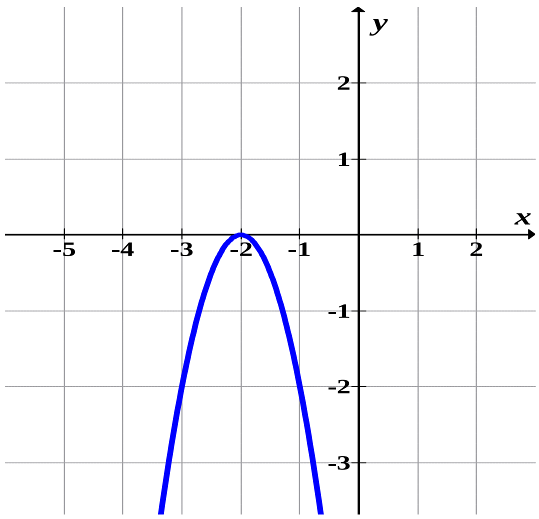
Слика 27: График функције $y = ax^2 + bx + c$, за $a > 0,\ D > 0$

4. $\boldsymbol{a < 0,\ D < 0.}$ Функција је дефинисана за све $x \in \mathbb{R}$. Функција нема нула и негативна је за све вредности x. Расте за $x < -\frac{b}{2a}$, опада за $x > -\frac{b}{2a}$. Реалан број $-\frac{b}{2a}$ је тачка максимума; максимум је величина $\frac{4ac-b^2}{4a}$. График је скициран на слици 28.



Слика 28: График функције $y = ax^2 + bx + c$, за $a < 0,\ D < 0$

5. $\boldsymbol{a < 0,\ D = 0.}$ Функција је дефинисана за све $x \in \mathbb{R}$. Има једну нулу кад је $x = -\frac{b}{2a}$, негативна је за све $x \neq -\frac{b}{2a}$. Расте за $x < -\frac{b}{2a}$, опада за $x > -\frac{b}{2a}$. Реалан број $-\frac{b}{2a}$ тачка максимума; максимум је 0. График функције скициран је на слици 29.

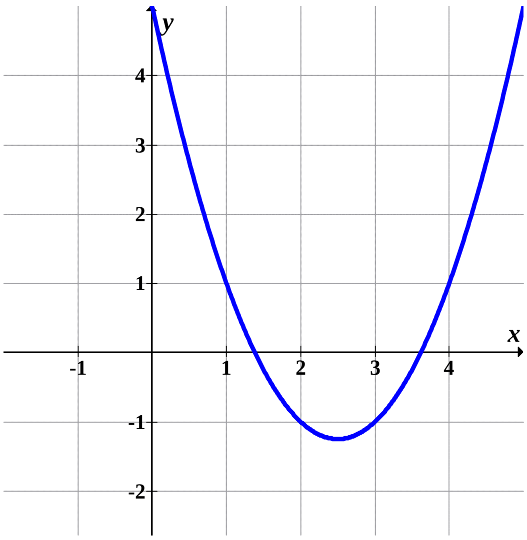


Слика 29: График функције $y = ax^2 + bx + c$, за $a < 0,\ D = 0$

6. $\boldsymbol{a < 0,\ D > 0.}$ Функција је дефинисана за све $x \in \mathbb{R}$. Има две нуле; то су реални бројеви:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

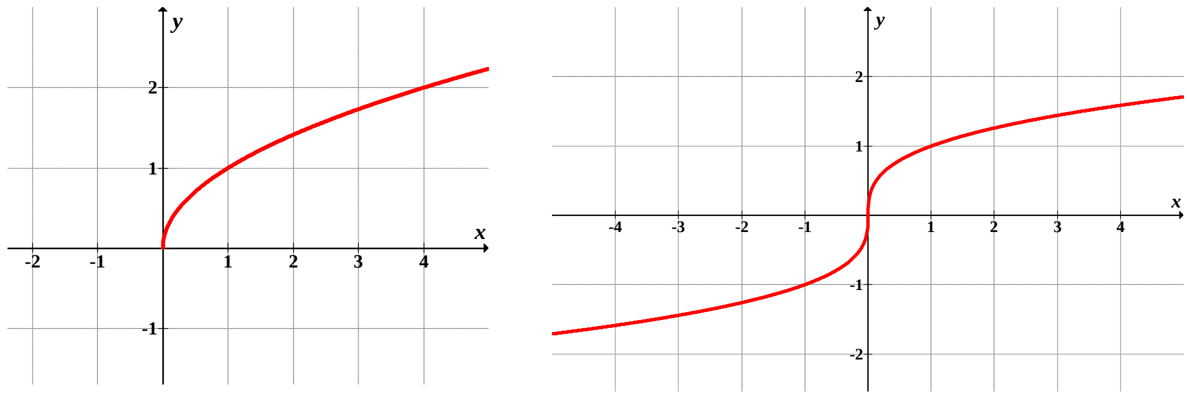
Позитивна је за реалне бројеве x који задовољавају $x_1 < x < x_2$; негативна је за реалне бројеве x који задовољавају $x < x_1$ или $x > x_2$. Расте за $x < -\frac{b}{2a}$, опада за $x > -\frac{b}{2a}$. Реалан број $-\frac{b}{2a}$ је тачка максимума; максимум је $\frac{4ac-b^2}{4a}$. График функције скициран је на слици 30.



Слика 30: График функције $y = ax^2 + bx + c$, за $a < 0,\ D > 0$

3.6.3. Функција облика $\boldsymbol{y = \sqrt[n]{x}}$ и њен график

Код функције облика $y = \sqrt[n]{x}$, где $n \in \mathbb{N}$, разликујемо два случаја, (*Огњановић, Ивановић*, 2005) ,када је n парно и када је n непарно. Када је n парно, функција $y = \sqrt[n]{x}$ је дефинисана за $x \geq 0$, односно $x \in [0, +\infty)$ (слика 31). А када је n непарно, функција $y = \sqrt[n]{x}$ је дефинисана за $\forall x \in \mathbb{R}$ (слика 32).



када је n парно

када је n непарно

Слика 31: График функције $y = \sqrt[n]{x}$

3.6.4. Експоненцијална функција и њен график

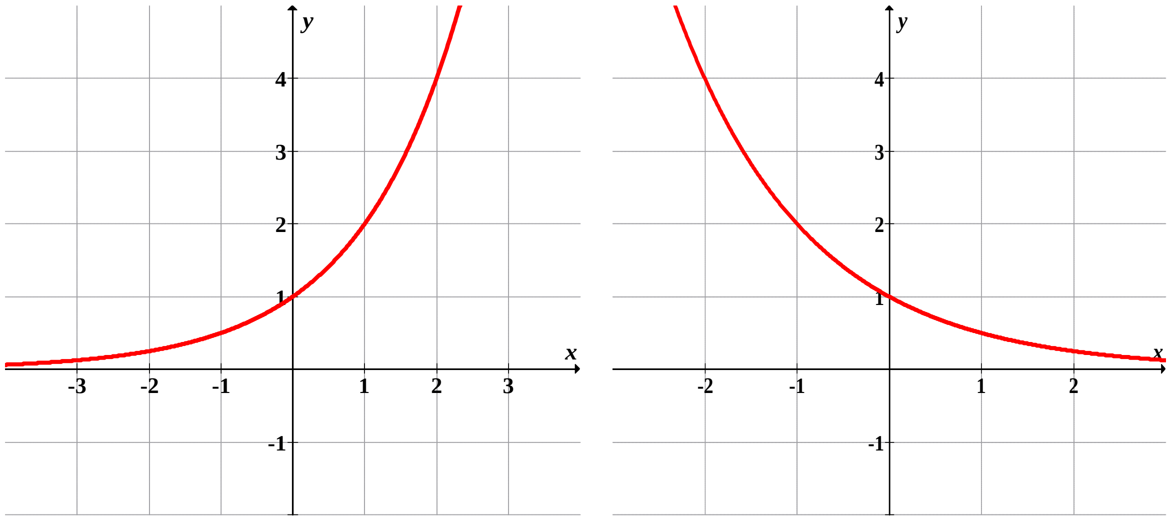
Експоненцијална функција је једна од најважнијих функција у математици. Означава се као $exp(x)$ или e^x, при чему је е приближно једнак 2.71828183, што је заправо Неперова константа[3], основа природног логаритма.

Експоненцијална функција је реална функција једне променљиве, дефинисана за све реалне бројеве, која је увек позитивна и растућа. Никада не додирује x-осу, мада јој је x-оса једина асимптота. Њена инверзна функција, природни логаритам, је дефинисана само за позитивне вредности променљиве x. Понекад се, нарочито у науци, израз експоненцијална функција користи да означи функцију облика a^x, где је a, које се назива база или основа, било који позитиван реалан број.

Дефиниција 3.6.4.1. Функција $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ дефинисана за свако $a > 0$, и за сваки реалан број x се назива *експоненцијална функција* за основу a.

Приметимо да горња једнакост важи за $a = e$, пошто је $e^{x \cdot \ln e} = e^{x \cdot 1} = e^x$.

[3] Број e, познат као Ојлеров број или Неперова константа, је основа природног логаритма и један од најзначајнијих бројева у савременој математици, поред неутрала сабирања и множења 0 и 1, имагинарне јединице број i и броја π. Осим што је ирационалан и реалан, овај број је још и трансцедентан. Овај број износи приближно: $e \approx 2{,}71828182845904523536\ldots$



$a > 1$ $\qquad\qquad$ $0 < a < 1$

Слика 32: Експоненцијална функција $y = a^x$

Основна својства експоненцијалне функције $y = a^x$:

~ Функција је свуда дефинисана $\forall x \in \mathbb{R}$

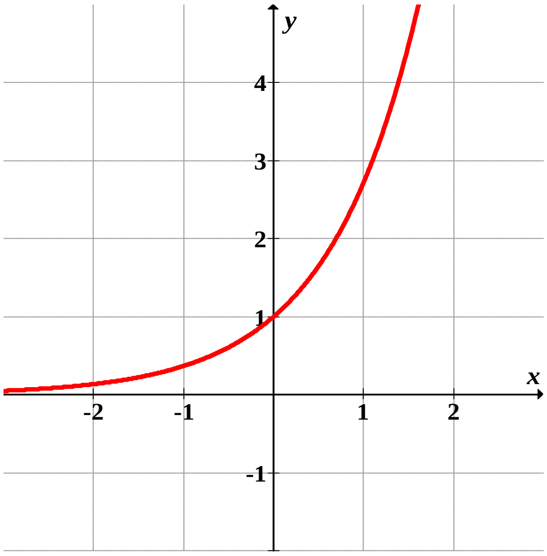
~ За $x = 0$ је $y = a^0 = 1$ па функција пролази кроз тачку $(0, 1)$ и ту сече y–осу.

~ Ако је $a > 1$ функција је растућа $(y \nearrow)$, а за $0 < a < 1$ функција је опадајућа $(y \searrow)$.

~ Функција $y = a^x$ је увек позитивна, тј. график је изнад x–осе.

~ Важе и следећа своства:

$$\left.\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x \cdot a^y \\ a^{x-y} &= \frac{a^x}{a^y} \\ (a^x)^y &= a^{x\cdot y} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ Где су } a > 0,\, b > 0,\, x, y \in \mathbb{R}$$



Слика 33: Експоненцијална функција $y = e^x$

3.6.5. Логаритамска функција и њен график

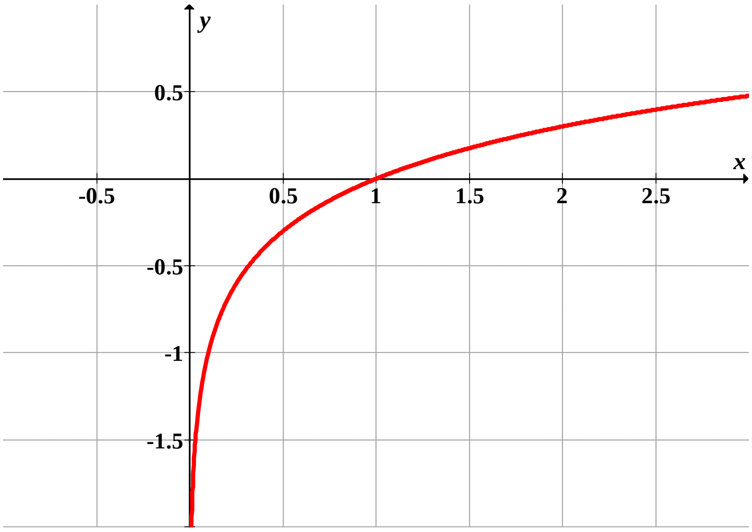
Логаритамска функција је облика $y = \log_a x, \quad x > 0, \quad a > 0 \ \wedge \ a \neq 1.$ Логаритамска функција је инверзна експоненцијалној функцији, односно важи:

$$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y.$$

Област дефинисаности логаритамске функције је интервал $(0, +\infty)$. Ову функцију дефинисали су шкотски математичари Непер и Бригз почетком 17. века.

За $a > 1$, функција је монотоно растућа, негативна за $x \in (0, 1)$ и позитивна за $x \in (1, +\infty)$ (слика 35). Нула функције је тачка $(1, 0)$.

За $0 < a < 1$, функција је монотоно опадајућа, негативна за $x \in (1, +\infty)$ и позитивна за $x \in (0, 1)$ (слика 36). Нула функције је тачка $(1, 0)$.



Слика 34: Логаритамска функција $y = \log_a x$, за $a > 1$

Слика 35: Логаритамска функција $y = \log_a x$, за $0 < a < 1$

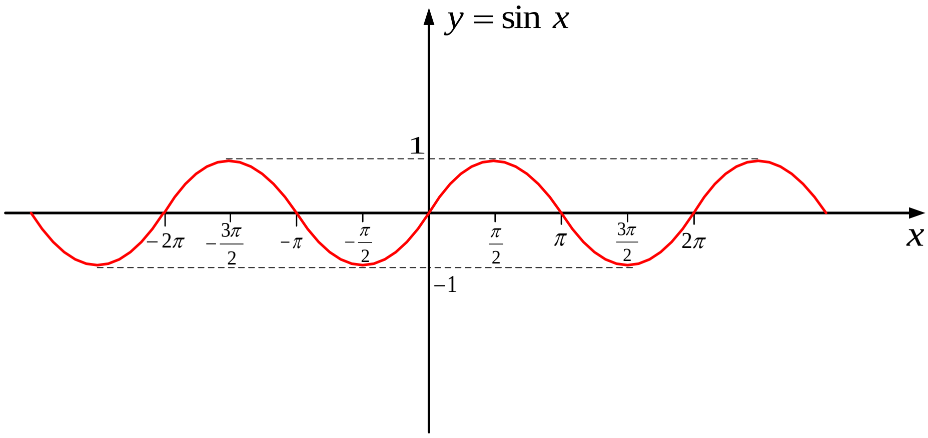
3.6.6. Тригонометријске функције и њихов график

Тригонометријске функције су функције угла. Добиле су име по грани математике која их користи за решавање троуглова, а која се назива тригонометрија. Када је угао, односно аргумент ових функција реалан број, тада су то функције равнинске тригонометрије: синус и косинус, од којих се изводе све остале. Од осталих основних функција угла често су у употреби тангенс и котангенс, затим, мало ређе се срећу косеканс и секанс, и коначно најређе синус версус и косинус версус. Када је угао комплексан број тада функције угла могу прећи у хиперболичке функције. Инверзне тригонометријске функције зову се циклометријске функције и аркус-функције, то јест функција$^{-1}$.

3.6.6.1. График функције $y = \sin x$

Синус је тригонометријска функција. Дефинише се као однос хипотенузе и наспрамне катете неког одговарајућег правоуглог троугла који је изграђен над датим углом, чији се синус одређује.

График функције $y = \sin x$, или синусоида је график тригонометријске функције у правоуглом Декартовом систему координата. На координатном систему (слика 36) по апсцисној оси одмеримо једнаке отсечке: од -2π до 0, од 0 до $+2\pi$, од $+2\pi$ до $+4\pi$, и тако даље.



Слика 36: График функције $y = \sin x$

x	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	π	$\searrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	2π
$\sin x$	0		1		0		-1		0

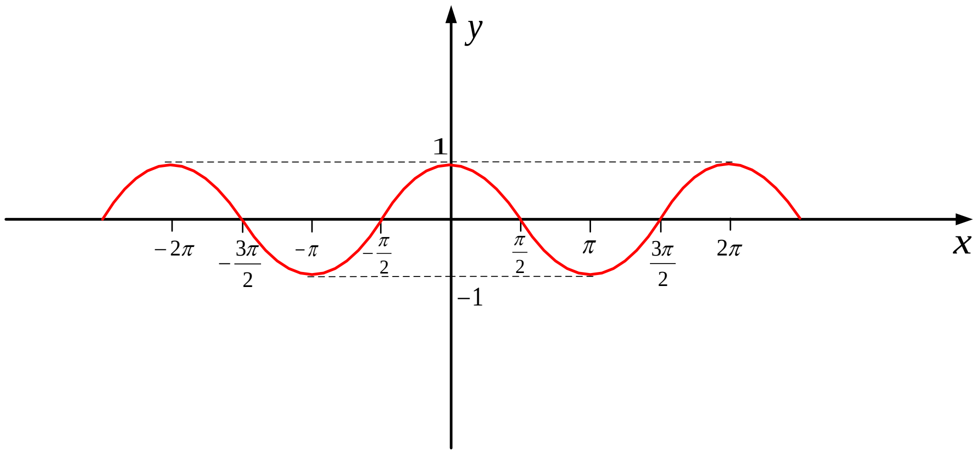
Дакле, функција $\sin x$ је дефинисана за свако x, то јест $x \in (-\infty, \infty)$. Скуп вредности функције је интервал $[-1,\ 1]$, односно функција је ограничена $-1 \le \sin x \le 1$. $\sin x$ је периодична функција са основном периодом 2π. Нуле функције су $x = 0, x = \pm\pi, x = \pm 2\pi, \ldots$ или што можемо записати, узимајући у обзир периодичност, као $x = k\pi$, при чему је $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Максималне вредности функције су у $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$, односно $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Минималне вредности функције су у $-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \ldots$, односно $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. $\sin x$ расте у интервалима $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, а опада у интервалима $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. Функција је позитивна, $\sin x > 0$, за $x \in (2k\pi,\ (2k+1)\cdot\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Функција је негативна, $\sin x < 0$, за $x \in \big((2k-1)\cdot\pi, 2k\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ове основне особине могу се представити и прегледније:

- Функција $y = \sin x$ је непарна,
- Домен: $(-\infty, \infty)$, односно $x \in \mathbb{R}$.
- Кодомен: $[-1,\ 1]$.
- Период: $T = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Нуле $(y = 0)$: $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Локални максимуми: $\left(\left(2k + \frac{1}{2}\right)\cdot\pi,\ 1\right)$, тј. $y_{max} = 1$, за $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Локални минимуми: $\left(\left(2k - \frac{1}{2}\right)\cdot\pi,\ -1\right)$, тј. $y_{min} = -1$, за $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Превоји: $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Улазак у нулу под углом: $\frac{\pi}{4}$.

3.6.6.2. *График функције* $y = \cos x$

Косинус је тригонометријска функција која се за неки угао дефинише као однос дужина хипотенузе и припадајуће катете над њиме конструисаног правоуглог троугла. График функције $y = \cos x$, или косинусоида је такође синусоида, паралелно померена по x оси за $-\frac{\pi}{2}$.

Поступак за добијање овог графика исти је као и за синусоиду, али напоменимо одмах да ова крива линија неће пролазити кроз координатни почетак, јер је $\cos 0^\circ = 1$. Како је $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, и тако даље. Из слике се види да је крива иста као синусоида, али само померена паралелно дуж апсцисне осе за $\frac{\pi}{2}$. То потврђује и следећа једнакост: $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.



Слика 37: График функције $y = \cos x$

x	0	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	π	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	2π
$\cos x$	1		0		-1		0		1

Функција $\cos x$ је дефинисана за свако x, то јест $x \in (-\infty, \infty)$. Скуп вредности функције је интервал $[-1,\ 1]$ односно функција је ограничена $-1 \leq \cos x \leq 1$. $\cos x$ је периодична функција са основном периодом 2π. Нуле функције (места где график сече x осу) су $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $x = \pm\frac{3\pi}{2}$, $x = \pm\frac{5\pi}{2}$,..., или што можемо записати, узимајући у обзир периодичност, као $x = (2k-1)\cdot\frac{\pi}{2}$, при чему је $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Максималне вредности функције су у $-2\pi, 0, 2\pi, \ldots$, односно $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Минималне вредности функције су у $-3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \ldots$, односно $x = (2k+1)\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. $\cos x$ расте у интервалима $[(2k-1)\cdot\pi,\ 2k\pi]$, а опада у интервалима $[2k\pi,\ (2k+1)\cdot\pi],\ \ k \in \mathbb{Z}$. Функција је позитивна, $\cos x > 0$, за $x \in \left((4k-1)\cdot\frac{\pi}{2},\ (4k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Функција је негативна, $\cos x < 0$, за $x \in \left((4k+1)\cdot\frac{\pi}{2},\ (4k+3)\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ове основне особине могу се представити и прегледније:

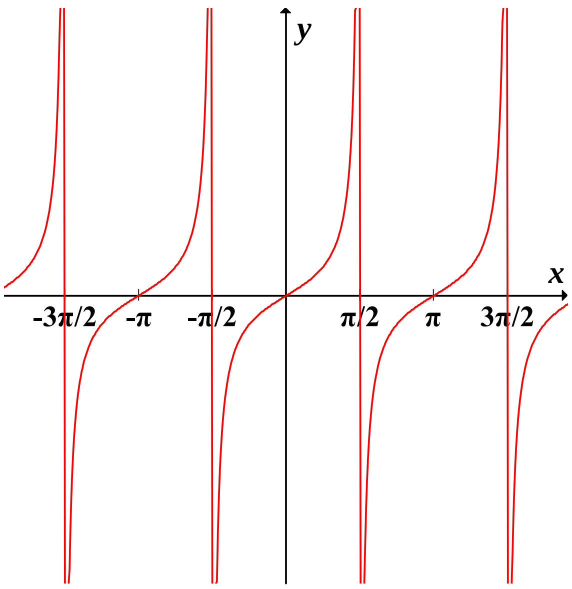
- Функција $y = \cos x$ је парна.
- Домен: $x \in (-\infty, \infty)$, односно $x \in \mathbb{R}$.
- Кодомен: $[-1,\ 1]$.
- Период: $T = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

- Нуле ($y = 0$): $x = \left(2k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Локални максимуми: $(2k\pi,\ 1)$, тј. $y_{max} = 1$, за $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Локални минимуми: $\big((2k + 1) \cdot \pi,\ -1\big)$, тј. $y_{min} = -1$, за $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Превоји: $\left(2k + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$.

3.6.6.3. График функције $y = tg\, x$

Функција $y = \operatorname{tg} x$ $\left(\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}\right)$ је дефинисана за свако $x \in \mathbb{R}$, изузев у тачкама $x = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, у овим тачкама има вертикалне асимптоте, а скуп вредности функције је $\mathbb{R}$. Основне особине:

- Функција $y = \operatorname{tg} x$ је непарна.
- Периодична са основним периодом: $T = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Нуле ($y = 0$): $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Функција је монотоно растућа за $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

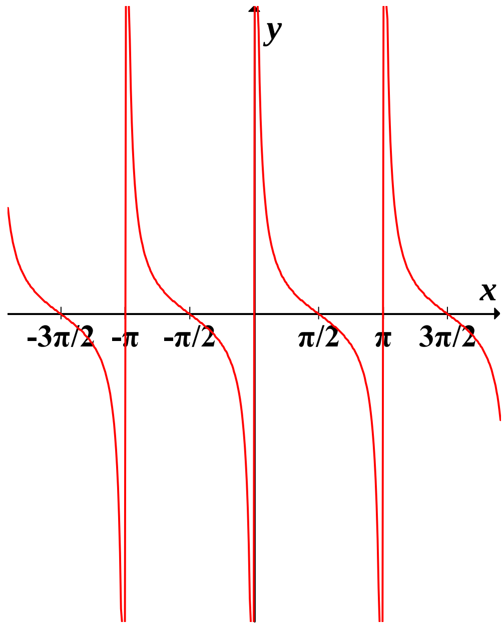


Слика 38: График функције $y = \operatorname{tg} x$

3.6.6.4. График функције $y = ctg\, x$

Функција $y = \operatorname{ctg} x$ $\left(\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}\right)$ је дефинисана за свако $x \in \mathbb{R}$, изузев у тачкама $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, у овим тачкама има вертикалне асимптоте, а скуп вредности функције је $\mathbb{R}$. Основне особине:

- Функција $y = \operatorname{ctg} x$ је непарна.
- Периодична са основним периодом: $T = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Нуле $(y = 0)$: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Функција је монотоно опадајућа за $x \in (\pi k,\ \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$.



Слика 39: График функције $y = \operatorname{ctg} x$

3.6.7. Инверзне тригонометријске функције и њихов график

Инверзне тригонометријске функције називају се *циклометријске* или *аркус* функције.

Аркус синус. Функција $f(x) = \sin x$ нема инверзну функцију, јер није бијекција. На пример, сви бројеви облика $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ пресликавају се овом функцијом у број 1.

Међутим, посматрајмо рестрикцију функције $f(x)$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и, тј. функцију $f_1\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ где је $f_1(x) = \sin x$.

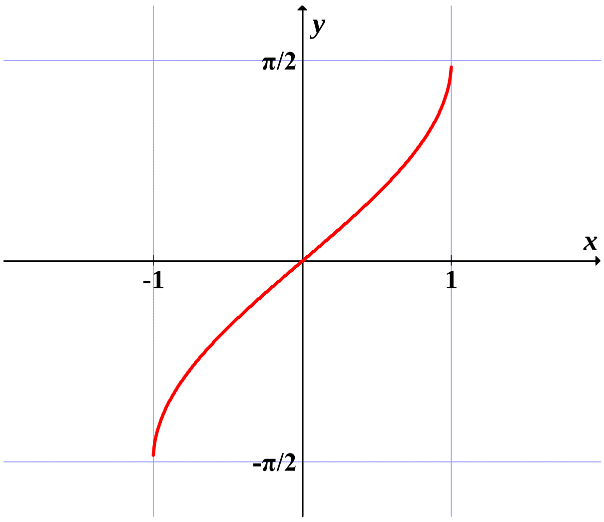
Функција $f_1(x)$ је растућа функција, па постоји њена инверзна функција $f_1^{-1}\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ и која се назива аркус синус и означава се са $f(x) = \arcsin x$. График функције $y = \arcsin x$ симетричан је графку функције у односу на праву $y = x$. Основна својства функције $f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1,1]$ су:

~ Функција $f(x) = \arcsin x$ је непарна, тј. важи: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $x \in [-1,1]$.

~ Функција је позитивна за $x \in (0,1]$ и негативна за $x \in [-1,0)$.

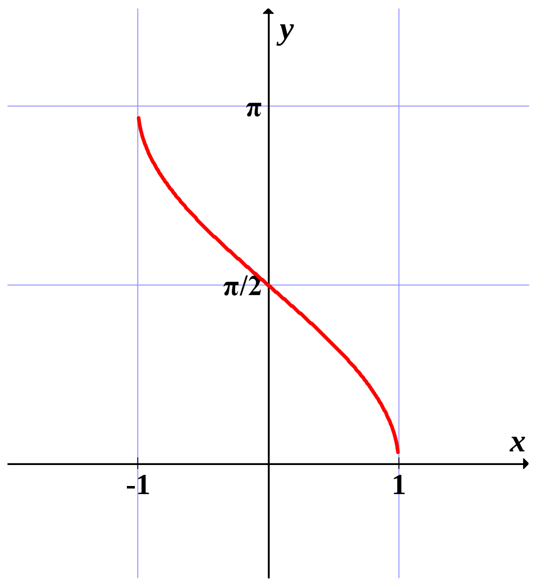
~ Нула функција је $x = 0$.

~ Функција је монотоно растућа.



Слика 40: График функције $y = \arcsin x$

Аркус косинус. Функција $g_1\colon [0,\ \pi] \to [-1,1]$, $g_1(x) = \cos x$, $x \in [0,\pi]$ је непрекидна и опадајућа. Њена инверзна функција $g_1^{-1}\colon [-1,1] \to [0,\pi]$, $g(x) = \arccos x$, $x \in [-1,1]$ је такође непрекидна и опадајућа. Графк функције $y = \arccos x$ приказан је на следећој слици.



Слика 41: График функције $y = \arccos x$

Основна својства функције $g(x) = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$ су:

~ Функција $g(x) = \arccos x$ ни парна ни непарна, тј. важи: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $x \in [-1, 1]$.

~ Функција је позитивна за $\forall x \in [-1, 1]$.

~ Нула функција је $x = 1$.

~ Функција је монотоно опадајућа.

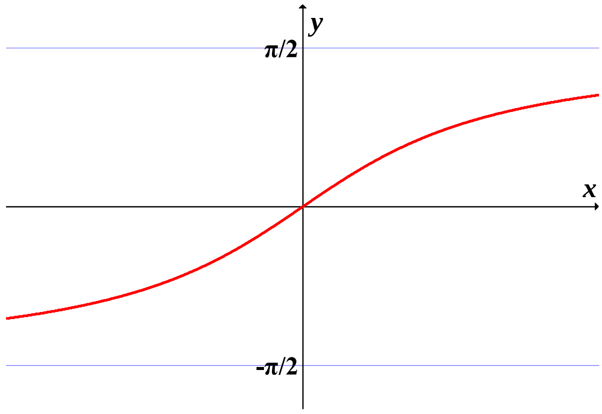
Аркус тангенс. Функција $h_1 \colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $h_1(x) = \operatorname{tg} x$, где $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, је непрекидна и растућа функција, па постоји њена инверзна функција $h_1^{-1} \colon \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и која се назива аркус тангенс и означава се са $h(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ је такође непрекидна и растућа. Основна својства функције $h(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ су:

~ Функција $h(x) = \operatorname{arctg} x$ је непарна, тј. важи: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

~ Функција је позитивна за $x > 0$ и негативна за $x < 0$.

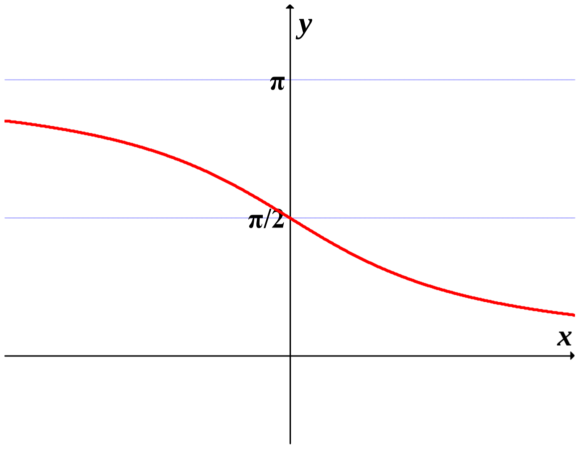
~ Нула функција је $x = 0$.

~ Функција је монотоно растућа.



Слика 42: График функције $y = \operatorname{arctg} x$

Аркус котангенс. Функција $k_1\colon [0,\ \pi] \to \mathbb{R}$, $k_1(x) = \operatorname{ctg} x$, $x \in [0, \pi]$ је непрекидна и опадајућа. Њена инверзна функција $k_1^{-1}\colon \mathbb{R} \to [0, \pi]$, $k(x) = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ је такође непрекидна и опадајућа. Графк функције $y = \operatorname{arcctg} x$ приказан је на следећој слици.



Слика 43: График функције $y = \operatorname{arcctg} x$

Основна својства функције $k(x) = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ су:

~ Функција $k(x) = \operatorname{arcctg} x$ ни парна ни непарна, тј. важи: $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

~ Функција је позитивна за $\forall x \in \mathbb{R}$.

~ Функција нема нуле.

~ Функција је монотоно опадајућа.

IV. СТУДИЈА СЛУЧАЈА

4.1. Ефекти графичког приступа на учениково разумевање алгебрских функција

У овој студији проширили смо *O'Callaghan*-у студију о компјутерско-интензивној алгебри, тиме што смо користили његове компонентске способности и процес-објекат облик да истразимо ефекте наставног плана графичким приступом – где се користи TI-82 графички калкулатор. Ученици који су на часовима користили графички приступ функцијама боље су разумели и постигли су веома боље резултате сва четири дела *O'Callaghan*-овог испита из функција, него ученици који су на часовима користили традиционални приступом. Поред тога, нису се нашле значајне разлике између графичког и традиционалног приступа у утицају на крајњи испит из традиционалне алгебре или на процену става према математици.

Многи сматрају да је област „функција" једна од најцентралнијих области у математици, али ово је и једна од области који код ученика развија недовољно разумевања. Бројне студије (*Harvey, Waits & Demana,* 1995; *Mayes*, 1995; *Ruthven,* 1990) су испитивале ефекте технологије графикона (графичког приступа) и наставне планове у вези са графичким приступом разумевању функција. Ове студије су фокусирали углавном на успех ученика и показивале су да ученици који су користили технологију графика, на испитима из традиционалне аглебре, одрадили исто као и ученици без тих технологија, при том урадили су боље визуелне и графичке задатке.

Kieran (1993) је указивао на другу врсту истраживања где се ради више од самог простог показивања како технологија може помоћи ученицима да науче овакав материјал. Морамо више да уложимо у детаљну студију људског схватања у овој области. Теоретски облик „процес/објекат" би могао, и на најмањем нивоу, да нам помогне да одредимо те закључке. Што се тиче облика „процес/објекат", *Kieran* је мислио на онтологијску дуалност функција; то јест, функција може да се види на два начина: оперативни (као процес) и структурни (као објекат). Један од истразивача који је укључио ту дуалност облика „процес-објекат" у раду је био *O'Callaghan* (1998). *O'Callaghan* је проучавао ефекте наставног плана компјутерско – интензивне алгебре (*Computer – Intensive Algebra* (CIA)) (*Fey,* 1992) на учениково разумевање области функције, где је упоредио ученике који су користили CIA са ученицима који су радили по традиционалном наставном плану. Он је саставио испит из области функције да процени разумевање ученика из области функција. Питања на испиту су били створена да процене један од следећих аспеката области знања функције без коришћења графичких калкулатора:

1. моделовати реалну ситуацију користећи функцију,
2. превести (интерпретирати) функцију у смислу реалне ситуације,

3. тумачити различите приказе функције, и
4. опредметити функције.

Код опредмећивања мисли се на прелаз са оперативне на структурну фазу области функција. *O'Callaghan* (1998) је пронашао да су ученици који су користили CIA остварили боље целокупно разумевање функција него традиционални ученици и бољи су били у моделовању, превођењу и тумачењу, али није нашао разлике у задатаку опредмећивања, који је најтежи од сва четири аспекта овог теста из функција. Плус, *O'Callaghan* је користио ревидентну (реформисану) скалу става према математици (*Revised Mathematics Attitude Scale*) (*Aiken*, 1972; *Dutton*, 1962) и пронашао је да су ученици, који су под наставним планом CIA, значајно побољшали став према математици у току полугодишта.

Наш главни циљ у овој студији је да проширимо *O'Callaghan*-ову CIA студију и да користимо његов облик да истражимо и друге наставне планове, посебно наставни план са графичким приступом који користи TI-82 графички калкулатор. Хтели смо да видимо да ако су његови резултати утицали на четири аспекта његовог испита из области функције и на ревидентну скалу према математици, на који начин би важили и у другим наставним плановима који користе графичке калкулаторе. Специфичцно нас је интересовао састав опредмећивања. *Kieran* (1992) је написао да иако ученици ретко кад схвате стварни смисао структурне алгебре, графички софтвер би можда помогао у стварању структурне концепције. Хтели смо да утврдимо да ли графички приступ наставном плану уз коришћење графичког калкулатора олакшава опредмећивање области функција. Такође, хтели смо да испитамо успех ученика постигнут на испиту традиционалних алгебарских вештина и да утврдимо утицај графичког приступа наставном плану.

4.1.1. Методологија

4.1.1.1. Учцесници

У овој студији су учествовали ученици који су изучавали средњу алгебру. Овај узорак изабран је из велике школе где похађа од прилике 28000 ученика. Ученици који уче средњу алгебру су ученици који су добили најниже оцене на математичком пријемном испиту у тој школи. Укупно 90 ученика је учествовало у овој студији: 46 у експерименталној групи, а 44 у обичној групи.

4.1.1.2. Материјали

Књига из средње алгебре: „Графички приступ“ (*Hubbard* и *Robinson,* 1995) коришћена је, у складу са TI-82, на часовима у групи коју смо испитивали. У књизи се налази равнотежа између рада са графичким калкулатором и традиционалне алгебре, и укључује примере истраживања и откривања како да се помогне ученицима да реше проблем са перспективе мултипредстављања. Ученици су имали могућност да користе графичке калкулаторе на часовима, за домаће задатке и за испите, али нису смели да их користе за *O'Callaghan*-ов тест из функција или за крајњи традиционални испит.

Ученици који су били у обичној групи користили су књигу из средње Алгебре: „Концепти и Апликације“, четврто издање (*Bittinger, Keedy i Ellenbogen*, 1994), и радили су исте вежбе као ученици у испитивној групи, али књига је више нагласила памћење изолованих чињеница и процедура, и омогућавала је способност у калкулисању с папиром и оловком. Фокусирана је на упрошћавање и трансформисање израза и решавање једначина. Обична група, дакле, није имала приступ графичком калкулатору.

4.1.1.2.1. Графчки калкулатор

Графчки калкулатор (такође калкулатор графикона) обично се односи на класу ручних калкулатора који су у стању да цртају графике, решавају симултане једначине, затим обављају и бројне друге задатке са варијаблама. Најпопуларнији графчки калкулатори су, такође, програми, који омогућавају кориснику да креира прилагођене програме, обично за научне / инжењерске и едукативне апликације. Због својих великих екрана намењених графицима, на њих, такође, може да се унесе неколико редова текста и прорачуна у исто време. Неке од новијих графичких калкулатора који су у боји, а такође имају и интерактивни анимирани цртеж математичких графика (2D и 3D), и друге фигуре попут анимираних геометријских теорема, припреме докумената који могу да укључе ове цртежа и графике, итд. Графички калкулатори се користе чак и у средњим школама и факултетима. Постоје две категорије графичких калкулатора:

1. Нумерички (или само графички) калкулатори – и они приказују нумеричке резултате, највише представљене као разломак; и
2. CAS (или симболички) калкулатори – најнапреднији калкулатори, у стању су да прикажу симболичан резултат (у облику израза или једначине), обично користећи рачунарски алгебрски систем.

TI-82 је графчки калкулатор направљен од стране *Texas Instruments*. TI-82 је дизајниран 1993. године као замена за TI-81. То је директна претеча TI-83. Као и TI-81, карактеристика TI-82 је 96x64 пиксела, али са многим новим карактеристикама. TI-82 се напаја из истог процесора као и TI-85, 6 MHz Z80 микропроцесор CPU, за разлику од TI-81 који има 2 MHz Z80 процесор. Осим тога, расположива РАМ меморија је повећана више од десет пута - од 2400 до 28734 бајта (нешто више од TI-85). TI-82 је два пута редизајниран, први 1999. године и други пут 2001. Године. 1999. дизајн је био веома сличан TI-73, TI-83 плус, и TI-89. Уведен више у обликовању „тела“, тј. дизајна и елиминисан је закривљен екран који је уобичајен код TI графичких калкулатора почевши од TI-81. 2001. године (надимак TI-82 „*Parcus*“) представљен је мало другачији облик калкулатора, елиминисана је сјајна граница екрана, и био је јефтинији.

Слика 44: Графички калкулатор TI-82

4.1.1.3. Инструментизација

Тест из функција коју је створио и користио *O'Callaghan* (1995, 1998) је био намењен свим ученицима у овој студији као први испит на почетку полугодиштаа и последњи (завршни) испит на крају полугођа.

Овај испит је сачињен тако да се решава без могућности коришћења графичког калкулатора. Испит је састављен тако да је свако питање формулисано да се процени један од следећих аспеката знања из области функција:

1. моделовати реалну ситуацију користећи функцију,
2. превести функцију у смислу реалне ситуације,
3. тумачити различите облике представљања функције, и
4. опредметити функције.

Инструмент који је изабран да оцени способности традиционалне аглебре код ученика је последњи испит вишег одељења, испит са по 50 питања из алгебре. Испит је даван на сва четири часа у последњој недељи полугодишта, и ученици су имали 3 сата за израду испита.

Да би процени став ученика према математици, користики смо ревидентну скалу става према математици (*Revised Mathematics Attitude Scale*) (*Aiken,* 1972; *Dutton,* 1962) и пре и после испита, исто као што је то учинио и *O'Callaghan*. Овај инструмент је коришћен у неколико студија и сматра се као добар избор кад се истражује став према математици.

4.1.1.4. Студијска процедура

Успех код ученика који су користили TI-82 у графичком приступу наставном плану упоређен је са успехом ученика који су радили по традиционалним наставним методама у алгебре, користећи инструменте који су наведени горе. У балансу су била коришћена четири дела курса алгебре који траје једно полугодиште и два инструктора од којих је један водио часове експерименталне, а други часове обичане групе. Један од два јутарња часа и један од два после подневна часа изабрани су насумично, и ту се користио пробни наставни план. Ученици су се телефоном регистровали за часове помоћу компјутерског програма за заказивање. Очекивало се да популације часова буду сличне. Ученици експерименталне групе имали су прилику да се пребаце у обичну групу, чији час се држао у исто време, али нико није хтео.

Истраживачи су посматрали сваки експерименталан и обичан час на насумичној бази током полугодишта, и фокусирали су на понашање професора (наставника) и развијање наставе, али и на понашање ученика и на коришћење калкулатора. За сваки час, инструктори су заједно планирали и пратили исти план за учење, држећи се наставног плана тог градива (курса). Из интервјуа и посматрања истраживачи су дошли до закључка да инструктори нису имали склоност према ни једној врсти приступа.

Процедура описане статистике и анализа варијанти (ANOVA) употребљена је на резултате са првог испита *O'Callaghan*–ових функција и демографске варијабле да одреде почетне разлике између сва четири одељења у студији. Одељењски профили о типичним карактеристикама пружили су податке о полу ученика (мерено у проценту колико је било мушкараца), просечном узрасту, искуствима у математици (број претходних знања и курсева о алгебри), способности у математици (математицке SAT оцене), предвиђеној оцени у математици (PGM) прорачунатој по формули вишег одељења, и усменој способности (усмене SAT оцене).

Анализа ових карактеристика показала је да су се ученици сва четири одељења разликовали само по полу. Углавном је било више женских ученица, али је било више мушкараца него жена у експерименталној групи. Анализа оцене првог испита из функција није показала значајне разлике између претходног знања из области функција између те четири групе, и зато се није користила као варијанта у последњој анализи.

4.1.2. Резултати

4.1.2.1. O'Callaghan–ов испит (тест) из функција

Разумевање ученика из области функција у почетку је анализирано са MANOVA-ом, са четири саставне оцене (четири оцене из појединачних компоненти) и једној целокупној оцени на испиту из функција; дакле, и варијанте резултата са појединачних компоненти су додате овој анализи. Табла 4.1. показује просеке и стандардне девијације по испиту за сваку компоненту и за укупну оцену.

Табла 4.1.: Завршни тест из функција

КОМПОНЕНТЕ	**МАКСИМАЛАН РЕЗУЛТАТ**	**ЕКСПЕРИМАНТАЛНА**		**КОНТРОЛНА**	
		просек	стандардна девијација	просек	стандардна девијација
МОДЕЛОВАЊЕ	7	4.32	1.65	3.33	1.64
ИНТЕРПРЕТАЦИЈА	11	7.46	1.92	5.90	2.21
ПРЕВОЂЕЊЕ	9	5.05	2.26	3.64	2.21
ПОДПРЕДМЕТАЊЕ	10	4.20	1.89	2.74	0.29
УКУПНО	37	21.02	5.87	15.62	4.70

Експериментална група је имала веће просеке за сваку појединачну компоненту, а исто тако и за укупну оцену на испиту из функција. МАНВОА, $F(4,69) = 4.68$, је открио значајан ефекат на $\alpha = 0.01$ нивоу, што показује да експериментална група углавном имала значајно боље разумевање из области функција него обична група. Варијанте резултата АНОВ-е на четири појединачне компоненте показале су значајне разлике на $\alpha = 0.05$ нивоу у групи која је користила графички приступ за моделовање, превођење и тумачење, и разлике на $\alpha = 0.01$ нивоу за опредмећивање.

4.1.2.2. Завршни испит

Иако је експериментална група имала мало већу просечну оцену на овом испиту (која мери знање и вештине ученика из традиционалне алгебре), није се нашла значајна разлика између оцене експерименталне (испитиване) и контролне (обичне) групе. Иако су ученици једног инструктора имали мало већу просечну оцену од ученика другог инструктора, нису се нашле значајне разлике у главним ефектима инструктора или пола, или за интеракције између те три варијабле.

4.1.2.3. Став анкете

Завршни испит у вези анкете, који су ученици попунили на крају курса из алгебре, је показао да су ученици у експерименталној групи имали мало више позитивне ставове него ученици у обичној групи у вези математике и математичке способности. Међутим, није била значајна разлика између експерименталне и обичне групе, између инструктора, или између полова.

4.1.3. Закључци и дискусија

4.1.3.1. Тест (испит) из функција

Због доступности графичких калкулатора, наставни план графичким приступом укључује само примере и проблеме где може да се моделују стварне ситуације са функцијама, где би иначе требало превише времена или би било непрактично без графичких калкулатора. Тај калкулатор нуди кориснику могућност да брзо створи једначине, табле и графиконе, а и могућност да се брзо креће међу њима.

Тако, може да се закључи да је било једноставније ученицима који су радили по графичком приступу и користили TI-82 него ученицима који су радили по традиционалним методама кад раде са датом реалном ситуацијом. Преко полугодишта експериментална група се навикла да испитује график функције са неколико перспектива и према томе су постигли значајно боље резултате у превођењу и тумачењу питања него што су то учинили ученици који су радили по традиционалном приступу.

Резултати прве три компоненте су у складу са *O'Callaghan*-овим открићима са CIA наставним планом. Али, за компоненту опредмећивање, нашли смо значајну разлику између групе са графичким приступом и обичном групом, а *O'Callaghan* није нашао разлику. Оцене компонента опредмећивања које су биле најниже од све четири компоненте подједнако и за традиционалну и за експерименталну групу, показују тешкоћу у процесу опредмећивања, и овај процес укључује већи степен апстракције него остала три аспекта решавања функција. Опредмећивање је процес који се не може подучавити. Уместо тога, то је померање које укључује прелаз од оперативног до структурног знања концетпа. У *O'Callaghan*-овој студији CIA наставним планом, ученици су имали приступ графичкој технологији само у лабораторији. Ученици који су користили графички приступ имали су доступне графичке калкулаторе на сваком часу, а и за домаће задатке, и тако су имали више прилика да истраже ток функције и да испитују абстрактне апликације. Ова разлика у доступности графичке технологије може да објасни разлику у опредмећивању која је пронађена код ове две групе у овој студији, али не и у *O'Callaghan*-овој студији.

Значајне разлике у традиционалним вештинама алгебре нису пронађене између експерименталне и обичне групе. Може се рећи да ученици експерименталне групе који су користили графичке калкулаторе током полугодишта нису били спречени да користе рачунанске могућности. Није било очекивано да ће испит помоћу графичког калкулатора дати ученицима предност над ученицима који се баве традиционалним методама, јер је крајни испит фокусиран на израчунавање папиром и оловком, и манипулисање са поставањем и трансформисањем симболичких израза и решавање једначина. Ови резултати су донекле подударни са резултатима у *O'Callaghan*-овој (1998) студији. Иако је *O'Callaghan* нашао нижи ниво знања у симболичној мануиплацији код CIA ученика него код традиционалних ученика, он није нашао значајне разлике после корекције CIA ученикових нижих математичких способности на самом почетку. Ми смо пронашли да се ученици са графичким приступом наставном плану као целина нису разликовали од ученика са традиционалним приступом у ставу према математици, али *O'Callaghan* (1998) је нашао да су се ученици који користе наставни план CIA значајно побољшали ставове према математици током полугодишта.

4.1.3.2. Препоруке за будућа истраживања

Аргументи који се јављају „од свих области где будуће истраживање може профитабилно да се спроведе, једини који се издваја и где треба више пажње да се обрати, је то како наћи начине да се формулишу структурни концепти код ученика“ (*Kieran*, 1992). Треба да се настави акценат на истраживању да се пронађе начин како да се омогући транзиција од оперативне до структурне концепције код ученика. Истраживања у вези опредмећивања функција и остале области морају бити проширене. Студије су потребне како би се напредовало у сазнањима о томе каква је интеракција између структурне и процедуралне концепције када ученици раде алгебру у технолошком окружењу. Битно је простудирати како технологија позитивно и негативно утиче на развијање и структурне и процедуралне концепције.

V. ЗАКЉУЧАК

Образовање помоћу рачунара односи се на примену рачунара и информационих технологија у образовању. Последњих неколико година је почела масовна употреба рачунара. Информационе технологије се развијају невероватном брзином и њихова присутност у свим људским делатностима је све већа. Развој нових технологија омогућио је и њихову примену у образовном процесу. Модернизација образовног система је врло сложен процес. У земљама развијеног дела света одавно су се десиле крупне промене у процесу образовања. Они иду ка томе да се што више користе информационе технологије које постају део савременог образовања, од презентације садржаја помоћу специјализованих софтвера током извођења наставе, до учења тих садржаја индивидуално или у групи посредством одговарајућих софтверских платформи.

Најпогоднија за учење помоћу рачунара је математика. Примена рачунара у настави математике подразумева едукативно коришћење рачунара са специјалном математичком рачунарском подршком у настави. Ова специјална подршка се односи на оне програме који подржавају један или више математичких приказа (графичких, симболичких, табличних). То су разни програми динамичке геометрије, графички алати и друго. Постоји и низ програма који се користе у настави математике и зовемо их интерактивним алатима. То су програми намењени едукацији и садржај им може бити намењен учењу било ког предмета, па тако и математике. Коришћење цртежа и графичких приказа у настави олакшава тродимензионално приказивање објеката. Када се нека тродимензионална слика представља на папиру или табли, многим ученицима није сасвим јасна и разумљива. Увођењем информационих технологија у наставу овакви проблеми би се избегли. Израда цртежа, графика и табела би постала лакша и бржа. Док је у класичној настави могуће у току једног часа представити једва неколико графика функција, коришћењем информационих технологија би се добило на брзини, и тај број би се увећао.

Међутим, и поред бројних предности у коришћењу информационих технологија у графичким приказима функција и коришћењу графичких калкулатора (као на пример, код ових које су приказане у оквиру CASE студије), код нас су још увек присутна негативна мишљења везана за такав приступ настави, поред самог одржавања наставе на тај начин, ту је и битан финансијски фактор, везан за расположиви школски и државни буџет за набавку тих калкулатора.

Лично мислим да би се коришћењем ових графичких калкулатора допринело донекле усавршавању и разумевању одређених области у цртању и развоју графика, али би се ученици превише ослањали на тзв. компјутерско решавање проблема, те не би сами умели да изведу одређену графичку операцију без помоћи тих калкулатора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aiken, L. R., Jr., (1972): „*Research on attitudes in mathematics*“, The Arithmetic Teacher, 19, 229-234.

2. Bittinger, M. L., Keedy, M. L., & Ellenbogen, D., (1994): „*Intermediate algebra: Concepts and applications*“ (4th ed.), New York: Addison-Wesley.

3. Dutton, W. H., (1962): „*Attitude change of prospective elementary school teachers toward arithmetic*“, The Arithmetic Teacher, 9, 418-424.

4. Fey, J. T., (1992): „*Computer-intensive algebra: An overview of fundamental mathematical and instructional themes*“, Unpublished manuscript.

5. Harvey, J. G., Waits, B. K., & Demana, F. D., (1995): „*The influence of technology on the teaching and learning of algebra*“, Journal of Mathematical Behavior, 14, 75-109.

6. Hubbard, E., & Robinson, R. D., (1995): „*Intermediate algebra: A graphing approach*“, Lexington, MA: D. C. Heath.

7. Икодиновић, Н., Димитријевић, С., „*Математика 7, уџбеник*“, Клетт, Београд, 2010.

8. Икодиновић, Н., Димитријевић, С., „*Математика 8, уџбеник*“, Клетт, Београд, 2010.

9. Кечкић, Ј., (2010): „*Математика за 4. разред гимназије*“, Српска школа, Београд.

10. Kieran, C., (1992): „*The learning and teaching of school algebra*“. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 390-419). New York: Macmillan.

11. Kieran, C., (1993): „*Functionsg, raphing, and technology: Integrating research on learning and instruction*“, In T. A. Romberg, E . Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), Integrating research on the graphical representation of functions (pp.189-237). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

12. Марјановић, М., (1979): „*Математичка анализа I*“, Научна књига, Београд.

13. Mayes, R. L., (1995): „*The application of a computer algebra system as a tool in college algebra*“, School Science and Mathematics, 95, 61-68.

14. Миловановић, Г., Ђорђевић, Р., (2005): „*Математичка анализа I*“, Електронски факултет, Ниш.

15. Михаиловић, Д., Јанић, Р.Р., (1985): „*Елементи математичке анализе I*“, Научна књига, Београд.

16. O'Callaghan, B. R., (1995): „*The effects of computer-intensivea lgebrao n students' understanding of the function concept*“ (Doctoral dissertation, Louisiana State University, 1994). Dissertation Abstracts International, 55, 3440A.

17. O'Callaghan, B. R., (1998): „*Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions*“, Journal for Research in Mathematics Education, 29, 21-40.

18. Огњановић, С., Ивановић, Ж., (2005): „*Математика 4: Збирка задатака и тестова за IV разред гимназија и техничких школа*“, Круг, Београд.

19. Пандић, И., Илић-Дајовић, М., (1976): „*Математика за III разред гимназије природно математичког смера*“, Београд.

20. Rudin, W., (1976): „*Principles of Mathematical Analysis*“, McGraw-Hill, New York.

21. Ruthven, K., (1990): „*The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms*“, Educational Studies in Mathematics, 21, 431-450.

22. Чапрић, Г., (2011): „*Образовани стандарди за крај обавезног образовања*“, Министарство просвете Републике Србије, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, Београд.

23. www.matematiranje.com

БИОГРАФИЈА

Мирјана Никшић је рођена 08.09.1983. године у Београду. Средњу школу, XIII Београдску гимназију у Београду, смер природно – математички, завршила је са одличним успехом. На Факултету организационих наука, у Београду, на одсеку операциони менаџмент, дипломирала је 2007. године, а мастер студије на Факултету организационих наука завшила је 2009. Била је ангажована на Факултету организационих наука, као сарадник на предмету „Планирање и припрема производње", на одсеку операциони менаџмент. Од марта 2010 године ради као наставник Математике најпре у основној школи „Бранко Радичевић" у Моштаници, а потом од октобра 2010 године у основној школи „Душко Радовић" у Сремчици, од 2011, поред Математике, ангажована је и као наставник Информатике и рачунарства. 2010 године уписује мастер на Математичком факултету, смер Професор математике и рачунарства, уз одређену допуну испита са основних студија.