УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

МАСТЕР РАД

УТИЦАЈ РАЗВОЈА МАТЕМАТИЧКИХ КОМПЕТЕНЦИЈА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА НА ЊИХОВ УСПЕХ НА СТУДИЈАМА

Ментор: **Студент:**

проф. др Милан Божић **Јелица Шијаковић, дипл. мат.**

Београд, септембар 2013.

Ментор:

проф. др Милан Божић

Комисија:

проф. др Александар Липковски

мр Иван Анић

Садржај

Увод

Компетенција једног друштва и компетентност наставника међусобно су испреплетани. Почевши од врха ове хијерархије може се утврдити да компетенција једног друштва почива на образовању једног грађана. Између друштва и компепетенција грађана постоји школски систем и наставници као својствени посредници. У свему томе посебну улогу имају факултети који образују наставнике који потребна знања и вештине треба да пренесу новим генерацијама ученика.

Основно истраживачко питање којим се овај рад бави односи се на утицај развоја математичких компетенција ученика средњих школа на њихов успех на факултету, односно вишој школи.

У уводном делу описани су основи појмови који ће се користити током рада. Појмови математичке писмености, математичкичке компетенције и вештине ће бити детаљно објашњени.

Главни део рада представља истраживање које је спроведено као и резултати свакогод њих. Истраживање је спроведено у три независна дела.

У првом делу истраживања узорак чине ученици Земунске гимназије, где се испитују њихови постигнути успеси на писменим задацима из математике и на тај начин се проверава колико је развијена математичка компетенција у Земунској гимназији. У раду су дати задаци који су рађени на писменим проверама знања, као и грешке које су ученици најчешће правили у њиховој изради.

У другом делу истраживања узорак чине студенти математичког факултета и он је реализован анализом постигнутих резултата на тестовима где се проверавало познавање градива из основне и средње школе. Табеларно и графички су дати успеси ученика на тестовима који су радили у оквиру предмета Праксе. Поред успеха, дате су и грешке које су правили студенти четврте године Математичког факултета.

У трећем делу истраживања студенсти Високе грађевинске школе су били узорак. Анализирани су: њихов успех из срење школе, постигнути резултати на пријемном испиту и резултати испита из математике у јануарском, фебруарском и јунском испитном року.

1. Математичка писменост

Математичка писменост је капацитет појединца да идентификује и разуме улогу коју математика игра у савременом свету, да изведе добро засноване математичке процене и да се ангажује у математици тако да задовољи своје садржаје и будуће потребе као констуктивног, заинтересованог и рефлексивног грађанина. (EOCD , 1999)

Математичка писменост је дефинисана као способност препознавања математичких проблема, разумевања и ангажмана у математици као и стварање добро утемељених закључака о улози математике потребних у садашњем и будућем, личном, пословном и друштвеном животу са вршњацима и члановима породице у животу као конструктивног, заинтересованог и промишљеног грађанина.

Да би се та дефиниција превела у процену математичке писмености, утврђене су три широке димензије:

- *Математички садржај,* дефинисан углавном с обзиром на опште математичке појмове на којима се заснива математичко мишљење (као што су вероватноће, промена и раст, простор и облици, логичко закључивање, односи независности и зависности), као и споредно везано за наставне садржаје (као што су бројеви, алгебра и геометрија). PISA организује математички садржај на основу феноменолошког приступа описујући садржај с обзиром на феномен и врсте проблема за који је створен под називом „свеобухватни појмови“. Извршен је избор „свеобухватних појмова“ који ће обухватати разноврсност и дубину да се покаже неопходност математике и који ће истовремено представљати или обухватати конвенционалне математичке курикулумске целине на прихватљив начин. Следећи „свеобухватни појмови“ задовољавали су тај предуслов: промена и односи, простор и облици, количина те неизвесности.
- *Математички процеси* дефинисани општим математичким компетенцијама. Оне обухватају коришћење математичког језика, моделирање и вештине решавања проблема. Међутим, циљ није раздвојити ове вештине у различита питања, будући да се птетпоставља да ће за решавање било ког математичког задатка бити потребан широк спектар компетенција. Уместо тога, питања су организована на три групе компетенција које дефинишу тип потребне вештине мишљења:

1) Прва група математичких компетенција (репродукција, дефиниција и рачунање) обухвата процесе који се најчешће процењују у конвенционалним математичким тестовима. Реч је о познавању чињеница, извођењу једноставних рачунских радњи, присећању дефиниција, примени стандардних алгоритама или препознавању еквивалената.

2) Процеси друге групе компетенција (повезивање и интеграција за решавање проблема) започињу стварањем веза између различитих грана и подручја математике и интегришу податке да би се решили једноставни проблеми. Унутар ове групе компетенција од ученика се очекује да се успешно сналазе са различитим аспектима приказивања, да су способни разликовати и повезивати различите исказе као што су дефиниције, тврдње и докази, да успешно декодирају и тумаче симболички и формални језик као и да разумеју његов однос с природним језиком.

3) Трећа група компетенција (“математизација“, математичко мишљење, уопштавање и увид) састоји се од математичког мишљења, уопштавања и разумевања, а захтева од ученика да “математизирају“ ситуације, односно да препознају и “извуку“ математику уграђену у ситуацију те да користе математику како би решили проблем, анализирали, тумачили развијали сопствене моделе и стратегије те произвели математичке аргументе, укључујући доказе и уопштавања. Ти процеси укључују критичко мишљење , анализу и промишљање.

- *Контекст* (ситуација у којима се математика користи) – Важан аспект дефиниције математичке писмености јесте коришћење и примена матемаике у мноштву ситуација, укључујући приватни (лични) живот, школски живот, рад и слободно време, локалну заједницу и друштво. Свака ситуација налази се на одређеној удаљености од ученика. Најближи је приватни живот (свакодневница), затим школски живот, посао и спорт, иза чега следе локална заједница и друштво, а најудаљенији су научни контексти. Без обзира на то колико су ученицима ситуације стране, циљ PISA процене је да осигура да се задаци темеље на аутентичним контекстима који се могу сусрести у стварном животном окружењу. Међутим, тиме се не укључују вештачки измишљени контексти, засновани на стилизованом приказу проблема као што је саобраћајна ситуација у непостојећем граду.

математички садржај	компетенције (способности)	ситуација или контекст
промена и односи бројеви и мере простор и облици неизвесност и подаци	репродукција повезивање интерпретација	лична образовна професионалана јавна научна

Слика 1. Димензије математичке писмености

У свакодневном животу, на радном месту, када се образујемо или усавршавамо, математичка писменост представља једну од кључних компетенција за успешно суочавање са различитим изазовима. Математичка писменост се односи на коришћење математичких знања, формула и процедура, како би се описао и објаснио неки феномен или да би се предвидели будући догађаји. Особе које су математички писмене могу да препознају како се неки феномен или догађај може превести у математичку форму која би омогућила да се он боље разуме и да се донесу квалитетније одлуке.

Скала математичке писмености конструисана је тако да је просечан скор 500, а стандардна девијација 100. Постигнућа ученика класификована су у шест нивоа. У следећој табели језиком компетенције описана су постигнућа ученика на сваком од нивоа и то на скали опште математичке писмености. У последњој колони дат је податак о проценту ученика који се налазе на том нивоу постигнућа за Србију и за остале земље учеснице (у просеку).

Табела 1. Математичка писменост – опис шест нивоа постигнућа и дистрибуција постигнућа ученика из Србије и OECD просек

Ниво	**Скор**	**Опис постигнућа**	**Србија 2009. %**	**OECD 2009. %**
6	више од 668	На овом нивоу ученици могу да концептуализују, генерализују и користе информације засноване на сопственом испитивању и моделовању комплексних проблемских ситуација. Могу да повезују информације из различитих извора и начина репрезентовања , као и да праве флексибилне преводе с једне форме на другу. Способни су за напредно (advanced) математичко мишљење и резоновање. Могу да примене увиде и разумевања до којих су дошли, заједно.	0.6	3.1
5	607-668	На нивоу 5 ученици могу да развијају и раде са моделима комплексних ситуација, идентификујући ограничења и специфицкујући претпоставке. Умеју да одаберу, упореде и вреднују различите стратегије рада, користећи добро развијене способности резоновања, одговарајуће репрезентације, симболичке и формалне дескрипције, као и увиде у вези са ситуацијом. Разматрају поступке, формулишу и дискутују о својим интерпретацијама и начинима расуђивања.	3.5	12.7
4	545-606	На овом нивоу ученици могу да, користећи експлицитне моделе, решавају комплексне, конкретне ситуације које могу да укључују ограничења или да захтевају специфициковање претпоставки. Могу да селектују и повезују податке дате на различите начине, укључујући симболичке, и повезујући их директно са аспектима ситуација из реалног живота. Умеју да конструишу и дискутују објашњења и аргументацију засновану на сопственим интерпретацијама и поступцима.	13.0	31.6

3	483-544	На овом нивоу ученици могу да примене јасно описане процедуре, укључујући и оне које подразумвају доношење одлука кроз неколико корака. Умеју да изаберу и примене једноставне стратегије решавања проблема. Могу да интерпретирају податке из различитих извора и начина репрезентовања , као и да резонују директно на основу њих. Могу да развију кратки извештај, користећи интерпретације, резултате и сопствена мишљења.	32.9	55.9
2	421-482	На овом нивоу ученици могу да интерпретирају и препознају ситуације у контексту које не захтевају више од директног закључивања. Могу да извуку релевантне информације од једног извора. Умеју да примене основне алгоритме, формуле, процедуре или конвенције. Добијене информације интерпретирају дословно.	59.4	77.9
1	358-420	На првом нивоу ученици могу да одговоре на једноставна питања у познатом контексту где су све релевантне информације дате, а питања јасно формулисана. Могу да лоцирају информацију и да изводе рутинске операције када су дате прецизне инструкције у једноставној ситуацији.	82.3	91.9

Зашто је PISA релативан за образовни систем у Србији? Очигледно је да, учествујући, добијамо читаво богаство истраживачких налаза који дају детаљну, добро документовану слику о нашем образовном систему. Емпиријски подаци обезбеђују могућност доношења заснованих одлука које се односе на развој образовног система и унапређење постигнућа на националном нивоу, али се могу односити и на поједине сегмене образовног процеса или специфичне групе које учествују у образовању. Могућност поређења података са свим земљама учесницима обезбеђују додатне информације. На пример, можемо да видимо шта све може да се постигне образовањем, показујући каква су и колика су постигнућа ученика у области математике, читања и природних наука из земаља које су у PISA студији веома успешне, које су специфичности образовног контекста у којем се школују ти ученици или које особине су ти ученици развили током школовања.

Олакшано је, такође, и дугорочно планирање развоја образовног система. Треба имати на уму да генерације које се сада школују у Србији већ припадају европском (образовном) простору јер ће највећи део свог одраслог доба проживети као грађани EU, те је обавеза образовног система да обезбеди постигнућа која су конкурентна у ширим оквирима него што су национални.

PISA настоји да утврди везу која постоји између образовања и националних економија; испитује и промовише она знања и вештине који су неопходни из перспективе сналажења на тржишту рада и вођењу каријере. Успостављање директније везе између захтева тржишта и образовања је блиска будућности и нашег образовног система.је добар модел који демонстрира како се та веза успоставља на нивоу очекиваних образовних постигнућа. Релативност знања и вештина које се мере у PISA студији потврђена је и истраживачким студијама које су пратиле академски и професионални развој младих људи после њиховог учешћа у PISA истраживању. Лонгитудиналне студије које се реализују у Аустрији, Канади и Швајцарској показују изразиту позитивну корелацију између постигнућа оствареног у читању и каснијег академског успеха на тржишту рада.

2. Компетенције и вештине

Етимолошки посматрано, појам компетенција потиче од латинске речи *competentia,* која има значење: надлежност, меродавност, способност за неки посао (формално или неформално стечена). (Милан Вукајлија, 2002).

Према Argyrisu, компетенције се дефинишу као синтеза знања (оно што сте стекли кроз образовање), вештина (оно што сте стекли у раду, на свом радном месту, као и из свакодневних искустава у друштвеном животу) и способности (односе се на могућности да се примене стечена знања и вештине). (Argyris, C., 1993).

Caird, појам компетенције везује за скуп знања, вештина и личних особина које су повезане са успешним понашањем у одређеној области. Hamel и Prahalad развили су концепт кључних компетенција, које дефинишу као групу производних вештина и технологија, које омогућују организацији да пружи својим потрошачима жељене користи. .

Хрватски лингвиста Клајић изворно значењу речи (competere = 1. доликовати, 2, тежити нечему) даје и следећа:

1. надлежност, овлашћење неке установе или особе, меродавност;

2. подручје у коме нека особа поседује знање, искуства.

3. надлежности које некоме пипадају. (Клаић, 2002).

Развој националног курикулума оријентисаног на ученичке компетенције представља један од главних трендова курикулумксе политике у Европским земљама и шире у свету. Да би успешно одговорила изазовима развоја друштва, знања и светског тржишта, Европска унија је дефинисала осам темељних компетенција за образовање:

- Споразумевање на матерњем језику
- Споразумевање на страним језицима
- Математичка компетенција и основне компетенције у знању и технологији
- Дигитална компетенција
- Учити како учити
- Социјална и грађанска компетенција
- Иницијативност и предузимљивост
- Културна свест и изражавање

2.1. Математичка компетенција

Математичка компетенција је способност развоја и примене математичког мишљења како би се решио низ проблема у свакодневним ситуацијама. Уз добро владање бројевима, нагласак је на процесу и активности, као и на знању.

Математичка компетенција укључује, на различитим ступњевима, способност и вољу за коришћењем математичких начина мишљења (логичко и просторно мишљење) и приказивање (формуле, модели, конструкције, графови, графикони).

Темељна знања, вештине и ставови повезани са овом компетенцијом су:

- *Потребно знање* у математици укључује чврсто знање бројева, мера и структура, основних операција и основних математичких приказа, разумевање математичких израза и појмова, као и свест о питањима на које математика може дати одговоре.
- Појединац би требао моћи *применити математичка начела и процесе* у свакодневном контексту код куће и на послу, моћи следити и вредновати низове аргумената. Појединац би требао бити способан *математички расуђивати, разумети математичке доказе и комуницирати* на математичком језику, као и *користити примерена помагала.*
- *Позитиван став у математици* заснован је на поштовању истине, вољи за тражењем разлога и процени њихове ваљаности.

2.2. Ученичке компетенције

Данас, у школама, све више се истиче значај развоја општих стратегија учења, развој способности ученика за самостално управљање процесом учења. Фокусирања на различите аспекте и стартегије учења значајне су најпре због развоја метакогнитивне свијести и саморегулираног учења (Azervedo i Hadwin, 2005).

Према критичко-конструктивној дидактици (Klafki, 1992) развој аутономије личности основни је циљ образовања. Проучавање и учење је процес интеракције у којем ученици уз подршку наставника самостално усвајају одређене форме знања, вредновања и деловања.

Проучавање и развој ученичких компетенција нису у супротности. На резултате наставе, уз ученике, утиче и наставник као и низ објективних детерминанти (наставни садржаји, наставна средства и помагала, наставни простор и други ваншколски чиниоци). Учествовање ученика у активностима наставе изизетно је важно. Осигурава се поштовањем ученика, односно холистичким приступом у погледу на појединце који онемогућује лишавање бића у развоју стварних смислених активности (Hart, 1992).

Нове компетенције и промене у националном курикулуму за обавезно образовање (Барановић, 2006, стр. 37) праве „потомак с трансфера знања на развој компетенција као циљ образовања“. Кључна је усмереност на ученичка постигнућа, односно компетенције које требају стећи након одређене обавезне деонице. Захтеви који се све чешће стављају пред савремене учитеље и ученике односе се на добро развијене вештине комуникације (читање, писање, усмено изражавање, слушање), способност за самостално учење друштвеност, способност рада у тиму, способност прилагођавања новим новим околностима, способност промишљања, способност претраживањаи вредновања информација (Батес, 2004).

Према препоруци Европског парламента и савета о кључним компетенцијамаsa целоживотно учење наводи се осам кључних компетенција које се сматрају једнако важним, а многе се преклапају и преплићу:

Комуникација на матерњем језику односи се на способност изражавања појмова, мисли, осећаја, чињеница и мишљења у говорном и писаном облику, те одговарајуће и креативне језичке интеракције. Вештине комуницирања укључују жељу за критичким и конструктивним дијалогом и заинтересованост за интеракцију с другима што подразумева свест о деловању језика на друге и потребу разумевања и коришћења језика на позитиван и социјално одговоран начин.

Комуникација на страном језику има исте способности као комуникација на матерњем језику. У целоживотном учењу појединац треба научити језике неформалним учењем. Позитиван став садржи уважавање културне разноликости те заинтересованости и радозналост за језике и интеркултуралну комуникацију.

Математичка компетенција дефинише се као способност развијања и примене математичког мишљења у циљу решавања низа проблема у свакодневним ситуацијама. Дефиниција компетенција у природним знаностима укључује способност и вољу коришћења знања и методологија за објашњавање света природе како би се постављала питања и долазило до закључака заснованих на доказима.

Компетенције у природним знаностима и технологијама обухватају разумевање промена изазваних људским деловањима и одговорност сваког појединца. За ове је компетенције везан став критичког процењивања и радозналости, заинтересованост за етичка питања и поштовање сигурности и одрживости.

За *дигиталну компетенцију* везано је сигурно и критичко коришћење технологије информацијског друштва за рад, слободно време и комуникацију, а њу подупиру основне вештине IКТ (информацијско-комуникацијска технологија).

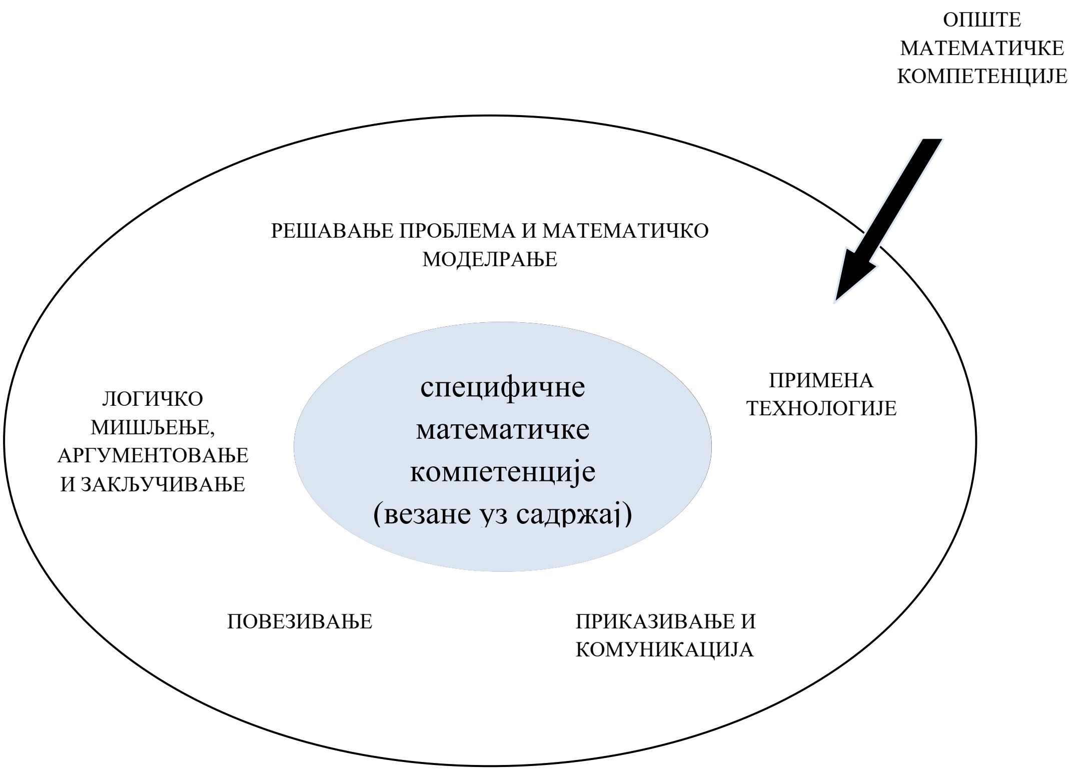
Компетенција учења или учење како учити представља способност започињања и настављања учења, организовања властитог учења, укључујући учениково управљање временом и информацијама, како индивидуално тако и у групама. Компетенција захтевапознавање властите префериране стратегије учења, јаке и слабе стране својих вештина као и тражење помоћи и савета за њено савладавање. Појединац мора знати успешно управљати својим учењем и, посебно, имати способност истрајања у учењуконцентрације у дањим временским раздобљима и критичког размишљања о сврси и циљевима учења. Позитиван став укључује мотивацију и поверење у настављању учења и његову успешност кроз цели живот.

Друштвене и грађанске компетенције односе се на личне, међуљудске и интеркултуралне компетенције – опредељење за активно и демократско учествовање у друштву.

3. Општи циљеви математичког образовања

Када је у питању математика, поставља се питање шта је то што треба да омогући ученицима и на који начин треба да утиче на ученике, односно који су циљеви математичког образовања. У вези са тим, општи циљеви математичког образовања су:

- Препознати и разумети друштвену улогу математике у знаности, култури, технологији као и приватном и професионалном животу;
- Усвојити темељна математичка знања и вештине, примењивати их у приватном, друштвеном и будућем професионалном животу;
- Развити математички начин мишљења и комуникације;
- Развити позитиван однос према математици и свест о властитом математичком умећу;
- Стећи темеље за целоживотно учење и наставак математичког образовања;
- Успешно примењивати технологију.



Слика 3. Димензије математичког образовања

3.1. Земунска гимназија

Земунска гимназија је основана 23. септембра 1858. године, као тек трећа гимназија у Србији, после гимназије у Сремским Карловцима (1792.) и Новом Саду (1810.). Прве године рада имала је једног ученика у само једном разреду. У то време Земун је припадао Аустријском царсту, тако да је званични језик школе био немачи. Од 1872. године Земунска гимназија има сва четри разреда.

Током Првог светског рата Земунска гимназија је имала проблема са нормалним радом. То је потрајало до 1925. када је рад школе доведен у ред. Те године је Земунска гимназија по први пут отворена и за девојке.

Гимназија какву је данас знамо ради од 1958. године и настала је спајањем две мање школе које су формиране 1946. године. Своју 150. годишњицу гимназија је прославила 2008. године. Школа се налази у Градском парку у Земуну, између зграда основне школе и Пољопривредног факултета.

Данашња зграда саграђена је 1879. у ренесансном стилу, а израдио ју је Никола Колар. Проширење зграде је настало као потреба услед повећаног броја ученика и трајало је од 1912. до 1916. године. Намера је била да се и дограђени део изгради у ренесансном стилу, али је то урађено у пост-сецесионистичком стилу.

Гимазију похађа око 1.400 ученика у четири тазреда. Колектив броји око осамдесет професора, а школа је једна од еминентних образовних установа Беогарада.

3.1.1. Поступак истраживања

У истраживању су учествовали ученици два разреда одељења четврте године гимназије друштвено-језичког смера. Ученици су решавали задатке уобичајне за писмени задатак. У наставку рада навешћемо задатке, као и успех који су ученици постигли приликом решавања одређеног задатка.

I група

1. Одредити област дефинисаности, нуле, знак и парност: $y = \frac{x^2-6x+9}{x^2-1}$.
2. Одредити област дефинисаноси функције: $y = \log_{x-5}(x^2-4x-5)$.
3. а) Одредити асимптоте функције: $y = \frac{3x}{1-2x}$.

   б) Ако је $f(x) = \frac{2x+1}{x}$, наћи $f\big(f(x)\big)$ и $f(5)$.
4. Израчунати:

   а) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-x}$

   б) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 6x}{\tan 2x}$.

II група

1. Одредити област дефинисаности, нуле, знак и парност: $y = \frac{x^2+4}{x-7}$.
2. Одредити област дефинисаности функције: $y = \log_{x^2-4x+4}(x-2)$.
3. а) Одредити асимптоте функције: $y = \frac{x^2+2}{2-x}$.

   б) Ако је $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$, наћи $f\big(f(x)\big)$ и $f(5)$.
4. Израчунати:

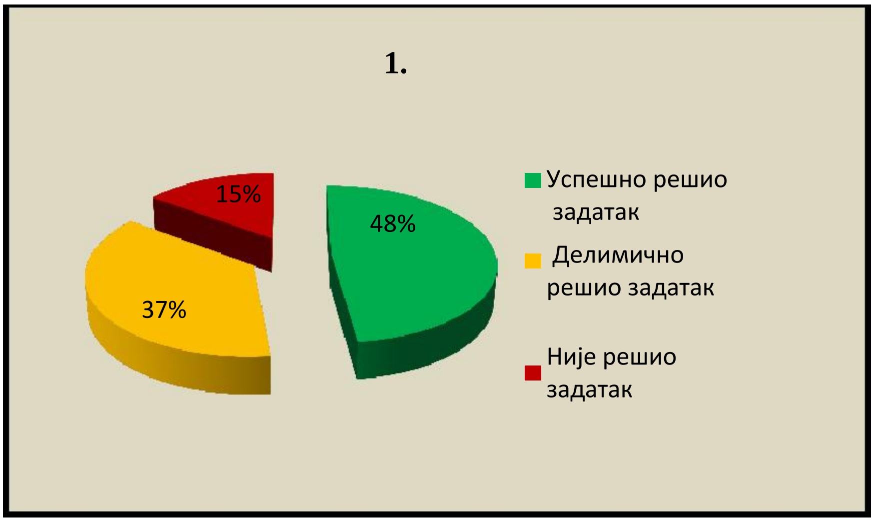
   а) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-1}$

   б) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 6x}{\tan 2x}$.

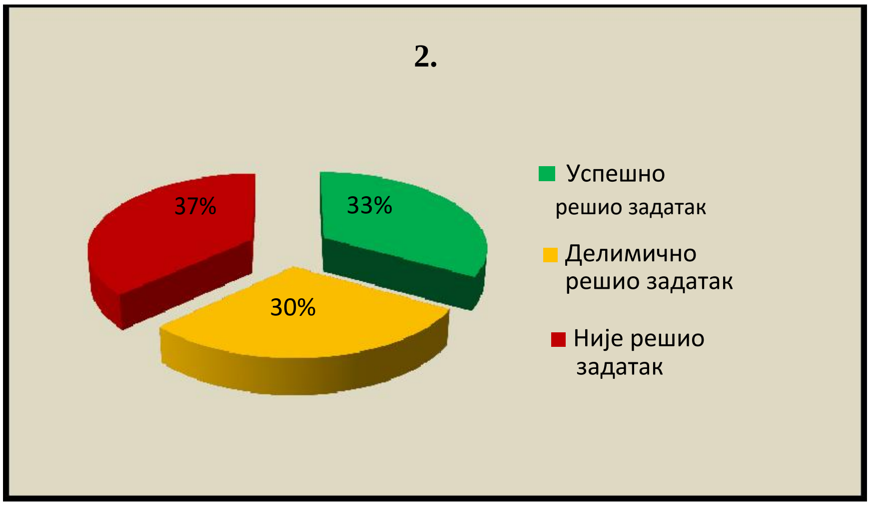
3.1.2. Резултати

I група

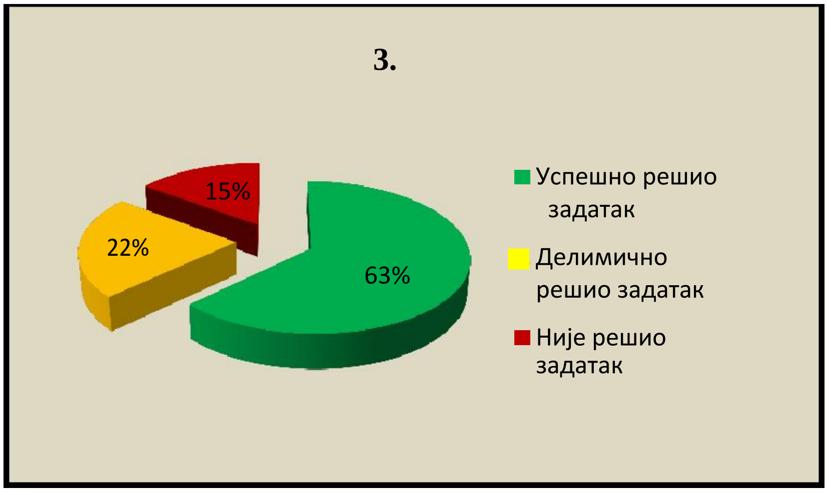
1.		
Успешно решио задатак	Делимично решио задатак	Није решио задатак
13	10	4



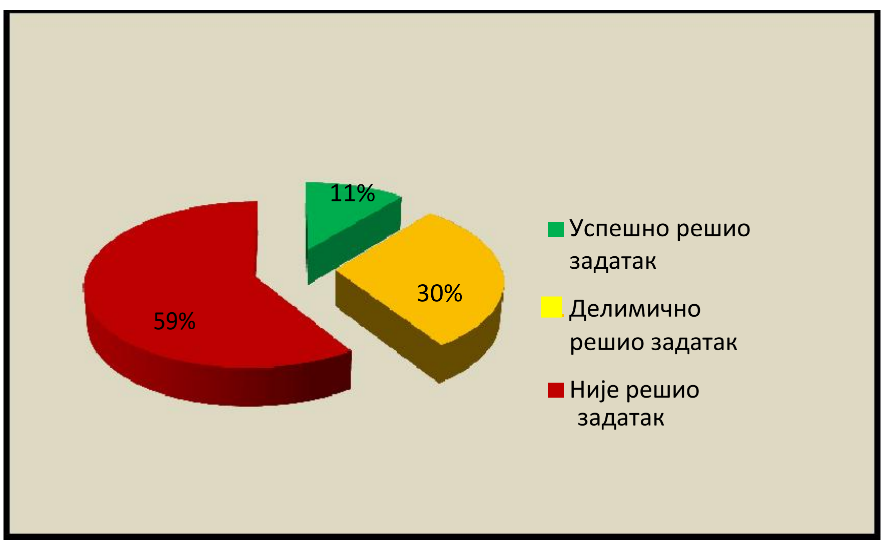
2.		
Успешно решио задатак	Делимично решио задатак	Није решио задатак
9	8	10



3.		
Успешно решио задатак	Делимично решио задатак	Није решио задатак
17	6	4

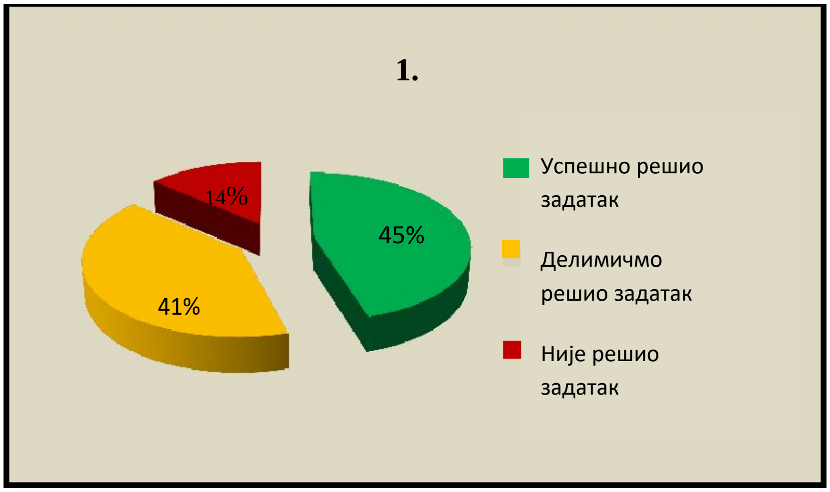


4.		
Успешно решио задатак	Делимично решио задатак	Није решио задатак
3	8	16

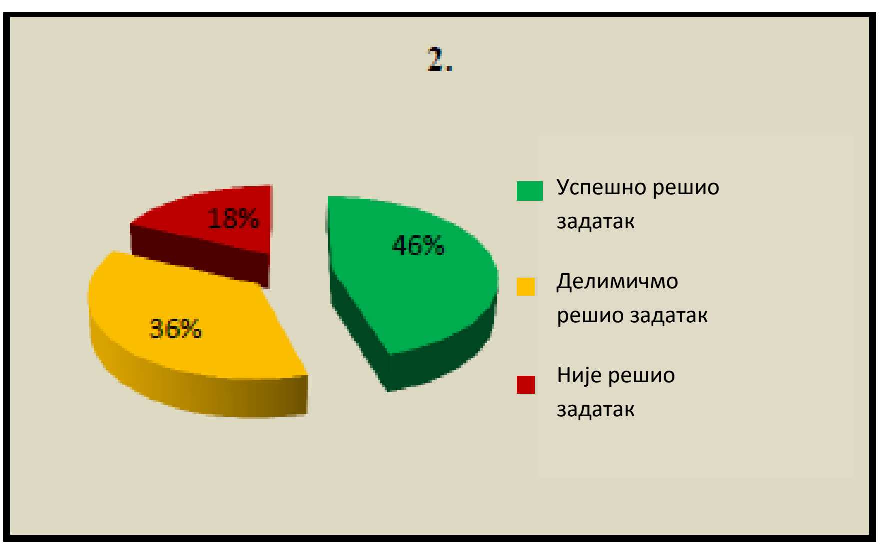


II група

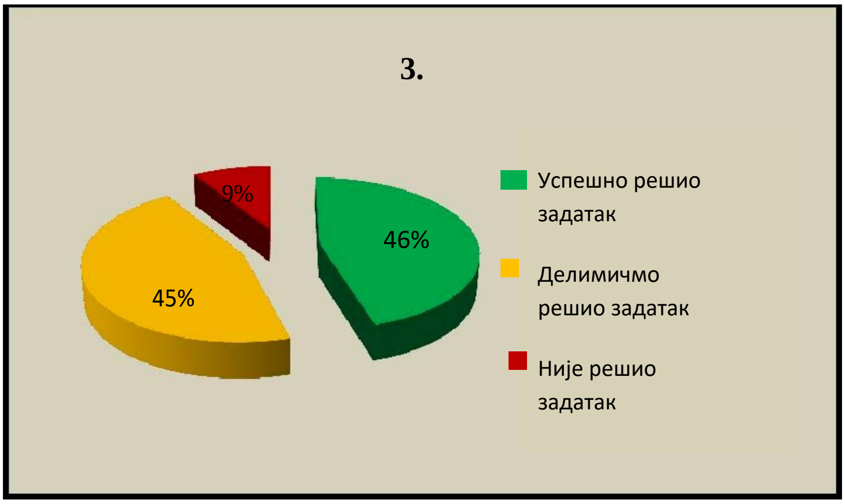
1.		
Успешно решио задатак	Делимично решио задатак	Није решио задатак
10	9	3



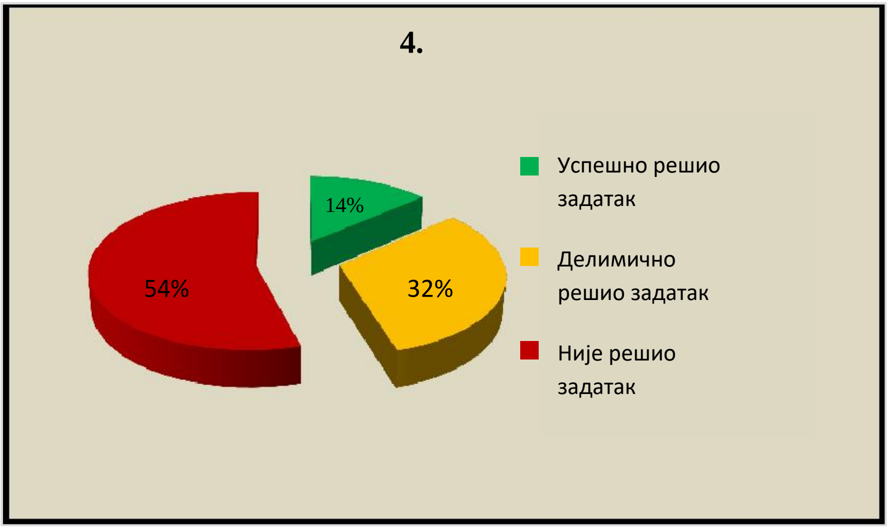
2.		
Успешно решио задатак	Делимично решио задатак	Није решио задатак
10	8	4



3.		
Успешно решио задатак	Делимично решио задатак	Није решио задатак
10	10	2



4.		
Успешно решио задатак	Делимично решио задатак	Није решио задатак
3	7	12



3.1.3. Карактеристичне грешке ученика

Овде ћемо дати неке занимљиве грешке ученика четвртог разреда Земунске гимназије са два писмена задатка у првом полугодишту. Грешке илуструју тотално непознавање принципа граничних вредности и налажење извода функције. Интересантно је то да су ово грешке ученика који имају високе оцене (врло добар 4, одличан 5) па чак и неких вуковаца као и ученика који испољавају амбиције да упишу факултет где је математика јако битна.

- Следећи задатак је радила ученица која има петицу:

$$.\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^4-8x^2+16}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2\left(1-\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2-8+\frac{16}{x^2}\right)}=\frac{1-\frac{4\cdot 2}{4}+\frac{4}{4}}{4-8+\frac{16}{4}}=\frac{1-2+1}{4-8+4}=\frac{0}{0}=0$$

- Наћи извод функције: $y=\frac{x^3+4x^2+3}{x-7}$

$$y^{|}=\frac{(x^3)^{|}+(4x^2)^{|}+3^{|}}{(x)^{|}-(7)^{|}}=\frac{3x^2+4\cdot 2x+0}{1-0}=\frac{3x^2+8x}{1}=3x^2+8x.$$

- Наћи извод функције: $y=\ln x^4$.

$$y^{|}=(\ln x^4)^{|}=\frac{1}{x^4}.$$

- Наћи извод функције: $y=x^5e^x-x^3\sin x$

$$y^{|}=(x^5)^{|}e^x+x^5(e^x)^{|}-(x^3)^{|}\sin x+x^3(\sin x)^{|}$$
$$y^{|}=5x^4\cdot e^x+x^5\cdot e^x-3x^2\cdot\sin x+x^3\cdot\cos x.$$

Наредних неколико задатака приказују непознавање елементарне функција и основних особина лимеса. То и није толико забрињавајуће, колико је забрињавајуће то што неки од ових ученика имају високе оцене (врло добар 4). Један вуковац је написао $\frac{0}{27}=\infty$!

- $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 6x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{\cos 6x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 6x\cdot 3}{2x\cdot\cos x\cdot 3}=\frac{3\cdot\sin 6x}{\cos x\cdot 6x}=\frac{3}{\cos x}=\frac{3}{1}=3.$

- $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^4-8x^2+16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x^2-4)^2}=\frac{(x-2)^2}{(x-4)^4}=\frac{1}{(x-2)^2}.$

- $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^4-8x^2+16}=\frac{4-8+4}{16-32+16}=\frac{0}{-32}=-\infty.$

- $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 0}{1}=\frac{0}{1}=\infty.$

- $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{1}=\infty$

- Једна занимљива грешка: $\ln x\cdot\ln x=\ln x^2.$

Грешке које су наведене појављивале су се веома често у редовима тестираних ученика. Задаци су били прилично једноставни, углавном да се примени формула уз коришћење претходно стеченог знања, стога је изненађујуће што је број грешака толико велики. На основу разговора са предметним професором, закључили смо да ученици нису у великој мери изостајали са часова. Како су на часовима одрађени задаци врло слични онима са тестова, требало би да резултати тестирања буду много бољи.

Очигледно је проблем у пажњи, односно непажњи ученика на часу. Дакле, наставник је дужан да заинтересује ученике за оно што прича и да, на неки начин, буде сигуран да га ученици прате и разумеју. Претходно тестирање је показало да ученици, из неког разлога, нису били пажљиви на часу.

3.2. Математички факултет у Београду

Настава математике у Србији почела је одмах по оснивињу Лицеја, 1838. године. Даљи развој ове научне дисциплине истоветан је са развојним путем основних природних наука у Србији.

Године 1853. основано је Природно-техничко одељење Лицеја, као једно од три његова одељења. У десетогодишњем раздобљу (1863-1873. године) природне науке и математика изучавају се у оквиру Техничког факултета Велике школе, да би се на крају тог периода, оснивањем Природно-математичког одсека Филозофског факултета, ове науке вратиле се на Филозофски факултет. Наредних седамдесетак година природне науке и математика се развијају у оквиру Филозофског факултета, све до 1947. године када је Природно-математички одсек Филозофског факултета прерастао у Природно-математички факултет.

Године 1990, реорганизацијом Природно-математичког факултета, тадашњи одсек за математику стиче пословну и организациону самосталност, а статус самосталне установе у саставу Универзитета у Београду Математички факултет добио је 1995. године конструисањем сопствених органа управљања и доношењем статута Факултета.

На Математичком факултету настава је организована у оквиру три студијска програма: математика, информатика и астрономија и астрофизика. У оквиру студијског програма Математика постоји 6 модула. Један од тих модула је Професор математике и рачунарстава. Студенти који одаберу овај модул, на четвртој години студија полажу предмет Пракса наставе математике и рачунарства, који ће нам бити потребан у оквиру овог истраживања.

3.2.1. Поступак истраживања

У оквиру овог истаживања, посматала сам резултате тестова које су радили студенти Математичког факултета у Београду. У оквиру предмета Пракса наставе математике и рачунарства, организовано је тестирање студената четврте године Математичког факултет, смер Професор математике и рачунарства.

Тестови обухватају 27 елемената математичких задатака, а услов да се положи тест је 24 и више тачно урађених задатака. Први и трећи тест трајали су по 90 минута, а други и четврти по 120 минута. Студенти су имали право на 4 покушаја да положе тест и уколико не би положили тест ни из четвртог покушаја, нису били у могућности да полажу испит Пракса наставе математике и рачунарства текуће године.

Резултати су изненађујући. Било је очекивано да овакав тест буде формалност за студенте, али неки од њих нису успели да положе тест ни из четвртог покушаја. То је мало изненађујући резултат с обзиром на то да се ради о студентима завршне године Математичког факултета, који су имали добро предзнање из средње школе што су потврдили на пријемном испиту.

Студенти који нису успели да положе први и други тест добили су олакшицу за трећи и четврти покушај, односно потребан број бодова да се тест положи смањен је на 22. У наставку рада навела сам пример тих тестова. Иначе, било је више група задатака приближно исте тежине. Навешћемо па једну произвољну групу задатака са сваког теста и графички приказ резултата.

I тест

Група 3

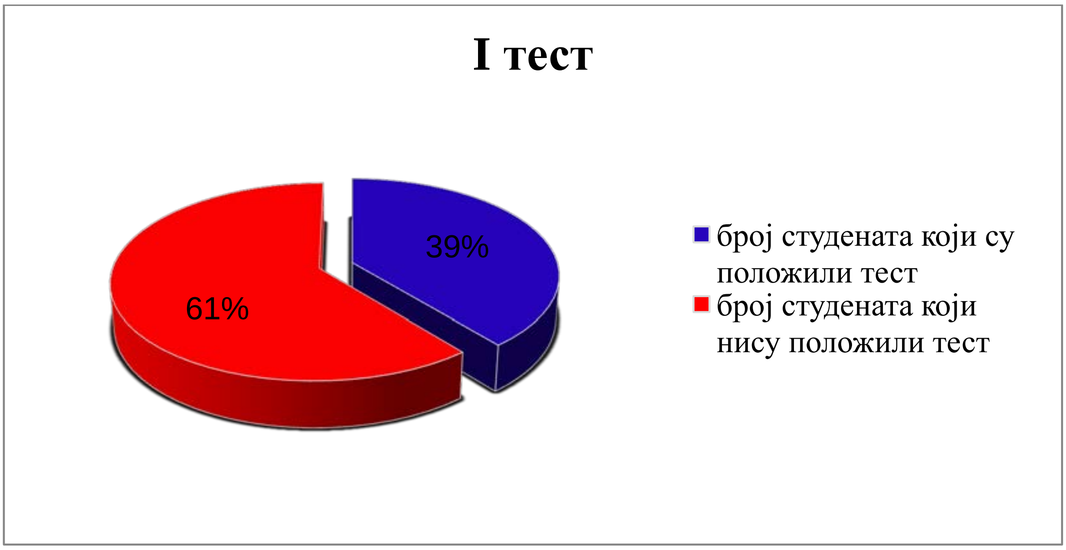
1. Упростити израз $(a^4)^{-2} \cdot (a^{-2})^{-2}$, α≠0.
2. Упростити израз $\sqrt{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\sqrt{x}}$, $x \geq 0$.
3. Израчунати $(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)$.
4. Раставити на чиниоце $\frac{1}{5}x^2$- 5.
5. Решити једначину: $x^2 - 9x$ +14=0.
6. Решити неједначину: $\frac{3}{x^2-1} < 1$.
7. Решити једначину: $\log_2 x = 4$.
8. Израчунати вредност осталих тригонометријских функција ($\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$) ако је $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.
9. Одредити област дефинисаности функције: $y = \frac{x}{x^2+4}$.
10. Одредити *f* ◦*g* ако је *f(x) = 2x-1* и *g(x)* = $(2x - 1)^2$.
11. Наћи први извод функције *f(x)* = $\ln x$.
12. Површина правилне тростране призме је $P = 20\sqrt{3}cm^2$ а дужина основне ивице једнака је $4cm$. Наћи висину призме.
13. Израчунати вредност детерминанте:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

14. Одредити координате вектора $\overrightarrow{AB}$ ако је $A(2,3,4)$ и $B(3,0,-1)$.
15. Наћи девети члан аритметичког низа $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots)$
16. Наћи количник и остатак при дељењу полинома $a(x) = x^5 - x^3 + x + 2$ полиномом $b(x) = x^2 + x + 1$.
17. Израчунати $1\frac{2}{7} + \frac{1}{2} =$
18. Израчунати 0.015 : 0.01 =

19. Наћи све унутрашње (α, β, γ) и све спољашње углове (α_1, β_1,γ_1) троугла, ако је $\gamma = 45^\circ$ и $\beta = 100^\circ$.
20. Решити једначину $15 : (2 - x) = 4$.
21. Израчунати $NZD\ (144, 192, 352)$.
22. Решити неједначину $|x - 1| \geq 1$.
23. Израчунати површину правоуглог троугла ако је дужина хипотенузе $15\ cm$ а дужина једне катете $0.9\ dm$.
24. Написати једначину праве кроз две тачке $A(0, -2)$ и $B(3, -2)$.
25. Шта је ортоцентар троугла?
26. Шта је пречник круга?
27. Које услове треба да задовољавају a и b да би постојало $\log_{\alpha} b$?

Број студената који су положили тест	Број студената који нису положили тест
38	24



II тест

Група 2

1. Израчунати $\frac{2^{-4} \cdot 16^{-1} \cdot 32^{2}}{8^{-2} \cdot 4}$.
2. Израчунати $\binom{8}{5}$.
3. Основа правилне тростране призме је правоугли троугао чије су катете $12cm$ и $5cm$ а висина призме је $4cm$. Израчунати површину призме.
4. Решити једначину $2\sqrt{x+5} - x = 2$.
5. Израчунати $\left(4\frac{1}{3} - 2.2\right) \cdot \left(1 - \frac{13}{16}\right)$.
6. Решити неједначину $2.25 : x > \frac{3}{4}$.
7. Фармерке су коштале 4500 динара. Прво им је цена снижена за 20% а затим још за 10%. Колика им је сад цена?
8. Ако је збир унутрашњих углова простог многоугла $1620 \circ^{o \circ \circ}$, колико тај многоугао има дијагонала?
9. Израчунати $\log_2 16$.
10. Ако је $f(x) = 3x - 2$, одредити инверзну функцију функције f.
11. Одредити површину круга описаног око квадрата странице $6cm$.
12. Израчунати површину трапеза коме су основне ивице $0.3dm$ и $5.5dm$ а висина $1.5cm$.
13. Решити систем једначина:

$$2x - y + 3z = 9$$

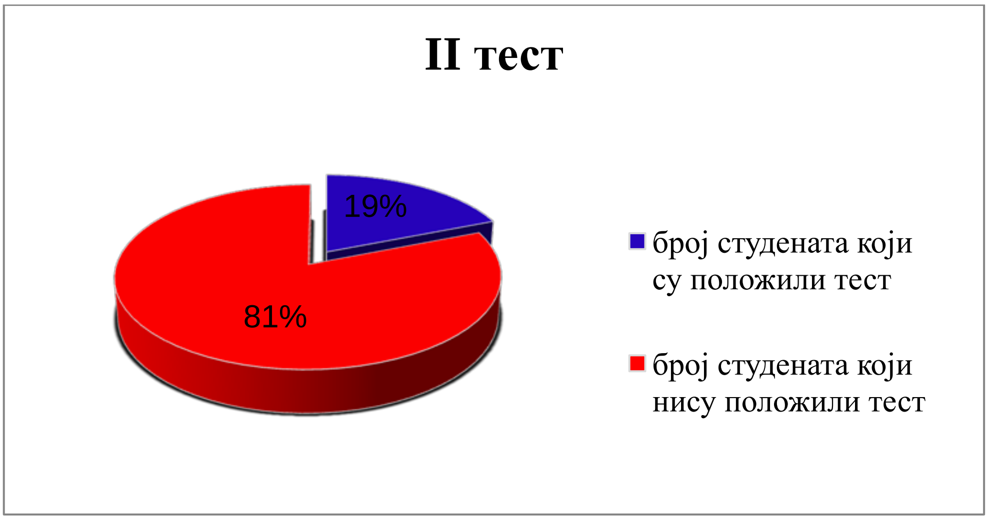
$$3x - 5y + z = -4$$

$$4x - 7y + z = 5.$$

14. Наћи $\cot\frac{5\pi}{3}$ и $\tan 300^{\circ}$.
15. Наћи површину троугла ABC , ако је $A(-3,3), B(7,3)$ и $C(2,8)$.
16. Ако је у геометријском низу $a_1 = 15$ а $q = 3$, одредити збир прва четри члана тог низа.
17. Ако за $3kg$ меса треба издвојити 1000 динара, колико динара треба издвојити за $16kg$ тог меса?

18. Књига има 120 страна. Ученик је првог дана прочитао $\frac{2}{3}$ књиге, другог дана $\frac{1}{15}$ а трећег дана оно што му је преостало. Колико страна те књиге је ученик прочитао трећег дана?
19. Ако је $A = \{2, 4, 6, 8\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ а $C = \{1, 3, 4, 9\}$ одредити $C \setminus (A \cap B)$.
20. Решити неједначину $|x + 1| \leq 4$.
21. Наћи NZD и NZS полинома $P(x) = x^2 - 4x + 4$ и $Q(x) = x^2 - 4$.
22. У скупу $\mathbb{R}$ решити једначину $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.
23. Угао између странице и дијагонале правоугаоника је 40°. Колики је угао између његових дијагонала?
24. Израчунати $\int (x-1)^2 \, dx$.
25. Колико оса симетрије има правоугаоник?
26. Када кажемо да су два угла суплемента?
27. Навести критеријум дељивости природног броја са 6.

Број студената који су положили тест	**Број студената који нису положили тест**
38	24



III тест

Група 1

1. Нека је $a = -(17.170: 1.7)/10$ и $b = -\sqrt{1.21}$. Израчунати $a \cdot b$.
2. У скупу целих бројева решити једначину $-\frac{2}{x} \geq 1$.
3. Ако је $z = \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i}$ одредити $|z|, \bar{z}, \mathrm{Re}z$ и $\mathrm{Im}z$.
4. Ако је унутрашњи угао правилног многоугла једнак 140°, израчунати број дијагонала које полазе из једног темена тог многоугла.
5. Један трактор узоре њиву за $4h$. За које време би исту њиву узорала три трактора?
6. Ако је $A(2,-1)$ и $B(0,6)$ одредити растојање између тачака A и B и $\|\overrightarrow{AB}\|$.
7. Дужина полупречника кружнице уписане у квадрат је $6cm$. Колика је површина тог квадрата и круга описаног око тог квадрата?
8. Раставити на чиниоце $9x^2 + 12x + 4$.
9. Одредити област дефинисаности функције $y = \frac{\sqrt{2-x}}{x}$.
10. Одредити $NZD(392, 112, 308)$.
11. Решити неједначину $\log_{\frac{1}{4}}(x-1) > 0$.
12. Ако је $\alpha = 300^\circ$, одредити α у радијанима и израчунати $\tan \alpha$.
13. У скупу $\mathbb{R}$ решити једначину

$$\begin{vmatrix} x+1 & -5 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

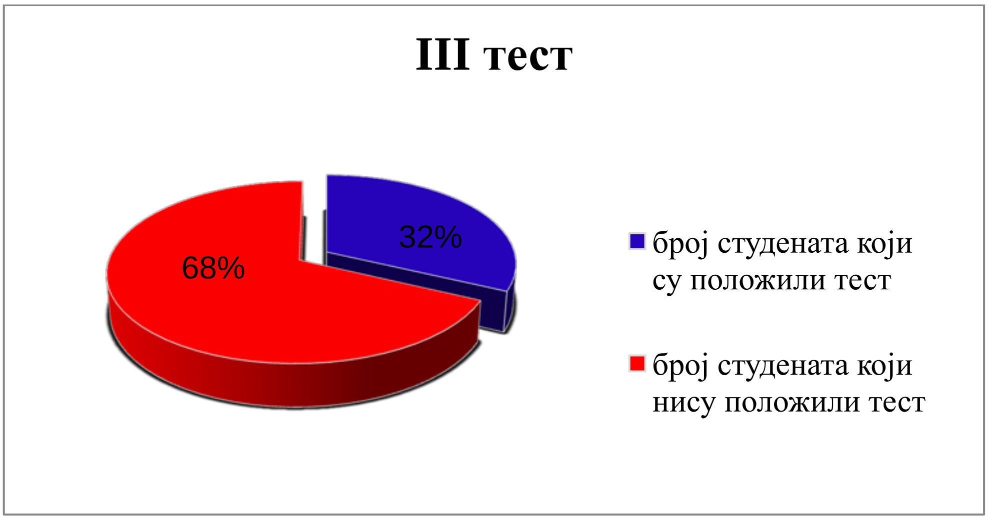
14. Ако је $A = \{x : x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 7\}$, $B = \{2, 3, 5, 6, 9\}$ и $C = \{x : x \in \mathbb{N}, 16|x\}$, одредити $(A \cap B) \cup C$.
15. Израчунати полупречник круга, око централном углу од 36° одговара кружни лук од дужине $45cm$.
16. Израчунати запремину лопте полупречника $6cm$.
17. Ако је $A = 2x - 3$ и $B = x + 1$, написати у сређеном облику $A^2 - 3B$.
18. Одредити скуп решења система једначина:

$$2x^2 + 2x - y - 1 = 0$$

$$y - 2x - 1 = 0.$$

19. Површина правилне тростане призме је $20\sqrt{3}cm^2$ а основна ивица је $4cm$. Израчунати висину призме.
20. Катете правоуглог троугла су $6cm$ и $8cm$. Одредити висину која одговара хипотенузи.
21. Израчунати $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{3x^2+1}$.
22. Разлика два броја је 11, а производ је -24. Који су то бројеви?
23. Странице троугла ABC су $AB = 12cm$, $BC = 4cm$ и $CA = 10cm$. Ако је троугао $A_1B_1C_1$ сличан са троуглом ABC и ако је $A_1B_1 = 3cm$, одредити остале странице троугла $A_1B_1C_1$.
24. Решити неједначину $\sqrt{x^2 - 4x} \geq x - 3$.
25. Када кажемо да је неки четвороугао тангентни?
26. За које вредности $x \in [0,2\pi]$ није дефинисано $\tan x$?
27. У низу ___⊂___⊂___⊂ __ ⊂___ на одговарајућа места уписати $\mathbb{R}$ (скуп реалних бројева), $\mathbb{Z}$ (скуп целих бројева), $\mathbb{Q}$(скуп рационалних бројева), $\mathbb{N}$(скуп природних бројева) и $\mathbb{C}$(скуп комплексних бројева).

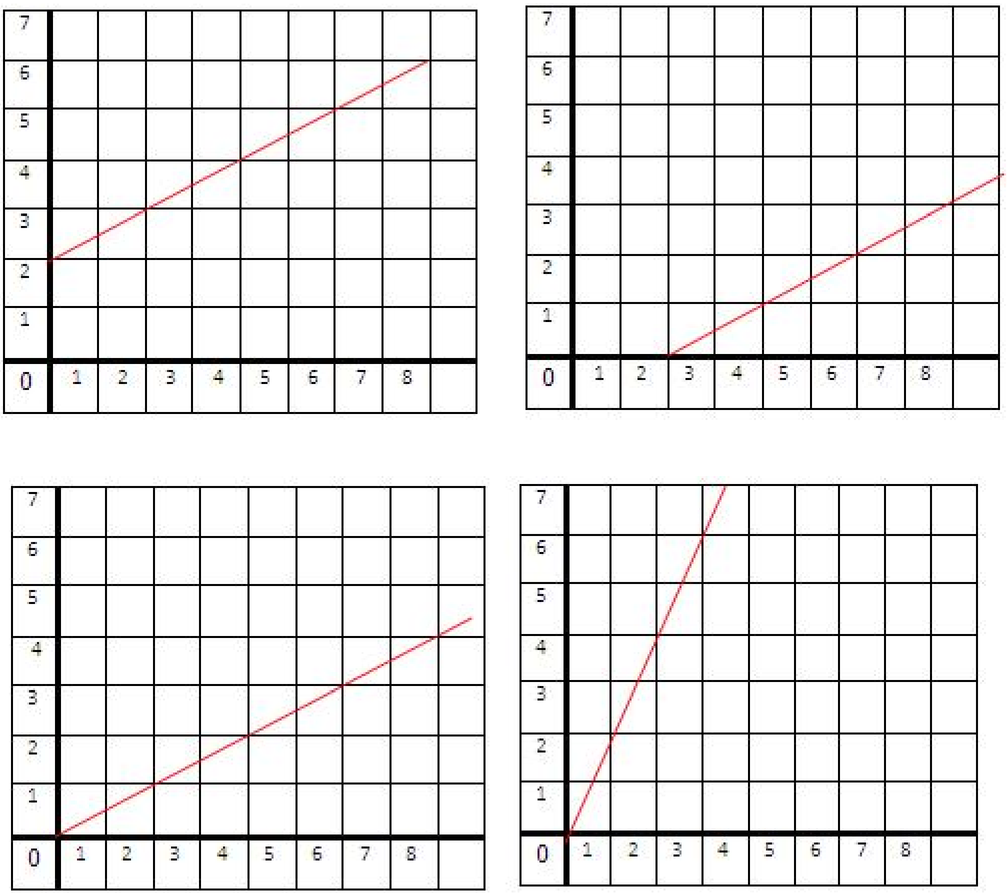
Број студената који су положили тест	**Број студената који нису положили тест**
7	15



IV тест

Група 1

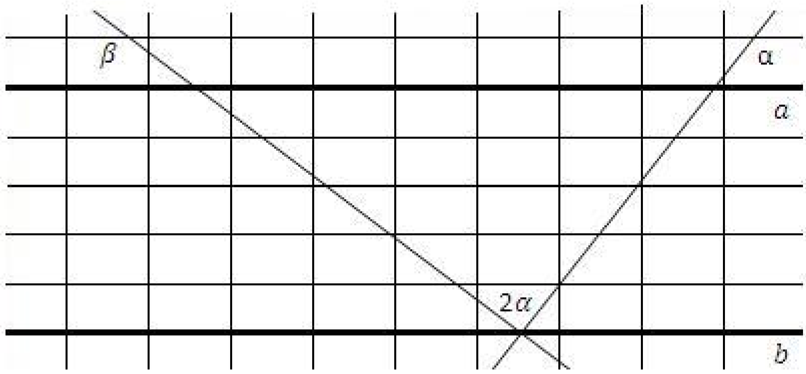
1. Свакој величини из прве групе: $1.5m, 1.5h, 1.5t, 1.5km^2$ и $1.5dl$ доделити одговарајућу величину из друге групе: $90min, 1\,500\,000m^2, 150cm, 15cl$ и $1\,500kg$.
2. Дати су разломци $\frac{29}{50}; \frac{1}{2}; \frac{11}{20}$ и $\frac{49}{100}$. У неједнакости $0.54 < \_\_ < 0.56$ уписати један од датих разломака тако да се добије тачна неједнакост.
3. На једном од датих цртежа графички је приказана зависност између количине олова (x) и цинка (y) у легури, у којој су олово и цинк заступљни у односу $2:1$. Који је то цртеж?



4. Површина мањег круга кружног прстена је $9\pi cm^2$, док је површина прстена $16\pi cm^2$. Израчунати полупречник већег круга.
5. На празна места уписати знакове $<, >$ и $=$ тако да се добију тачне (не)једнакости:

$$2.5dm\_\_2m5dm;\ 2m\_\_22dm; 3kg\_\_300g; 2t\_\_200kg.$$

6. Одредити највећи четвороцифрен број дељив са 18.
7. Израчунати вредност израза $3\sqrt{\frac{4}{9}} - \sqrt{(-6)^2} \cdot \sqrt{0.36} - 2$.
8. Израчунати и написати одговарајући резултат за разлику квадрата бројева 7 и 3; квадрат разлике бројева 7 и 3; збир квадрата бројева 7 и 3 и квадрат збира бројева 7 и 3.
9. Одредити угао α, ако знамо да су праве a и b паралелне, а $\beta = 35°30'$.



10. Реља је уложио 30 000 динара у банку. Годишња камата је 10% и рачуне се на крају године. Колико динара Реља има на рачуну после две године, под условом да није подизао новац за то време?
11. Ако је $A = \left(\frac{1}{4} - 1\right) : \left(\frac{1}{8} - 1\right)$ и $B = \left(\frac{1}{3} + 1\right) : \left(\frac{1}{6} + 1\right)$ израчунати $A : B$.
12. Пре десет година Ђорђе је био пет пута старији од Лазара. Колико година има Ђорђе ако је сада три пута старији од Лазара?
13. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $5x^2 - 7x + 3 = 0$, саставити квадратну једначину чија су решења $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.
14. Колико постоји целобројних вредности параметра k таквих да је тачно $(k - 1)x^2 - 2(k + 5)x - (k + 5) < 0$ за све $x \in \mathbb{R}$?
15. Одредити реалне бројеве x и y такве да важи $(2 + i)(x + iy) = 5 - 5i$.
16. Колики је унутрашњи угао правилног многоугла који има 6 пута више дијагонала него страница?
17. Ако је $z = 2i$ одредити вредност израза $\left|\frac{1-z}{1+z}\right|$.

18. Решити једначину $2|x+1|+x-3=0$.

19. Нека су $a, b \in \mathbb{R}$ и $|a| \neq |b|$. Упростити израз.

20. Одредити скуп A ако знамо да важи $A \cap \{3,5,8,11\} = \{5,8\}, A \cup \{4,5,11,13\} = \{4,5,7,8,11,13\}$, $\{8,13\} \subset A$ и $A \subset \{5,7,8,9,11,13\}$.

21. График функције $y = \frac{1}{x^2-ax+2}$ садржа тачку $M\left(-3, \frac{1}{19}\right)$. Колико је a?

22. Израчунати растојање тачке $O(0,0)$ од праве $y = 3x+5$.

23. Решити једначину $\log_2(1-x) = \log_2(x-3)$.

24. Основна ивица правилне шестостране призме је $a = 3m$ а дијагонала бочне стране $d = 6m$. Израчунати запремину призме.

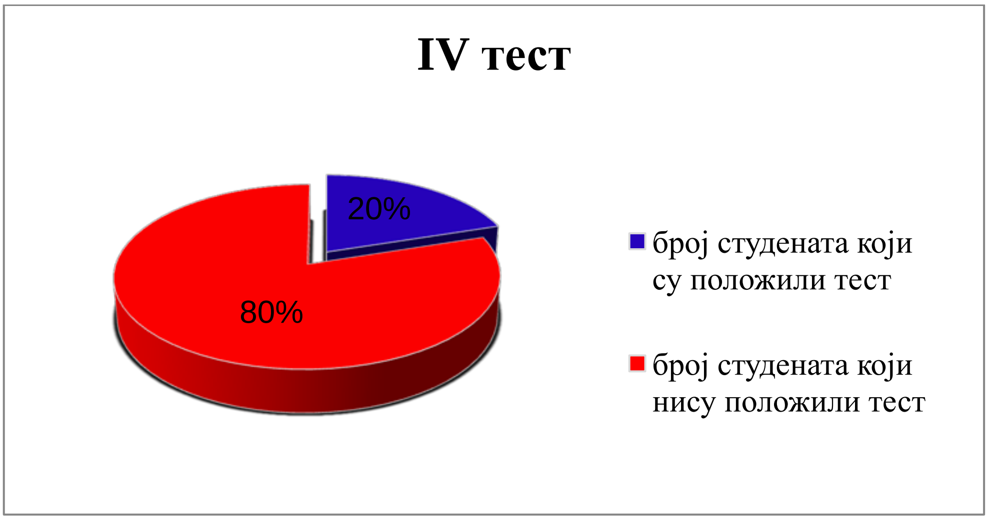
25. Шта треба да испуњавају реални бројеви a, b и c да би постојало $\frac{\log_c b}{\log_c a}$?

Написати овај израз у облику логаритма у ком не фигурише c.

26. Колико оса симетрије има квадрат?

27. У ком односу су централни и периферијски угао круга над истом тетивом?

Број студената који су положили тест	**Број студената који нису положили тест**
3	12



3.2.2. Карактеристичне грешке студената

- Решити неједначину $\log_{\frac{1}{2}}(2x+1) < 1$.

$$2x+1 < \frac{1}{2} x < -\frac{1}{4}$$

$$2x+1 > 0$$

$$x > -\frac{1}{2}$$

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right).$$

Други студент је то радио на следећи начин:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 > 2x+1$$

$$2x+1 < \frac{1}{2}$$

$$x < -\frac{1}{4}.$$

- У низу ___⊂___⊂___⊂ __ ⊂___ на одговарајућа места уписати $\mathbb{R}$ (скуп реалних бројева), $\mathbb{Z}$ (скуп целих бројева), $\mathbb{Q}$ (скуп рационалних бројева), $\mathbb{N}$ (скуп природних бројева) и $\mathbb{C}$ (скуп комплексних бројева).

Два студента су задатак решила на следећи начин:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{R}$$

Ево још неколико „занимљивих“ одговора:

$$\mathbb{R} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{C}$$

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{Q}.$$

- Када кажемо да је неки четвороугао тангентни?

Четвороугао је тангентни ако има бар један пар паралелних страница.

- Одредити сва решења $\cos\frac{x}{8} = \sqrt{2}$ у интервалу $[0, 2\pi]$.

$$\frac{x}{8} = t \quad \cos t = \sqrt{2}$$

$$t_1 = arccos\sqrt{2}$$

$$x_1 = 8arccos\sqrt{2}$$

Мали број студената је приметио да је $\sqrt{2} > 1$ и да једначина нема решења.

- За које вредности $x \in [0, 2\pi]$ није дефинисано $\tan x$?

Није дефинисано у 0 и π.

- У ком односу су централни и периферијски угао круга над истом тетивом?

Периферијски угао је два пута већи од централног угла над истом тетивом.

- Реља је уложио $30\,000$ динара у банку. Годишња камата је 10% и рачуна се на крају године. Колико динара Реља има на рачуну после две године, под условом да није подизао новац за то време?

Ево на који начин је задатак решио један студент:

$30\,000$ динара, 10% је $3\,000$ динара.

$30\,000 - 6\,000 = 24\,000$.

Има још 24 000 динара у банци на рачуну.

- За које вредности реалног броја x постоји $\log_x x$?

За $x > 0$ постоји $\log_x x$.

- Одредити највећи четвороцифрени број дељив са 18.

9 999 је највећи четвороцифрени број, али није дељив са 18.

- Шта је ортоцентар круга?

Ортоцентар је тачка у троуглу која се налази у пресеку висина троугла.

- Које услове треба да задовоље a и b да би постојало $\log_a b$?

$\log_a b$ постоји за $a \geq 2$ и $b > 1$.

- Шта је пречник круга?

Пречник круга је свака дуж која пролази кроз центар круга и спаја сваку тачку кружнице са условом да пролази кроз центар.

- Израчунати $0.015: 0.01$

$0.015: 0.01 = 15: 1 = 15.$

- Раставити на чиниоце $\frac{1}{5}x^2 - 5$.

$$\frac{1}{5}x^2 - 5 = \frac{1}{5}(x^2 - 1) = \frac{1}{5}(x - 1)(x + 1)$$

- Одредити област дефинисаности функције $y = \frac{x}{x^2+4}$

$x^2 + 4 \neq 0, \qquad x^2 \neq -4, \qquad x \neq \pm 2i.$

- Центар уписне кружнице троугла добија се у пресеку ___________________?

Центар уписане кружнице троугла добија се у пресеку тежишнних линија троугла.

- Израчунати вредност осталих тригонометријских функција $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ако је $\tan\alpha = -\frac{2}{3}$ и $0 < \alpha < \pi$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{2}{3}$$

$$\cot\alpha = -\frac{3}{2}, \qquad \sin\alpha = -2, \qquad \cos\alpha = 3.$$

- Ако је збир унутрашњих углова неког правилног многоугла једнак $1620°$, колики је један унутрашњи угао тог многоугла?

$(n-2)\cdot\ 180^o = 1620^o$

$n-2=9$

$n=11.$

- Одредити растојање између тачака $A(0,3)$ и $B(1,-4)$.

$\sqrt{(0+1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$

- Израчунати $\binom{8}{5}$.

$$\binom{n}{0}=1,\qquad \binom{n}{1}=1,\qquad \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)!}{2!}$$

$$\binom{8}{5}=\frac{8\cdot 7!}{5!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=8\cdot 7\cdot 6=336.$$

- Израчунати $\left(4\frac{1}{3}-2.2\right)\cdot\left(1-\frac{13}{16}\right)$.

$$\left(4\frac{1}{3}-2.2\right)\cdot\left(1-\frac{13}{16}\right)=\left(\frac{13}{3}-\frac{11}{5}\right)\cdot\left(\frac{16-13}{16}\right)=\left(\frac{65-33}{15}\right)\cdot\left(\frac{3}{13}\right)=\frac{32}{5\cdot 13}=\frac{32}{65}$$

- Када кажемо да су два угла суплемента?

Два угла су суплемента када је њихов збир 360^o.

- У ком односу тежиште троугла дели тежишну дуж?

Тежиште троугла дели тежишну дуж у односу $2:3$.

- Навести критеријум дељивости природног броја са 18.

Природан број је дељив са 18 ако испуњава услове дењивости и са 3 и са 6, при чему је 3 дељив ако му је збир цифара дељив са 3, док је са 6 дељив уколико је дељив са 2 и 3.

- Израчунати вредност израза $\left(1\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^7 : 2^7 - \left(\sqrt{80} - 2 - 4\sqrt{5}\right)$.

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^7 : 2^7 - \left(\sqrt{80} - 2 - 4\sqrt{5}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^7 \cdot \frac{1}{2^7} - \left(4\sqrt{5} - 2 - 4\sqrt{5}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^7 \cdot \frac{1}{2^7} + 2 = 2$$

- Ако је $z = 2i$ одредити вредност израза $\left|\frac{1-z}{1+z}\right|$.

$$z = 2i, \qquad z = x + iy \Rightarrow x = 0\,, iy = 2i \Rightarrow y = 2$$

$$\left|\frac{1-z}{1+z}\right| = \left|\frac{1-x-iy}{1+x-iy}\right| = \left|\frac{1-2i}{1-2i}\right| = |1| = 1$$

- Израчунати вредност осталих тригонометријских функција $(\cos\alpha\,, \tan\alpha\,, \cot\alpha)$ ако је $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$$cos^2\alpha \cdot sin^2\alpha = 1,$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 \cdot cos^2\alpha = 1, \qquad \frac{144}{169} \cdot cos^2\alpha = 1$$

$$cos^2\alpha = \frac{169}{144}, \qquad cos\alpha = \frac{13}{12}$$

$$\tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{13}{12}} = \frac{144}{169}$$

$$\cot\alpha = \frac{cos\alpha}{sin\alpha} = \frac{\frac{13}{12}}{\frac{12}{13}} = \frac{169}{144}.$$

3.2.3. Анализа резултата

Дакле, након четвртог покушаја, 12 студената није успело да положи тест, а самим тим ни испит Пракса наставе математике и рачунарства текуће године. То није занемарљив број ако се има у виду да су тестови састављени од најелементарнијих математичких задатака.

Чињеница је да је свим студентима било неопходно знање оваквих и сличних задатака како би положили пријемни испит и стигли до треће и четврте године студија. Питање је само како се то знање „изгубило" на путу од пријемног испита до треће или четврте године студија. Примена раније стечених знања је камен спотицања великог броја ученика и студената, а веома је важна за образовање, као и свакодневни живот. Због тога би било корисно свако истраживање тог проблема, као и налажење могућих решења.

Замислите какву би и колику штету овакви „професори" нанели будућим генерацијама. Да ли има смисла говорити о развоју математичких компетецнија пре него што се реши „проблем" будућих професора. Да ли би сте волели да они предају Вашој деци? Илустрације ради, да ли би сте волели да Ваше дете и Вас лечи лекар који не разликује лекове од или да живите у кући коју је пројектовао грађевински инжињер који не зна да одреди статику зграде? Принцип је исти смо код оваквих професора нико неће остати без главе.

Како неко ко ни сам не зна оно што треба да предаје може томе да подучава друге? Једино је могуће да их подучава погрешним стварима што је горе од незнања.

„Незнање је неисписан папир на којем можемо писати, а погрешно знање ис исписан папир који се прво мора брисат." (Charles Caleb Colton)

3.3. Висока грађевинско – геодетска школа Београд

Висока грађевинско – геодетска школа у Београду настала је 1. јуна 1996. године спајањем Више грађевинске школе и Више геодетске школе.

Године оснивања су за Вишу геодетску школу 18. мај 1960. године, а Вишу грађевинску школу 1. новембра 1976. године.

Висока грађевинско-геодетска школа струковних студија образује стручњаке који су оспособљени за све облике практичних радова у грађевинској, архитектонској и геодетској делатности, и спремни да примењују актуелне законске прописе, стандарде и норме квалитета, као и најновија технолошка достигнућа у свакодневној пракси.

У школи се настава обавља у два одсека:

1. грађевински и
2. геодетски,

и три студијска програма основних струковних студија:

1. грађевинско инжењерство,
2. архитектура и
3. геодезија-геометрика.

Да би се будући студенти уписали на прву годину основних струковних студија, неопходно је да полажу пријемни испит из математике, што упућује на важност овог предмета на Високој грађевинско – геодетској школи.

3.3.1. Поступак истраживања

Приликом истраживања на Високој грађевинско – геодетској школи, посматрала сам студенте који су се уписали школске 2011-2012. године. Да би истаживање одговорило на тему мастер рада, неопходно је било да сакупим податке о успеху студената у средњој школи, резултате на пријемном испиту као и успешност приликом полагања испита Математике 1 са којим се студенти сусрећу на првој години студија.

Истраживање сам обавила међу студентима прве године Високе грађевинско-геодетске школе, са студијских програма Грађевинско инжењерство и архитектура.

Прву годину основних струковних студија на датим смеровима уписало је укупно 208 студената, од којих је 139 на студијком програму Грађевинско инжењерство и 69 на студијском програму Архитектура. Велико интересовање је било за Архитектуру, али само они који су били добри у средњој школи и који су показали одлично знање из математике на пријемном испиту могли су да упишу жељени смер.

У наставку рада извршићемо анализу и поређење резултата студената који су уписани на дата два студијска програма.

3.3.1.1. Грађевинско инжењерство

Просечан број поена из средње школе студената који су уписани на овај смер износи 27,68 од могућих 40. Најмање поена које има студент уписан на овај смер износи 18,10 а највише 39,40 поена. На основу ових података можемо закључити да је највише уписано студената који су у средњој школи имали врло добар и добар успех. Најбољи показатељ њиховог знања математике су резултати са пријемног испита.

У следећој табели ћемо приказати резултате пријемог испита, на ком су студенти, као што је речено, тестирали своје знање из математике.

Број поена[i1] освојених на пријемном испиту	Број студената који су освојили дати број поена	Број студената који су освојили дати број поена (у процентима)
0-10	10	7%
11-20	27	19%
21-30	46	33%
31-40	29	21%
41-50	16	12%
51-60	11	8%

Табела 3. Освојени поени на пријемном испиту

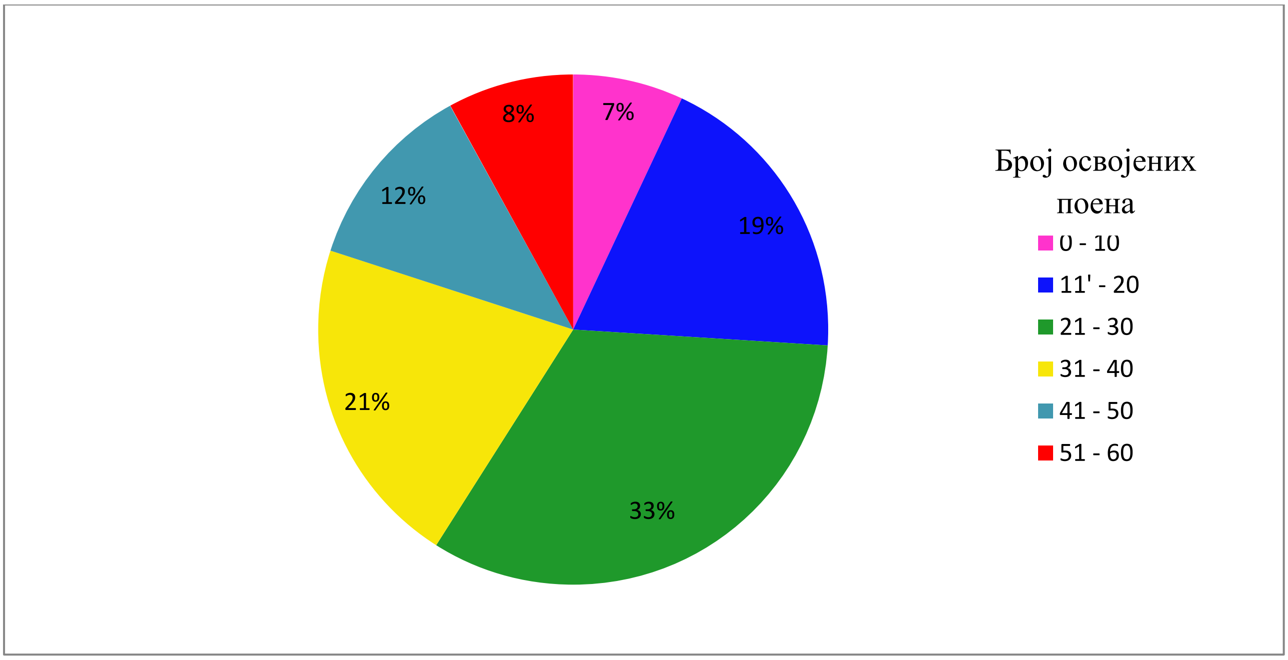


График 3.Успех студената на пријемном испиту

Поређења ради, на исти начин ћемо представити успех студената уписаних на студијски програм Архитектура.

[1] Најмањи број поена који су могли да постигну на пријемном је 0 , а највише 60 поена.

3.3.1.2. Архитектура

Просечан број поена из средње школе студената који су уписани на овај смер износи 31,37 од могућих 40. Најмање поена које има студент уписан на овај смер износи 20,02 а највише 40 поена. На основу ових података можемо закључити да су студенти уписани на смер Архитектура знатно бољи ученици од својих колега уписаних на смер Грађевинско инжењерство. Ову чињеницу потврђују и резултати пријемног испита.

У следећој табели ћемо приказати резултате пријемог испита, на ком су студенти, као што је речено, тестирали своје знање из математике.

Број поена[2] освојених на пријемном испиту	Број студената који су освојили дати број поена	Број студената који су освојили дати број поена (у процентима)
0-10	3	4%
11-20	12	17%
21-30	25	36%
31-40	10	15%
41-50	10	15%
51-60	9	13%

Табела 4. Успех ученика на пријемном испиту

[2] Најмањи број поена који су могли да постигну на пријемном је 0 , а највише 60 поена.

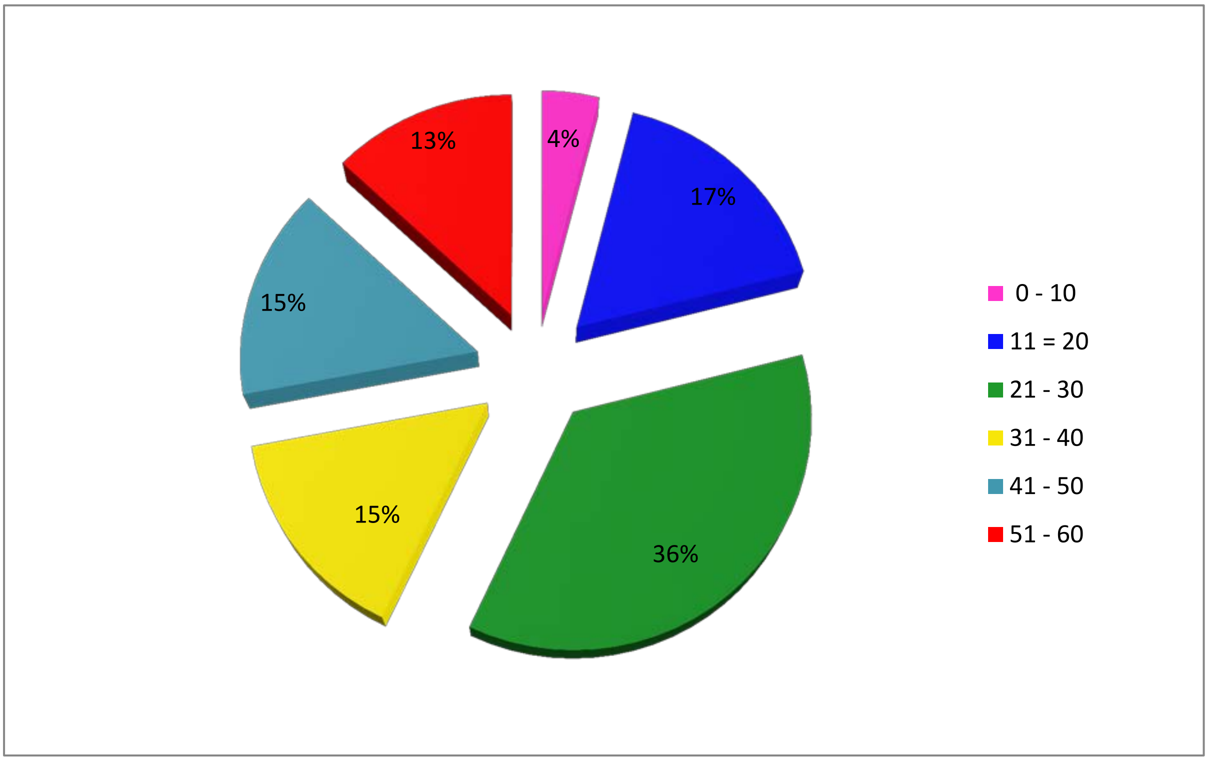


График 4. Успех студената на пријемном испиту

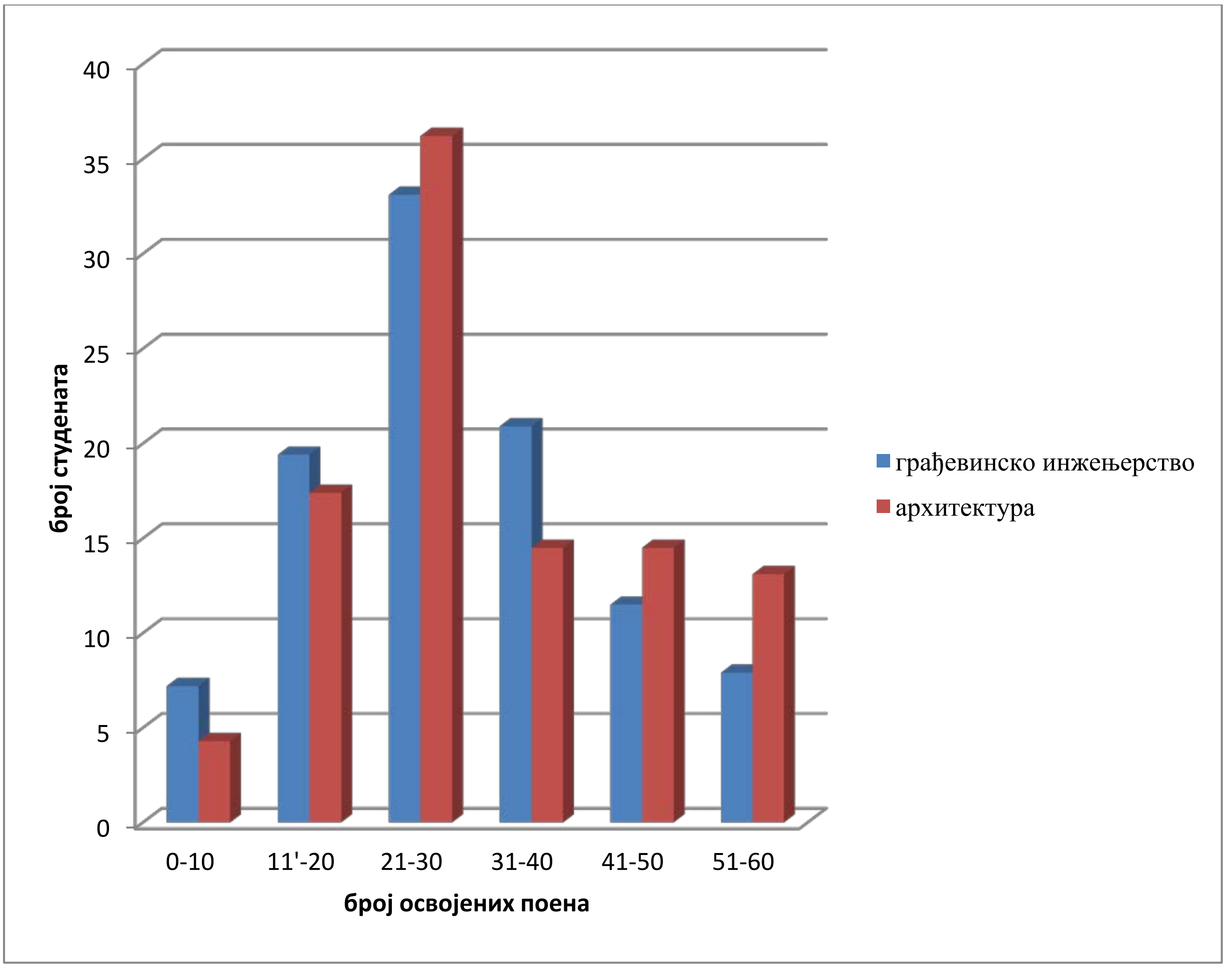


График 5 . Графичко представљање успеха студената Високе Грађевинске школе на смеровима Грађевинско инжењерство и архитектура на једном графику

Да би у потпуности одговорили на тему мастер рада, преостало нам је још да истражимо пролазност и успех студената из предмета Математике 1. У складу са тим, у даљем раду биће приложени задаци са писменог дела испита из јануарског, фебруарског и јунског испитног рока.

3.3.2. Писмени део испита из Математике 1, јануар 2012.

1. Наћи канонске једначине пројекције праве *p:* $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{-3}$

   на раван α*: 4x-2y+3z-8=0.*

2. Наћи површину паралелограма чије су дијагонале $\vec{d}_1 = 4\vec{p} + 3\vec{q}$ i $\vec{d}_2 = 2\vec{p} - 5\vec{q}$, gde je $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2$, $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$. Поред површине наћи и висину паралелограма.

3. Дата је крива $8x^2+4xy+5y^2-12x+6y-27=0$. Свести је на канонски облик и утврдити која је крива.

4. Решити матричну једначину $(A + X)^{-1} = B^{-1} + I$.

   $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. Решити систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned} \alpha x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 3x_1 + \quad + 2\alpha x_3 &= 4 \qquad \alpha \in R. \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

3.3.3. Резултати испита у јануарском испитном року

У јануарском испитном року, од укупно 208 студента који су се уписали на прву годину студија, на испит је изашло 113 студената, што указује на веома малу излазност. Од 113 студената који су изашли на испит, свега 17 студената је положило, што је око 8% од укупног броја студената. Просечна оцена студената на испиту је 8, што представља јако добар резултат у односу на укупну излазност као и успех постигнут на пријемном испиту где су се студенти сусрели са задацима из математике.

У следећој табели представићемо резултате студената који су положили испит.

Оцена	10	9	8	7	6
Број студената	2	5	3	5	2
Просечна оцена	8				

Табела 5. Резултати испита

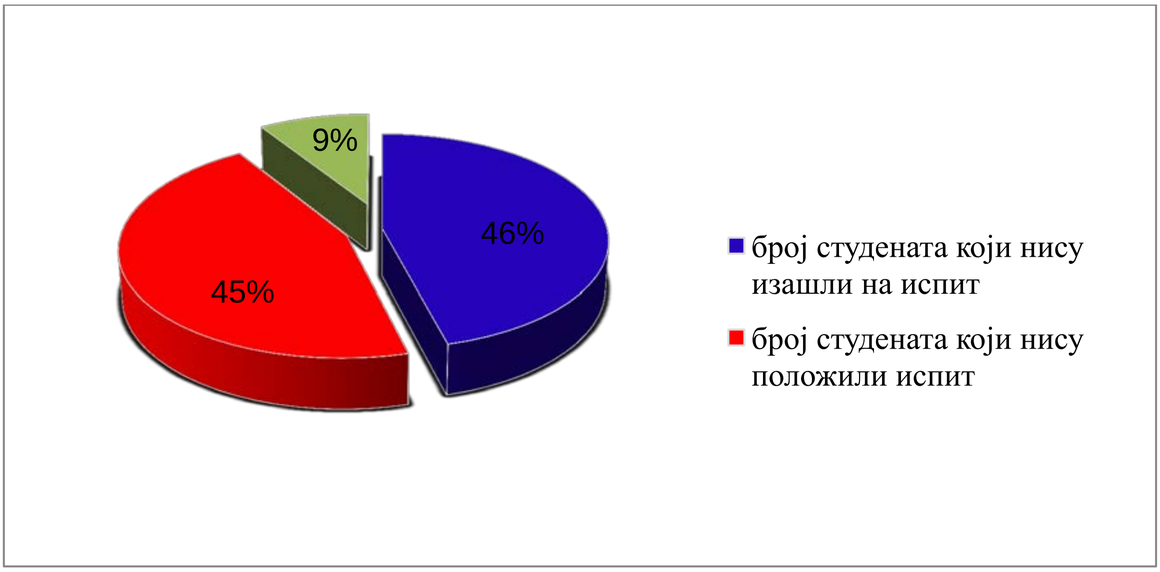


График 6 . Излазност студената и пролазност у јануарском испитном року

3.3.4. Писмени део испита из математике 1, фебруар 2012.

1. Одредити ранг матрице:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1-\alpha & 2 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \alpha \in R.$$

2. Применом Крамеровог правила решити систем:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + mx_3 &= 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 &= m \qquad m \in R \\ mx_1 + x_2 + x_3 &= m^2. \end{aligned}$$

3. Израчунати дужину дијагонале, угао између дијагонала и површину паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a} = 5\vec{m} - 3\vec{n}$ и $\vec{b} = 2\vec{n} - \vec{m}$, где је $|\vec{m}| = \sqrt{3}$, $|\vec{n}| = 2$ и $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.

4. На правој $p: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ наћи тачку подједнако удаљену од тачака *A(2, 1, -2) и B(4, -5, 4).*

5. Дата је крива $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$. Свести је на канонски облик и утврдити која је крива.

3.3.5. Резултати испита у фебруарском испитном року

У фебруарском испитном року, од укупно 191 студента који су се уписали на прву годину студија и нису положили Математику 1 у јануарском року, на испит је изашло 119 студената, што представља бољу излазност него у јануарском испитном року. Од 119 студената који су изашли на испит, 34 студента су положила, што је око 18% од укупног броја студената. Просечна оцена студената на испиту је 6.7, што представља јако лош резултат у поређењу са успехом који је постигнут у јануарском испитном року.

У следећој табели представићемо резултате студената који су положили испит.

Оцена	10	9	8	7	6
Број студената	1	3	2	7	21
Просечна оцена	6.7				

Табела 5. Резултати студената који су положили испит у фебруарском испитном року

График 7 . Излазност студената и пролазност у фебруарском испитном року

3.3.6. Писмени део испита из математике 1, јун 2012.

1. Решити матричну једначину $X(A + X)^{-1} = B$, где је:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Применом Крамеровог правила решити систем:

$$x_1 - x_2 - mx_3 = -1$$

$$x_1 - mx_2 - x_3 = -1 \qquad m \in R$$

$$mx_1 + x_2 - x_3 = -1.$$

3. Дати су вектори $\vec{a} = (m, 2\text{-}m, 3)$, $\vec{b} = (1,1,2)$ и $\vec{c} = (2, -1, 1)$. Одредити вредност параметра m тако да вектор $\vec{a}$ заклапа једнаке углове са $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

4. Наћи једначину праве која пролази кроз тачку $A(2, -1, 3)$ и сече под правим углом праву:

$$p: \quad x - 2y + 3 = 0$$

$$3x - 2z + 3 = 0.$$

5. Дата је крива $8x^2 + 4xy + 5y^2 - 12x + 6y - 27 = 0$. Свести је на канонски облик и утврдити која је то крива.

3.3.7. Резултати испита у јунском испитном року

У јунском испитном року, од укупно 157 студента који су се уписали на прву годину студија и нису положили Математику 1 у претходним испитним роковима (јануарком и фебруарском), на испит је изашло 70 студената, што представља најбољу излазност у свим испитним роковима. Од 70 студената који су изашли на испит, 17 студената је положило испит , што је око 11% од укупног броја студената. Просечна оцена студената на испиту је 6.5, што представља најлошији резулат који је постигнут на испитним роковима.

Оцена	10	9	8	7	6
Број студената	0	1	1	4	11
Просечна оцена	6.5				

Табела 6. Резултати студената који су положили испит у јунском испитном року

График 8 . Излазност студената и пролазност у јунском испитном року

Закључак

У раду су су предтављена истраживања на тему утицај развоја математичких компетенција ученика средњих школа на њихов успех на студијама, као и резултати истих. Образони систем у нашој земљи наилази на велике потешкоће. Ученици су углавном пасивни слушаоци наставе, што у великој мери спречава развој њихових математичких компетенција. Да ли је проблем у самим професорима, или у незаинетересованоси ученика за наставу, не може се поуздано рећи.

Чињеница је да је студентима Математичког факултет било неопходно знање оваквих и сличних задатака са тестова како би положили пријемни испит и стигли до треће и четврте године студија. Питање је само како се то знање „изгубило“ на путу од пријемног испита до треће или четврте године студија. Примена раније стечених знања је камен спотицања великог броја ученика и студената, а веома је важна за образовање, као и свакодневни живот. Због тога би било корисно свако истраживање тог проблема, као и налажење могућих решења.

Замислите какву би и колику штету овакви „професори“ нанели будућим генерацијама. Да ли има смисла говорити о развоју математичких компетецнија пре него што се реши „проблем“ будућих професора. Да ли би сте волели да они предају Вашој деци? Илустрације ради, да ли би сте волели да Ваше дете и Вас лечи лекар који не разликује лекове од или да живите у кући коју је пројектовао грађевински инжињер који не зна да одреди статику зграде? Принцип је исти смо код оваквих професора нико неће остати без главе.

Како неко ко ни сам не зна оно што треба да предаје може томе да подучава друге? Једино је могуће да их подучава погрешним стварима што је горе од незнања.

Неопходно је улагати много напора, рада и воље за креирање квалитетног математичког материјала који ће испуњавати основне методичке критеријуме што ће позитивно утицати на сам развој математичких компетенција.

.

Литература:

[1] Argyris, C, „*Knowledge for Action: A Guide to Overcoming Barriers to Organisational Change* “, San Francisco: Jossey Bass Publishers, 1993.

[2] Azervedo, R. i Hadwin, F. A. „*Scaffolding self-regulated learning and metacognition-implications for the design of computer-based scaffolds“*, 2005.

[3] Батес, Т. „*Управљање технолошким промјенама: Стратегије за водитеље високих училишта*“, Загреб, 2004.

[4] Барановић, Б. „*Национални курикулум за обавезно образовање у Хрватској: различите перспективе*“. Загреб, 2006.

[5] Hart, R. “ *Children Participation“*. Florence: UNICEF, 1992.

[6] Klafki, W. *„ Didaktika kao teorija obrazovanja u okviru kritičko-konstruktivne odgojne znanosti“, Zagreb 1992.*

[7] Милан Вукајлија „*Речник страних речи и израза*“, 5.допуњено издање, Просвета, Београд 2002.

[8] Никола Клаић „Рјечник страних језика“, Загреб 2002.

[9] OECD (2001). Knowledge and Skills for Life: First Results from PISA 2000. Paris: OECD.