Математички факултет
Универзитет у Београду

мастер рад

Више хомотопске групе

Светлана Мојсиловић

2013.

Садржај

1 Предговор

Теорија хомотопије представља једну од централних грана топологије. У њеној основи су хомотопске групе које, уз хомолошке и кохомолошке групе датог простора, чине фундаментални алат алгебарске топологије.

У оквиру овог рада читалац ће имати прилику да се упозна са хомотопским групама. У уводном делу, за читаоце који нису довољно упознати, дате су дефиниције и основна својства неких објеката на основу којих се гради теорија хомотопије. У одељку о *фундаменталној групи* дефинисан је појам фундаменталне групе која је прва у низу хомотопских група тополошког простора. Следи одељак назван *Више хомотопске групе.* Ту је дата дефиниција свих хомотопских група, са освртом на случај $n = 0$ када се, заправо, не добија структура групе. У овом, као и у претходном одељку, присутан је геометријки аспект наведених појмова, а сама дефиниција хомотопских група дата је на два еквивалентна начина. Након дефиниције, у одељку *Рачунање хомотопских група* наведена су тврђења која су од значаја за само израчунавање хомотопских група конкретних простора са најважнијим примерима. *Релативне хомотопске групе* представљају уопштење хомотопских група и у овом одељку је дата њихова дефиниција. Затим је, у одељку *Дуги тачан низ хомотопских група*, приказан и њихов однос са апсолутним хомотопским групама. У *Додатку* се налазе теореме које представљају надградњу дате теорије хомотопских група.

2 Увод

Први значајан појам у теорији хомотопије јесте појам *хомотопних пресликавања* из којег се изводе и појам *хомотопски еквивалентних простора* као и појам *фундаменталне групе* и осталих хомотопских група неког простора.

Дефиниција 1: Непрекидна пресликавања $f, g : X \to Y$ су *хомотопна*, у ознаци $f \simeq g$, ако постоји непрекидно пресликавање $F : X \times [0,1] \to Y$ такво да је:

$$(\forall x \in X)\ F(x,0) = f(x),\ F(x,1) = g(x).$$

Пресликавање F се у том случају назива *хомотопија.*

Скуп свих непрекидних пресликавања тополошког простора X у тополошки простор Y означаваћемо са $C(X,Y)$ или, чешће, са $Map(X,Y)$. Кроз цео текст, сматраћемо да су сва унапред дата пресликавања непрекидна.

Лако се проверава да је $\simeq$ релација еквиваленције на скупу $Map(X,Y)$.

Дефиниција 2: Тополошки простори X и Y су *хомотопски еквивалентни*, у ознаци $X \simeq Y$, ако постоје пресликавања $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ таква да је $g \circ f \simeq 1_X$ и $f \circ g \simeq 1_Y$.

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y,\ g \circ f \simeq 1_X,\ f \circ g \simeq 1_Y$$

Дефиниција 3: Нека су X и Y тополошки простори и A потпростор простора X, а $f, g : X \to Y$ непрекидна пресликавања за која важи да је за сваки елемент $a \in A$ $f(a) = g(a)$. Тада кажемо да су пресликавања f и g *хомотопна релативно* A ако постоји хомотопија $F : X \times I \longrightarrow Y$ таква да је [1]

$$(\forall x \in X)\ F(x,0) = f(x), \quad F(x,1) = g(x)$$

и још:

$$(\forall a \in A)(\forall t \in I)\ F(a,t) = f(a).$$

Пишемо: $F :\ f \simeq g\ (rel\ A)$.

У теорији хомотопије посматраћемо просторе са базним тачкама. Тополошки простор X са базном тачком $x_0 \in X$ означаваћемо као пар (X, x_0). Базну тачку x_0 можемо схватити као потпростор простора X који се састоји од само једног елемента.

Ако су (X, x_0) и (Y, y_0) два простора са базним тачкама, тада ћемо са $Map_0(X,Y)$ означавати скуп свих непрекидних пресликавања простора X у простор Y која тачку x_0 сликају у тачку y_0. Да пресликавање f припада скупу $Map_0(X,Y)$ наглашаваћемо и записом $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$. Скуп свих класа пресликавања која су хомотопна релативно x_0 означаваћемо са $[X,Y]_0$.

$$[X,Y]_0 \overset{def}{=} Map_0(X,Y) \diagup \simeq rel\ x_0$$

Дефиниција 4: Непрекидно пресликавање $u : I \longrightarrow X$ називамо *пут* у простору X.

[1] Ради једноставнијег записа, јединични интервал често ћемо означавати и словом I.

Ако имамо два пута $u, v : I \longrightarrow X$ таква да је $v(0) = u(1)$ онда можемо дефинисати операцију надовезивања путева u и v на следећи начин:

$$(u \cdot v)(t) = \begin{cases} u(2t), 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ v(2t-1), \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Дефиниција 5: Нека је (X, x_0) тополошки простор са базном тачком и Y било који тополошки простор. Нека су $f, g : X \longrightarrow Y$ непрекидна пресликавања и $u : I \longrightarrow Y$ пут у Y такав да је $u(0) = f(x_0)$ и $u(1) = g(x_0)$. Кажемо да су пресликавања f и g *хомотопна дуж пута* u ако и само ако постоји хомотопија $H : X \times I \longrightarrow Y$ таква да важи:

$$(\forall x \in X) \;\; H(x, 0) = f(x),$$

$$(\forall x \in X) \;\; H(x, 1) = g(x),$$

$$(\forall t \in I) \;\; H(x_0, t) = u(t).$$

Да су пресликавања f и g хомотопна дуж пута u записујемо овако: $f \underset{u}{\simeq} g$.

Следећим тврђењем дата су нека једноставна својства релације $\underset{u}{\simeq}$.

Тврђење 6: Нека је (X, x_0) тополошки простор са базном тачком и Y било који тополошки простор и нека су $f, g, h : X \longrightarrow Y$ непрекидна пресликавања. Тада важе следећа тврђења:

1. $f \simeq g$ ако и само ако постоји пут $u : I \longrightarrow Y$ такав да је $f \underset{u}{\simeq} g$.

2. $f \simeq g \;\; (rel \;\, x_0)$ ако и само ако $f \underset{const}{\simeq} g$.

3. $f \underset{u}{\simeq} g$ ако и само ако $g \underset{u^{-1}}{\simeq} f$.

4. Ако су $u, v : I \longrightarrow Y$ два пута таква да је $u(1) = v(0)$ и ако важи $f \underset{u}{\simeq} g$ и $g \underset{v}{\simeq} h$, онда важи и $f \underset{u \cdot v}{\simeq} h$.

5. Ако је x_0 недегенерисана тачка простора X и ако је $u : I \longrightarrow Y$ пут за који важи $u(0) = f(x_0)$, онда постоји пресликавање $g : X \longrightarrow Y$ такво да је $f \underset{u}{\simeq} g$.

У претходном тврђењу пресликавање $const$ је константно пресликавање интервала $I = [0, 1]$ у тачку x_0, а $u^{-1} : I \longrightarrow Y$ дефинишемо:

$$(\forall t \in I) \quad u^{-1}(t) \overset{def}{=} u(1-t).$$

$x_0 \in X$ је *недегенерисана тачка* ако пар (X, x_0) има својство проширења хомотопије. Доказ овог тврђења се изводи једноставно и препуштамо га читаоцу.

Дефиниција 7: Тополошки простор X је *компактно генерисан* ако је Хаусдорфов и ако за сваки $A \subset X$ важи еквиваленција: A је затворен у X ако и само ако је за сваки компакт $K \subset X$, $A \cap K$ затворен у X.

Следи још једна важна лема коју такође дајемо без доказа.

Лема 8: Нека је (X, x_0) тополошки пар који има својство проширења хомотопије, Y произвољан тополошки простор и нека су $f, g, h : X \longrightarrow Y$ непрекидна пресликавања и $u, v : I \longrightarrow Y$ произвољни путеви. Ако је $f \underset{u}{\simeq} g$, $f \underset{v}{\simeq} h$ и $u \simeq v \;\, rel \; \{0, 1\}$, онда је $g \underset{const}{\simeq} h$.

3 Фундаментална група

Појам фундаменталне групе дефинише се на просторима са базном тачком. Дакле, посматрајмо пар (X, x_0). Петља у тачки $x_0 \in X$ је свако непрекидно пресликавање $u : [0,1] \longrightarrow X$ за које важи $u(0) = u(1) = x_0$. Скуп $\pi_1(X, x_0)$ дефинисаћемо следећом једнакошћу:

$$\pi_1(X, x_0) \overset{def}{=} \{\varphi : I \to X \mid \varphi(0) = \varphi(1) = x_0\}/ \simeq rel \partial I.$$

То је, дакле, скуп свих класа петљи у тачки x_0, при чему су идентификоване петље које су хомотопне релативно ∂I. Петља представља и специјалан случај пута у простору X, па се операција надовезивања путева може применити и на било које две петље φ и ψ у тачки x_0:

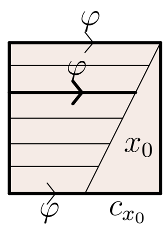
$$(\varphi \cdot \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(2t), 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \psi(2t-1), \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Резултат надовезивања је то да у првој половини пута прођемо петљу φ, а у другој половини пута петљу ψ.
Сада можемо да уведемо операцију $*$ на скупу $\pi_1(X, x_0)$ на следећи начин:

$$[\varphi] * [\psi] \overset{def}{=} [\varphi \cdot \psi]$$

Увођењем операције $*$ на скуп $\pi_1(X, x_0)$ добија се структура групе коју називамо *фундаментална група*, у ознаци $\pi_1(X, x_0)$.

Означићемо са $c_{x_0} : I \longrightarrow X$ петљу у тачки x_0 $(\forall t \in I, \quad c_{x_0}(t) = x_0)$. На следећој слици је представљен квадрат $I \times I$ и описана хомотопија релативно ∂I између петљи $\varphi \cdot c_{x_0}$ и φ. Свака тачка троугла са слике пресликава се у x_0, а свака од водоравних дужи се помоћу петље φ слика у простор X. Закључујемо да је десни неутрал операције $*$ елемент $[c_{x_0}]$.



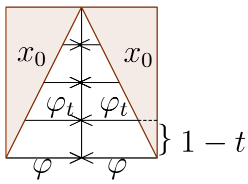
$$[\varphi] * [c_{x_0}] = [\varphi \cdot c_{x_0}] = [\varphi]$$

Аналогно се може конструисати и хомотопија која показује да је $[c_{x_0}]$ уједно и леви неутрал операције $*$.

Инверз елемента $[\varphi]$ у групи $\pi_1(X, x_0)$ је $[\varphi]^{-1} = [\varphi^{-1}]$, где је

$$\varphi^{-1}(t) \overset{def}{=} \varphi(1-t).$$

То значи да петљу φ пролазимо у обрнутом смеру. Са следеће слике се види како је могуће направити хомотопију релативно ∂I између пресликавања $\varphi \cdot \varphi^{-1}$ и c_{x_0}.



Пресликавање φ_t које се појављује на нивоу $1-t$ представља рестрикцију пресликавања φ на интервал $[0, t]$. За тако дефинисано φ_t на нултом нивоу ($t = 0$), добијамо $\varphi \cdot \varphi^{-1}$, на нивоу $1 - t$, на рачун дела пресликавања φ појављује се константно пресликавање, да би то на нивоу 1 постало чисто константно пресликавање.

Значи, фундаменталну групу простора (X, x_0) видимо као групу свих класа петљи у тачки x_0. Са друге стране, знамо да је кружница S^1 хомеоморфна са јединичним интервалом коме идентификујемо крајње тачке ($S^1 \approx I/\partial I$) тако да је за дату петљу φ могуће одредити пресликавање f за које следећи дијаграм комутира:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & X \\ S^1 \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Пресликавање p дефинисано је као $p(t) = e^{2\pi i t}\,(t \in [0, 1])$. За базну тачку простора S^1 узимамо јединицу у комплексној равни e_1, тако да заиста важи $p(0) = p(1) = e_1$. Уколико је ψ још једна петља у тачки x_0 и g одговарајуће пресликавање за које комутира дијаграм:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p"'] & X \\ S^1 \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

тада се лако проверава да важи:

$$\varphi \simeq \psi \; rel\; \partial I \iff f \simeq g \; rel\; e_1$$

Класе $[\varphi]$ и $[f]$ су у једнозначној кореспонденцији па се фундаментална група може схватити и као група хомотопских класа непрекидних пресликавања пара (S^1, e_1) у пар (X, x_0).

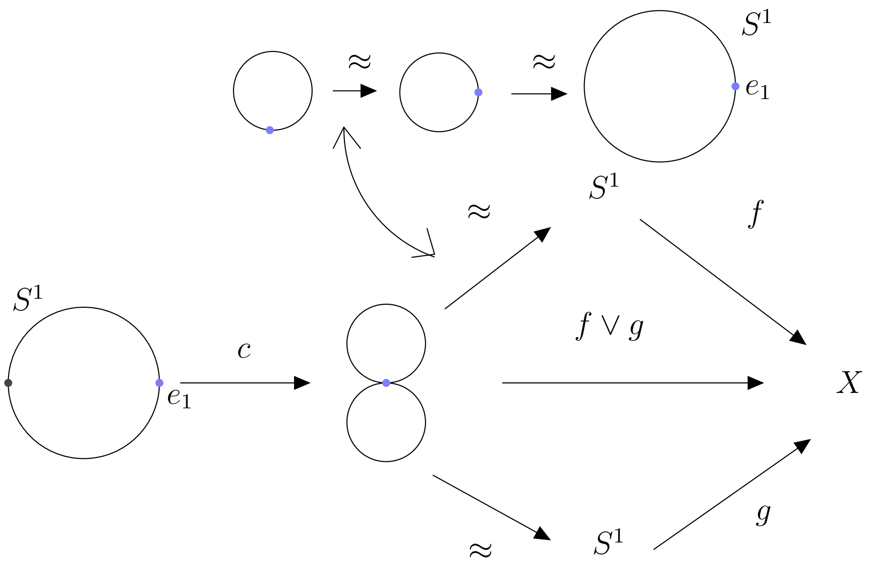
$$\pi_1(X, x_0) = \{f : S^1 \to X \mid f(e_1) = x_0\}/ \simeq (rel\; e_1)$$

Или краће:

$$\pi_1(X, x_0) = [S^1, X]_0$$

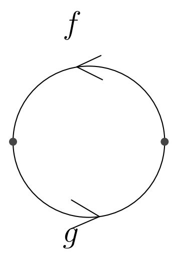
Следећа слика приказује како изгледа операција групе $\pi_1(X, x_0)$ виђене као $[S^1, X]_0$. За $[f]_0, [g]_0 \in [S^1, X]_0$, један представник класе $[f]_0 * [g]_0$ изгледа овако:

Горњу кружницу заротирамо, па увећамо на величину S^1



Пресликавање c представља идентификацију тачке e_1 и њој антиподалне тачке $-e_1$. Можемо га схватити и као колапсирање потпростора S^0 у простору S^1.

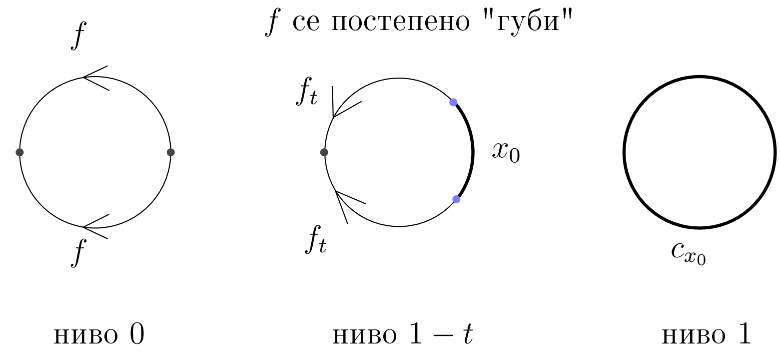
Резултат операције $*$ скицираћемо једноставније:



Инверзан елемент елемента $[f]_0$ је:

$$[f]_0^{-1} = [f \circ r]_0,$$

где је пресликавање $r : S^1 \longrightarrow S^1$ рефлексија у односу на реалну осу. Ако је $\varphi : I \longrightarrow X$ петља у тачки x_0 и $f : S^1 \longrightarrow X$ одговарајуће пресликавање ($f \circ p = \varphi$), онда хомотопија релативно ∂I између петљи $\varphi \circ \varphi^{-1}$ и c_{x_0} представљена на слици 2 нам даје хомотопију релативно e_1 између $(f \vee (f \circ r)) \circ c$ и c_{x_0} описану на следећој слици:



Пример 9: Познато је да је фундаментална група кружнице:

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z},$$

док за фундаменталну групу $n-$димензионалне сфере, где је $n \geq 2$ важи:

$$\pi_1(S^n) \cong \mathbf{0}.$$

Сада је могуће дефинисати, на темељу тврђења 6 и леме 8, једно десно дејство групе $\pi_1(Y, y_0)$ на скуп $[X, Y]_0$.

Нека су (X, x_0) и (Y, y_0) два тополошка пара од којих први има својство проширења хомотопије. Посматрајмо скуп $[X, Y]_0$. Нека је $[f]_0 \in [X, Y]_0$ један елемент тог скупа и пресликавање $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ један представник уочене класе $[f]_0$. Уочимо још и елемент $[u] \in \pi_1(Y, y_0)$, као и једног представника u овог елемента – класе $[u]$. При томе, знамо да важи:

$$f(x_0) = y_0 \qquad \text{и} \qquad u(0) = u(1) = y_0.$$

На основу тачке 5. тврђења 6 знамо да постоји непрекидно пресликавање $g : X \longrightarrow Y$ такво да је $f \underset{u}{\simeq} g$. Како је $g(x_0) = u(1) = y_0$, то је $g \in Map(X, Y)_0$. Придруживање елемента $[g]_0 \in [X, Y]_0$ пару $([f]_0, [u])$ означићемо на следећи начин:

$$[f]_0 \cdot [u] = [g]_0.$$

Следећи став оправдава увођење овакве ознаке.

Став 10: $\cdot$ је једно добро дефинисано десно дејство групе $\pi_1(Y, y_0)$ на скуп $[X, Y]_0$.

Доказ овог става се ослања на тврђење 6 и лему 8 и препуштамо га читаоцу.

Једно од најважнијих својстава фундаменталне групе дато је следећим тврђењем.

Теорема 11: Ако је X *путно повезан* тополошки простор, и $x_0, x_1 \in X$ две различите тачке тог простора, онда је

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1).$$

У следећем одељку дефинисаћемо више хомотопске групе и упознати нека њихова важна својства.

4 Више хомотопске групе

У овом одељку дефинисаћемо низ скупова $\pi_n(X, x_0)$, $n \in N_0$, и на сваком од ових скупова (изузев кад је $n = 0$) увешћемо и одговарајућу операцију за коју ћемо добити структуру групе. За $n = 1$ добија се фундаментална група коју смо већ упознали, а за $n \geq 2$ те групе називаћемо више хомотопске групе. Једино у случају $n = 0$ не добијамо групу јер на скупу $\pi_0(X, x_0)$ не можемо увести ни одговарајућу операцију.

Нека је дат тополошки простор X са базном тачком x_0. За сваки број $n \in N_0$ скуп $\pi_n(X, x_0)$ дефинисаћемо помоћу једнакости:

$$\pi_n(X, x_0) \overset{def}{=} \{f : I^n \longrightarrow X \mid f(\partial I^n) \subseteq \{x_0\}\} \diagup \simeq rel\, \partial I^n.$$

У случају да је $n = 0$, посматрамо пресликавања чији је домен $I^0 = *$. Граница тог скупа је $\partial I^0 = \emptyset$, па је онда и слика те границе такође празан скуп. То је и једини случај када у горњој дефиницији уместо релације $\subseteq$ не може да стоји $=$. У свим осталим случајевима $(n \geq 1)$, могуће је заменити $\subseteq$ са $=$.

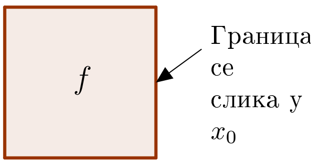
Конкретно, скуп $\pi_0(X, x_0)$ представља скуп свих пресликавања тачке у скуп X, међу којима идентификујемо хомотопна, па је то заправо скуп свих компоненти путне повезаности простора X. Једино на овом скупу нећемо дефинисати операцију.

За $n = 1$, добијамо скуп $\pi_1(X, x_0)$ који смо већ имали код фундаменталне групе.

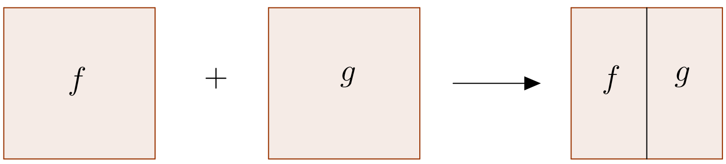
За $n \geq 2$ посматрајмо најпре пресликавања $f, g : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$. За таква два пресликавања дефинисаћемо операцију:

$$(f+g)(t_1, t_2, \ldots, t_n) \overset{def}{=} \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n), 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases}.$$

Ако пресликавање f скицирамо на следећи начин:



онда бисмо резултат операције $+$ примењене на пресликавања f и g могли једноставно приказати следећом сликом:



Сада је могуће увести и операцију $+$ на скупу $\pi_n(X, x_0)$, користећи претходну дефиницију:

$$[f] + [g] \overset{def}{=} [f+g].$$

Операција $+$ је добро дефинисана и асоцијативна, а неутрални елемент за ову операцију је класа константног пресликавања $[c_{x_0}]$. Сваки елемент скупа $\pi_n(X, x_0)$ има и свој инверз, па смо за сваки природан број $n \geq 2$ добили групу $(\pi_n(X, x_0), +)$.

Доказивање наведених својстава операције $+$ врши се аналогно као за фундаменталну групу. Овде ћемо описати сличицама хомотопију за десни неутрал и инверзни елемент.

Неутрал

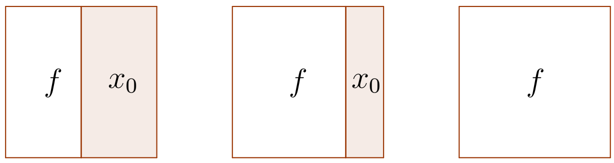
Да бисмо доказали да је неутрални елемент $[c_{x_0}]$, потребно је проверити да за све $f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ важи:

$$[f + c_{x_0}] = [f] \qquad \text{и} \qquad [c_{x_0} + f] = [f],$$

тј. да је:

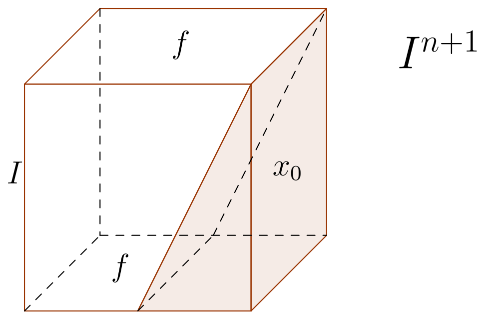
$$f + c_{x_0} \simeq f \quad rel \partial I \qquad \text{и} \qquad c_{x_0} + f \simeq f \quad rel \partial I.$$

Хомотопије између ових парова пресликавања постоје, а на следећим сличицама је описана прва од ове две хомотопије.



ниво 0 ниво $1-t$ ниво 1

Тродимензионална слика ове хомотопије изгледа овако:



Све тачке осенченог дела $(n+1)$-димензионалне коцке I^{n+1} сликају се у тачку x_0.

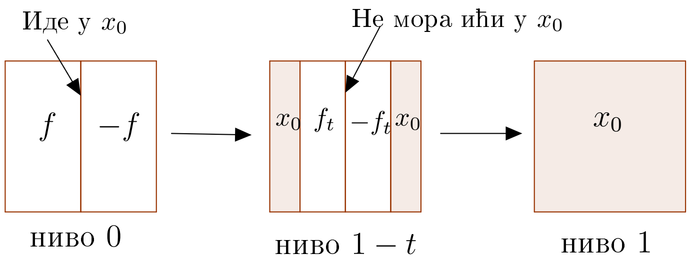
Инверзни елемент

За сваки елемент $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, постоји и његов инверзни елемент:

$$-[f] = [-f],$$

где је $-f$ следеће пресликавање:

$$(-f)(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \ldots, t_n).$$



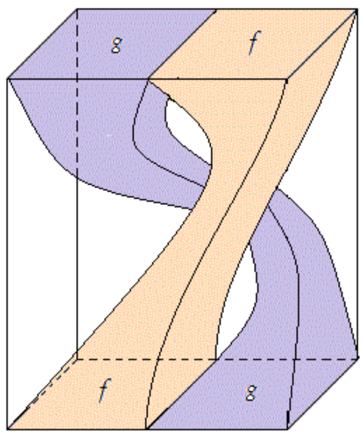
На горњој слици је описана хомотопија релативно ∂I^n између пресликавања $f+(-f)$ и c_{x_0}, што значи да је $[-f]$ заиста десни инверз елемента $[f]$ у групи $\pi_n(X, x_0)$. (Слично бисмо доказали да је то леви инверз елемента $[f]$.) Пресликавање f_t које се појављује на слици јесте рестрикција пресликавања f на скуп $[0,t]\times I^{n-1}$.

Комутативност

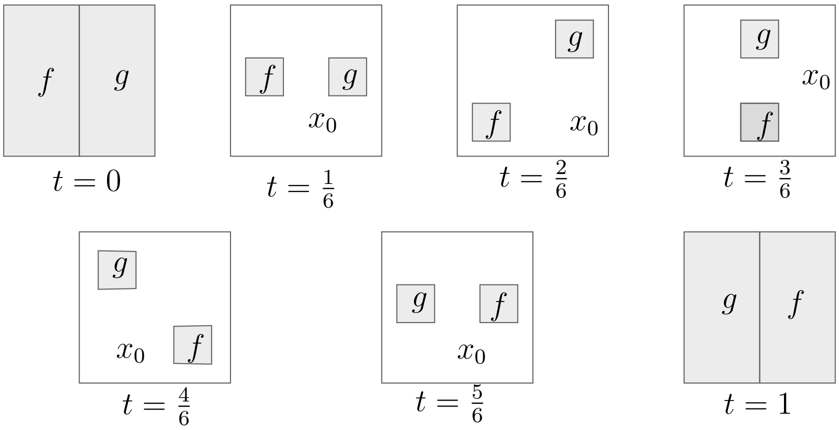
Показали смо да је $\pi_n(X, x_0)$ група за све природне бројеве n. Осим тога, за $n \geq 2$ добијамо комутативне групе $\pi_n(X, x_0)$. У том случају постоји хомотопија

$$H:\ f+g \simeq g+f \quad rel \partial I^n$$

коју можемо илустровати на следећи начин:



На следећој слици је приказано како изгледа хомотопија H за различите вредности променљиве $t \in [0,1]$.



Како је за слагање овакве хомотопије потребно имати бар дводимензионалну коцку, то о комутативности фундаменталне групе не можемо ништа рећи.

Раније смо уочили да се фундаментална група може добити и као група хомотопских класа пресликавања пара (S^1, e_1) у пар (X, x_0). Слично томе, ако је S^n јединична n-димензионална сфера, а $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^{n+1}$, елементи групе $\pi_n(X, x_0)$ могу се добити као хомотопске класе пресликавања пара (S^n, e_1) у пар (X, x_0). Наиме, простори $I^n \diagup \partial I^n$ и S^n су хомеоморфни, па постоји пресликавање $p : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (S^n, e_1)$ које индукује један такав хомеоморфизам. За свако пресликавање $f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ постоји пресликавање $f' : (S^n, e_1) \longrightarrow (X, x_0)$ такво да следећи дијаграм комутира:

$$\begin{tikzcd} I^n \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X \\ & S^n \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Ако уочимо још једно пресликавање $g : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ и њему одговарајуће пресликавање $g' : (S^n, e_1) \longrightarrow (X, x_0)$ за које комутира дијаграм:

$$\begin{tikzcd} I^n \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "p"'] & & X \\ & S^n \arrow[ur, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

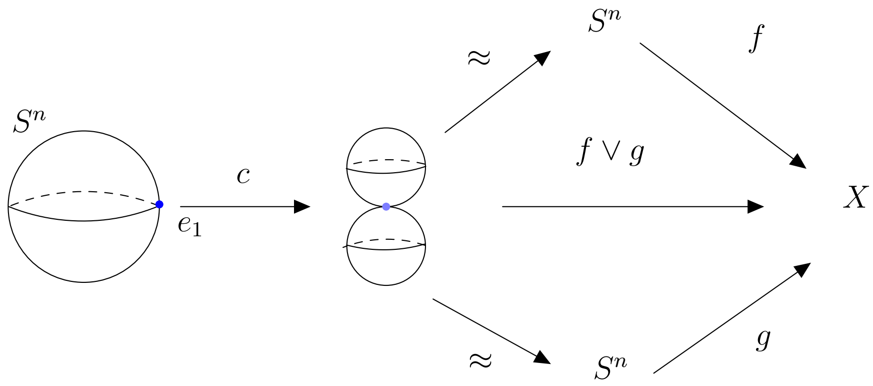
тада се може лако проверити да важи еквиваленција:

$$f \simeq g \ rel \ \partial I^n \iff f' \simeq g' \ rel \ e_1.$$

Захваљујући овој еквиваленцији видимо да је $\pi_n(X, x_0) = [S^n, X]_0$.

Ова једнакост важи и за $n = 0$. Тада се добија једнакост $\pi_0(X, x_0) = [S^0, X]_0$. Простор S^0 састоји се од две тачке од којих се пресликавањима из $[S^0, X]_0$ једна слика у тачку x_0, а друга се призвољно слика у простор X. Међусобно су хомотопна она пресликавања код којих се друга тачка слика у исту компоненту путне повезаности.

У случајевима када је $n \neq 0$ потребно је сагледати како изгледа операција одређене хомотопске групе. За фундаменталну групу то је већ урађено, а слично се добија и у осталим случајевима. Ако су $[f]_0$ и $[g]_0$ два елемента из $[S^n, X]_0$, тада је један представник класе $[f]_0 + [g]_0$ приказан на следећој слици:



Дакле, важи:

$$[f]_0 + [g]_0 \overset{def}{=} [(f \vee g) \circ c]_0,$$

где је пресликавање c колапсирање потпростора S^{n-1} у простору S^n.

Инверзни елемент елемента $[f]_0 \in \pi_n(X, x_0)$ у овом случају је

$$-[f]_0 = [f \circ r]_0$$

где је пресликавање r рефлексија у односу на екваторијалну хиперраван $s_{n+1} = 0$, тј.

$$r(s_1, \ldots, s_n, s_{n+1}) = (s_1, \ldots, s_n, -s_{n+1}).$$

Познато је да код путно повезаног простора фундаментална група $\pi_1(X, x_0)$ не зависи од избора тачке x_0. Исто тврђење важи и за остале хомотопске групе $\pi_n(X, x_0), n \geq 2$. Да бисмо се у то уверили, посматрајмо путно повезан простор X, призвољне тачке $x_0, x_1 \in X$ и уочимо пут $u : I \longrightarrow X$ такав да је $u(0) = x_0$ и $u(1) = x_1$. Такав пут постоји јер је простор X путно повезан.

Нека је $[f]_0 \in \pi_n(X, x_0)$ произвољан елемент и нека је пресликавање $f : (S^n, e_1) \longrightarrow (X, x_0)$ један представник класе $[f]_0$. Тачка e_1 је недегенерисана тачка сфере S^n, па, као што смо имали у тачки 5 тврђења 6, постоји пресликавање $g : (S^n, e_1) \longrightarrow (X, x_1)$ такво да је $f \underset{u}{\simeq} g$. Дефинисаћемо пресликавање $\beta_u : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_1)$ на следећи начин:

$$\beta_u([f]_0) \overset{def}{=} [g]_0.$$

Доказ да је овим добро дефинисано једно пресликавање је аналоган доказу става 10. Такође, на основу леме 8, доказује се да резултат пресликавања β_u не зависи ни од избора пута u унутар хомотопске класе $[u]$. То значи да ако изаберемо два пута u и u' таква да је $u \simeq u' \ rel \ \{0, 1\}$, онда је и $\beta_u = \beta_{u'}$.

Следеће важне једнакости се врло једноставно проверавају на основу дефиниције пресликавања β_u и својстава релације $\underset{u}{\simeq}$. Ако су u и v путеви у X такви да је $u(0) = x_0$ и $u(1) = v(0) = x_1$, онда:

$$\beta_{u\cdot v} = \beta_v \circ \beta_u,$$

$$\beta_{c_{x_0}} = \mathbf{1}_{\pi_n(X,x_0)},$$

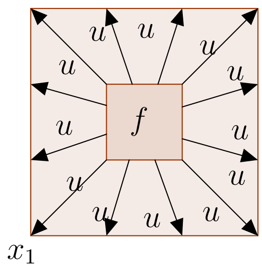
$$\beta_u \circ \beta_{u^{-1}} = \beta_{u^{-1}\cdot u} = \beta_{c_{x_1}} = \mathbf{1}_{\pi_n(X,x_1)},$$

$$\beta_{u^{-1}} \circ \beta_u = \mathbf{1}_{\pi_n(X,x_0)}.$$

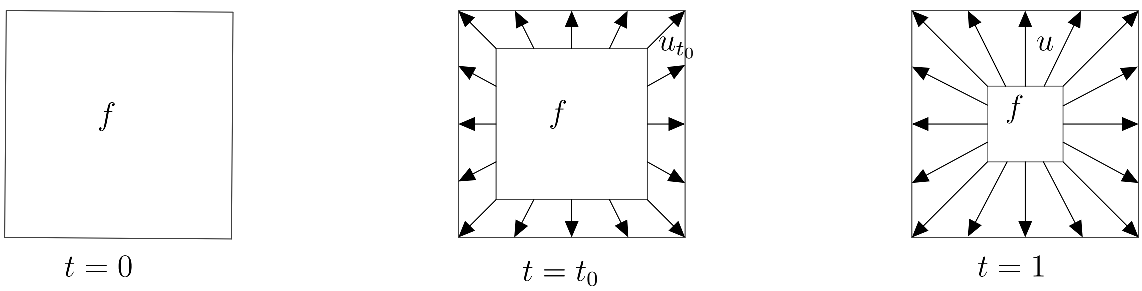
На основу последња два реда се види да је β_u бијекција за сваки изабрани пут u и да је:

$${\beta_u}^{-1} = \beta_{u^{-1}}.$$

Са друге стране, пресликавања f и g можемо посматрати и као пресликавања $f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ и $g : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_1)$.



На слици изнад су приказана два концентрична квадрата. Унутрашњи квадрат представља пресликавање f. Цела граница тог квадрата се, према томе, слика у тачку x_0, а дуж сваке линије која полази из центра, почевши од границе унутрашњег квадрата па до границе спољашњег пролази се дуж пута u. То значи да се цела граница спољашњег квадрата слика у тачку x_1. Цео већи квадрат заправо представља класу $[g] = \beta_u([f])$. Следећа слика описује хомотопију $H: \ f \underset{u}{\simeq} g$.

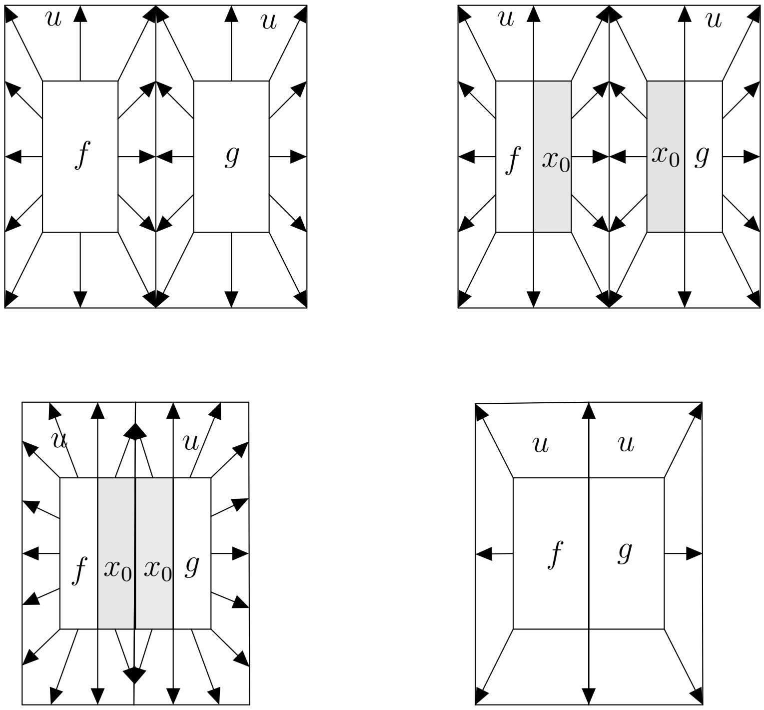


За свако $t \in I$, граница n-димензионалне коцке I^n се слика у једну тачку која при овој хомотопији прође путем u од тачке x_0 до тачке x_1 како t пролази интервалом $[0, 1]$.

Посматрајући пресликавање β_u на овај начин, можемо доказати следећи став.

Став 12: Пресликавање β_u је хомоморфизам.

Доказ: Нека су $[f]$ и $[g]$ произвољни елементи групе $\pi_n(X, x_0)$. Једнакост $\beta_u([f]+[g]) = \beta_u([f]) + \beta_u([g])$ доказаћемо помоћу следећих сличица:



На сликама су дата четири пресека тродимензионалне слике хомотопије између пресликавања која представљају десну и леву страну горње једнакости. На првој сличици приказано је како изгледа један представник десне стране. То је ниво 0. На следећој сличици видимо како унутар малих квадрата долази до "скупљања" пресликавања f и g и делимично појаве константног пресликавања c_{x_0}. Када тај процес доведе до тога да је сваки од малих квадрата подељен на два подударна дела од којих је један део пресликавање f, односно g, а други део константно пресликавање, тада је могуће хомотопијом постепено "губити" средишњи део слике као што се види на трећој сличици. Тај процес завршавамо када дођемо до тога да је у унутрашњем квадрату остало управо пресликавање $f+g$, што значи да смо добили представника класе $[f]+[g]$. Комплетан пут u пролазимо када се крећемо од границе унутрашњег до границе спољашњег концентричног квадрата било којим правцем који полази из центра. (То не би био случај са свим правцима без првобитног проширења константним пресликавањем c_{x_0}.) Тиме смо на нивоу 1 дошли до представника класе $\beta_u([f]+[g])$ која се и налази на левој страни једнакости коју смо хтели да докажемо.$\square$

Како смо доказали да је пресликавање $\beta_u : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_1)$ и бијекција и хомоморфизам, тиме смо доказали и тврђење које следи.

Тврђење 13: Ако је тополошки простор X путно повезан, тада за две произвољне тачке $x_0, x_1 \in X$ важи:

$$\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_1).$$

Другим речима, код путно повезаног простора X хомотопске групе не зависе од избора базне тачке. У том случају, за хомотопске групе простора X користићемо и ознаку $\pi_n(X)$ где се не наглашава базна тачка. Међутим, то не значи да је $\pi_n(x) = [S^n, X]$, већ је $\pi_n(x) = [S^n, X]_0$, при чему је све једно коју ћемо базну тачку одабрати у простору X.

Дефиниција 14: Простор X називаћемо *m-повезан простор* ако за свако $n \leq m$ важи $\pi_n(X) = \mathbf{0}$.

Напомена: Иако $\pi_0(X)$ не представља групу, користићемо запис $\pi_0(X) = \mathbf{0}$ онда када се тај скуп састоји од само једног елемента, тј. када је простор X путно повезан.

1-повезан простор називаћемо још и *просто повезаним* простором.

Став 15: Пресликавање $([f]_0, [u]) \longmapsto \beta_u([f]_0)$ је једно десно дејство групе $\pi_1(X, x_0)$ на групу $\pi_n(X, x_0)$.

Доказ: Група $\pi_1(X, x_0)$ дејствује на $[S^n, X]_0$ као скуп, што видимо на основу става 10. Став 12 говори да је пресликавање β_u хомоморфизам, па тако дејство које се помиње у овом ставу слика групу $\pi_1(X, x_0)$ у групу аутоморфизама $Aut(\pi_n(X, x_0))$.$\square$

Пример 16: У случају $n = 1$ фундаментална група дејствује на саму себе на следећи начин: класа $[u]$ даје аутоморфизам $\beta_u \in Aut(\pi_1(X, x_0))$:

$$\beta_u([v]) = [u^{-1} \cdot v \cdot u] = [u]^{-1} * [v] * [u].$$

Дакле, β_u је унутрашњи аутоморфизам групе $\pi_1(X, x_0)$ који одговара елементу $[u]^{-1}$.

Имајући у виду претходно дефинисано дејство, дефинисаћемо n-прост простор.

Дефиниција 17: Путно повезан простор X називаћемо *n-простим* $(n \in N)$ ако група $\pi_1(X)$ тривијално дејствује на групу $\pi_n(X)$.

Да би дефиниција била коректна, морамо се уверити да за сваке две тачке $x_0, x_1 \in X$ важи еквиваленција: група $\pi_1(X, x_0)$ тривијално дејствује на групу $\pi_n(X, x_0)$ ако и само ако група $\pi_1(X, x_1)$ тривијално дејствује на групу $\pi_n(X, x_1)$. У том циљу извршимо следеће разматрање.

Претпоставимо да група $\pi_1(X, x_0)$ тривијално дејствује на групу $\pi_n(X, x_0)$. Нека је $[v] \in \pi_1(X, x_1)$ произвољан елемент и петља v представник ове класе и нека је $[g]_0 \in \pi_n(X, x_1)$ произвољна класа, при чему је g произвољан представник. Пар $([g]_0, [v])$ слика се у $\beta_v([g]_0)$.

$$([g]_0, [v]) \mapsto \beta_v([g]_0)$$

Простор X је путно повезан па постоји пут ω у X, такав да је $\omega(0) = x_0$ и $\omega(1) = x_1$ при чему је $\beta_\omega : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_1)$ изоморфизам. Нека је:

$$[u] = {\beta_\omega}^{-1}([v]) = [\omega \cdot v \cdot \omega^{-1}]$$

и

$$[f]_0 = {\beta_\omega}^{-1}([g]_0).$$

Тада је $[u] \in \pi_1(X, x_0)$, $[f]_0 \in \pi_n(X, x_0)$ и важе једнакости:

$$\begin{aligned}
\beta_v([g]_0) &= \beta_v(\beta_\omega([f]_0)) \\
&= \beta_v(\beta_\omega(\beta_{u^{-1}}([f]_0))) \\
&= \beta_v \circ \beta_\omega \circ \beta_{u^{-1}}([f]_0)
\end{aligned}$$

$$= \beta_v \circ \beta_\omega \circ \beta_{\omega \cdot v^{-1} \cdot \omega^{-1}}([f]_0)$$
$$= \beta_v \circ \beta_\omega \circ \beta_{\omega^{-1}} \circ \beta_{v^{-1}} \circ \beta_\omega([f]_0)$$
$$= \beta_v \circ \beta_{v^{-1}} \circ \beta_\omega([f]_0)$$
$$= \beta_\omega([f]_0)$$
$$= [g]_0.$$

Из $\beta_v([g]_0) = [g]_0$ добијамо да β_v фиксира елементе групе $\pi_n(X, x_1)$, па због произвољности класе $[v]$ имамо да $\pi_1(X, x_1)$ тривијално дејствује на групу $\pi_n(X, x_1)$.

Дефиниција 18: За простор X кажемо да је *прост* ако је за сваки природан број n тај простор n-прост.

Ако је простор X просто повезан, онда је његова фундаментална група $\pi_1(X, x_0) = \mathbf{0}$, тј. садржи само елемент $[c_{x_0}]$, па тако дејствује тривијално на све хомотопске групе. Значи да је просто повезан простор увек и прост.

Знамо да су хомотопске групе $\pi_n(X, x_0), n \geq 2$, увек комутативне, а у следећем тврђењу дат је један критеријум комутативности фундаменталне групе.

Тврђење 19: Путно повезан простор X је 1-прост ако и само ако је група $\pi_1(X)$ комутативна.

Доказ: Нека је група $\pi_1(X)$ комутативна и $[u] \in \pi_1(X)$ произвољан елемент. Тада је за сваки елемент $[v] \in \pi_1(X)$:

$$\beta_u([v]) = [u]^{-1} * [v] * [u] = [v] * [u]^{-1} * [u] = [v].$$

Дакле, фундаментална група у овом случају тривијално дејствује на себе, па је простор X 1-прост.

Претпоставимо сада да је простор X 1-прост. Тада је сваки унутрашњи аутоморфизам групе $\pi_1(X)$ тривијалан. То даље значи да су за свака два $[u], [v] \in \pi_1(X)$ следеће еквивалентне једнакости тачне:

$$\beta_u([v]) = [v] \iff$$
$$[u]^{-1} * [v] * [u] = [v] \iff$$
$$[u] * [u]^{-1} * [v] * [u] = [u] * [v] \iff$$
$$[v] * [u] = [u] * [v].$$

Добили смо, дакле, да је онда група $\pi_1(X)$ комутативна, што је и требало доказати.□

5 Рачунање хомотопских група

У пракси се показује да се хомотопске групе у већини случајева тешко израчунавају. Ипак, у овом делу видећемо под којим условима су хомотопске групе неких простора изоморфне или су у неким другим односима који могу бити од помоћи при израчунавању ових група.

Приметимо најпре да су све хомотопске групе тачке тривијалне (јер постоји само једно пресликавање из S^n у тачку).

Посматрајмо сада призвољно пресликавање $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$. Пресликавање f индукује пресликавање

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0),\ n \geq 0,$$

на следећи начин:

$$f_*([u]_0) = [f \circ u]_0.$$

$$\begin{tikzcd}
(X, x_0) \arrow[r, "f"] & (Y, y_0) \\
(S^n, e_1) \arrow[u, "u"] \arrow[ur, dashed, "f \circ u"'] &
\end{tikzcd}$$

f_* је добро дефинисано пресликавање јер се композиција слаже са хомотопијом. Директно из дефиниције следи да за $f, f' : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ важи импликација: ако је $f \simeq f'\ rel\ x_0$, онда је $f_* = f'_*$. Још се види да је $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ онда када је могуће компоновање пресликавања f и g као и да је $\mathbf{1}_* = \mathbf{1}$.

На основу овде наведених својстава доказаћемо да важи следеће тврђење.

Тврђење 20: Ако је $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ хомотопска еквиваленција у категорији тополошких простора са базном тачком, онда је, за сваки природан број n, $f_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$ изоморфизам.

Доказ: Како је f хомотопска еквиваленција, то постоји пресликавање $g : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ такво да је:

$$f \circ g \simeq \mathbf{1_Y}\ (rel\ y_0) \qquad \text{и} \qquad g \circ f \simeq \mathbf{1_X}\ (rel\ x_0).$$

Одатле видимо да је:

$$(f \circ g)_* = \mathbf{1}_*,$$

а даље је

$$f_* \circ g_* = \mathbf{1}.$$

Слично се добија да је и

$$g_* \circ f_* = \mathbf{1}.$$

Дакле, g_* је инверзно пресликавање пресликавања f_*, што значи да је f_* бијекција.

Да је f_* један хомоморфизам група види се из следећег: узмимо две произвољне класе $[\varphi]_0, [\psi]_0 \in \pi_n(X, x_0)$; тада важи

$$f_*([\varphi]_0 + [\psi]_0) =$$

$$= f_*([\varphi + \psi]_0) =$$
$$= [f \circ (\varphi + \psi)]_0 =$$
$$\overset{(*)}{=} [f \circ \varphi \;+\; f \circ \psi]_0 =$$
$$= [f \circ \varphi]_0 \;+\; [f \circ \psi]_0 =$$
$$= f_*([\varphi]_0) + f_*([\varphi]_0).$$

Једнакост $(*)$ оправдана је тиме што се операција $+$ слаже са композицијом. Како је f_* бијекција и хомоморфизам, то је f_* изоморфизам група.□

Дакле, ово тврђење нам каже да су одговарајуће хомотопске групе хомотопски еквивалентних парова (X, x_0) и (Y, y_0) изоморфне:

$$\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, y_0).$$

Са друге стране, уверили смо се да су хомотопске групе путно повезаног простора независне од избора базне тачке, у смислу да за две различите базне тачке добијамо изоморфне одговарајуће хомотопске групе. Имајући то у виду, за непрекидно пресликавање путно повезаних простора $f : X \longrightarrow Y$ можемо посматрати и $f_* : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$. Међутим, у овом случају, f_* није сасвим одређено будући да $\pi_n(X)$, као и $\pi_n(Y)$, не представља једну групу, већ читав скуп међусобно изоморфних група које одговарају различитим изборима базне тачке. О $f_* : \pi_n(X) \longrightarrow \pi_n(Y)$ можемо размишљати као о $f_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$ за неко $x_0 \in X$. Везу између различитих избора базне тачке у X остварују изоморфизми β_u и $\beta_{f \circ u}$. Прецизније, следећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\beta_u"'] & \pi_n(Y, f(x_0)) \arrow[d, "\beta_{f \circ u}"] \\
\pi_n(X, x_1) \arrow[r, "f_*"] & \pi_n(Y, f(x_1))
\end{tikzcd}$$

Тачке x_0 и x_1 су произвољно изабране тачке простора X, а u је један пут у X од тачке x_0 до тачке x_1. Да бисмо се уверили да дијаграм комутира, треба за неки елемент $[\varphi]_0 \in \pi_n(X, x_0)$ показати да је $\beta_{f \circ u} \circ f_*([\varphi]_0) = f_* \circ \beta_u([\varphi]_0)$. Ако је $\varphi \underset{u}{\simeq} \psi$, онда је и $f \circ \psi \underset{f \circ u}{\simeq} f \circ \varphi$. Видимо да је $f \circ \psi$ један представник класе $\beta_{f \circ u}([f_*([\varphi]_0))$, чиме смо и доказали горњу једнакост.

Следеће тврђење је уопштење тврђења 20. Доказ тврђења у случају $n = 1$ дат је у [1, Proposition 1.18], а у осталим случајевима доказ би текао аналогно томе.

Теорема 21: Ако је пресликавање $f \longrightarrow Y$ хомотопска еквиваленција, онда је за сваки природан број n и за сваку тачку $x \in X$ пресликавање $f_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$ изоморфизам. За $n = 0$, f_* је бијекција.

Директна последица овог тврђења је да сваки контрактибилан простор има тривијалне хомотопске групе.

Следеће тврђење говори о односу хомотопских група простора са хомотопским групама наткривајућих простора.

Теорема 22: Нека је пресликавање $p : E \longrightarrow B$ наткривање, тачка $e_0 \in E$ и $b_0 = p(e_0)$. Тада је индуковано пресликавање $p_* : \pi_n(E, e_0) \longrightarrow \pi_n(B, b_0)$ мономорфизам за $n \geq 1$, а изоморфизам за $n \geq 2$.

Доказ: Да је p_* мономорфизам за $n = 1$ доказано је у [1, Proposition 1.31], а доказ за $n \geq 2$ је потпуно аналоган.

Да бисмо доказали да је p_* "на" за $n \geq 2$, узмимо произвољну класу $[f]_0 \in \pi_n(B, b_0)$ чији је представник $f : (S^n, e_1) \longrightarrow (B, b_0)$. Како је $\pi_1(S^n, e_1) \cong \mathbf{0}$, то је $f_*(\pi_1(S^n, e_1)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$. Сада, на основу [1, Proposition 1.33], знамо да постоји подизање $g : (S^n, e_1) \longrightarrow (E, e_0)$,

$$\begin{tikzcd} & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\ (S^n, e_1) \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"] & (B, b_0) \end{tikzcd}$$

па је $p_*([g]_0) = [p \circ g]_0 = [f]_0$, тј. класа $[g]_0$ је тражени оригинал слике $[f]_0$.$\square$

Последице:

1. Захваљујући овом тврђењу можемо одредити све хомотопске групе кружнице S^1: познато је да простор $\mathbf{R}$ који је контрактибилан наткрива простор S^1, па тако добијамо:
$$\pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z},$$
$$\pi_n(S^1) \cong \mathbf{0}, \ n \geq 2.$$

2. Уопште, кад год простор има контрактибилно наткривање, тада су све његове хомотопске групе за $n \geq 2$ тривијалне.

3. Простор S^m наткрива простор $\mathbf{R}P^m$, па је тако:
$$\pi_n(\mathbf{R}P^m) \cong \pi_n(S^m), \ n \geq 2.$$

4. Простор $\mathbf{R}^2$ наткрива торус T^2, а торус наткрива Клајнову флашу K, па закључујемо следеће:
$$\pi_1(T^2) \cong \mathbf{Z}^2,$$
$$\pi_n(T^2) \cong \mathbf{0}, \ n \geq 2,$$
$$\pi_n(K) \cong \mathbf{0}, \ n \geq 2.$$

5. За све затворене површи осим S^2 и $\mathbf{R}P^2$ универзално наткривање је $\mathbf{R}^2$, па за сваку такву површ X такође имамо $\pi_n(X) = \mathbf{0}, \ n \geq 2$.

Што се тиче хомотопских група производа простора, ситуација је врло једноставна: хомотопске групе "пролазе" кроз производ. Следеће тврђење говори о томе.

Тврђење 23: Нека су X и Y путно повезани простори. Тада за свако $n \in \mathbf{N}$ важи:

$$\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \times \pi_n(Y).$$

Доказ тврђења сличан је доказу таквог тврђења за фундаменталну групу.

6 Релативне хомотопске групе

Релативне хомотопске групе представљају корисну генерализацију хомотопских група.[2] За разлику од апсолутних хомотопских група, овде ћемо посматрати уређене тројке (X, A, x_0), где је X тополошки простор и $x_0 \in A \subset X$.

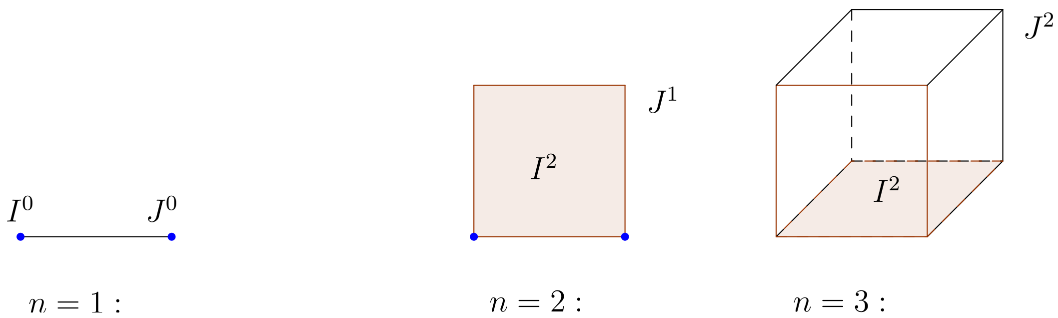
Ознаке које ћемо увести у наставку користићемо у дефиницији релативних хомотопских група. Као и до сада, I^n ће означавати $n-$димензионалну јединичну коцку. $(n-1)-$димензионалну јединичну коцку I^{n-1} ћемо посматрати као следећи потпростор коцке I^n:

$$I^{n-1} = \{t \in I^n \mid t_n = 0\}.$$

Са J^{n-1} означићемо затворење од $\partial I^n \setminus I^{n-1}$:

$$J^{n-1} \overset{def}{=} \overline{\partial I^n \setminus I^{n-1}}.$$

У овим ознакама, за $n = 1$ добија се дуж чије је једно теме I^0, а друго J^0 (види слику). За $n = 2$, добија се квадрат чија је једна страница I^1, а унија преостале три странице (заједно са граничним теменима) је J^1. За $n = 3$, I^3 је коцка, I^2 је њена доња страна, а J^2 је унија преосталих 5 страна (затворена).



За уређену тројку (X, A, x_0) посматрајмо непрекидна пресликавања $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$. То су пресликавања код којих се граница ∂I^n слика у A, а J^{n-1} у x_0. Међу свим таквим пресликавањима, увешћемо релацију $\simeq$ која ће бити нешто измењена у односу на релацију $\simeq$ коју смо имали код пресликавања парова. Пресликавања f и g су хомотопна (као пресликавања тополошких тројки) ако постоји непрекидно пресликавање $H : I^n \times I \longrightarrow X$ такво да важи:

$$(\forall t \in I^n)\ H(t, 0) = f(t),$$

$$(\forall t \in I^n)\ H(t, 1) = g(t),$$

$$(\forall t \in \partial I^n)\ (\forall s \in I)\ H(t, s) \in A,$$

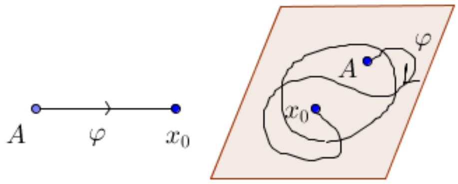
$$(\forall t \in J^{n-1})\ (\forall s \in I)\ H(t, s) = x_0.$$

[2]За хомотопске групе о којима је било речи у претходним поглављима користићемо и израз *апсолутне хомотопске групе*.

Идентификацијом свих хомотопних пресликавања у оваквој хомотопији добијамо скуп:

$$\pi_n(X, A, x_0) = \{f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)\} \ / \ \simeq .$$

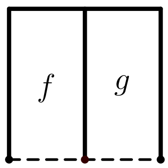
Очигледно, оваква дефиниција нема смисла за $n = 0$, па ћемо $\pi_0(X, A, x_0)$ оставити недефинисаним. За $n = 1$, скуп $\pi_1(X, A, x_0)$ представља скуп свих путева у X чији је почетак у скупу A, а завршетак у тачки x_0 (види следећу слику).



Операцију $+$ на скупу пресликавања $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$ дефинисаћемо као што смо то имали и код пресликавања тополошких парова. За два пресликавања $f, g : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$ је:

$$(f+g)(t_1, t_2, \ldots, t_n) \overset{def}{=} \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n), 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases},$$

што ћемо скицирати на следећој слици.



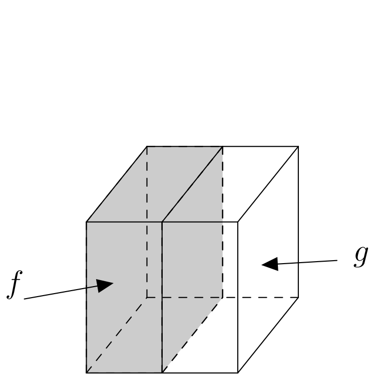
На слици, део границе означен пуном линијом слика се у тачку x_0, док се део означен испрекиданом линијом слика у скуп A. Видимо да је и резултат $f+g$ такође пресликавање тројки $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$, али само за $n \geq 2$. У случају $n = 1$, оваква операција се не може дефинисати јер за $t = \frac{1}{2}$ бисмо с једне стране имали $(f+g)(\frac{1}{2}) = f(1) = x_0$, а са друге стране би било $(f+g)(\frac{1}{2}) = g(0)$. $g(0)$ може бити произвољна тачка у скупу A, не обавезно x_0, па тако пресликавање $f+g$ не би било добро дефинисано.

Сада, за $n \geq 2$, ова операција индукује операцију $+$ дефинисану на скупу $\pi_n(X, A, x_0)$:

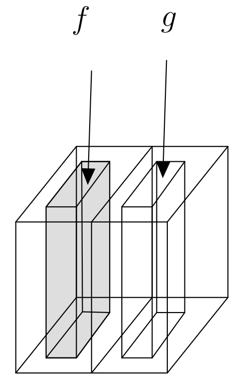
$$[f] + [g] \overset{def}{=} [f+g].$$

Операција је добро дефинисана и њеним увођењем добијамо структуру групе $(\pi_n(X, A, x_0), +)$ коју називамо *релативна хомотопска група.* Докази да је операција $+$ добро дефинисана, асоцијативна, да је неутрал класа $[c_{x_0}]$ и да постоје инверзни елементи аналогни су доказима за апсолутне хомотопске групе.

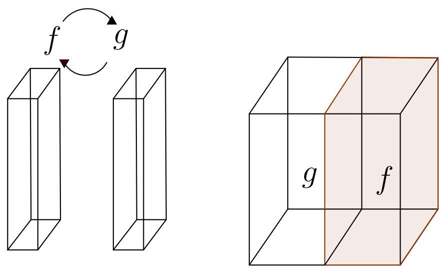
Релативне хомотопске групе $\pi_n(X, A, x_0)$ су комутативне за све природне бројеве $n \geq 3$. Хомотопију H (кроз пресликавања тополошких тројки) између пресликавања $f+g$ и $g+f$ описаћемо сликом. t координату ове хомотопије посматраћемо као време за које се $f+g$ непрекидно трансформише у $g+f$. На слици је дат изглед хомотопије H у три различита тренутка, као и опис трансформације која се догађа у међувремену.



тренутак 0



тренутак $1-t$



тренутак 1

За изградњу овакве хомотопије неопходно је имати бар 4 координате, па за групу $\pi_2(X, A, x_0)$ не можемо тврдити да је комутативна.

Слично као и код апсолутних хомотопских група и релативне хомотопске групе можемо сагледати на други начин. Знајући да је $I^n/J^{n-1} \approx D^n$, узмимо непрекидно пресликавање $p : I^n \longrightarrow D^n$, такво да је $p(J^{n-1}) = \{e_1\}$. Сада за свако пресликавање $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$ постоји $\tilde{f} : (D^n, S^{n-1}, e_1) \longrightarrow (X, A, x_0)$ такво да је:

$$f = \tilde{f} \circ p,$$

тј. следећи дијаграм комутира:

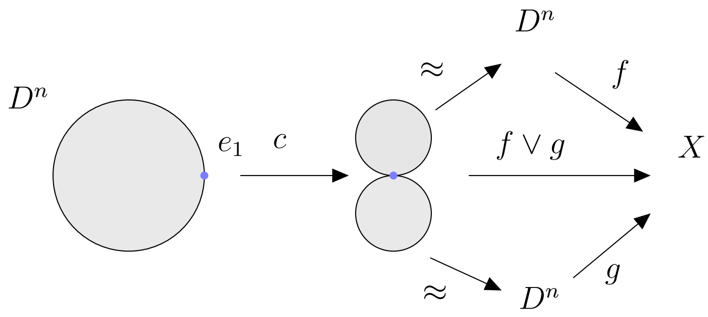
$$\begin{tikzcd} I^n \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X \\ & D^n \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\pi_n(X, A, x_0)$ сада посматрамо као:

$$\pi_n(X, A, x_0) = \{\tilde{f} : (D^n, S^{n-1}, e_1) \longrightarrow (X, A, x_0)\} \diagup \simeq,$$

где је $\simeq$ релација хомотопије кроз пресликавања тополошких тројки. Класе скупа $\pi_n(X, A, x_0)$ посматраног на овај начин ћемо обележавати са $[f]_{0r}$. Операција $+$ примењена на $[f]_{0r}, [g]_{0r} \in \pi_n(X, A, x_0)$ изгледа овако:

$$[f]_{0r} + [g]_{0r} = [(f \vee g) \circ c]_{0r}.$$



Пресликавање c је колапсирање потпростора D^{n-1} у простору D^n.

Проверимо шта се догађа са релативним хомотопским групама када је $A = \{x_0\}$. Нека је $q : D^n \longrightarrow S^n$ пресликавање које најпре границу диска $\partial D^n = S^{n-1}$ скупи у тачку, а затим добијени простор хомеоморфно преслика у S^n. При томе, цела граница ∂D^n слика се у тачку $e_1 \in S^n$. За произвољну класу $[f]_0 \in \pi_n(X, x_0)$ посматрајмо једног њеног представника $f : (S^n, e_1) \longrightarrow (X, x_0)$. Тада је $f \circ q : (D^n, S^{n-1}, e_1) \longrightarrow (X, x_0, x_0)$, што значи да је $[f \circ q]_{0r} \in \pi_n(X, x_0, x_0)$.

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[rr, "f \circ q"] \arrow[dr, "q"'] & & X \\ & S^n \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Кореспонденција

$$\pi_n(X, x_0, x_0) \ni [f \circ q]_{0r} \;\longleftrightarrow\; [f]_0 \in \pi_n(X, x_0)$$

је једнозначна, па можемо рећи да је $\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$.

Слично, ако посматрамо групу $\pi_n(X, x_0, x_0)$ као скуп класа пресликавања тројке $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$, онда је, за све $n \geq 1$, очигледно:

$$\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0).$$

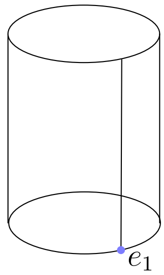
Следеће разматрање односи се на неутрал $[c_{x_0}]_{0r}$ у групи $\pi_n(X, A, x_0)$. Да би класа $[f]_{0r}$ била неутрал, за сваког њеног представника $f : (D^n, S^{n-1}, e_1) \longrightarrow (X, x_0, x_0)$ потребно је и довољно да постоји хомотопија $H : D^n \times I \longrightarrow X$ таква да важи:

$$(\forall y \in D^n)\ H(y, 0) = f(y),$$

$$(\forall y \in D^n)\ H(y, 1) = x_0,$$

$$(\forall y \in S^{n-1})\ (\forall t \in I)\ H(y, t) \in A,$$

$$(\forall t \in I)\ H(e_1, t) = x_0.$$



Следећа лема даће нам један веома користан критеријум којим се утврђује да ли је неко пресликавање представник класе $[c_{x_0}]_{0r}$ или није. За класу $[c_{x_0}]_{0r}$ овде ћемо користити и конвенционалну ознаку неутрала комутативне групе $\mathbf{0}$.

Лема 24 (Критеријум компресије): Нека је $f : (D^n, S^{n-1}, e_1) \longrightarrow (X, A, x_0)$, $n \geq 1$. Тада је $[f]_{0r} = \mathbf{0}$ ако и само ако постоји пресликавање $g : D^n \longrightarrow X$ такво да је $f \simeq g$ $(rel\ S^{n-1})$ и $g(D^n) \subset A$.

Напомена: Иако $\pi_1(X, A, x_0)$ не мора бити група, лема важи и у том случају ако посматрамо истакнути елемент $[c_{x_0}]_{0r}$ уместо неутрала групе.

Доказ: $(\Longrightarrow)$ Претпоставимо да пресликавање f припада класи-неутралу групе $\pi_n(X, A, x_0)$, тј. да је $[f]_{0r} = \mathbf{0}$. Тада постоји хомотопија $H : D^n \times I \longrightarrow X$ какву смо описали изнад. Ова хомотопија не мора бити $rel\ S^{n-1}$, па је потребно модификовати је. Послужићемо се стандардним поступком којим од неке хомотопије добијамо хомотопију $rel\ S^{n-1}$.

Најпре уочимо пресликавање $q : D^n \times I \longrightarrow D^n \times I$ које скупља све граничне "висине" у тачку, а затим поново исправља простор на $D^n \times I$. Прецизније,

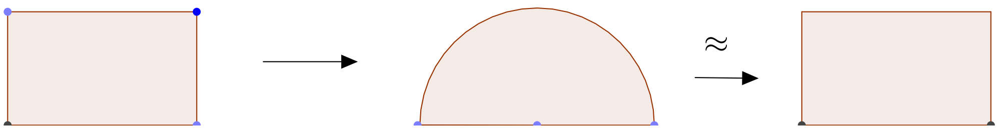
- за сваку тачку $y \in D^n$ је $q(y, 0) = (y, 0)$, тј. доња основа мирује;

- за сваку тачку $y \in S^{n-1}$ и за свако $t \in I$ је $q(y, t) = (y, 0)$;

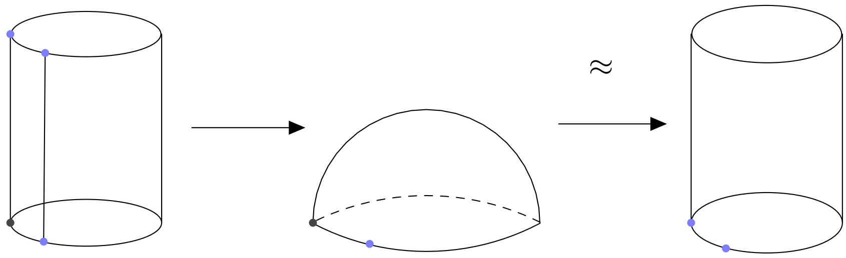
- горња основа $D^n \times \{1\}$ хомеоморфно се слика у горњу основу заједно са омотачем ваљка $D^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times I$ (развуче се преко омотача);

- унутрашњост ваљка $D^n \times I$ хомеоморфно се преслика на унутрашњост ваљка, дакле, $q(int(D^n \times I)) = int(D^n \times I)$, мада $q|_{intD^n \times I}$ није идентичко пресликавање.

На следећим сликама видимо како изгледа пресликавање q у случајевима $n = 1$ и $n = 2$.

$n = 1 :$


$n = 2:$



Сада дефинишимо $\tilde{H} : D^n \times I \longrightarrow X$:

$$\tilde{H} = H \circ q.$$

Провериђемо да је $\tilde{H}$ тражена хомотопија. Узмимо да је $g : D^n \longrightarrow X$ дефинисано једнакошћу $g(y) = \tilde{H}(y, 1)$ за свако $y \in D^n$. Како је

$$\tilde{H}(y, 0) = H(q(y, 0)) = H(y, 0) = f(y),$$

то видимо да је $\tilde{H}$ хомотопија између пресликавања f и g. Даље, за свако $y \in S^{n-1}$ је

$$\tilde{H}(y, t) = H(q(y, t)) = H(y, 0) = f(y),$$

па добијамо да је

$$\tilde{H} : f \simeq g \ \ rel \ S^{n-1}.$$

Још остаје да се уверимо да је слика пресликавања g садржана у скупу A, а то видимо из следећег:

$$\begin{aligned} g(D^n) &= \tilde{H}(D^n \times \{1\}) \\ &= H(q(D^n \times \{1\}) \\ &= H(D^n \times \{1\} \cup S^{n-1} \times I) \\ &\subset A. \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Претпоставимо да постоји пресликавање $g : D^n \longrightarrow X$ са наведеним својствима:

$(*)$ $$f \simeq g \ \ rel \ S^{n-1},$$

$(**)$ $$g(D^n) \subset A.$$

Захваљујући својству $(*)$, имамо да је $g(e_1) = f(e_1) = x_0$, што значи да је $g : (D^n, S^{n-1}, x_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ и да је уочена хомотопија између пресликавања f и g заправо хомотопија кроз пресликавања тополошких тројки. Тиме добијамо да је $[f]_{0r} = [g]_{0r}$.

Сада је довољно доказати да је пресликавање g представник класе неутрала. Како је e_1 јаки деформациони ретракт од D^n, то постоји $G : D^n \times I \longrightarrow D^n$ са следећим особинама:

$$(\forall y \in D^n) \ G(y, 0) = y,$$

$$(\forall y \in D^n) \ G(y, 1) = e_1,$$

$$(\forall t \in I)\ G(e_1, t) = e_1.$$

На пример, $G(y,t) \stackrel{def}{=} (1-t)\cdot y + t \cdot e_1$. Користећи ово пресликавање, дефинисаћемо $H : D^n \times I \longrightarrow X$ на следећи начин:

$$H = g \circ G.$$

За свако $y \in D^n$ је $H(y,0) = g(G(y,0)) = g(y)$, као и $H(y,1) = g(G(y,1)) = g(e_1) = x_0$. Користећи својство $(**)$, за $y \in S^{n-1}$ и $t \in I$ је $H(y,t) \in A$ (штавише, цела слика пресликавања H је подскуп A). На крају, за $t \in I$ имамо $H(e_1,t) = g(G(e_1,t)) = g(e_1) = x_0$. Дакле, H је хомотопија релативно x_0 између пресликавања g и c_{x_0} и то кроз пресликавања тополошких тројки $(D^n, S^{n-1}, e_1) \longrightarrow (X, A, x_0)$, па закључујемо да је:

$$[f]_{0r} = [g]_{0r} = \mathbf{0},$$

што је и требало доказати.$\square$

Ако је $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$, тада је $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$ $(n \geq 1)$ и важи еквиваленција: $[f] = \mathbf{0}$ ако и само ако постоји пресликавање $g : I^n \longrightarrow X$ такво да је $f \simeq g\ rel\ \partial I^n$ и слика $g(I^n)$ је подскуп скупа A. Ово је директна последица критеријума компресије када пређемо на ранији начин посматрања групе $\pi_n(X, A, x_0)$.

Посматрајмо сада пресликавање $\varphi : (X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0)$. Ово пресликавање индукује пресликавање $\varphi_* : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$, $n \geq 1$ задато једнакошћу:

$$\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f].$$

За $n \geq 2$ то је хомоморфизам група (доказује се као у случају апсолутних хомотопских група). Важе и функторијална својства аналогна оним у случају апсолутних група:

$$(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*,$$

$$\mathbf{1}_* = 1.$$

Ако су пресликавања φ и ψ хомотопна као пресликавања тројки, онда је:

$$\varphi_* = \psi_*,$$

а ако је φ хомотопска еквиваленција у категорији пресликавања тополошких тројки, онда је φ_* изоморфизам за $n \geq 2$ и бијекција за $n = 1$.

7 Дуги тачан низ хомотопских група

Тврђење које следи је можда најзначајнији резултат везан за релативне хомотопске групе. Да бисмо га приказали, уочимо низ пресликавања:

$$\pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0).$$

Овде је i_* пресликавање индуковано инклузијом $i : A \hookrightarrow X$, док је j_* индуковано инклузијом $j : (X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$. Раније смо се уверили да је $\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$, па је оправдано што смо у горњем низу за домен пресликавања j_* писали $\pi_n(X, x_0)$ уместо $\pi_n(X, x_0, x_0)$. Што се тиче пресликавања ∂, њега ћемо посебно дефинисати. За произвољно пресликавање $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$ дефинисаћемо $\partial([f])$ као класу рестрикције пресликавања f на I^{n-1} (доњу основу коцке I^n), тј.

$$\partial([f]) = [f \mid_{I^{n-1}}].$$

Лако се види да је заиста $\partial([f]) \in \pi_{n-1}(A, x_0)$. Пресликавање ∂ је и хомоморфизам група за $n \geq 2$ што, такође, није тешко доказати. Сада можемо формулисати и најављено тврђење.

Теорема 25: Следећи низ је тачан низ скупова.

$$\ldots \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \longrightarrow \ldots \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0)$$

Ако изузмемо последња три члана, онда је тачан низ група, а без последњих шест чланова је то тачан низ Абелових група.

Доказ: Тачност низа је потребно и довољно проверити на три места.

Најпре докажимо да је $im\ i_* = ker\ j_*$ за $n \geq 1$. Да је $im\ i_* \subset ker\ j_*$ видимо из следећег. За $f : (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (A, x_0)$ је

$$j_*(i_*([f])) = j_*([i \circ f]) = \mathbf{0}.$$

Последња једнакост је директна последица критеријума компресије кад се има у виду да је слика пресликавања f садржана у скупу A.

Сада узмимо произвољан $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ такав да је $j_*([f]) = 0$. Пресликавање f можемо посматрати као $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, x_0, x_0)$ док је $j_*([f]) = [j \circ f]$, а $j \circ f$ је исто пресликавање као и f само што је кодомен у том случају (X, A, x_0). На основу леме 24 (критеријума компресије) постоји пресликавање $g : I^n \longrightarrow X$ такво да је $f \simeq g\ rel\ \partial I^n$ и слика $g(I^n)$ је подскуп скупа A. Ове особине нам обезбеђују да можемо g записати као $i \circ \tilde{g}$ при чему је $[\tilde{g}] \in \pi_n(A, x_0)$. Тако добијамо следећи низ једнакости:

$$[f] = [g] = [i \circ \tilde{g}] = i_*([\tilde{g}])$$

и закључујемо да је $[f] \in im\ i_*$, тј. да је $ker\ j_* = im\ i_*$.

Даље ћемо доказати да је $im\ j_* = ker\ \partial$.

$\subset$: $\partial(j_*([f]) = \partial([j \circ f]) = [f \mid_{I^{n-1}}] = [c_{x_0}]$.

Последња једнакост важи јер је $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, па се цела граница, а самим тим и I^{n-1} слика у тачку x_0.

$\supset$: Нека је $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$ такво да је $\partial([f]) = 0$, тј. $[f] \in ker\ \partial$. То значи да је $[f\mid_{I^{n-1}}] = \mathbf{0} = [c_{x_0}]$, при чему је $[c_{x_0}] \in \pi_{n-1}(A, x_0)$, па имамо хомотопију $G : I^{n-1} \times I \longrightarrow A$:

$$G: \quad f\mid_{I^{n-1}} \simeq\ c_{x_0} \quad (rel\ \partial I^{n-1}).$$

Ова хомотопија има следећа својства:

$$(\forall t \in I^{n-1})\ G(t, 0) = f(t),$$

$$(\forall t \in I^{n-1})\ G(t, 1) = x_0,$$

$$(\forall t \in \partial I^{n-1})\ (\forall s \in I)\ G(t, s) = x_0.$$

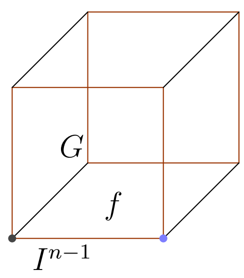
Сада ћемо дефинисати пресликавање $H : I^n \times \{0\} \ \cup\ \partial I^n \times I \longrightarrow X$ на следећи начин:

$$(\forall t \in I^n)\ H(t, 0) = f(t),$$

$$(\forall t \in I^{n-1})\ (\forall s \in I)\ H(t, s) = G(t, s),$$

$$(\forall t \in J^{n-1})\ (\forall s \in I)\ H(t, s) = x_0.$$

Циљ нам је да ову хомотопију H проширимо. Пар $(I^n, \partial I^n)$ има својство проширења хомотопије (то је тврђење еквивалентно тврђењу да пар (D^n, S^{n-1}) има својство проширења хомотопије, а како је $D^n \times \{0\}\ \cup\ S^{n-1} \times I$ ретракт од $D^n \times I$, онда то важи).



Нека је $\tilde{H} : I^n \times I \longrightarrow X$ проширење од H, тј.

$$\tilde{H}\mid_{I^n \times \{0\}\ \cup\ \partial I^n \times I} = H.$$

Дефинисаћемо пресликавање $g : I^n \longrightarrow X$ једнакошћу:

$$g(t) = \tilde{H}(t, 1).$$

Да би било заиста $[f] = [g]$, потребно је да $\tilde{H}$ буде хомотопија кроз пресликавања облика $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$. То важи јер је $G : I^{n-1} \times I \longrightarrow A$. Како је $g(\partial I^n) = \{x_0\}$, постоји пресликавање $\tilde{g} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, x_0, x_0)$ такво да је $[g] = [j \circ \tilde{g}]$ (види дијаграм).

$$\begin{tikzcd}
(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, dashed, "\tilde{g}"'] & & (X, A, x_0) \\
& (X, x_0, x_0) \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Најзад закључујемо да је $[f]=[g]=j_*([\tilde{g}])\in im\ j_*$.

Још нам је остало да докажемо једнакост $im\ \partial = ker\ i_*$.

($\subset$): Најпре докажимо да је $im\ \partial \subset ker\ i_*$. Како је за $f:(I^n,\partial I^n,J^{n-1})\longrightarrow(X,A,x_0)$

$$i_*(\partial([f]))=i_*([f\mid_{I^{n-1}}])=[i\circ f\mid_{I^{n-1}}],$$

то нам је потребна хомотопија релативно ∂I^{n-1} између доњег нивоа пресликавања f и константног пресликавања. Само пресликавање f може представаљати такву хомотопију:

$$f: i\circ f\mid_{I^{n-1}}\simeq const,$$

па је тиме горња релација доказана.

($\supset$): Релацију $im\ \partial \supset ker\ i_*$ доказаћемо на следећи начин. Нека је $[g]\in\pi_{n-1}(A,x_0)$ класа за коју важи $i_*([g])=\mathbf{0}$ и нека је пресликавање $g:(I^{n-1},\partial I^{n-1})\longrightarrow(A,x_0)$ један представник ове класе. Тада постоји хомотопија

$$f: i\circ g\ \simeq\ const\ (rel\ \partial I^{n-1}).$$

При томе, $f: I^{n-1}\times I\longrightarrow X$, тј. $f:I^n\longrightarrow X$, или, још прецизније $f:(I^n,\partial I^n,J^{n-1})\longrightarrow(X,A,x_0)$, па је $[f]\in\pi_n(X,A,x_0)$ и важи:

$$\partial([f])=[f\mid_{I^{n-1}}]=[g],$$

па је $[g]\in im\ \partial$.$\square$

Даље нам се поставља питање: када и у којој мери можемо занемарити базне тачке? Следећи став нам делимично пружа одговор на ово питање.

Став 26: Ако је $f:S^n\longrightarrow X$ $(n\in N_0)$ непрекидно пресликавање, тада важи:

$$f\ \simeq\ const\quad\Longleftrightarrow\quad f\ \simeq\ const\ (rel\ e_1).$$

Доказ: Смер $\Longleftarrow$ је очигледан.

Докажимо смер $\Longrightarrow$. Претпоставимо да је $f\simeq const$, где је $const=c_{x_1}$ било које константно пресликавање. Из $f\simeq c_{x_1}$ следи да је $f\underset{u}{\simeq}c_{x_1}$, где је u пут од тачке $x_0=f(e_1)$ до тачке x_1. Тада је $c_{x_1}\underset{u^{-1}}{\simeq}c_{x_0}$, па је, на основу тачке 4 тврђења 6, $f\underset{u\cdot u^{-1}}{\simeq}c_{x_0}$. Знамо да важи и $f\underset{const}{\simeq}f$, као и $u\cdot u^{-1}\simeq const\ (rel\{0,1\})$, па на основу леме 8 добијамо:

$$f\ \underset{const}{\simeq}\ c_{x_0},$$

а то значи и

$$f\ \simeq\ c_{x_0}\ (rel\ e_1).\square$$

Последица 27: Нека је X тополошки простор и $n\geq 0$. Услови 1) и 2) су еквивалентни.

1) $\qquad(\forall f:S^n\longrightarrow X)\quad f\ \simeq\ const.$

2) $\qquad(\forall x_0\in X)\quad \pi_n(X,x_0)=\mathbf{0}.$

Према томе, ако докажемо да су сва пресликавања $f : S^n \longrightarrow X$ хомотопна константном пресликавању не узимајући у обзир базну тачку, тада знамо и да је $\pi_n(X, x_0) = \mathbf{0}$, за произвољно $x_0 \in X$.

Последица 28: Простор X је $m-$повезан ($m \geq 0$) ако и само ако за свако $n \in \{0, 1, \ldots, m\}$ важи услов 1), тј.

$$(\forall f : S^n \longrightarrow X) \quad f \simeq const.$$

Став 29: Нека је дат простор X, његов потпростор A и $n \geq 1$ произвољан природан број. Тада су следећа тврђења еквивалентна:

1) $\quad (\forall f : (D^n, \partial D^n) \to (X, A))\ (\exists\ g : D^n \to X)\ f \simeq g\ (rel\ \partial D^n)\ ,\ g(D^n) \subset A.$

2) $\quad (\forall x_0 \in A) \quad \pi_n(X, A, x_0) = \mathbf{0}.$

Доказ: Следи директно из критеријума компресије.□

Дефиниција 30: За тополошки пар (X, A) кажемо да је $m-$*повезан* ако и само ако за свако $n \in \{0, 1, \ldots, m\}$ важи услов 1) става 29.

Дефиниција 31: За пресликавање $f : X \longrightarrow Y$ кажемо да је $m-$*еквиваленција* ($m \in N_0$) ако је за сваки елемент $x \in X$ пресликавање

$$f_* : \pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n(Y, f(x))$$

епиморфизам у случају $n = m$, а изоморфизам у случају $n < m$.

Наредни став нам даје одговор на питање када је инклузија $i : A \hookrightarrow X$ $m-$еквиваленција.

Став 32: Инклузија $i : A \hookrightarrow X$ је $m-$еквиваленција ако и само ако је пар (X, A) $m-$повезан.

Доказ: Нека је $x_0 \in A$ произвољна тачка. Уочимо дуги тачан низ из теореме 25. Из тачности низа лако се види да је $\pi_1(X, A, x_0) = \pi_2(X, A, x_0) = \ldots = \pi_m(X, A, x_0) = \mathbf{0}$ ако и само ако је $i_* : \pi_n(A, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$ изоморфизам за $n < m$ и епиморфизам за $n = m$.□

8 Додатак

У овом закључном одељку без доказа наводимо неколико чувених теорема из теорије хомотопских група.

Дефиниција 33: Нека су X и Y $CW-$комплекси и пресликавање $f : X \longrightarrow Y$ непрекидно. Пресликавање f називамо *ћелијско пресликавање* ако је за свако $n \in N_0$

$$f(X^n) \subset Y^n,$$

где је X^n (Y^n) $n-$скелетон комплекса X (Y).

Теорема 34 (о ћелијској апроксимацији): Нека су X и Y $CW-$комплекси и пресликавање $f : X \longrightarrow Y$ непрекидно. Тада постоји ћелијско пресликавање $g : X \longrightarrow Y$ такво да је $f \simeq g$.

Последица 35: Ако простор X има $CW-$декомпозицију такву да је X^{n-1} једна тачка ($X^{n-1} = *$), онда је X $(n-1)-$повезан простор.

Познато је да сфера S^n ($n \in N$) има $CW-$декомпозицију са једном $0-$ћелијом и једном $n-$ћелијом, што значи да јесте $(n-1)-$повезан простор, тј. да су све хомотопске групе $\pi_i(S^n)$ за $i < n$ тривијалне:

$$\pi_i(S^n) = \mathbf{0},\ i < n.$$

Осим тога, на основу тврђења 22, имамо да је:

$$\pi_i(\mathbf{R}P^n) = \mathbf{0},\ 2 \leq i < n,$$

јер је S^n наткривајући простор простора $\mathbf{R}P^n$.

Теорема 36 (Фројдентал): Ако је $n \in N$ и X $(n-1)-$повезан простор који има хомотопски тип $CW-$комплекса, онда је за свако $i \leq 2n-2$:

$$\pi_i(X) \ \cong\ \pi_{i+1}(SX),$$

где је SX суспензија простора X.

Последица 37: $\pi_n(S^n) \ \cong\ \mathbf{Z}$, $n \in N$.

Видимо да је сфера S^n $(n-1)-$повезан простор, као и да је прва нетривијална хомотопска група сфере $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$. С друге стране, знамо да је $\tilde{H}_i(S^n) = \mathbf{0}$ за $i < n$ и $H_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$. Према томе, прва нетривијална хомотопска група сфере јавља се у истој димензији као прва нетривијална хомолошка група сфере и оне су изоморфне. Важи и општије:

Теорема 38 (Хуревић): Ако је $n \geq 2$ и X $(n-1)-$повезан простор, онда је $\tilde{H}_i(X) = \mathbf{0}$ за $i < n$ и $H_n(X) \cong \pi_n(X)$.

9 Литература

[1] A. HATCHER, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002),
http://www.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf