МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ГЕОМЕТРИЈСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА ЕЛЕМЕНТАРНИХ НЕЈЕДНАКОСТИ

- Мастер рад -

Ментор:
Проф. др Милан Божић

Кандидат:
Јелена Петровић-Митић

Београд, 2012.

САДРЖАЈ

1.Увод

Доказ без речи као метода увођења доказа у наставу математике

Развој математичких теорија темељи се на постављању разних хипотеза о објектима који се проучавају и њиховим својствима, доказивању или оповргавању формулисаних претпоставки. У процесу стварања нових достигнућа математичари се у великој мери ослањају на предходно створени скуп математичких знања, тј. на уведене аксиоме, дефиниције и већ познате теореме, користећи, наравно, притом стваралачко, креативно, логичко и аналитичко мишљење. Тако је подстицање и развој таквог расуђивања један од ултимативних функционалних задатака наставе математике у образовању. Доказивање, односно утемељено образлагање и оправдавање истинитости коришћених математичких тврдњи у настави математике је више него пожељно, као претпоставка за успешно целоживотно учење.

Са друге стране, наставници математике, свесни су бројних потешкоћа у пракси, а понекад наилазимо и на потешкоће и приликом самог спомињања доказивања. У учионици наилазимо на инфериорност и отпор ученика према таквом апстрактном облику рада. Чак ће и међу ученицима, а често и студентима који су имали прилике да се сусретну са математичким доказима, у мањини бити они који су развили способност самосталног доказивања, а не пуке репродукције предходно датих доказа из литературе.

Због тог је разлога, процес увођења и афирмације доказа и доказивања у настави математике методички врло суптилан. Тај процес никако није једноставан , кратак и не може тећи нагло. Ученике је потребно поступно навикавати да за сваку исказану математичку тврдњу треба поставити питање **зашто и под којим условима она важи**, те на та питања покушати доказом и одговорити.

Уочимо да се већина тврдњи-теорема из редовног програма математике у основној и средњој школи доказује тзв. **директним доказом** (Kurnik, 2001.**)**, тј. коначним низом истинитих, на већ стеченом знању утемељених импликација, који води од постављене претпоставке до тврдње коју желимо да докажемо. Тај се пут у настави најчешће пролази хеуристичким дијалогом наставника и ученика, при чему наставник сваки коректан закључак ученика, а уједно и корак доказа, бележи на табли, а ученици у своје свеске.

Неспориво, навођење дијалогом незамењива је метода подстицања ученика на логичко мишљење и доказивање, те коректно записивање закључака, односно доказа. Међутим, у овом раду ћу пажњу скренути на још један могућ приступ у развијању способности ученика за самостално спровођење доказа, а то је употреба тзв. **доказа без речи** (Nelsen, 2000).

Појам **доказ без речи,** тј. **графички доказ** , односи се на доказе дате сликом или низом слика. Иако такви докази нису прецизно и детаљно математички записани, мислим да они могу имати истакнуту улогу у математичком образовању. На сликама је, наиме, јасно назначена идеја и пут доказа, иако он није формално спроведен. Такав облик записивања ученицима може послужити као путоказ како да га сами изведу. Такође, оваквим се записом пажња ученика усмерава на битне елементе и кључна места доказа, па се постиже и потпуна концентрација , која би била умањена детаљним расписивањем апсолутно свих техничких делова и међукорака. Наравно, ученике треба подстицати да делове доказа који нису назначени на слици или сликама спроведу сами, тј. **„да закрпе намерно остављене рупе у доказу".**

Премда се каже да слика говори више од хиљаду речи, она понекад може и заварати или ипак прикрити све могуће случајеве које је потребно проучити. Због тога је при примени доказа без речи потребно посебну пажњу посветити детаљној анализи самог проблема како би доказ био спроведен у потпуности.

Иако се слике и цртежи у настави математике најчешће односе на геометријске садржаје, и остали делови градива се често могу геометријски интерпретирати и као такви представити сликом.

У овом раду, како бих илустровала доказе без речи и предности које нуде, фокусираћу се на доказе везане за неке математичке релације-једнакости и неједнакости. Осим доказа сликом, за компарацију ћу (понегде) навести и неке друге (мање очите) доказе.

Циљ мастер рада

„Не постоји ефикаснија помоћ у разумевању одређених алгебарских идентитета него добар дијаграм. Треба, наравно, знати манипулисати алгебарским симболима да би се добио доказ, али у многим случајевима досадан доказ може бити допуњен геометријском интерпретацијом тако једноставно и лепо да се истина о теореми скоро види на први поглед.”

(**Мартин Гарднер**)

Циљ мастер рада је обрада и примена елементарних неједнакости у настави математике у основној и средњој школи помоћу геометријске интерпретације, као и припреми за такмичења и полагање пријемних испита на факултете.

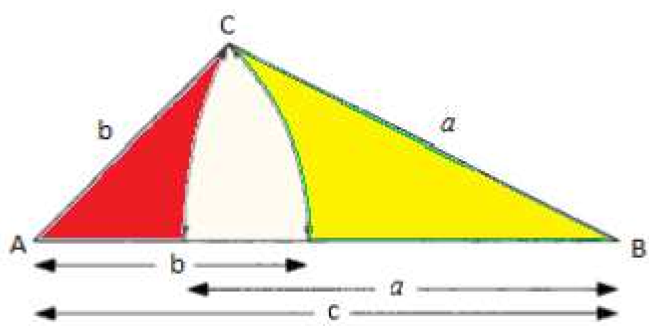
Мастер рад је посвећен изучавању елементарних неједнакости кроз геометријску интерпретацију , које су основа истраживања других сложенијих неједнакости. Оне су садржај градива још у нижим разредима основне школе, а знање се продубљује кроз средњошколско образовање, одлазак на такмичења, турнире како код нас тако и у свету. Неједнакости се могу користити као добар приручник матеметичарима, физичарима, инжењерима, механичарима, статистичарима, економистима. Примена неједнакости је заступљена у математичкој анализи, геометрији, теорији вероватноће, матеметичкој статистици, математичкој обради података, линеарном и динамичком програмирању као и у теоријској и примењеној математици.

Доказивање неједнакости у математици је корисна и креативна активност. Сама примена неједнакости захтева добро познавање математике, богатсво идеја и метода. Неопходна је упорност , стрпљивост и радозналост у решавању задатака. Интересантно је доказивање неједнакости, али нимало лако. Увек се може нешто ново, интересантно и неочекивано додати и закључити. У области неједнакости може се брзо доћи до решења анализирањем и истраживањем, а понекада је потребна дубља анализа. Докази могу бити кратки и сажети, али и дуги, компликовани. Идеја која води до решења се заснива на оштроумности, досетљивости и повезивању стечених знања.

2. ПОЗИТИВНИ БРОЈЕВИ У НЕЈЕДНАКОСТИМА

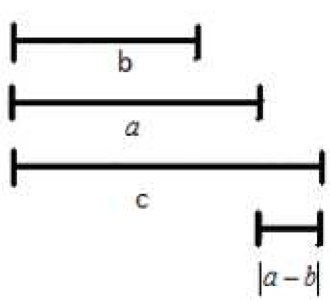
Започињем примером из редовног градива основне школе. У неким примерима ћу демонстрирати и случајеве који се обично забораве анализирати.

Неједнакост троугла (Alsina & Nelsen,2009): Дат је троугао $\Delta\ ABC$ са страницама a, b и c . Тада важи да је свака страница мања или једнака збиру остале две.
(при чему једнакост важи за дегенерисани троугао, троугао код кога су сва три темена на истој дужи) □



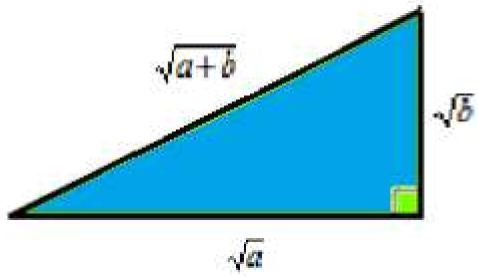
Слика 1.1

Са Слике 1.1 је очигледно да је $c< b +a$. Аналогно, $a<c+b$,а $b<c+a$.
Важи још и $|b-c| < a$, $|a-c| < b$, $|a-b| < c$.



Слика 1.2

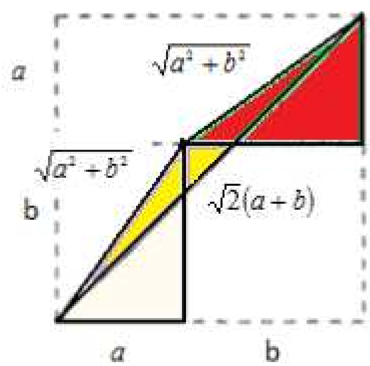
У правоуглом троуглу за a, b >0 важи (Alsina & Nelsen, 2009.) :



Слика 1.3

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a}+\sqrt{b} \quad \square$$

За два позитина броја a и b и важи (Alsina & Nelsen, 2009.) :



Слика 1.4

$$\sqrt{2}(a+b) < 2\sqrt{a^2+b^2} < 2(a+b)\,.$$

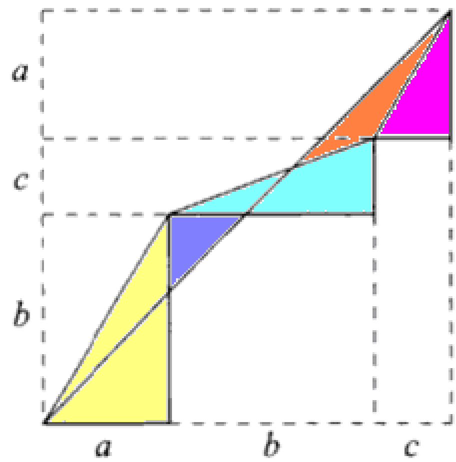
Када ову неједнакост поделимо са $2\sqrt{2}$ добијамо

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

Где је $\frac{a+b}{2}$ *аритметичка средина* за два броја a и b краће АС, а $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ је *квадратна средина* за два броја a и b краће КС. □

За три позитивна броја a, b, c важи (Alsina & Nelsen,2009):

$$\sqrt{2}(a+b+c) \leq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2} \leq 2(a+b+c) .$$



Слика 1.5

$$\sqrt{2}(a+b+c) \leq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2} \leq 2(a+b+c)$$

Изломљена линија је дужа од праве линије. □

За свака три реална броја $a, b, c > 0,$ који задовољавају услов $a^2+b^2=c^2$ важи:

$$a+b \leq c\sqrt{2}.$$

Доказ 1: (Митриновић, 1970.) Пре него што дам и геометријски доказ наведене неједнакости, показаћу како је можемо доказати аналитички, односно коришћењем познате неједнакости аритметичке и квадратне средине.

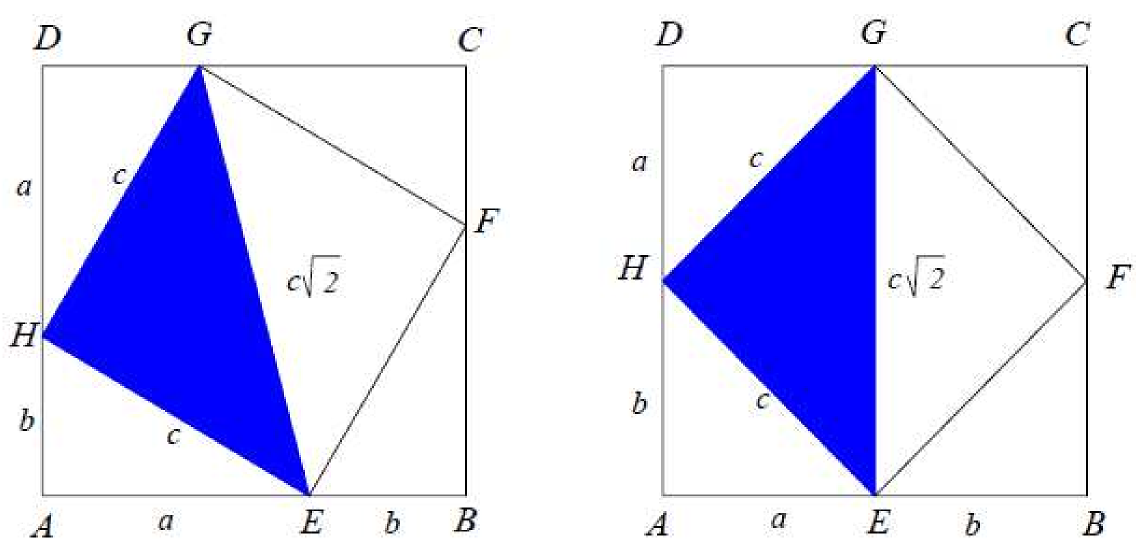
Будући да је $a^2 + b^2 = c^2$, AK – неједнакост за бројеве a и b изгледа овако:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = c\frac{\sqrt{2}}{2} \ ,$$

с једнакошћу ако и само ако је $a = b = c\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тражена релација сада следи множењем претходне неједнакости са 2. □

Доказ 2. (Alsina & Nelsen, 2009) Неједнакост $a + b \leq c\sqrt{2}$ могли смо доказати и геометријски, јер је услов $a^2 + b^2 = c^2$ алгебарски запис Питагорине теореме за правоугли троугао с катетама дужина a и b и хипотенузом дужине c . Њен геометријски доказ можемо дати и сликом, тј. предочити га као доказ без речи (Слика 1.6). Напишимо доказ темељен на тој слици. У настави ученике напросто замолимо да објасне Слику 1.6.

Нека је $ABCD$ квадрат страница дужине $a + b$. Поделимо његове странице $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$ редом на делове дужина a и b, као на Слици 1.6. Тачке које деле те странице означимо редом са E, F, G и H.



Слика 1.6

Спојимо ли их дужима, добили смо четвороугао $EFGH$. Будући да су троуглови HAE, EBF, FCG и GDH правоугли с катетама a и b, они су подударни. Зато је

$$|EF| = |FG| = |GH| = |HE| = \sqrt{a^2 + b^2} = c \quad \text{и}$$

$$\measuredangle AEH + \measuredangle BEF = \measuredangle BFE + \measuredangle GFC = \measuredangle CGF + \measuredangle HGD = \measuredangle DHG + \measuredangle AHE = 90^0.$$

Одавде је $\measuredangle HEF = \measuredangle EFG = \measuredangle FGH = \measuredangle GHE = 90^0$, па је четвороугао $EFGH$ квадрат странице дужине c. Према томе, његова је дијагонала $\overline{EG}$ дужине $|EG| = c\sqrt{2}$. Та је дијагонала свакако дужа од странице $\overline{AD}$ квадрата (неједнакост троугла!), тј. важи

$$a + b \leq c\sqrt{2},$$

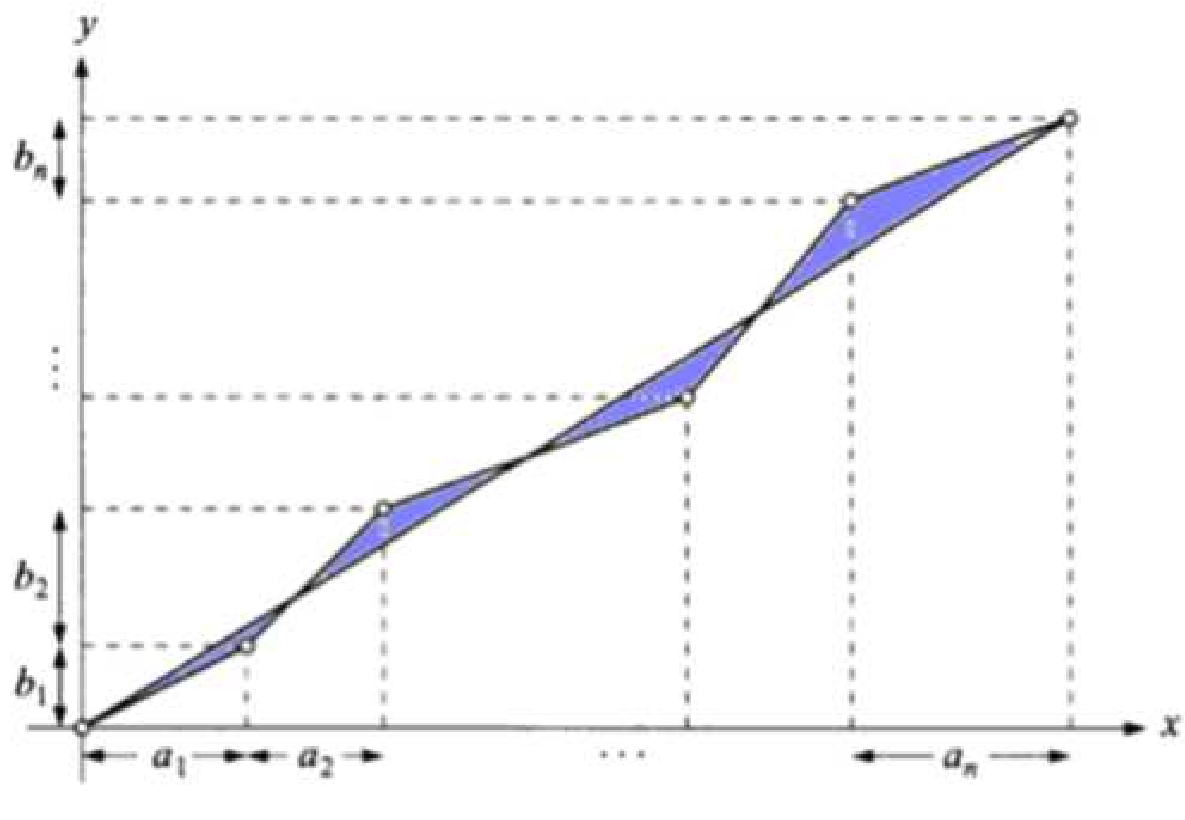
а једнаке су једино када је $AD \| EG$. То је могуће једино у случају $a = b$, тј. када су тачке E, F, G и H редом половине страница квадрата $ABCD$. □

2.1. Неједнакост Минковског:

(Alsina & Nelsen,2009)

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{{a_i}^2 + {b_i}^2}$$

За n позитивних бројева важи:



Слика 1.7

Геометријска средина два позитивна броја је $\sqrt{ab}$.

Једна од најпознатијих неједнакости је *аритметичко-геометријска средина* тј.

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $a = b$. □

Следе четири доказа ове најпознатије неједнакости. Први доказ ће бити **аналитички**, а остала три **без речи**.

Доказ 1. (Митриновић, 1970.) Како је $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ за свако $a,b \in$ **R**, $a,b \geq 0$, с једнакошћу ако и само ако је $a=b$, одавде назначеним квадрирањем следи,

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0,$$

тј.

$$a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Наравно, једнакост ће важити ако и само ако је $a = b$. □

Погледајмо сада како изгледа други доказ ове неједнакости. Он је без речи, дат је сликом 2.1. Анализирајмо је, тј. доказ који садржи, запишимо речима и тиме сугеришимо како би то требало да ураде ученици.

Доказ 2. (Митриновић, 1965.)

Нека је $|AD| = a$, $|DB| = b$. Нека нормала на $|AB|$ сече $|AB|$ у D. У пресеку нормале и полукружнице је тачка C.

S је средиште кружнице пречника $|AB|$ при чему је $a + b = |AB|$.

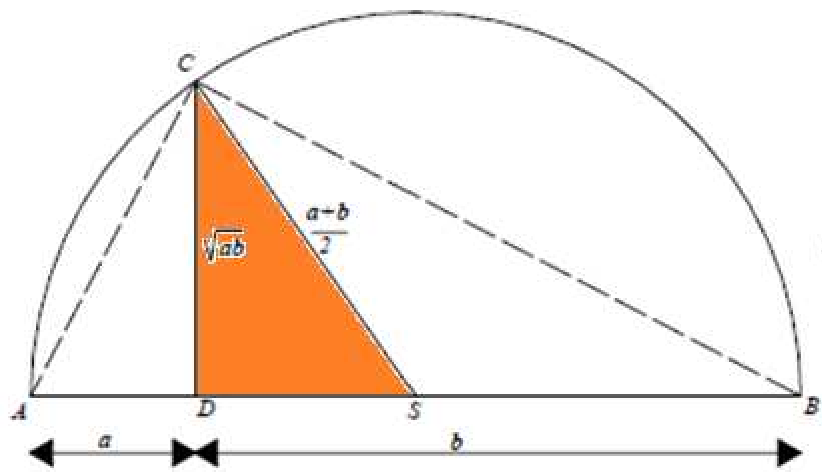
$$|SA| = |SB| = \frac{a+b}{2}$$

Како је угао над пречником прав (Талесова теорема), то је троугао ΔABC правоугли.

$$|CS| = \frac{a+b}{2}$$

$|CD|$ је висина из C на $|AB|$ те је по Еуклидовој теореми (висина на хипотенузу је геометријска средина дужине одсечака на хипотенузи)

$$|CD| = \sqrt{ab}.$$



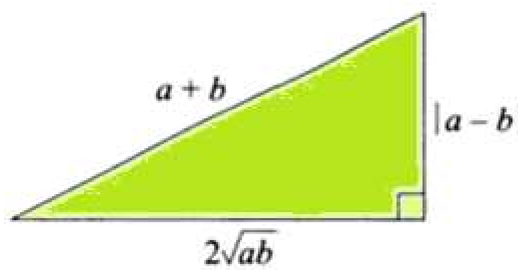
Слика 2.1

Како је $|CD|$ катета, а $|CS|$ хипотенуза троугла ΔSCD то је:

$$|DC| \leq |SC| \quad \text{тј. } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

једнакост важи за $D = S$ тј. ако и само ако је $a = b$. □

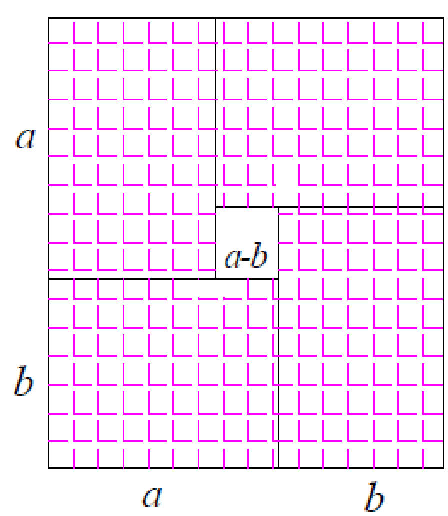
Доказ 3. (Alsina &Nelsen,2009.)



Слика 2.2

Очигледно је $2\sqrt{ab} \leq a+b$ те је $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. □

Доказ 4. Дат је квадрат страница дужине a+b . Сваку страницу тог квадрата поделимо на делове дужина a и b, као на наведеној слици. На тај начин унутар датог квадрата можемо саставити четири правоугаоника, сваки са страницама дужина a и b. Према томе, квадрат можемо покрити с четири правоугаоника површина ab и квадратом странице дужине $a-b$.



Слика 2.3

Квадрат је странице $a + b$. Површина квадрата је

$$(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2$$

$$(a + b)^2 \geq 4ab$$

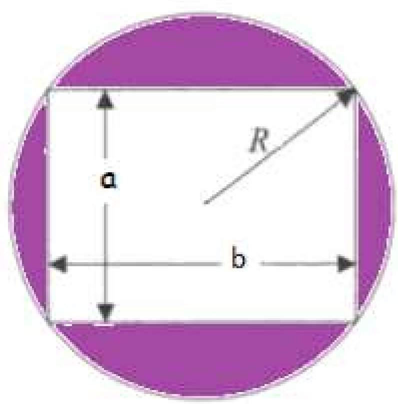
$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b$ тј. када је $(a - b)^2$. □

2.2 Примена А-Г неједнакости

Нека је у круг полупречника R уписан правоугаоник, показати да је правоугаоник максималне површине квадрат (Andreescu and oth.,2006).



Слика 2.4

a, b су странице правоугаоника те важи да је

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = R^2$$

Како је површина правоугаоника $P = ab$ користећи А-Г неједнакост следи да је

$$P = ab = \sqrt{a^2b^2} \leq \frac{a^2+b^2}{2} = 2R^2$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b$ тј. $P = a^2$ што је површина квадрата. □

Проблем краљице Дидо

(Alsina & Nelsen,2009.)

Легендарној краљици Картагине (жена краља Либије) је локално становништво допустило да купи земљиште на обали Африке "не веће од онога што воловска кожа може да окружи." Резањем воловске коже на уске траке, она је направила дуги низ с којим је требало да окружи што већу површину на морској обали. Дидо је на обали мора ивице трака поставила у полукруг. Добила је површину земље већу него што се могло претпоставити. Тако је настао град Картагина.

Слика 2.5

Нека је дужина изломљене праве $L = 2x + y$.

Површина правоугаоника страница x и y је $P = xy$.

$$P = xy = \frac{1}{2}(2xy) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2xy}\right)^2.$$

Овде користимо А-Г неједнакост

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2xy}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}L^2 \quad \text{то је}$$

$$P \leq \frac{1}{8}L^2$$

Једнакост се постиже за $y = 2x$ тј. $P = 2x^2$.

Дидо проблем је заправо изопериметријски проблем. Она је добила да површина мора бити двапута шира него дужа. □

Однос аритметичке, геометријске, квадратне и хармонијске средине

Многе алгебарске неједнакости могу се представити као геометријски проблеми. Типичан пример је добро позната неједнакост између аритметичке, геометријске, хармонијске и квадратне средине.

Ако поредимо средине за два броја a, b имамо

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b$.

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \quad \text{је хармонијска средина (ХС)}$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ је квадратна средина (КС).}$$

Прво дајем аналитички доказ ГХ и АК – неједнакости, тј. неједнакости геометријске и хармонијске, односно аритметичке и квадратне средине .

Доказ 1 : (Митриновић, 1965.) За произвољне a , $b \in \mathbf{R}$, a , $b > 0$ важи

$0 \leq (a-b)^2$, с једнакошћу само за a = b . Извршимо назначено квадрирање

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2,$$

додавањем 4 ab са обе стране ове неједнакости добијамо

$$4\,ab \leq a^2 + 2ab + b^2.$$

Како је a , $b > 0$, ова неједнакост је еквивалентна са

$$4a^2b^2 \leq (a+b)^2ab.$$

Кореновањем сада иамо

$$2ab \leq (a+b)\sqrt{ab},$$

а одатле је даље

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab},$$

што смо и тврдили. Уочимо да су уз услов a , $b > 0$ све релације у овом доказу међусобно еквивалентне, што значи да се једнакост у ХГ – неједнакости постиже ако и само ако је a = b.

У наставку аналогно докажимо и АК – неједнакост за бројеве a , $b > 0$. И овде полазимо од $0 \leq (a-b)^2$. Извршимо ли назначено квадрирање, одавде је $2ab \leq a^2 + b^2$. Сада обема странама ове релације додајемо $a^2 + b^2$. Тада је

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a+b)^2,$$

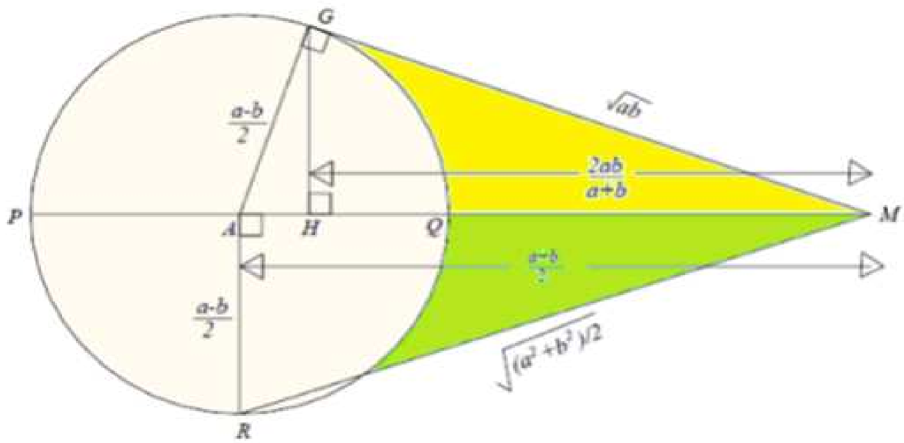
тј.

$$(a+b)^2 \leq 2(a+b)^2.$$

Дељењем са 4 и кореновањем следи $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

што је и требало доказати. Уочимо и овде да једнакост важи ако и само ако је a = b.

Доказ 2: (Арслапагић, 2000) Сада ћу ове релације доказати уз помоћ њихове геометријске интерпретације. У ту сврху без умањења уопштености можемо претпоставити да је $a > b > 0$.



Слика 2.6

Нека је $|PM| = a$, изаберемо Q на $|PM|$ тако да је $|QM| = b$. Нека је А је средиште дужи $|PQ|$, онда је :

$$|PQ| = a - b$$

$$|AP| = |AQ| = \frac{a-b}{2}$$

$$|AM| = |AQ| + |QM| .$$

Конструишемо кружницу са центром у А полупречника $\frac{a-b}{2}$. Нека је G тачка додира тангенте из М на кружницу.

Како је угао $\measuredangle AGM = 90^0$ те је троугао ΔAGM правоугли са хипотенузом $|AM|$,

$|AG| = \frac{a-b}{2}$, користећи Питагорину теорему имамо:

$$|GM| = \sqrt{|AM|^2 - |AG|^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}$$

$$\text{то је } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Једнакост важи за $a = b$, тј. $\frac{a-b}{2} = 0$.

Нека је H је подножје висине из G на AM троугла AMG. Троуглови ΔAMG и ΔGMH су слични те је

$$\frac{|HM|}{|GM|} = \frac{|GM|}{|AM|} \text{ тј.}$$

$$|HM| = \frac{|GM|^2}{|AM|} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} \text{ како је } |HM| \leq |GM|$$

то је

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab},$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b$.

Нека је R нормала из тачке А на кружницу, тада је троугао ARM правоугли,

$$|\mathrm{A}R| = \frac{a-b}{2}.$$

Користећи Питагорину теорему имамо

$$|RM| = \sqrt{|AM|^2 + |AR|^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad |\mathrm{AM}| = |RM| \text{ акко } A = R \text{ тј.}$$

$$\frac{a-b}{2} = 0,$$

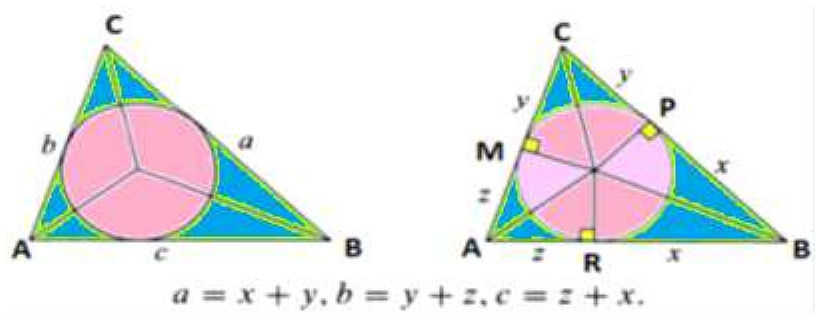
а то важи ако и само ако је $a = b$. □

Рави замена

Рави замена је техника која се јавља као изузетно корисна техника у области геометријских неједнакости.

(Alsina&Nelsen, 2009.)

Дат је троугао страница a, b, c у који је уписана кружница



Слика 2.7

Ако тачке додира кружнице и страница $|AB|, |BC|, |CA|$ означимо редом са R,P,M тада је

$|CM| = |CP|$ $=y$ (тангента на кружницу, ССУ),

$|MA| = |AR|$=z,

$|RB| = |BP|$=x те важи

$$a = x + y$$

$$b = y + z,$$

$$c = z + x$$

$$a + b - c = 2y$$

$$a - b + c = 2x$$

$$-a + b + c = 2z$$

Полуобим је $s = \frac{a+b+c}{2}$, тј. $s = \frac{2x+2y+2z}{2} = x + y + z$.

Како је $s-a=z \quad s-b=x \quad s-c=y$,

очигледно је да је $x+y \leq x+y+2z$ што је еквивалентно са $a<b+c$.

Ова замена је веома важна јер се тада "условне неједнакости у троуглу" (тј. које важе за a, b, c са условом да су странице троугла) са овим могу свести на неједнакости за позитивне бројеве (без икаквог услова!) и тиме се омогућава коришћење апарата анализе.

Једна од примена Рави замене је дата у следећој неједнакости.

2.3. Падоа неједнакост

(Alsina & Nelsen, 2009.)

Нека су a, b, c три странице троугла. Тада важи да је

$$abc \geq (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

Користећи Рави замену имамо еквивалент

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq (2x)(2y)(2z) = 8xyz.$$

Такође користећи А-Г неједнакост

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$y+z \geq 2\sqrt{yz}$$

$$z+x \geq 2\sqrt{zx}$$

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 2\sqrt{xy}\,2\sqrt{yz}\,2\sqrt{zx} = 8xyz,$$

па следи горње тврђење. □

Ово поглавље завршавам примером који наоко нема везе с геометријом, што демантују докази на Сликама 2.8 и 2.9 .

За свако $x \in$R, x >0, важи

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

с једнакошћу ако и само ако је x =1 (Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gómez Ortega, Rogelio Valdez Delgado, 2009.*)*.

Доказ 1. (Bulajich Manfrino and oth.,2009.*)*.

За произвољно x >0 имамо $(x-1)^2 \geq 0$, с једнакошћу само за x =1. Извршимо ли назначено квадрирање, добијемо

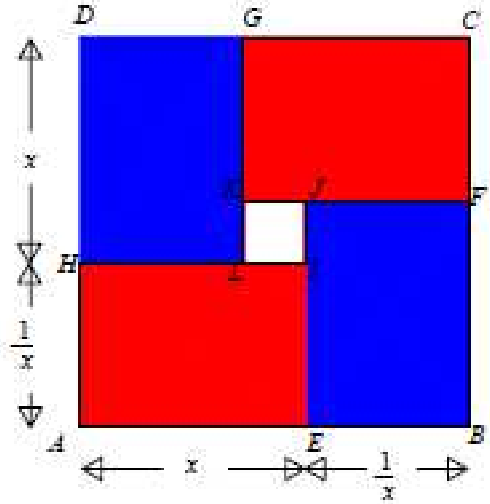
$$x^2 + 1 \geq 2x\ ,$$

одакле је дељењем с x >0 даље

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

што смо и тврдили. Наравно, једнакост се постиже само за x = 1. □

Доказ 2. (Bottema and oth., 1969.) Будући да за функцију f:$\langle 0, +\infty\rangle \to$ R, $f(x) = x + \frac{1}{x}$, важи да је $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, x >0, без смањења уопштености можемо претпоставити да је $x \geq 1$. У овом ћемо доказу користити површину квадрата и правоугаоника. Нека је ABCD квадрат странице дужине $x + \frac{1}{x}$. Редом на страницама $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, и$|DA|$, одаберимо тачке E, F, G и H тако да је$|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = x$. Наравно, тада је $|EB| = |CF| = |GD| = |HA| = \frac{1}{x}$. Сада квадрат ABCD можемо поделити на правоугаонике и квадрате, као на слици 2.8.



Слика 2.8

Нека су I, J, K и L тачке у унутрашњости квадрата ABCD такве да су AEIH, EBFJ, FCGK и GDHL правоугаоници. Тада је $|LI| = |IJ| = |JK| = |KL| = x - \frac{1}{x}$ и

$$\measuredangle KLI = \measuredangle LIJ = \measuredangle IJK = \measuredangle JKL = 90^0 \text{па је } IJKL \text{ квадрат. Зато имамо}$$

$$P_{ABCD=}P_{AEIH} + P_{EBFJ} + P_{FCGK} + P_{GDHK} + P_{IJKL}$$

$$\geq P_{AEIH} + P_{EBFJ} + P_{FCGK} + P_{GDHL} \,,$$

с једнакошћу ако и само ако је $P_{IJKL} = 0$. Уврштавањем дужина страница ових квадрата и правоугаоника и квадрата следи да је

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 4x\frac{1}{x},$$

тј.

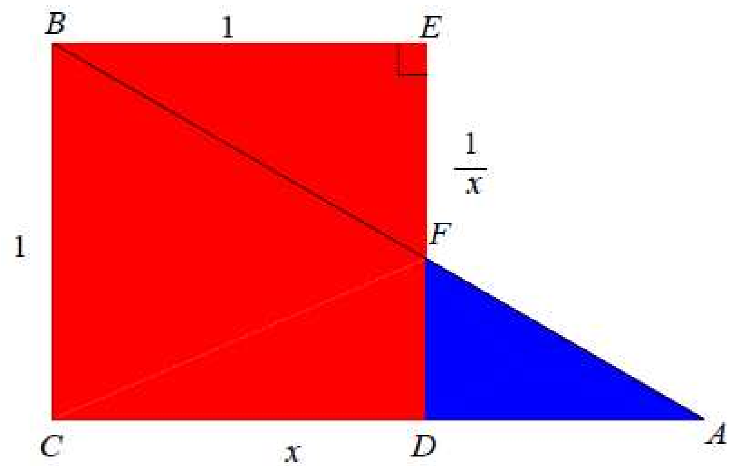
$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \geq 4$$

уз једнакост само када је $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$, односно $x = \frac{1}{x}$, тј. $x = 1$. Кореновањем се добија

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2,$$

уз једнакост акко је $x = 1$. □

Доказ 3. *(Alsina&Nelsen, 2009.)* Погледајмо слику 2.9 .Нека је ΔABC правоугли троугао са правим углом при врху C, такав да је $|AC| = x$, $x \geq 1$ и $|BC| = 1$. На катети AC одаберемо тачку D тако да је $|CD| = 1$, а тачка E нека је четврто теме квадрата $BCDE$ (странице дужине 1). Такође, са F обележимо пресек дужина $|AB|$ и $|DE|$.



Слика 2.9

Троуглови ΔABC и ΔAFD су слични, па је

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|FD|}{|DA|}.$$

Односно

$$\frac{1}{x} = \frac{|FD|}{x-1},$$

одакле је $|FD| = 1 - \frac{1}{x}$, па је

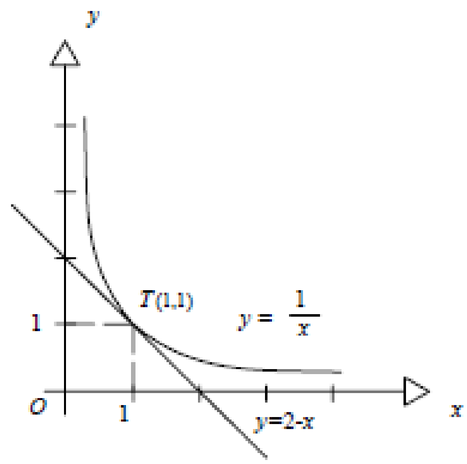
$$|EF| = |ED| - |FD| = 1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Како је $P_{CAFEB} = P_{CDEB} + P_{DAF}$ следи да је $P_{CAFEB} \geq P_{CDEB.}$ Због

$$P_{CAFEB} = P_{ABC} + P_{BFE} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

и $P_{CDEB} = 1$, имамо $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1,$ тј. $x + \frac{1}{x} \geq 2$, што смо и тврдили. Уочимо да ће једнакост важити само за $P_{DAF} = 0$, тј. ако је $(x-1)\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$, односно $x = 1.$ □

Доказ 4. (Alsina&Nelsen, 2009.) У овом ћемо доказу применити геометријску дефинцију тангенте. Проматрамо функцију $f: \langle 0, +\infty \rangle \to$ R, $f(x) = \frac{1}{x}$.



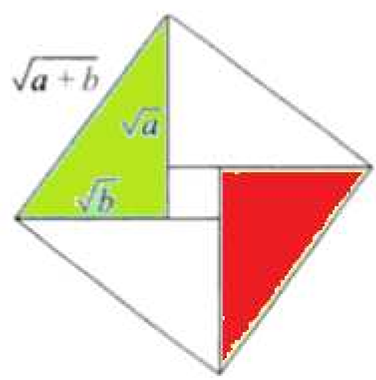
Слика 2.10

Једначина тангенте на хиперболу $y = \frac{1}{x}$ у тачки T(1,1) гласи $y = 2 - x$. Како је функција f конвексна , тангента се налази ”испод” графа Γ, тј. важи $\frac{1}{x} \geq 2 - x$, уз једнакост само за x =1. Дакле, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, с једнакошћу само за $x = 1$, чиме је доказ готов. □

3.Површине и запремине у неједнакостима

Пример 1. (Alsina&Nelsen, 2009.)

Површина квадрата страница $\sqrt{a+b}$ је $P = a + b$.



Слика 3.1

Површина правоуглог троугла чије су катете $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ $je\ P = \frac{\sqrt{ab}}{2}$.

Са слике се види да је површина квадрата већа од површине четири троугла тј.

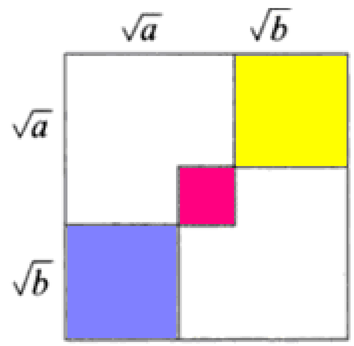
$$a + b \geq 4\frac{\sqrt{ab}}{2}$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\ . \ \square$$

Пример 2. (Alsina&Nelsen, 2009.)

Површина квадрата дужине странице $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ је $P = \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$.



Слика 3.2

Види се са слике да је

$$2\left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\left(\sqrt{b}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$$

$$2a + 2b \geq a + 2\sqrt{ab} + b$$

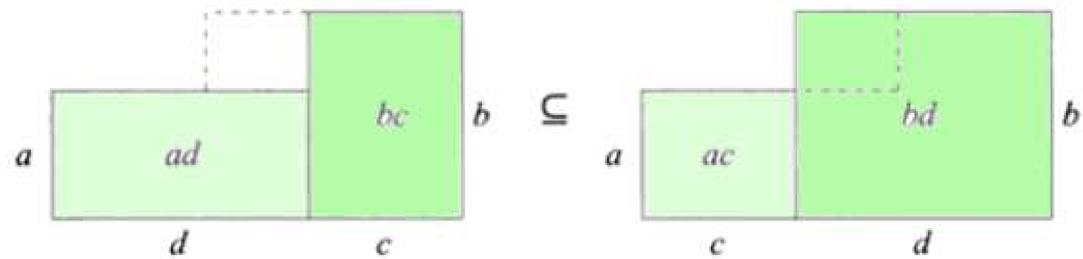
$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\,.\square$$

Пример 3. (Alsina&Nelsen, 2009.)

а) За било која четири позитивна броја a, b, c, d таква да је $a \leq b, c \leq d$ тада важи

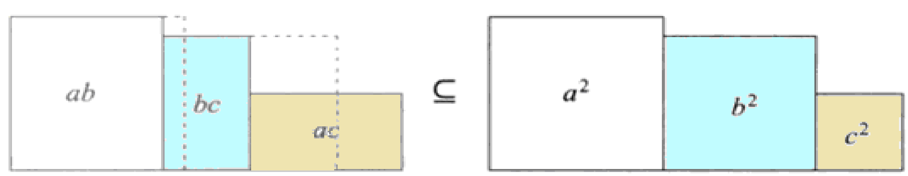
$ad + bc \leq ac + bd.$



Слика 3.4

Једнакост важи за $a = b$ или $c = d$ за $a, b, c \geq 0$, $a \geq b \geq c$ □

б) Важи (Bulajich Manfrino and oth., 2009.)



Слика 3.5

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \; \square$$

3.1.Чебишевљева неједнакост

Теорема. *(Alsina&Nelsen, 2009.)* За $n \geq 2$ и $0 < x_1 \leq \ldots \leq x_n$ важи:

(i) Ако је $0 < y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ онда

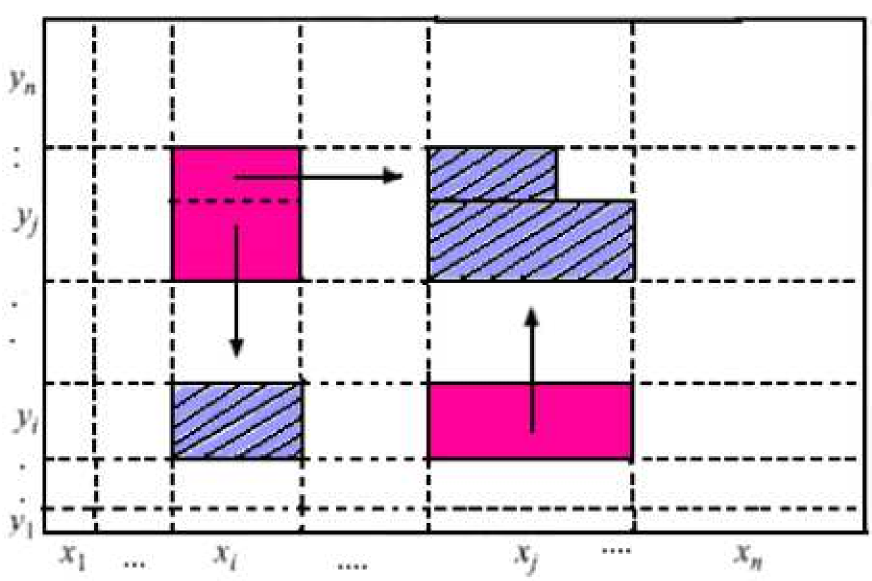
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

(ii) Ако је $y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n > 0$ онда

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \geq n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Једнакост важи акко су сви x_i једнаки и сви y_i једнаки .

Доказ: (i)



Слика 3.6

$x_i \leq x_j$, $y_i \leq y_j$

$x_i y_j + x_j y_i \leq x_i y_i + x_j y_j$.

Следи

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i y_j + x_j y_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i y_i + x_j y_j\right)$$

тј. $(x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n) \leq n(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)$. □

(ii) $x_i \leq x_j$, $y_i \geq y_j$

$x_i y_j + x_j y_i \leq x_i y_i + x_j y_j$.

Следи

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i y_j + x_j y_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i y_i + x_j y_j\right)$$

тј. $(x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n) \geq n(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)$. □

Кад ставимо да је $y_i = \dfrac{1}{x_i}$

$$(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$ једнакост важи ако и само ако је $x_1 = \ldots = x_n$.

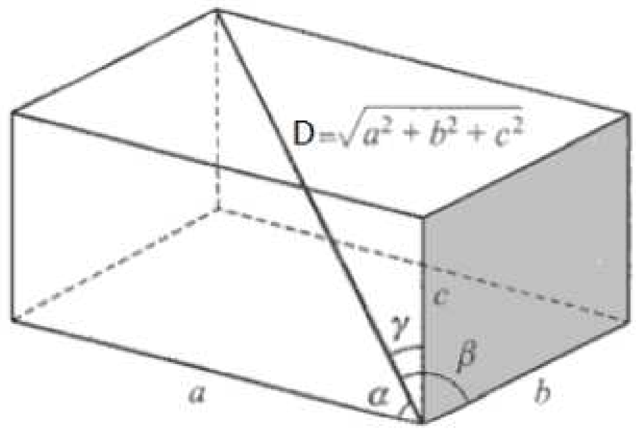
Примена: ***Voicu's* неједнакост** *(Alsina&Nelsen, 2009.)*

Нека су α, β, γ углови које просторна дијагонала призме формира са ивицама. Тада важи

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \geq 2\sqrt{2}.$$

Једнакост важи за коцку.

Доказ:



Слика 3.7

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

Кад ставимо да је $x = \cos\alpha$ $y = \cos\beta$ $z = \cos\gamma$ добијамо

$$1 + tg^2\alpha\, tg^2\beta\, tg^2\gamma = 1 + \frac{1 - x^2}{x^2}\,\frac{1 - y^2}{y^2}\,\frac{1 - z^2}{z^2} =$$

$$= \frac{x^2y^2z^2 + (1 - y^2 - x^2 + x^2y^2)(1 - z^2)}{x^2y^2z^2} =$$

$$= \frac{x^2y^2z^2 + 1 - z^2 - y^2 + y^2z^2 - x^2 + x^2z^2 + x^2y^2 - x^2y^2z^2}{x^2y^2z^2} =$$

$$= \frac{x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}{x^2y^2z^2} =$$

$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = (x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \geq 9,$ на основу предходног.

$tg^2\alpha\, tg^2\beta\, tg^2\gamma \geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, једнакост важи само ако је у питању коцка (тангенс угла је $\sqrt{2}$). □

3.2 Губа неједнакост

У правој призми димензија a, b, c запремине $V = abc$ и површине страна $P_1 = ab$, $P_2 = bc$, $P_3 = ac$, са просторном дијагоналом $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ важи да је ${P_1}^2 + {P_2}^2 + {P_3}^2 \geq \sqrt{3}\,VD$.

Доказ (Alsina & Nelsen, 2009.) :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) \geq$$

(Користећи предходно да је $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ добијамо)

$$\geq ab + ac + bc + 2(ab + bc + ac)$$

$$= 3(ab + bc + ac)$$

Заменом $a = {P_1}^2$, $b = {P_2}^2$, $c = {P_3}^2$ у предходну неједнакост добијамо:

$({P_1}^2 + {P_2}^2 + {P_3}^2)^2 \geq 3({P_1}^2{P_2}^2 + {P_2}^2{P_3}^2 + {P_2}^2{P_3}^2)$

$= 3(a^2b^2b^2c^2 + a^2b^2a^2c^2 + b^2c^2a^2c^2)$

$= 3(a^2b^4c^2 + a^4b^2c^2 + b^2a^2c^4)$

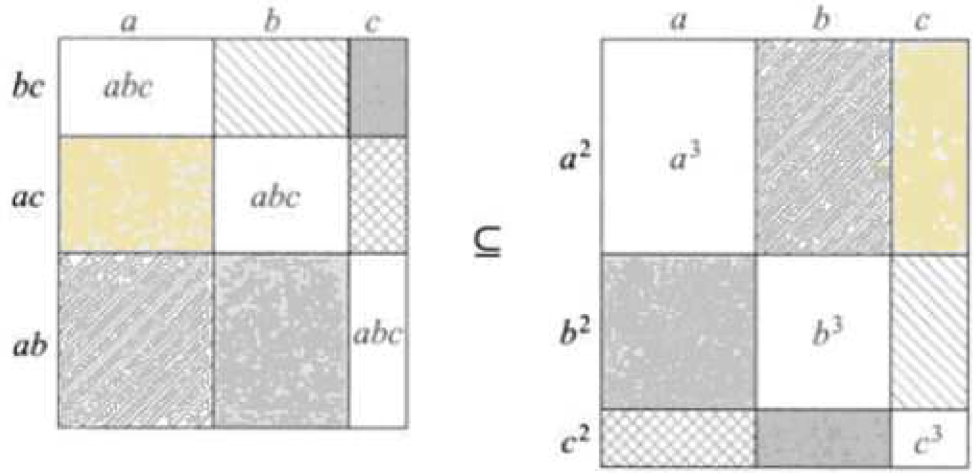
$= 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)$

$= 3V^2D^2$ те је

$$ {P_1}^2 + {P_2}^2 + {P_3}^2 \geq \sqrt{3}\,VD . \ \square$$

Теорема.

За све $a, b, c \geq 0$ важи да је $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.



Слика 3.8

Доказ (Alsina,2009): Како је $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$ када прво помножимо са a, затим са b, а затим са c и саберемо, добијамо

$$a^3 + b^2a + c^2a \geq a^2b + abc + a^2c$$

$$a^2b + b^3 + c^2b \geq ab^2 + b^2c + abc$$

$$a^2c + b^2c + c^3 \geq abc + bc^2 + ac^2$$

Када се скрати добијамо да је

$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$. □

3.3 Авионске неједнакости

(Alsina & Nelsen,2009.)

Димензије пртљага које прописују авио компаније је $a+b+c \leq 45$ инча. А-Г неједнакост показује да облик таквог пртљага мора бити коцка. Нажалост, такав пртљаг ретко улази у бокс изнад путника, јер бокс има облик призме.

$(15'' \approx 38{,}1cm)$

$\left(\frac{115}{3} \approx 38{,}1\right)$

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \frac{45}{3} = 15$$

$$abc \leq 15 \cdot 15 \cdot 15$$

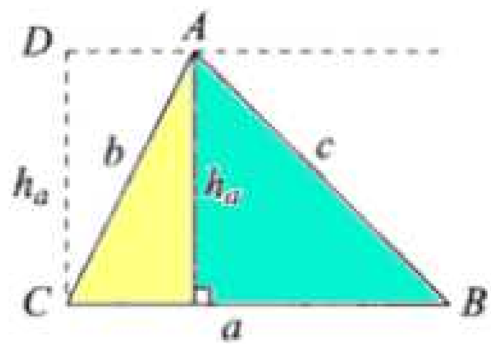
те једнакост важи када је $a = b = c$ =15, тј. ивице су $15''$, а то важи за коцку. □

4. Троугао у неједнакостима

(Bottema and oth.,1969.)

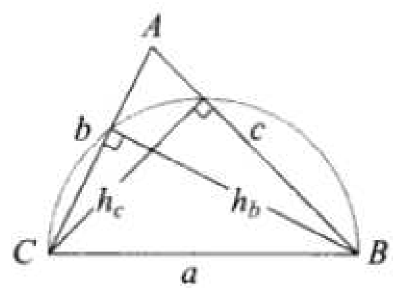
Конструкције троугла :

1. ако је дато: a, b, h_a . Троугао постоји ако је $b \geq h_a > 0$.



Слика 4.1

2. ако је дато : h_c , a, h_b . Троугао постоји ако је $h_b \leq a$ и $h_c \leq a$.



Слика 4.2

Лема. (Arslanagić,1998.) Нека је дат троугао ABC са страницама a, b, c. Важи да је

$$h_a \leq \sqrt{s(s-a)}$$

$$h_b \leq \sqrt{s(s-b)}$$

$$h_c \leq \sqrt{s(s-c)}$$

при чему је $s = \frac{a+b+c}{2}$ (полуобим).

Доказ: Користимо Херонов образац $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ који ће бити доказан на страни 41.

$$P = \frac{ah_a}{2}$$

$$h_a = \frac{2P}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{s(s-a)}\,\frac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{\frac{a}{2}}$$

Користећи А- Г неједнакост

$$\sqrt{(s-b)(s-c)} \leq \frac{s-b+s-c}{2} = \frac{a}{2} \text{ те је}$$

$$h_a \leq \sqrt{s(s-a)}\,.$$

$$\text{Аналогно је } h_b \leq \sqrt{s(s-b)} \text{ и } h_c \leq \sqrt{s(s-c)}. \square$$

Теорема. (Arslanagić, 1998.) Ако су h_a, h_b, h_c висине троугла тада је :

$$h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{3}s \text{ и } h_a h_b h_c \leq sP.$$

Доказ: Из предходне Леме и аритметичко квадратне неједнакости следи

$$h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{s(s-a)} + \sqrt{s(s-b)} + \sqrt{s(s-c)}$$

$$\leq 3\sqrt{\frac{s(s-a)+s(s-b)+s(s-c)}{3}}$$

$$= 3\sqrt{\frac{s^2-as+s^2-bs+s^2-cs}{3}}$$

$$= 3\sqrt{\frac{3s^2-s(a+b+c)}{3}} \text{ како је } \mathrm{a+b+c} = 2s \text{ то је}$$

$$= 3\sqrt{\frac{3s^2 - 2s^2}{3}}$$

$$= \sqrt{3}\text{s}$$

$$h_a h_b h_c \leq \sqrt{s(s-a)}\sqrt{s(s-b)}\sqrt{s(s-c)} = \sqrt{s^2 s(s-a)(s-b)(s-c)} = sP \;\square$$

Тежишне линије троугла спајају темена троугла, са средиштима наспрамних страница. Тежишне линије се секу у једној тачки, тежишту троугла.
Растојање од тежишта до темена је $\frac{2}{3}$ тежишне линије.

$$t_a{}^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$
$$t_b{}^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$$
$$t_b{}^2 = \frac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{4}$$

ако за странице троугла важи $a \leq b \leq c$ онда је $t_a \geq t_b \geq t_c$

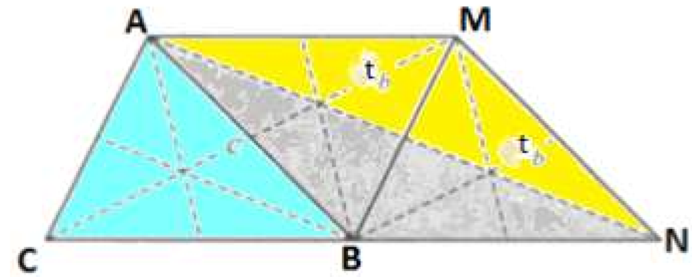
$$t_a{}^2 + \; t_b{}^2 + \; t_c{}^2 = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4} \;. \;\square$$

Теорема. Нека су t_a, t_b, t_c тежишне линије троугла ABC тада је

$$\frac{3s}{2} \leq t_a + t_b + t_c \leq 2s$$

Доказ: *(Alsina&Nelsen, 2009.)* Прво доказујемо да је $t_a + t_b + t_c \leq 2s$.

Троугао ABC прво централно симетрично пресликамо у односу на средину странице AB. Нека је M слика тачке C при овој симетрији. А затим, добијени троугао такође централно симетрично пресликамо у односу на средину странице BM. Нека је N слика тачке M при овој симетрији. На тај начин добијамо трапез CAMN.



Слика 4.3.

$2t_b \leq a + c$ аналогно $2t_a \leq b + c$ и $2t_c \leq a + b$.

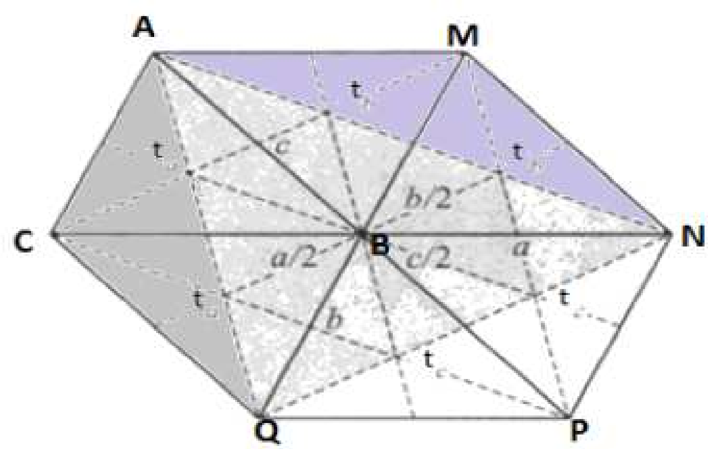
$$2t_a + 2t_b + 2t_c \leq 2a + 2b + 2c$$

$$t_a + t_b + t_c \leq a + b + c$$

Сада докажимо

$$\frac{3s}{2} \leq t_a + t_b + t_c.$$

Троугао $\Delta\, ABC$ сада пет пута централно симетрично пресликамо (у односу на средину странице AB, затим BM, BN, BP и BQ редом) док не добијемо шестоугао $AMNPQC$.



Слика 4.4

У троуглу ANQ чије су странице $2t_a, 2t_b, 2t_c$, тежишне линије су $\frac{3a}{2}, \frac{3b}{2}, \frac{3c}{2}$ те је

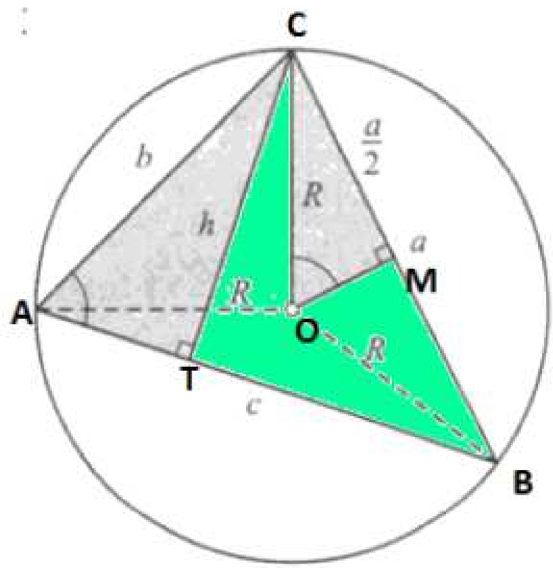
$$\frac{3(a+b+c)}{2} \leq t_a + t_b + t_c \;\square$$

5.Уписане и описане кружнице у неједнакостима

(Арслагић,1998)

Лема1. $P = \frac{abc}{4R}$

Доказ:



Слика 5.1

Троуглови ΔCTA и ΔCOM су слични.

$\measuredangle ATC \cong \measuredangle OMC$

$\measuredangle CAT \cong \measuredangle COM$ (периферијски и централни угао) те је

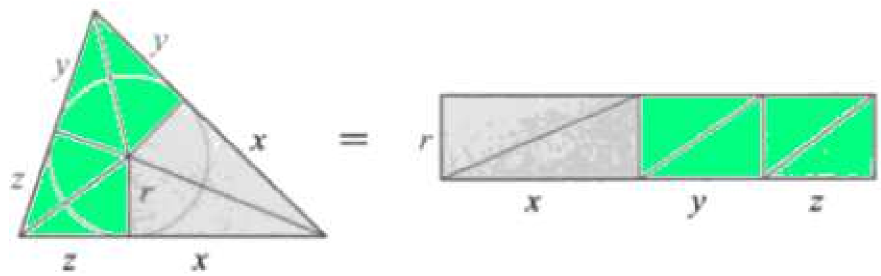
$$\frac{h_c}{b} = \frac{\frac{a}{2}}{R}$$

па је

$$h_c = \frac{1}{2}\frac{ab}{R} \text{ , а одатле је } P = \frac{1}{2}hc = \frac{1}{4}\frac{abc}{R} \text{ .} \square$$

Лема2. $P = r(x + y + z) = rs.$

Доказ:



Слика 5.2 □

Лема 3. $xyz = r^2(x + y + z) = r^2s.$

Доказ: $s - a = x$

$s - b = y$

$s - c = z$

$xyz = (s - a)(s - b)(s - c)$

$sxyz = s(s - a)(s - b)(s - c) = P^2 = r^2s^2$

$xyz = r^2s$. □

Теорема. (***Ојлерова теорема***) За троугао важи $R \geq 2r$, где је R полупречник описане кружнице, а r полупречник уписане кружнице.

Доказ: (Bulajich and oth.,2009)

На основу Падоа неједнакости

$abc \geq 8xyz$ на основу *Леме 1* имамо

$4PR \geq 8xyz$ на основу *Леме 3* имамо

$4PR \geq 8r^2 s$, а из *Леме 2* имамо

$4PR \geq 8P$ r па је

$R \geq 2$r

Једнакост важи за једнакостраничне троуглове. □

Примена. ***Херонов образац***

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{где је } s = \frac{a+b+c}{2} = x + y + z \text{ полуобим.}$$

Доказ: $s - a = x \quad s - b = y \quad s - c = z$

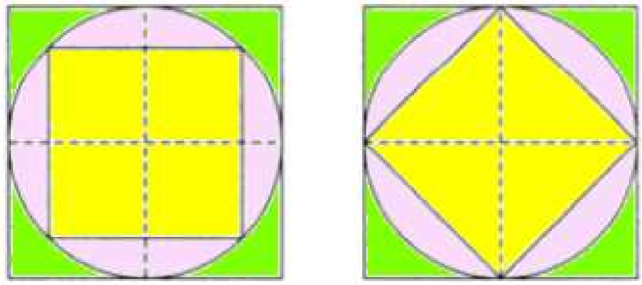
Из Леме 2 имамо $r^2 s = xyz = (s-a)(s-b)(s-c)$ помножимо са s са обе стране и добијамо $(rs)^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ како је $P = rs$ то је

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \ \square$$

Тетиван четвороугао је четвороугао око кога се може описати кружница.

Тангентни четвороугаоје четвороугао у који се може уписати кружница.

Четвороугао је бицентричан ако се око и у њега може и описати и уписати кружница.



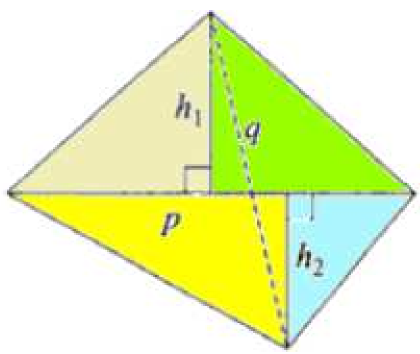
Слика 5.4.

Лема 4. Ако је четвороугао тетиван важи $2R^2 \geq P$, где је R полупречник описане кружнице, а P површина четвороугла.

Доказ: (Bottema and oth.,1969.)

За конвексни четвороугао важи да је $P = \frac{p(h_1+h_2)}{2}$,

$h_1 + h_2 \leq q$ па је $P \leq \frac{pq}{2}$, где су p и q дијагонале четвороугла.



Слика 5.5.

Једнакост важи ако су дијагонале узајамно нормалне. Како је четвороугао тетиван важи да је:

$$p \leq 2R, q \leq 2R$$

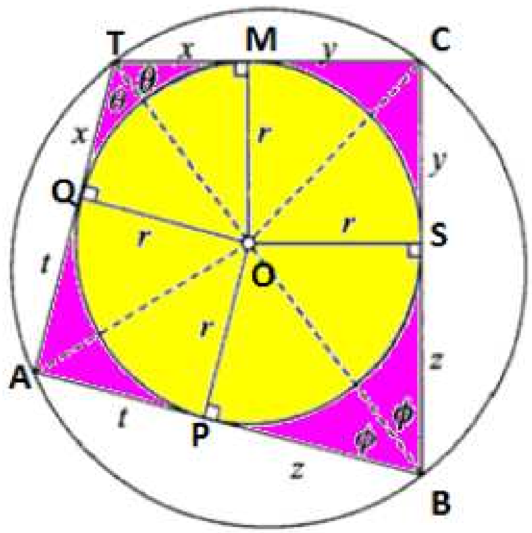
$$pq \leq 4R^2$$

$$P \leq 2R^2 \text{ . } \square$$

Лема 5. Ако је четвороугао бицентричан тада важи $P \geq 4r^2$, где је r полупречник уписане кружнице, а P површина четвороугла.

Доказ: (Bottema and oth.,1969.) Нека је четвороугао бицентричан. Како је четвороугао тетиван то је

$$2\theta + 2\varphi = \pi, \theta + \varphi = 90^0 .$$



Слика 5.6.

Из сличности троуглова ΔTMO и ΔBOS важи

$\frac{x}{r} = \frac{r}{z} \Rightarrow r^2 = xz$ аналогно $r^2 = ty$.

Из чињенице да је четвороугао тангентан имамо да је

$$P = r(x + y + z + t)$$

$$P = 2r\left(\frac{x+z}{2} + \frac{y+t}{2}\right)$$

$$\geq 2r\left(\sqrt{xz} + \sqrt{yt}\right)$$, (како је r = $\sqrt{xz}$ и r = $\sqrt{ty}$)

$$= 4r^2.$$

$$P \geq 4r^2$$

Једнакост важи само за $x = y = z = t$ тј. када је четвороугао квадрат . □

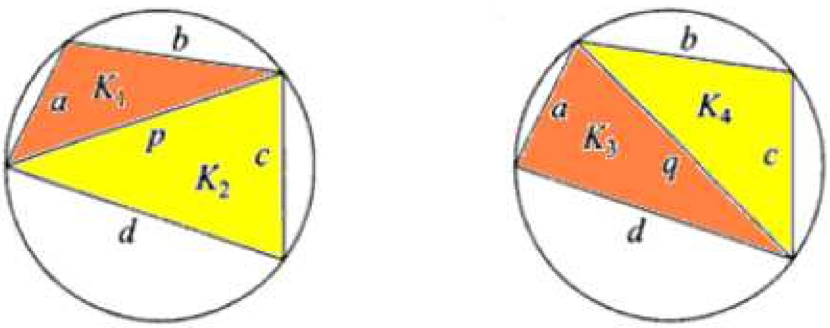
Теорема. Ако је четвороугао бицентричан тада важи да је

$$R^2 \geq \frac{P}{2} \geq 2r^2.$$

Доказ. Директно из *Леме 4* и *Леме 5*.

Лема 6. Ако је четвороугао тетиван, важи да је $\frac{p}{q} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$

Доказ:



Слика 5.7

Из *Леме 1* имамо да је $P = \frac{abc}{4R}$

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 = \frac{a\mathrm{bp}}{4\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{dcp}}{4\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{p}(ab+\mathrm{cd})}{4\mathrm{R}}$$

$$P = P_3 + P_4 = \frac{adq}{4R} + \frac{bcq}{4R} = \frac{q(ad+bc)}{4R}$$ па следи

$$p(ab+cd) = q(ad+bc)$$

$$\frac{p}{q} = \frac{ad+bc}{ab+cd}\ . \ \square$$

6. Ротације у неједнакостима

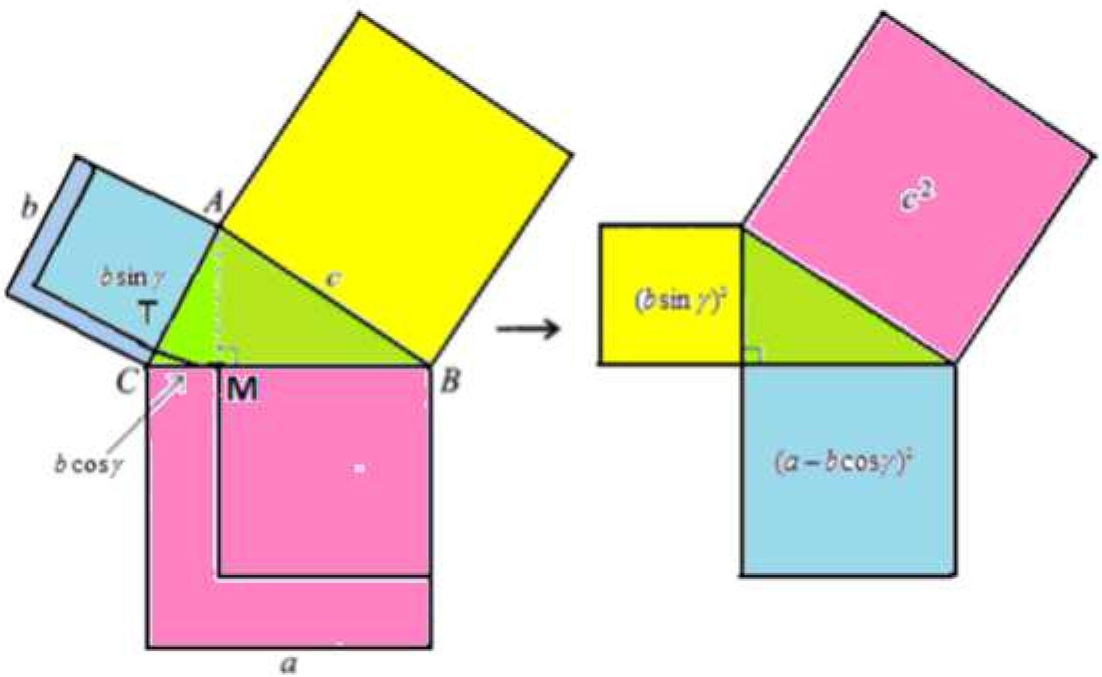
Питагорина теорема. У правоуглом троуглу чије су катете a, b и хипотенуза c важи

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Питагорина неједнакост се односи на било који оштроугли троугао и квадрате над странама тог троугла. Тј. Ако су a, b , c странице посматраног троугла тада важи

$$c^2 \le a^2 + b^2,\ a^2 \le b^2 + c^2 \text{и} \quad b^2 \le a^2 + c^2 .$$

Доказ: *(Alsina & Nelsen, 2009.)* Нека је M тачка пресека нормале из темена A на страницу CB, $|CM| = b\cos\gamma$ и $|AM| = b\sin\gamma$ ротирамо око A, тако да $|AM| = |AT|$, где је T тачка пресека странице AC и k(A, AM).



Слика 6.1

Користећи Питагорину теорему

$$c^2 = (a - b\cos\gamma)^2 + (b\sin\gamma)^2$$

$$b\sin\gamma \leq b \text{ и } a - b\cos\gamma \leq a$$

имамо да је $c^2 \leq a^2 + b^2$ једнакост имамо само за $\sin\gamma = 1$ и $\cos\gamma = 0$, што значи да је угао код темена С прав. Слично се доказује и да је

$$a^2 \leq b^2 + c^2 \text{ и } b^2 \leq a^2 + c^2.$$

Из предходног следи:

$$c^2 = (b\sin\gamma)^2 + (a - b\cos\gamma)^2$$

$$c^2 = b^2\sin^2\gamma + c^2 - 2ab\cos\gamma + b^2\cos^2\gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$ што је косинусна теорема. □

Теорема. У троуглу ΔABC важи $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > 1$.

Доказ: Из косинусне теореме важи да је

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Кад саберемо ове три неједнакости и одузмемо 1 добијамо да је

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+b^2-b^2}{2bc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2bc}-1$$

$$=\frac{1}{2abc}\left(a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)-2abc\right)$$

$$=\frac{1}{2abc}\big((-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\big)$$

$$=\frac{8xyz}{2abc}=\frac{4xyz}{abc}=\frac{4r^2s}{4PR}=\frac{Pr}{PR}=\frac{r}{R}>0$$, као количник две дужи.

Користили смо

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ , \qquad xyz=r^2s=rrs\ ,$$

$$P=rs=\frac{abc}{4R}.\ \square$$

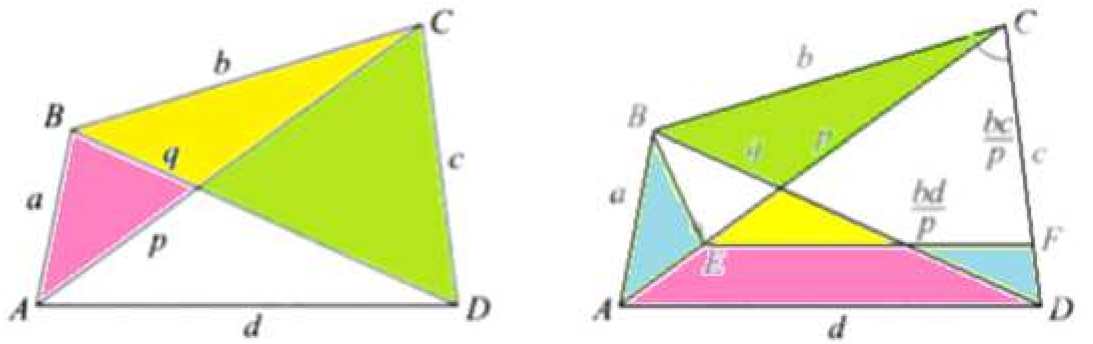
Птоломејева теорема *(Alsina & Nelsen,2009)*: За тетивни четвороугао са дијагоналама p,q и страницама a,b,c,d важи

$$pq=ac+bd.$$

Птоломејева неједнакост: За конвексан четвороугао који има странице a,b,c,d и дијагонале p,q важи $pq\le ac+bd$.

Доказ: *(Alsina & Nelsen,2009.)* Четвороугао $ABCD$ је конвексан, p,q су дијагонале. Око темена C ротирамо страницу BC на дијагоналу, p и означимо тачку E тако да

$$|BC|=|EC|=b.$$



Слика 6.2

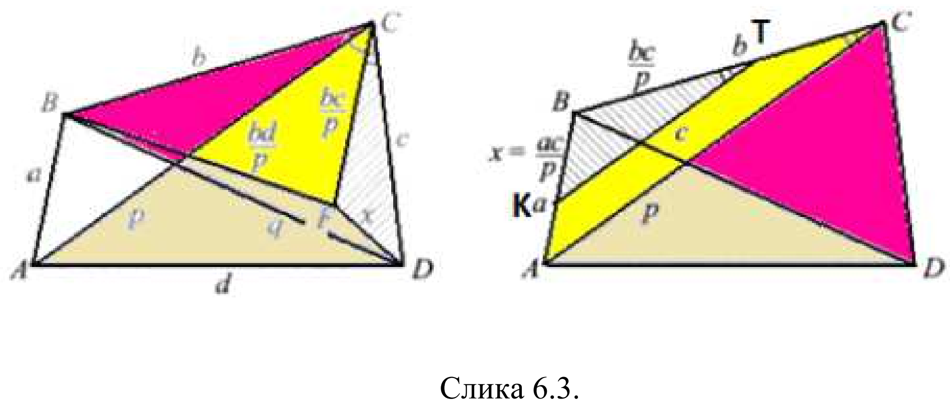
Кроз тачку E повучемо паралелу са AD и на CD и означимо тачку F тако да из сличности троуглова CEF и CAD имамо

$$\frac{p}{d}=\frac{b}{|EF|}\Rightarrow |EF|=\frac{bd}{p}$$

$$\frac{c}{d}=\frac{|CF|}{|EF|}\Rightarrow \frac{c}{d}=\frac{|CF|}{\frac{bd}{p}}$$

$$\Rightarrow |CF|=\frac{cbd}{pd}$$

$$\Rightarrow |CF|=\frac{cb}{p}.$$



Слика 6.3.

Троугао CEF ротирамо око C, и нека је $x = |F_1D|$ сада важи $\frac{bd}{p} + x \geq q$, сада ротирамо и транслирамо троугао ΔCF_1D такође око C и добијамо троугао ΔBTK . Из сличности троуглова ΔBTK и $\Delta\, ABC$ следи

$$\frac{a}{p} = \frac{x}{c} \;\; \Rightarrow x = \frac{ac}{p}, \text{ то је из предходног}$$

$$\frac{bd}{p} + \frac{ac}{p} \geq q \qquad ac + bd \geq pq.$$

Када је четвороугао тетиван важи да је

$$\measuredangle CBD \cong \measuredangle CAD \cong \measuredangle CEF$$
$$\measuredangle CBD \cong \measuredangle CBF_1$$

јер BF_1 и F_1D леже на BD те имамо једнакост. □

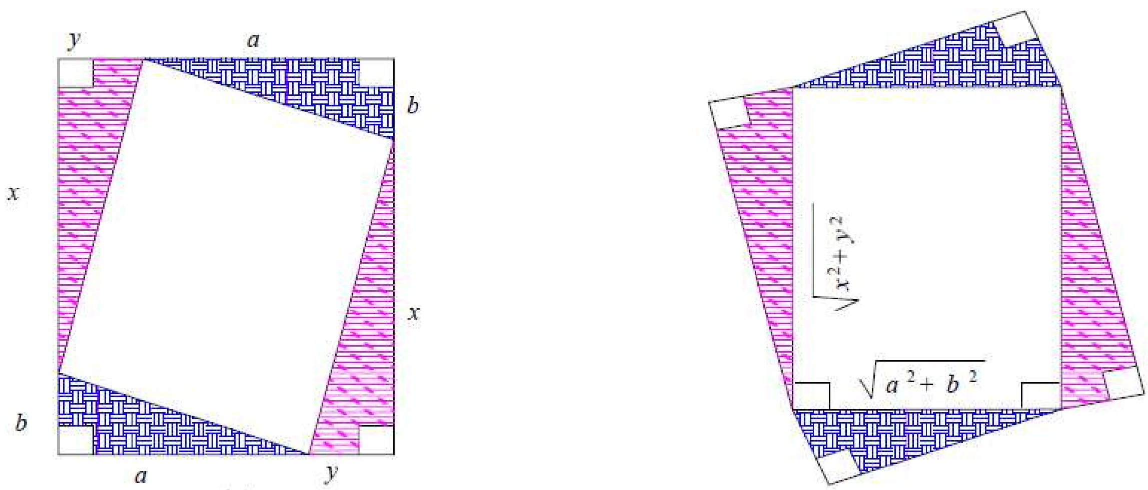
7. Неизометријске трансформације у неједнакостима

7.1. Коши Шварц Буњаковски неједнакост (Арсланагић, 2000.):

За свако $a, b, x, y \in R$ важи

$$|ax + by| \leq \sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Доказ 1: (геометријско доказ) Неумањујући општост претпоставимо да је $a, b, x, y > 0$. Нацртајмо правоугаоник са суседним страницама $a + y$ и $x + b$. Страницу $a + y$ поделимо на делове a и y , а $x + b$ на x и b .



Слика 7.1

Тај правоугаоник се састоји од два правоугла троугла површине $\frac{ab}{2}$, и два правоугла троугла површине $\frac{xy}{2}$ и паралелограма суседних страница $\sqrt{a^2 + b^2}$ и $\sqrt{x^2 + y^2}$ (из Питагорине теореме). Површину паралелограма добијамо кад се од површине правоугаоника одузму површине троуглова, то је

$$P = (a+y)(b+x) - 2\frac{ab}{2} - 2\frac{xy}{2}$$

$$= ab + ax + by + xy - ab - xy$$

$$= ax + by.$$

Са друге стране од свих паралелограма са суседним страницама дужина $\sqrt{a^2+b^2}$ и $\sqrt{x^2+y^2}$ највећу површину ће имати правоугаоник.

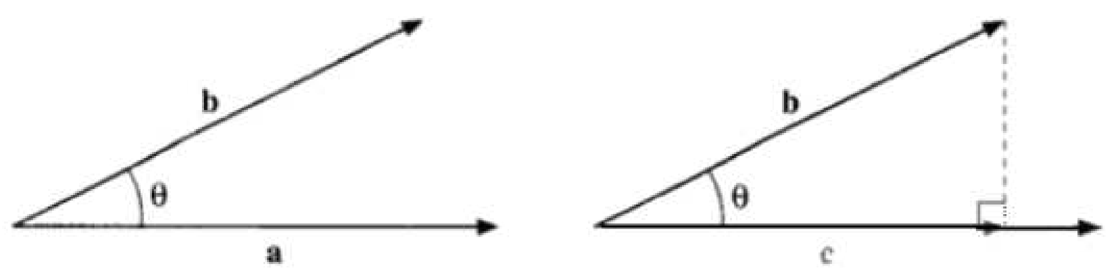
Површина паралеограма је $\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{x^2+y^2}$ те је

$ax + by \leq \sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{x^2+y^2}$ у случају да је неки од

бројева a, b, x или y негативан, замењујемо га апсолутном вредношћу и притом не смањујемо вредност израза $|ax+by| \leq \sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{x^2+y^2}$. □

Доказ 2: (користи векторе и пројекцију вектора)

Нека је $\underset{c}{\rightarrow}$ пројекција вектора $\underset{b}{\rightarrow}$ на вектор $\underset{a}{\rightarrow}$ тада је



Слика 7.2

$$\|c\| = \|b\| \cos\theta = \frac{|ab|}{\|a\|}$$ како је $\|c\| \leq \|b\|$ то је $|ab| \leq \|a\|\|b\|$. □

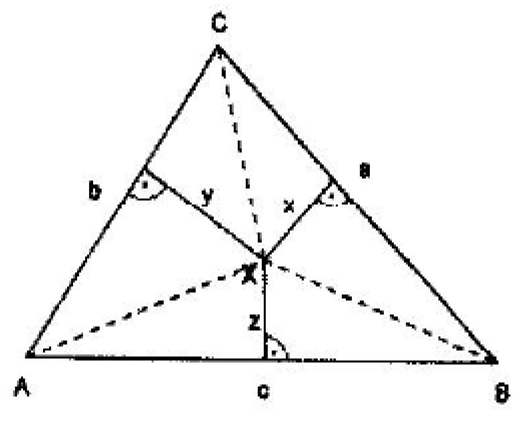
7.2. Примена Коши Буњаковски Шварцове неједнакости у алгебарским неједнакостима за одређивање екстремних вредности у геометрији

Пример 1. (Andresscu & Stojanov, 2006.)

За било коју тачку X унутар троугла ΔABC су x, y и z растојања тачке X од правих BC, AC и AB редом. Наћи положај тачке X за који је сума $x^2+y^2+z^2$ минимална.

Решење:

Означимо са $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$. Тада је површина троугла ΔABC једнака збиру површина троуглова ΔAXC , ΔAXB , ΔBXC , тј: $P_1=\frac{ax}{2}$, $P_2=\frac{by}{2}$, $P_3=\frac{cz}{2}$, односно



Слика 7.3

$$P=P_1+P_2+P_3=\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}+\frac{cz}{2}\ /\cdot 2$$

$$\Rightarrow 2P=ax+by+cz$$

$4P^2=(ax+by+cz)^2\leq(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ (неједнакост КШБ)

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{(ax+by+cz)^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{4P^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Према томе , сума $x^2 + y^2 + z^2$ треба да буде минимална за сваку тачку X за коју важи

$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ када важи једнакост.

Дакле, $\min(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{4P^2}{a^2+b^2+c^2}$

Пример 2 .(Andresscu & Stojanov,2006.)

За било коју тачку X унутар троугла ΔABC су x, y и z растојања тачке X од правих $a = BC$, $b = AC$ и $\mathrm{c} = \mathrm{AB}$ редом. Наћи положај тачке X за коју је минимално :

а) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$;

б) $\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz}$.

Решење:

а) У задатку 1. добили смо да је $2P_{\Delta ABC} = ax + by + cz$. Ставимо да је $x_1 = \sqrt{ax}$,

$x_2 = \sqrt{by}$, $x_3 = \sqrt{cz}$, $y_1 = \sqrt{\frac{a}{x}}$, $y_2 = \sqrt{\frac{b}{y}}$, $y_3 = \sqrt{\frac{c}{z}}$. Тада према неједнакости КШБ

добијамо:

$$\left(\left(\sqrt{ax}\right)^2 + \left(\sqrt{by}\right)^2 + \left(\sqrt{\mathrm{cz}}\right)^2\right) \cdot \left(\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{\mathrm{y}}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{z}}}\right)^2\right) \geq$$

$$\left(\sqrt{ax} \cdot \sqrt{\frac{a}{x}} + \sqrt{by} \cdot \sqrt{\frac{b}{y}} + \sqrt{cz} \cdot \sqrt{\frac{c}{z}}\right)^2 = \left(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2}\right)^2 = (a + b + c)^2$$

$$(ax + \mathrm{by} + \mathrm{cz}) \cdot \left(\frac{a}{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{y}} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{z}}\right) \geq (a + b + c)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{\mathrm{y}} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{z}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{ax + by + cz} = \frac{(a + b + c)^2}{2P_{\Delta ABC}},$$

где једнакост важи ако је $x = \mathrm{y} = \mathrm{z}$. Тада се тачка X налази у центру уписаног круга троугла ΔABC, односно у тачки пресека симетрала углова. Дакле,

$$\min\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{\mathrm{y}} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{z}}\right) = \frac{(a + b + c)^2}{2P_{\Delta ABC}}.$$

б) Означимо са $x_1 = \sqrt{ax}$, $x_2 = \sqrt{by}$, $x_3 = \sqrt{cz}$, $y_1 = \sqrt{\frac{1}{ax}}$, $y_2 = \sqrt{\frac{1}{by}}$, $y_3 = \sqrt{\frac{1}{cz}}$, па из КШБ неједнакости следи:

$$(ax + \mathrm{by} + \mathrm{cz}) \cdot \left(\frac{1}{a\mathrm{x}} + \frac{1}{\mathrm{by}} + \frac{1}{\mathrm{cz}}\right) \geq (1 + 1 + 1)^2 = 3^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a\mathrm{x}} + \frac{1}{\mathrm{by}} + \frac{1}{\mathrm{cz}} \geq \frac{9}{ax + \mathrm{by} + \mathrm{cz}} = \frac{9}{2P_{\Delta ABC}},$$

где једнакост важи ако је $ax = \mathrm{by} = \mathrm{cz}$. Дакле, имамо да је

$$\min\left(\frac{1}{a\mathrm{x}} + \frac{1}{\mathrm{by}} + \frac{1}{\mathrm{cz}}\right) = \frac{9}{2P_{\Delta ABC}},$$

када је тачка X тежиште троугла ΔABC.

8. Функције у неједнакостима

Теорема. ***Коши Шарц Буњаковски (*** Bulajich Manfrino and oth.,2009***)***.

Нека су $(a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_1, \ldots, b_n)$ две n −торке реалних бројева. Тада важи

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right) \text{ при томе једнакост важи ако су}$$

$n -$ торке пропорционалне, тј.

$$\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \ .$$

Доказ: Посматрамо квадратну функцију $f: R \rightarrow R$ дефинисану формулом

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 &= (a_1 x + b_1)^2 + \cdots + (a_n x + b_n)^2 \\ &= ({a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)x + \left({b_1}^2 + \cdots + {b_n}^2\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)x + \left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right) \end{aligned}$$

како је ова функција ненегативна $f(x) \geq 0$ за свако $x \in R$, то дискриминанта D не може бити позитивна

$$D = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right) \leq 0 \quad \text{те је}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right)$$

Једнакост важи ако постоји реалан број m такав да је $b_i = m a_i,\ i = 1, \ldots, n,$ тј. ако су n-торке пропорционалне. □

Ојлерова формула за конвексне полиедре (Alsina & Nelsen,2009) . Ако са F означимо број страна, са V број темена, а са E број ивица конвексног полиедра, тада важи да је

$$F + V - E = 2.$$

Теорема. За конвексне полиедре важи

$$2 + \frac{F}{2} \leq V \leq 2F - 4 \quad \text{и} \quad \mathrm{E} \leq 3\mathrm{F} - 6.$$

Доказ: Нека је a број ивица по броју темена тј. $a = \frac{2E}{V}$ јер је свака ивица повезана са два темена и $a \geq 3$, јер најмање три ивице исходе из темена те $2\,\mathrm{E} \geq 3V$. Нека је b број ивица по страни те је $b = \frac{2E}{F}$, јер је свака ивица заједничка са две стране и $b \geq 3$, јер је свака страна ограничена са најмање три ивице те $2\,\mathrm{E} \geq 3F$.

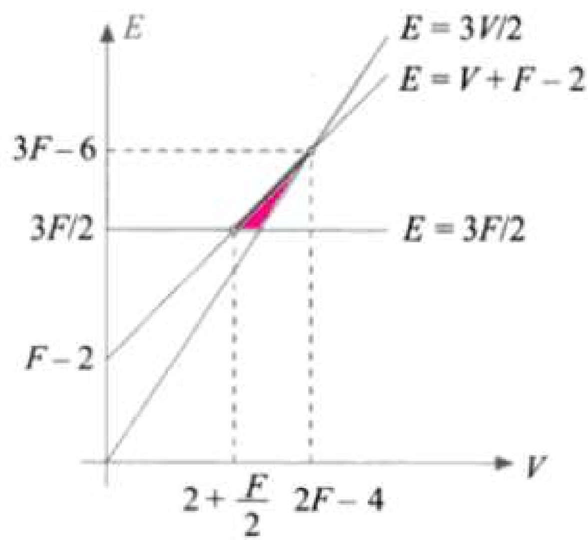
Како је по Ојлеровој формули $E = V + F - 2$, где је F број фиксних страна,

$$E \geq \frac{3V}{2} \text{ и } E \geq \frac{3F}{2}.$$

Тачка (V, E) је на правој $E = V + F - 2$. Изнад правих $E \geq \frac{3V}{2}$ и $E \geq \frac{3F}{2}$ крајње тачке су $\left(2 + \frac{F}{2}, \frac{3F}{2}\right)$ и $(2F - 4, 3F - 6)$ те следи

$$2 + \frac{F}{2} \leq V \leq 2F - 4$$

$$E \leq 3F - 6.$$



□

Слика 8.1

(Alsina & Nelsen, 2009.)

Најновија медицинска опсесија је Боди индекс масе у ознаци BMI који се дефинише као $BMI = \frac{w}{h^2}$ где је w тежина тела у килограмима, а h је висина у метрима. За одрасле особе h је фиксно тако да је BMI пропорционално са тежином, која није фиксна за многе од нас. Нормална тежина одговара у неједнакостима

$$20 \leq BMI \leq 25 \quad \text{или} \quad 20h^2 \leq w \leq 25h^2.$$

Пре него што је уведен BMI, популарна Европска препорука за тежину у оносу на h је апроксимативно $w \approx 100h - 100$ (за мушкарца високог 175cm оптимална тежина је 75kg, а за жену исте висине 65kg).

$$20 \leq \frac{100h - 100}{h^2} \leq 25$$

$$20h^2 - 100h + 100 \leq 0 \leq 25h^2 - 100h + 100$$

$$25h^2 - 100h + 100 = 25(h-2)^2 \quad \text{те је једна}$$

неједнакост задовољена

$$20h^2 - 100h + 100 = h^2 - 5h + 5$$

Пошто мора да је $h^2 - 5h + 5 \leq 0$ испитујемо график функције $y = h^2 - 5h + 5$ (парабола) $h^2 - 5h + 5 = 0$.

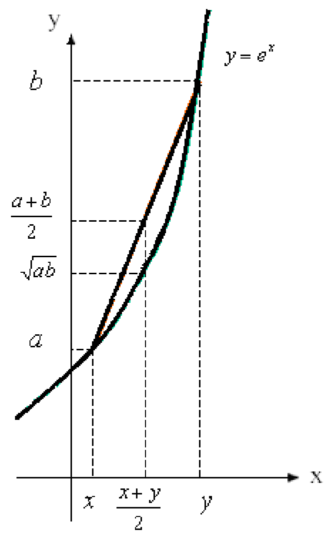
$$h_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \qquad h_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$$

$1{,}38m \approx \frac{5-\sqrt{5}}{2} \leq h \leq \frac{5+\sqrt{5}}{2} \approx 3{,}61m.$ □

Конвексна функција на графику имплицира да када се повежу било које две тачке на графику, та тетива се налази изнад графика функције.Аналогно за конкавне функције тетива је испод графика функције.

*Пример 1. (*Radmila Bulajich Manfrino and oth.,2009.*)*

Функција $f(x) = e^x$ је конвексна.



Слика 8.2

На графику експоненцијалне функције одаберемо две тачке са координатама

(x, e^x) и (y, e^x) и $a = e^x$ и $b = e^y$.

Једначина праве кроз две тачке је

$Y - b = \frac{b-a}{x_2-x_1}(X - x_1)$ тачка те праве са апсцисом $\frac{x_1+x_2}{2}$ има ординату $\frac{a+b}{2}$, са друге стране тачка са истом апсцисом, али на графику експоненцијалне функције има ординату $e^{\frac{x_1+x_2}{2}}$ што је у ствари $\sqrt{ab}$. Како је тачка на графику испод тачке на тетиви (која спаја тачке са ординатама (x_1, e^{x_1}) и (x_2, e^{x_2}) . Следи А-Г неједнакост

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

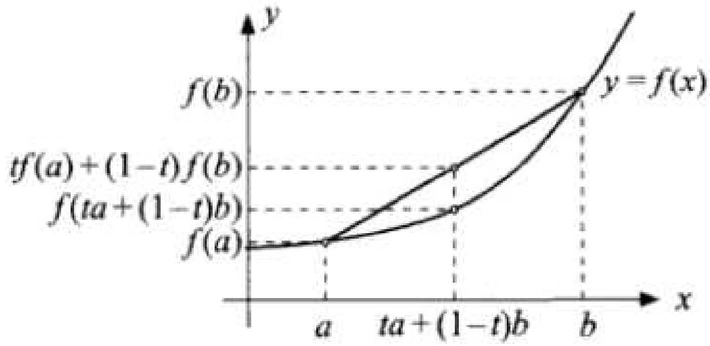
$$f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) \leq \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$$

Уопштено, конвексна функција задовољава неједнакост

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

За све a, b из интервала I , за све $0 < t < 1$.

Скуп $C = \{(x,y)|x \in I \;\; y \geq f(x)\}$ је конвексан. Тетива чије су крајње тачке $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ је изнад графика функције $y = f(x)$.



Слика 8.3

За конкаване функције важи неједнакост

$$f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b)$$

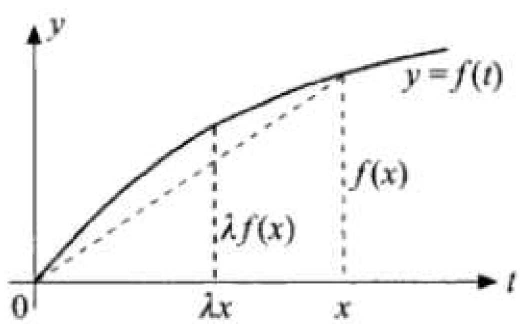
За све a, b из интервала I , за све $0 < t < 1$ скуп $C = \{(x,y)|x \in I \;\; y \leq f(x)\}$ је конкаван. Тетива чије су крајње тачке $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ се налази испод графика функције $y = f(x)$. □

Конкавност и конвексност можемо проверити утврђивањем знака другог извода ако је функција два пута диференцијабилна.

Пример 2 . (Radmila Bulajich Manfrino and oth.,2009.)

За конкавну функцију дефинисану на $[\,0, b)$ где b може бити ограничено или бесконачно са $f(0) = 0$, λ је унтервалу $[\,0,1)$, $x \geq 0$

$$\lambda\, f(x) \leq f(\lambda x)\,.$$



Слика 8.4

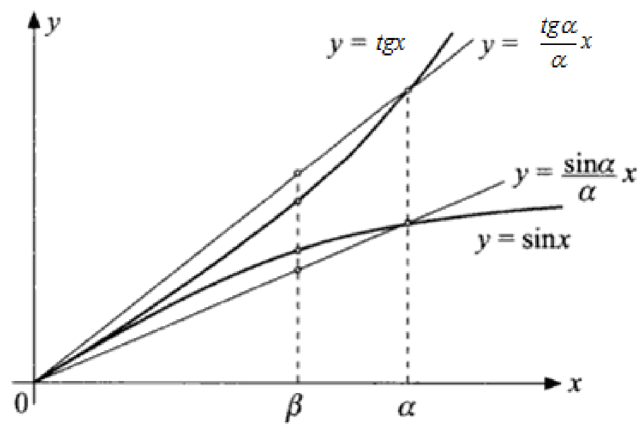
Како је $f(x) = \ln(1+x)$, конкавна на $(0, \infty)$ са $f(0) = 0$ за λ из $(0,1)$ то је

$\lambda \ln(1+x) \leq \ln(1+\lambda x)$ или $(1+x)^{\lambda} \leq 1+\lambda x$ што је еквивалент Бернулијеве неједнакости. □

Пример 3. (Alsina & Nelsen,2009.)

(**Аристарх са Самоса**) Ако је $0 < \beta < \alpha < 90^0$ тада важи

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{tg\,\alpha}{tg\beta} \ .$$



Слика 8.5

Синус је конкавна функција на интервалу $(0, 90^0)$, тетива $\frac{\sin\alpha}{\alpha}x$ на $(0,0)$, $(\alpha, \sin\alpha)$ је испод графика функције $y = \sin x$ за x из $(0, \alpha)$. Када је $x = \beta$

$$\sin\beta > \frac{\sin\alpha}{\alpha}\beta$$

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} < \frac{\sin\beta}{\beta}.$$

Аналогно, за конвексну функцију тангенс важи $tg\beta < \frac{tg\alpha}{\alpha}\beta$

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{tg\alpha}{tg\beta} \quad □$$

ЗАКЉУЧАК

Стално посматрамо свет и доносимо одлуке на основу онога што видимо. Како деца боље схватају цртеже, са којима живе од малих ногу, тако је визуелни доказ лакши за прихватање од аналитичког доказа на вишем узрасту. Лепота је у очима оног ко је види, у случају неједнакости елеганција начина на који долазимо до њих је оно што их чини привлачним.

Сматра се да је већина људи визуелног типа, док је нажалост већина материјала за учење махом вербалног типа (са јако мало слика и илустрација). Погледајте већину уџбеника и упоредите их са западним уџбеницима. На западу они су углавном визуелни и изгледају као сликовнице за децу, а код нас су махом вербални, гомиле - брда речи. Најгоре је што су те речи набацане тако да их је веома тешко разумети и ухватити шири- дубљи смисао. Неретко наићи ћете на теоретско предавање које заузима и целе стране уџбеника. Када дете стигне на крај, већ је заборавило почетак.

У току мојих предавања ,ако су деца визуелног типа, од њих тражим да представе вербални материјал у облику цртаног алгоритма помоћу кога ће лакше запамтити испредавано градиво . Ако су деца вербалног типа, од њих тражим да опишу резиме визуелног материјала својим сопственим речима. Такве деце је увек у малом броју, неретко се деси да их и нема.

Мастер рад има примену у основној, а нарочито у средњој школи јер коришћење слике у доказу или слика као доказ је лакше за прихватање већини ученика. Како су слике у боји то је рад атрактивнији за евентуалну помоћ у схватању доказа неједнакости, за узраст основаца и средњошколских ђака.

Литература

[1.] Andreescu, T., Mushkarov, 2006., O.,Stoyanov, L., Geometric Problems on Maxima and Minima, Birkhäuser Basel-Boston-Berlin.

[2.] Арсланагић, Ш., 2000., Како доказивати алгебарске неједнакости , Наша школа , Сарајево.

[3.] Arslanagić, Š., 1998, *Neke nejednakosti u vezi trougla*, Triangle 2,4, Sarajevo.

[4.] Bottema, O., Đorđević R.Ž., Janić R.R., Mitrinović, D.S.,Vasić, P.M.,1969., Geometric inequalities, Wolters-Noordhoff off publishing Groningen, The Netherlands.

[5.] Bulajich,Radmila Manfrino, José Antonio Gómez Ortega, Rogelio Valdez Delgado, 2009., Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach, Mexico.

[6.] Z. Кurnік,2001., *Доказ*, Matematiка i škola.

[7.] Митриновић, С. Драгослав, 1965., НЕЈЕДНАКОСТИ, Грађевинска књига, Београд.

[8.] Mitrinović, S. Dragoslav, 1970., Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New Yorк.

[9.] Nelsen, R.B., 1993., *Proofs without Words* I, The Mathematical Association of America, Washington.

[10.] Nelsen, R.B., 2000., *Proofs without Words* II, The Mathematical Association of America, Washington.

[11.] Claudi Alsina & R. B. Nelsen, 2009., When Less Is More , The Mathematical Association of America, Washington.