Математички факултет
Универзитет у Београду

# Електронске лекције из диференцијалног рачуна креиране коришћењем програмског пакета ГеоГебра

- мастер рад -

Јована Јездимировић

Београд,
2013. год.

Предговор

Диференцијални рачун је област математичке анализе која се бави изучавањем и применом извода, а чији корени досежу до 17-ог века и времена познатих математичара Њутна и Лајбница. Како је примена диференцијалног рачуна током времена експоненцијално расла, тако је и нова теорија заинтересовала многе научнике и математичаре попут: Ојлера, Лиувила, Римана, Фуријеа, Абела и многих других који су ову област додатно развили и популаризовали. До почетка 21-ог века, откривене су многе физичке манифестације које се лако могу моделовати помоћу диференцијалног рачуна. Овако засновани модели показали су се корисним у: физици, хемији, медицини, механици, електротехници, финансијама и многим другим наукама, што сведочи о значају поменуте теорије.

У овом раду се настојало да се разни математички концепти из диференцијалног рачуна приближе и објасне на један нов начин, као и да се прикаже његова примена у различитим природним наукама. Састоји из седам поглавља, реализован је кроз електронске лекције и организован на следећи начин.

**Прво поглавље**, „Функције једне реалне променљиве”, садржи основне појмове математичке анализе који се користе при: дефинисању, одређивању особина и скицирању графика основних елементарних функција. Сваку лекцију, у циљу боље методичке продуктивности, прате одговарајуће анимације креиране у ГеоГебри. На крају поглавља су приказани примери карактеристичних функција датих у параметарском облику и поларним координатама.

**Друго поглавље**, „Низови”, се бави дефинисањем и особинама: граничне вредности низа, Кошијевим и монотоним низовима. На крају сваке лекције се налазе задаци који прате и објашњавају претходно изложену теорију. Као прилог је дат кратак историјски увод.

**Треће поглавље**, „Гранична вредност функције”, се бави дефинисањем и особинама граничне вредности функције кроз теорију, задатке и пратеће анимације у ГеоГебри. У прилогу су дате и особине асимптота графика функције, смене променљивих и кратак историјски увод.

**У четвртом поглављу**, „Непрекидност функције”, су приказани примери прекидних и непрекидних функција и дефинисани појмови везани за ову област. Акценат је на примени приказане теорије кроз теоријски увод и анимацију нумеричке методе половљења интервала.

**Пето поглавље**, „Изводи”, је посвећено визуелизацији појмова: дефиниције и геометријског тумачења извода, диференцијабилне функције, диференцијала и извода вишег реда. Приказано је неколико модела из физике и хемије који илуструју практичну употребу наведене теорије. Као прилог је дата таблица најчешће коришћених извода.

**У шестом поглављу**, ,,Примена извода", приказан је модел из земљотресног инжењерства који илуструје практичну употребу наведене теорије као и илустрације Теорема о међувредности, Тејлорове и Маклоренове формуле, Лопиталовог правила и бројних графика функција.

**Седмо поглавље**, ,,ГеоГебра", акцентује практичну примену овог програмског пакета у визуелизацији разних математичких концепата и апстрактних појмова као и значај за употребу у настави.

Пријатна ми је дужност да се овом приликом захвалим свом ментору доц. др Мирославу Марићу, на корисним сугестијама и примедбама, као и члановима комисије: проф. др Александру Такачију на уступљеним материјалима и академику проф. др Миодрагу Матељевићу на сарадњи.

Јована Јездимировић

У Београду, 2013. год.

# Садржај

# 1 Функције једне реалне промењиве

## 1.1 Основни појмови

Функције једне реалне промењиве, чешће: функције, су оне функције чији су и домен и кодомен подскупови скупа реалних бројева $\mathbf{R}$.
Запис $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ означава функцију која пресликава скуп $\mathbf{A}$ у скуп $\mathbf{B}$, док $f(x)$ означава вредност из кодомена $\mathbf{B}$, која је додељена вредности $x$ из скупа $\mathbf{A}$.
За величину $x \in \mathbf{A}$ кажемо да је независно промењива (или оригинал), а за величину $y = f(x) \in \mathbf{B}$ кажемо да је зависно промењива (или слика).
Функција је задата одређивањем уређене тројке $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, f)$.
Функција је најчешће дата аналитичким изразом $y = f(x)$, или таблично.

**Дефиниција** 1. **График функције** $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ је подскуп $G_f$ скупа $R^2 : R \times R$ дат са: $G_f = \{(x, f(x)) | x \in \mathbf{A}\}$.
График функције $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ се назива и **крива** задата функцијом $f$.

**Дефиниција** 2. За функцију $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ кажемо да је:
а) **инјекција** ако је:

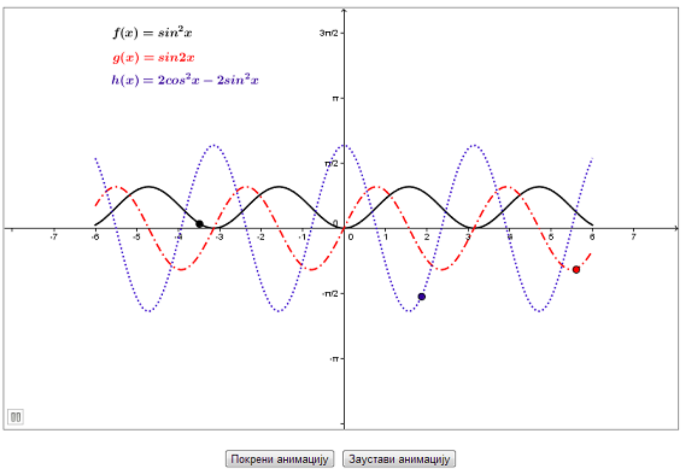
$$x_1, x_2 \in \mathbf{A} \wedge f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
$$x_1, x_2 \in \mathbf{A} \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

б) **сурјекција** ако је:

$$(\forall y \in \mathbf{B})(\exists x \in \mathbf{A}) \qquad y = f(x)$$

в) **бијекција** ако је: функција $f$ инјективна и сурјективна.

Само се у случају бијективне функције $f$ може дефинисати њена инверзна функција $f^{-1}$ (што се може видети у [7]).




Слика 1.1. *Анимација функција једне реалне промењиве*

## 1.2 Особине функције

За функције $f, g : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ важи:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in \mathbf{A},$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), x \in \mathbf{A},$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in \mathbf{A},$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \mathbf{A}, g(x) \neq 0$$

Производ $\lambda f$, где је $\lambda$ реалан број, је дефинисан са $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Испитати функцију значи одредити њене особине, а на основу истих се може нацртати и крива. Неке од важних особина функције су:

1) **Парност/непарност:**

Скуп $\mathbf{A} \subset \mathbf{R}$ је симетричан (према координатном почетку) ако за све $x \in \mathbf{A}$ важи да и $-x \in \mathbf{A}$. Функција $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ , где је скуп $\mathbf{A}$ симетричан, је **парна** ако важи: $(\forall x \in \mathbf{A}) f(-x) = f(x)$. Геометријски, то значи да је график парне функције осно симетричан у односу на $y$-осу.
Функција $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, где је скуп $\mathbf{A}$ симетричан, је **непарна** ако важи: $(\forall x \in \mathbf{A}) f(-x) = -f(x)$. Геометријски, то значи да је график непарне функције централно симетричан у односу на координатни почетак.
Функција може бити или **парна**, или **непарна** или **ни парна ни непарна**.

2) **Ограниченост:**

Функција $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ је **ограничена** на скупу $\mathbf{X} \subset \mathbf{A}$ ако постоји константа $C > 0$ са особином $(\forall x \in \mathbf{A}) |f(x)| \leq C$.

3) **Периодичност:**

Функција $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ је **периодична** на $\mathbf{A}$ ако постоји реалан број $\tau \neq 0$ са особином: $(\forall x \in \mathbf{A})\ x + \tau \in \mathbf{A},\ f(x+\tau) = f(x)$.
Број $\tau$ се тада назива период функције $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.
Основни период функције $f$ је најмањи позитивни **период** те функције (ако постоји).

4) **Монотоност:**

Функција $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$:

а) **Монотоно расте** (респективно не опада) на $\mathbf{A}$ ако за сваки пар $(x_1, x_2) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
(респективно $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$).

б) **Монотоно опада** (респективно не расте) на $\mathbf{A}$ ако за сваки пар $(x_1, x_2) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
(респективно $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$).

5) **Екстреми:**

Функција $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ има:

а) **Локални максимум** (респективно строги локални максимум) у тачки $x_0 \in \mathbf{A}$ ако постоји број $\epsilon > 0$ са особином да важи

$$x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap \mathbf{A} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

(респективно $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap \mathbf{A} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$).

б) **Локални минимум** (респективно строги локални минимум) у тачки $x_0 \in A$ ако постоји број $\epsilon > 0$ са особином да важи

$$x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap \mathbf{A} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

(респективно $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap \mathbf{A} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$).

в) **Глобални максимум** (респективно глобални минимум) у тачки $x_0 \in \mathbf{A}$ ако је $f(x_0)$ највећа (респективно најмања) вредност функције $f$ на $\mathbf{A}$.

Осим наведених особина, у испитивању функција, наводе се још и особине:

1) **конвексност/конкавност функције**,
2) **превојне тачке** и
3) **асимптоте**

које ће у наставку бити детаљно објашњене.

## 1.3 Елементарне функције

Основне елементарне функције су:

1) **Степена функција:**

Степена функција је функција облика $f(x) = x^n, x \in \mathbf{R}$, за фиксно $n \in \mathbf{N}$ (за $n = 0$ функција је константа). Нека је $n$ паран број. Тада функција $f$ има минимум у тачки $x = 0$, опада на интервалу $(-\infty, 0]$, расте на интервалу $[0, \infty)$ и парна је. Нека је $n$ непаран број. Тада функција $f$ расте на скупу $\mathbf{R}$ и непарна је.

2) **Полиноми:**

Функција $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ дефинисана са $f(x) = P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, $(x \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N})$ где су $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, ако је $a_n \neq 0$ се назива полином степена $n$. Константа је полином нултог степена. Бројеви $a_0, a_1, \ldots a_n$ су коефицијенти полинома $P_n(x)$. Нула полинома $P_n(x)$ је број $x_0 \in \mathbf{C}$ такав да је $P_n(x_0) = 0$. График полинома $P_1(x) = a_0 + a_1x, a_1 \neq 0, a_0, a_1, x \in \mathbf{R}$ је права, а график полинома $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, a_2 \neq 0, a_0, a_1, a_2, x \in \mathbf{R}$ је парабола.

**Теорема 1.** *(Основни став алгебре) Сваки полином степена $n \in \mathbf{N}$, има тачно n нула, међу којима може бити и једнаких.*

3) **Рационалне функције:**

Количник полинома $P_n$ и $Q_m$ , $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ се назива рационална функција. Ако је $n < m$ кажемо да је $R(x)$ права рационалана функција. Свака рационална функција се може изразити као збир једног полинома и једне праве рационалне функције.

4) **Експоненцијална функција:**

Експоненцијална функција је функција облика $f(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$, $a > 0$ и $a \neq 1$. Функција $y = a^x$ $(a > 0$ и $a \neq 1)$ монотоно опада за $a < 1$ и монотоно расте за $a > 1$. Функција $y = a^x$ је позитивна за све $x \in \mathbf{R}$ (више примера у [6]).

5) **Логаритамска функција:**

Логаритамска функција је функција облика $f(x) = log_ax, x \in \mathbf{R}_+$, $a > 0$ и $a \neq 1$. Функција $f(x) = log_ax$, где је $x > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$ је инверзна функција за функцију $y = a^x$ јер је $a^{log_ax} = x$. Функција $f(x) = log_ax$ монотоно опада за $0 < a < 1$ и монотоно расте за $a > 1$ (више примера у [6]).

6) **Тригонометријске функције:**

$$f(x) = sinx, x \in \mathbf{R}$$

$$f(x) = cosx, x \in \mathbf{R}$$

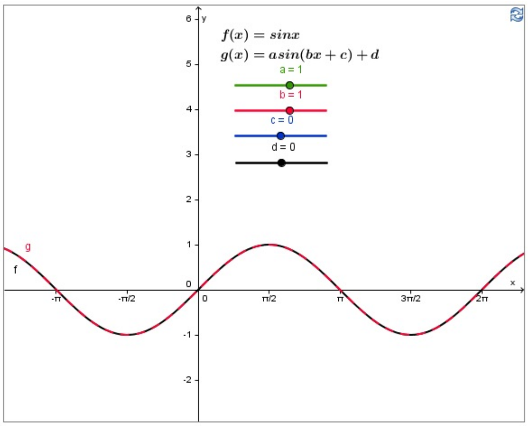
$$f(x) = tgx, x \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} | k \in \mathbf{Z} \right\}$$
$$f(x) = ctgx, x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbf{Z}\}.$$

7) **Инверзне тригонометријске функције (циклометријске или аркус функције):**

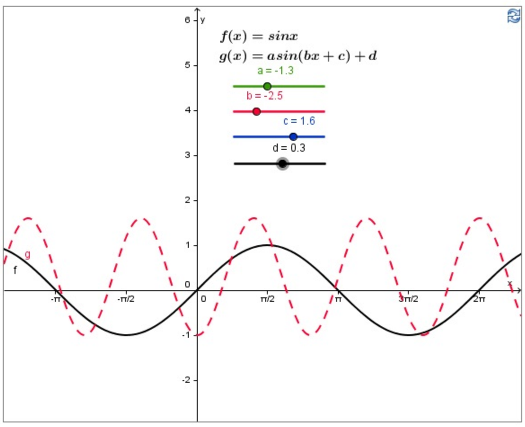
$$f(x) = arcsinx, x \in [-1, 1]$$
$$f(x) = arccosx, x \in [-1, 1]$$
$$f(x) = arctgx, x \in \mathbf{R}$$
$$f(x) = arcctgx, x \in \mathbf{R}.$$

Елементарне функције се добијају применом коначног броја алгебарских операција: сабирања, одузимања, множења и дељења, као и коначно много операција композиције, на основне елементарне функције.

**Пример** 1. *Интерактивна промена графика функције*




Слика 1.2. *График функције sinx*




Слика 1.3. *Трансформација графика функције sinx са више параметара*

## 1.4 Функција дата у параметарском облику

Функција $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ је дата у **параметарском облику** ако је

$$x = \phi(t), y = \psi(t), t \in (\alpha, \beta)$$

где је $\phi, \psi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$, при чему је $\phi$ строго монотона функција.
Важи да је $a = \phi(\alpha)$ и $b = \phi(\beta)$.
Приметимо да су $x$ и $y$ повезани преко параметра $t$.

**Пример** 2.

а) Параметарска једначина **циклоиде**:

$$x = a(t - sint), y = a(1 - cost), \qquad a > 0, t \in \mathbf{R},$$

б) Параметарска једначина **астроиде**:

$$x = acos^3t, y = asin^3t, \qquad a > 0, t \in \mathbf{R}.$$

## 1.5 Функција дата у поларним координатама

Нека је у Декартовом правоуглом систему са $O$ означен координатни почетак и нека је $A(x, y) \neq O(0, 0)$ тачка $xy$ равни.
Означимо са $\rho$ растојање тачке $A$ од координатног почетка $O$, а са $\phi$ угао између $OA$ и позитивног смера $x$-осе.
Тако одређени бројеви $\rho$ и $\phi$ се називају **поларне координате** тачке $A$.

Веза између поларних и Декартових координата је дата релацијама:

$$x = \rho cos\phi \qquad y = \rho sin\phi.$$

Дакле, тачка $A$ у Декартовом координатном систему је одређена како правоуглим координатама $x$ и $y$ тако и поларним координатама $\rho$ и $\phi$.

**Пример** 3**.**

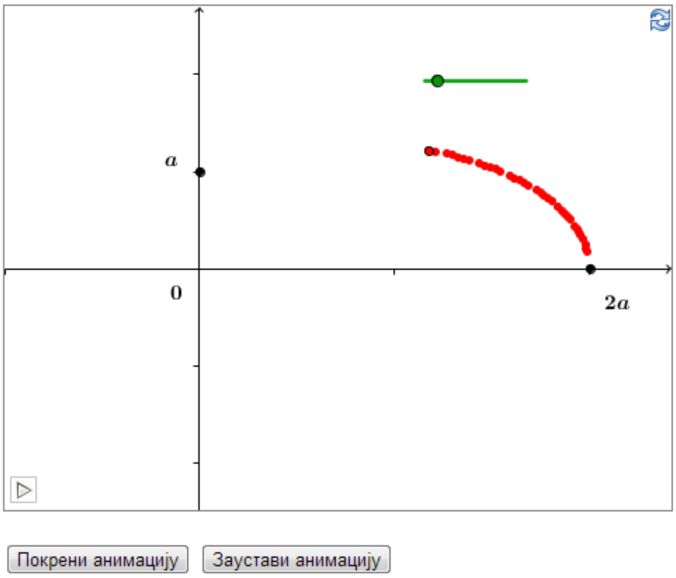
а) Поларне координате **Бернулијеве лемнискате**:

$$\rho^2 = a^2cos2\phi,$$

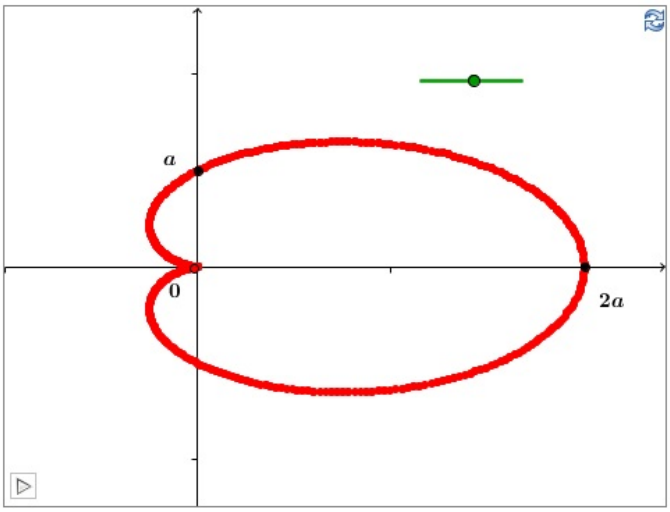
б) Поларне координате **кардиоиде**:

$$\rho = a(1 + cos\phi).$$

**Пример** 4. *Анимација графика кардиоиде*



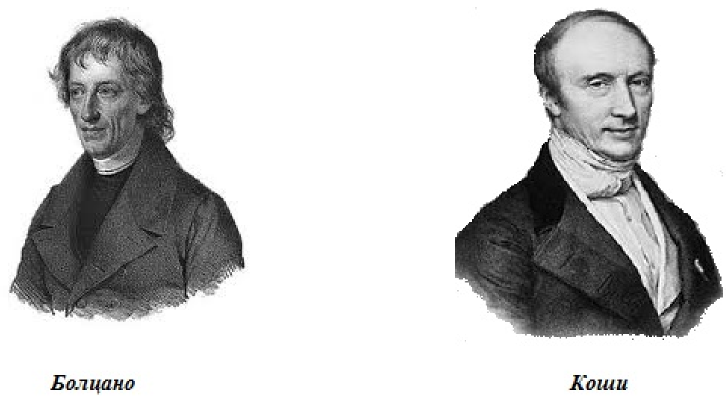

Слика 1.4 *Анимација графика кардиоиде*




Слика 1.5 *Крај анимације графика кардиоиде*

# 2 Низови

Чешки математичар и теолог Болцано[1] и познати француски математичар Огистен Коши[2] су скоро истовремено, двадесетих година 19-ог века, понудили концепт граничне вредности низа.
Иако су, већ поменути концепти, били различити водили су ка истом циљу.




Слика 2.1. *Болцано и Коши*

Болцанова дефиниција:

***,,Ако су*** $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ ***такви да за било коју дату малу вредност разлика између*** $a_n$ ***и*** $a_{n+r}$ ***постаје и остаје мања од дате мале вредности како*** $n$ ***расте, постоји тачно једна вредност којој се дати низ приближава."***

Кошијева дефиниција:

***,,Када се узастопне вредности променљиве приближавају неограничено одређеној вредности, да би се на крају разликовале од ње произвољно мало, та одређена вредност се назива граничном вредношћу осталих."***

Болцанова дефиниција се називала **унутрашњи критеријум конвергенције**, а Кошијева **спољашњи критеријум конвергенције** (као што се детаљно може видети у [3]).

[1] Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848), чешки математичар
[2] Augustin Louis Cauchy (1789-1857), француски математичар

## 2.1 Дефиниција граничне вредности низа

**Дефиниција** 3. **Низ** $a$ је функција чији је домен скуп природних бројева, а кодомен скуп реалних бројева, односно: $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$.
Записујемо: $a_n := a(n)$, $n \in \mathbf{N}$ и $a = (a_n)_{,n\in\mathbf{N}}$. Број $a_n$ се зове **општи члан** низа $a$.

**Пример** 5. *Испитати неколико првих чланова низа датих општим члановима:*

а) $a_n = \frac{1}{n}$
б) $b_n = (-1)^n$
в) $c_n = \sin n$

**Решење.**

а) $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \ldots$
б) $b_1 = -1, b_2 = 2, b_3 = -3, \ldots$
в) $c_1 = \sin 1, c_2 = \sin 2, c_3 = \sin 3, \ldots$

**Дефиниција** 5. Реалан број $L$ је **гранична вредност** низа $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ако важи:

$$(\forall \epsilon > 0) \qquad (\exists n_o \in \mathbf{N}) \qquad (\forall n \in \mathbf{N}) \qquad n > n_0 \qquad \Rightarrow \qquad |a_n - L| < \epsilon.$$

Ако је $L$ гранична вредност (граница) низа $(a_n)_{,n\in\mathbf{N}}$ тада кажемо да низ $(a_n)_{,n\in\mathbf{N}}$ **конвергира** ка броју $L$, односно:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

За низ који не конвергира кажемо да **дивергира**.
Гранична вредност је јединствена.

**Дефиниција** 6. Низ $(a_n)_{,n\in\mathbf{N}}$:

а) **Дивергира** у плус бесконачно, у ознаци:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

ако за сваки реалан број $M > 0$ постоји број $n_0 = n_0(M) \in \mathbf{N}$ такав да за свако $n > n_0$ важи $a_n > M$.

б) **Дивергира** у минус бесконачно, у ознаци:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

ако за сваки реалан број $M > 0$ постоји број $n_0 = n_0(M) \in \mathbf{N}$ такав да за свако $n > n_0$ важи $a_n < -M$.

**Пример** 6.

а) $a_n = n$ дивергира у плус бесконачно
б) $a_n = q^n, q > 1$ дивергира у плус бесконачно
в) $a_n = -n^2$ дивергира у минус бесконачно
г) $a_n = (-1)^n$ јесте дивергентан (тј. није конвергентан), али не дивергира ни у плус бесконачно ни у минус бесконачно.

**Дефиниција** 7. Низ је **ограничен** ако постоји позитиван реалан број $M$ такав да за свако $n \in \mathbf{N}$ важи $|a_n| \leq M$, тј. важи $a_n \in [-M, M]$.

Очигледно је да низ који дивергира не може бити ограничен.

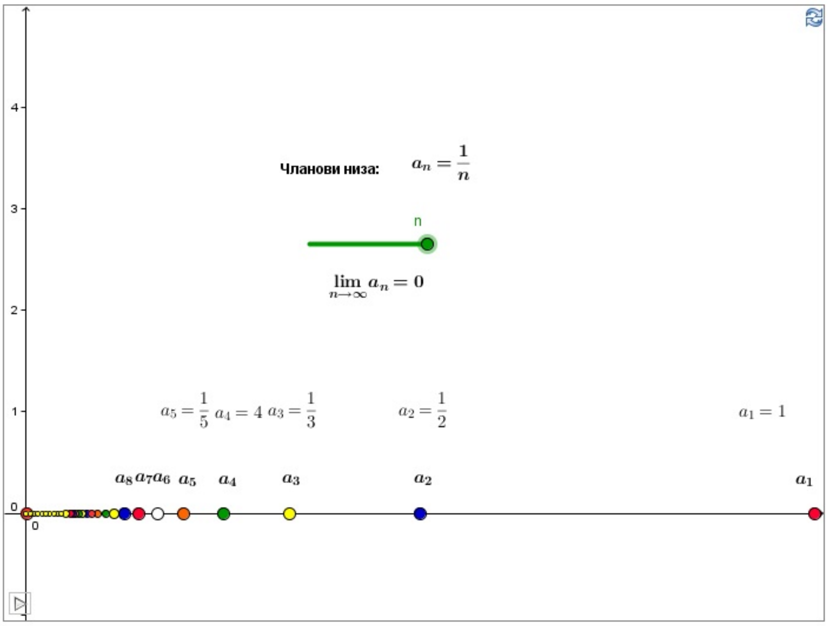
**Теорема 2.** *Сваки конвергентан низ је ограничен.*

*Доказ.* Нека је низ $a = (a_n)_{,n \in \mathbf{N}}$ конвергентан и важи $lima_n = L$, када $n \to \infty$. Тада за свако $\epsilon > 0$ постоји $n_0(\epsilon) \in \mathbf{N}$ тако да је $a_n \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$, за $n > n_0(\epsilon)$. Нека је $\epsilon$ утврђен позитиван број и $M = max\{|L| + \epsilon, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}(\epsilon)|\}$. Тада важи $a_n \in [M, -M]$ за све $n \in \mathbf{N}$. □

**Пример** 7.

а) Конвергентан низ са општим чланом $a_n = \frac{1}{n}$ јесте ограничен тј. $|a_n| \leq 1$
б) Низ са општим чланом $b_n = (-1)^n$ , јесте ограничен тј. $|b_n| \leq 1$ али није конвергентан
в) Низ са општим чланом $c_n = n$, није ограничен и није конвергентан.

**Пример** 8. *Конвергентан низ*




Слика 2.2. *Конвергентан низ* $a_n = \frac{1}{n}$

## 2.2 Кошијеви низови

**Дефиниција** 8. Низ је **Кошијев** ако задовољава следећи услов:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall m \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}) m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon.$$

Услов се може заменити еквивалентним условом:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(\forall p \in \mathbf{N}) m, n > n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \epsilon.$$

**Теорема 3.** *Потребан и довољан услов да низ реалних бројева конвергира је да је Кошијев.*

**Пример** 9. *Испитати да ли су следећи низови Кошијеви:*

а) $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^n}$;

б) $b_n = \frac{\sin 1}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2}{2 \cdot 2} + \ldots + \frac{\sin n}{n \cdot (n+1)}$;

в) $c_n = \frac{\cos 1!}{1} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 2} + \ldots + \frac{cosn!}{n^2}$;

г) $d_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n}$.

**Решење.**

а) $|a_{n+p} - a_n| = |1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} - 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \ldots - \frac{1}{3^n}| =$

$|\frac{1}{3^n} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}}| = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3p}}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{1}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}$

$|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{3n} < \epsilon$

Дакле, низ $a = (a_n)_{,n \in \mathbf{N}}$ је Кошијев, па је и конвергентан.

б) За произвољне $n, p \in \mathbf{N}$ имамо:

$|b_{n+p} - b_n| = |\frac{\sin 1}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2}{2 \cdot 2} + \ldots + \frac{\sin n}{n \cdot (n+1)} + \frac{\sin(n+1)}{(n+1) \cdot (n+2)} + \frac{\sin(n+p)}{(n+p) \cdot (n+p+1)} -$

$\frac{\sin 1}{1 \cdot 2} - \frac{\sin 2}{2 \cdot 2} - \ldots - \frac{\sin n}{n \cdot (n+1)}| \leq \frac{|\sin(n+1)|}{(n+1) \cdot (n+2)} + \frac{|\sin(n+2)|}{(n+2) \cdot (n+3)} + \frac{|\sin(n+p)|}{(n+p) \cdot (n+p+1)}$

$\leq \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+3)} + \ldots +$

$\frac{1}{(n+p)} - \frac{1}{(n+p+1)} = \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+p+1)} < \frac{1}{(n+1)}$.

Дакле, низ $b = (b_n)_{,n \in \mathbf{N}}$ је Кошијев, па је и конвергентан.

в) Низ $c = (c_n)_{,n\in\mathbf{N}}$ је Кошијев, јер за дато $\epsilon$ важи:

$|c_{n+p} - c_n| \leq \frac{|\cos(n+1)!|}{(n+1)^2} + \frac{|\cos(n+2)!|}{(n+2)^2} + \frac{|\cos(n+p)!|}{(n+p)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} <$

$\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+p)} < \frac{1}{n} < \epsilon.$

г) Низ није Кошијев, па треба показати да постоји $\epsilon > 0$ такво да за свако

$n_0 \in \mathbf{N}$ постоје $n > n_0$ и $p \in \mathbf{N}$ такви да је $|d_{n+p} - d_n| > 0$.

Узмимо $\epsilon = \frac{1}{4}$.

Из: $|d_{n+p} - d_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} + \geq \frac{p}{n+p}$

следи да за $n = p$ имамо $|d_{n+p} - d_n| = |d_{2n} - d_n| \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, за свако $n \in \mathbf{N}$.

Према томе, хармонијски низ $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ низ није Кошијев и зато не

конвергира.

## 2.3 Особине граничне вредности низа

**Теорема 4.** *Ако су* $(a_n)_{,n\in\mathbf{N}}$ *и* $(b_n)_{,n\in\mathbf{N}}$ *конвергентни низови и ако постоји* $n_0 \in \mathbf{N}$ *са особином* $(\forall n \in \mathbf{N}) n > n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n$ *тада важи*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq b_n.$$

**Теорема 5.** *Ако за низове* $(a_n)_{,n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{,n\in\mathbf{N}}$ *и* $(c_n)_{,n\in\mathbf{N}}$ *постоји број* $n_0 \in \mathbf{N}$ *са особином* $n > n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n$, *тада важи импликација*

$$(\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L) \Rightarrow (\lim_{n\to\infty} b_n = L).$$

**Теорема 6.** *Ако низови* $(a_n)_{,n\in\mathbf{N}}$ *и* $(b_n)_{,n\in\mathbf{N}}$ *конвергирају тада важи:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) &= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.
\end{aligned}$$

**Теорема 7.** *Ако је* $(a_n)_{,n\in\mathbf{N}}$ *конвергентан низ, тада важе следеће једнакости:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(A \cdot a_n) &= A \cdot \lim_{n\to\infty} a_n, \qquad A = const \\
\lim_{n\to\infty}(a_n)^k &= (\lim_{n\to\infty} a_n)^k, \qquad k \in \mathbf{N} \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} &= \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}, \qquad k \in \mathbf{N}
\end{aligned}$$

*при чему се ако је* $k$ *паран број мора додатно претпоставити да су чланови низа* $(a_n)_{,n\in\mathbf{N}}$ *ненегативни.*

**Пример** 10**.** *Одредити граничну вредност:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 2n^2 + 4}{n^5 + n + 4}.$$

**Решење.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5 + 2n^2 + 4}{n^5 + n + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5(1 + \frac{2}{n^3} + \frac{4}{n^5})}{n^5(1 + \frac{1}{n^4} + \frac{4}{n^5})} = 1.$$

**Пример** 11**.** *Одредити граничну вредност:*

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n(\frac{1}{3})^n = 0.$$

**Решење.**

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n(\frac{1}{3^n}) = 0.$$

**Пример** 12. *Одредити граничну вредност:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n+8}.$$

**Решење.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(1+\frac{2}{\sqrt{n}})}{n(1+\frac{8}{n})} = 0.$$

**Пример** 13. *Одредити граничну вредност:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt[n]{2}-1}{n-2}.$$

**Решење.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt[n]{2}-1}{n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{\sqrt[n]{2}}{n}-\frac{1}{n})}{n(1-\frac{2}{n})} = 1.$$

**Пример** 14. *Одредити граничну вредност:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^2-1}{n^3-2}.$$

**Решење.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^2-1}{n^3-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4(2+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^4})}{n^3(1-\frac{2}{n^3})} = +\infty.$$

## 2.4 Монотони низови

**Дефиниција** 9. Низ $(a_n)_{,n\in\mathbf{N}}$ је:

а) **монотоно растући** (респективно: монотоно неопадајући)
ако за свако $n \in \mathbf{N}$ важи $a_n < a_{n+1}$ (респективно ако је $a_n \leq a_{n+1}$)

б) **монотоно опадајући** (респективно: монотоно нерастући)
ако за свако $n \in \mathbf{N}$ важи $a_n > a_{n+1}$ (респективно ако је $a_n \geq a_{n+1}$).

Низ је **монотон** ако је монотоно неопадајући или монотоно нерастући.

**Теорема 8.** *Монотоно неопадајући (респективно нерастући) низ ограничен са горње (респективно са доње) стране је конвергентан.*

**Пример** 15. *Показати да је низ са општим чланом* $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$:

а) растући
б) ограничен са горње стране.

**Решење.**

а) Да би се показало да је низ $(a_n)_{,n\in\mathbf{N}}$ растући упоређују се $a_n$ и $a_{n+1}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n+1})^n} = (\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}})^n \cdot \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2})^n} \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

На основу Бернулијеве неједнакости $(1+h)^n \geq 1 + nh, h > -1, n \in \mathbf{N}$ даље важи:

$$(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2})^n = (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^n \geq 1 - \frac{n}{(n+1)^2}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{1-\frac{n}{(n+1)^2}} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3+3n^2+3n+2} < 1$$

б) На основу биномне формуле

$$(a+b)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad je:$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{n(n-1)}{2!n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n(n-1))}{n!n^n} <$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} <$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^(n-1)} = 1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} < 1+2 = 3.$$

На основу претходне теореме следи да овај низ конвергира и његова граница је ирационалан број $e = 2,71828\ldots$ познат као Ојлеров број и Неперова констата.

# 3 Гранична вредност функције

Огистен Коши, познати француски математичар, је након увођења концепта и дефиниције граничне вредности низа бројева једноставно прешао и на дефинисање граничне вредности функције.
**Граничну вредност функције** у некој тачки је посматрао као граничну вредност свих низова $(x_n)$, где је $(x_n)$ произвољан низ који тежи $x$.

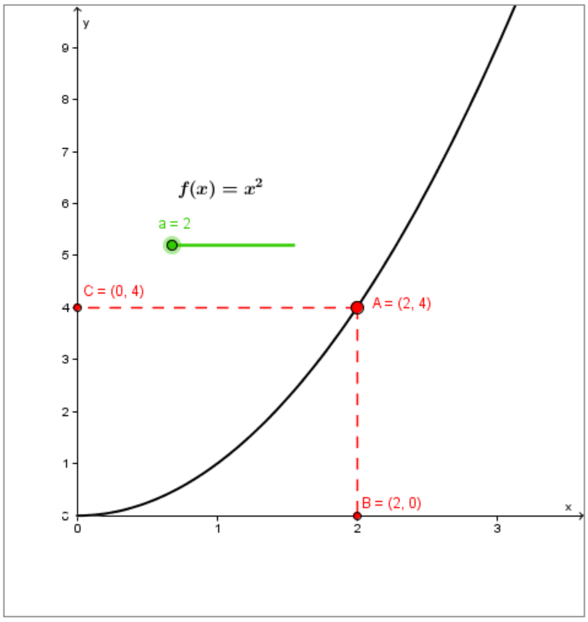
Да бисмо одредили вредност функције $f$ када је назависно променљива $x$ „врло близу"тачке $a$, а и при том уочили одређене законитости посматрамо следећи пример (функција $f$ не мора бити дефинисана у тачки $a$):

Нека је дата функција $f(x) = x^2$. Нека се $x$ „приближава" тачки 2 тако да узима вредности из следећих интервала око тачке 2:

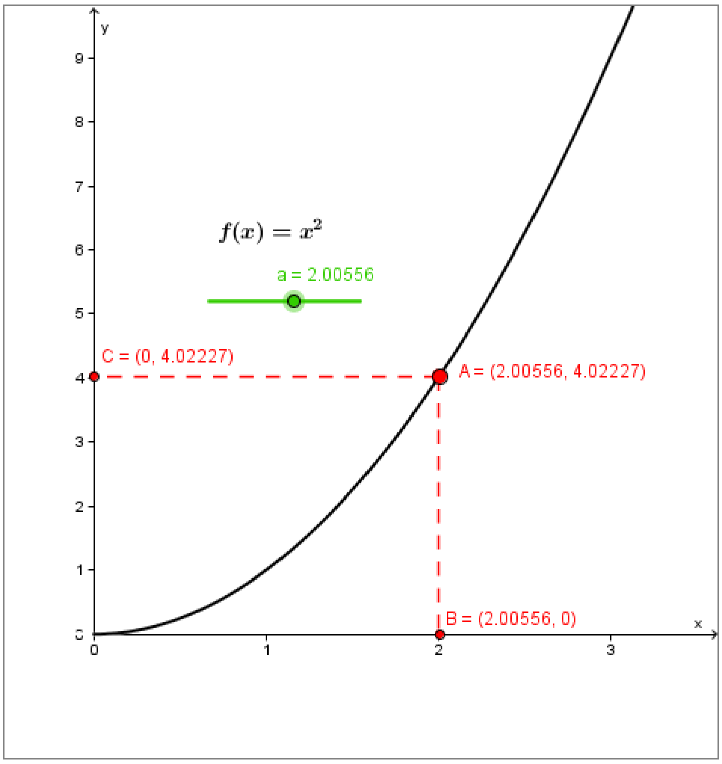
$(2 - 0.1, 2 + 0.1), (2 - 0.01, 2 + 0.01), (2 - 0.001, 2 + 0.001),$
$(2 - 0.0001, 2 + 0.0001), (2 - 0.00001, 2 + 0.00001).$

Тада важе следеће импликације:

Ако је $1.9 < x < 2.1$ тада је $3.61 < f(x) < 4.41$.
Ако је $1.99 < x < 2.01$ тада је $3.96 < f(x) < 4.04$.
Ако је $1.999 < x < 2.001$ тада је $3.996 < f(x) < 4.004$.
Ако је $1.9999 < x < 2.0001$ тада је $3.9996 < f(x) < 4.0004$.
Ако је $1.99999 < x < 2.00001$ тада је $3.99996 < f(x) < 4.00004$.




Слика 3.1. *Гранична вредност функције*




Слика 3.2. *Анимација граничне вредности функције*

Ако уведемо ознаке $\delta$ и $\epsilon$ за ,,мале" позитивне бројеве, тада претходна тврђења можемо записати у облику:

Ако је $2 - \delta < x < 2 + \delta$, тада је $4 - \epsilon < f(x) < 4 + \epsilon$.

На пример, за $\epsilon = 0.04$ је $\delta = 0.01$. Односно:
Ако је $x \in (2 - \delta, 2 + \delta)$, тада је $f(x) \in (4 - \epsilon, 4 + \epsilon)$.

Дакле, можемо рећи да када се $x$ ,,приближава" броју 2, $f(x)$ се приближава броју 4.

## 3.1 Дефиниција граничне вредности функције

**Дефиниција** 10. Нека скуп $\mathbf{A} \subset \mathbf{R}$ има бесконачно много чланова. Тачка $x_0$ је **тачка нагомилавања** скупа $\mathbf{A}$, ако за свако $\epsilon > 0$ интервал $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ садржи бар један елемент из скупа $\mathbf{A}$ различит од $x_0$.

**Пример** 16**.**

а) Тачка нагомилавања скупа $A = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$је 0.
б) Свака тачка затвореног интервала $[a, b]$ је и његова тачка нагомилавања.
в) Свака тачка отвореног интервала $(a, b)$ је и његова тачка нагомилавања, али и тачке $a$ и $b$.

**Дефиниција** 11**.** Нека је $x_0 \in \mathbf{R}$ тачка нагомилавања домена $\mathbf{A}$ функције $f : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$. Број $L$ је **гранична вредност** функције $f$ у тачки $x_0$, ако важи:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) \qquad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) = L| < \epsilon$$

Тада пишемо:

$$\lim_{x \to x_0, x \in \mathbf{A}} f(x) = L$$

или:

$$f(x) \to L \qquad x \to x_0 \qquad x \in \mathbf{A}.$$

Напомена: Тачка $x_0$ не мора припадати дефиниционом скупу $\mathbf{A}$ функције $f$, али мора бити тачка нагомилавања скупа $\mathbf{A}$.

Десна гранична вредност (респективно лева гранична вредност) функције $f$ у тачки $x_0$ се добија тако што у претходној дефиницији посматрамо само оне вредности $x \in \mathbf{A}$ које су веће (респективно мање) од $x_0$. Ако она постоји означава се са:

$$\lim_{x \to x_0, x \in A_+} f(x) \qquad (\lim_{x \to x_0, x \in A_-} f(x))$$

Где је $A_+ = A \cap (x_0, +\infty)$ и $A_- = A \cap (-\infty, x_0)$.

**Теорема 9.** *Ако постоје лева и десна гранична вредност функције $f : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ у тачки $x_0$, потребан и довољан услов да функција $f$ има граничну вредност у тачки $x_0$ је да важе једнакости:*

$$\lim_{x \to x_0, x \in A_+} f(x) = \lim_{x \to x_0, x \in A_-} f(x) = L$$

*и тада је:*

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

## 3.2 Особине граничне вредности функције

**Теорема 10.** *Нека су реалне функције $f$ и $g$ дефинисане на скупу $A \subset \mathbf{R}$ и нека је тачка $x_0$ тачка нагомилавања скупа $A$. Ако претпоставимо да постоје граничне вредности:*

$$\lim_{x \to x_0, x \in A} f(x) = L \qquad \lim_{x \to x_0, x \in A} g(x) = K$$

*тада важе следеће једнакости:*

*а) гранична вредност збира (респективно разлике) функција $f$ и $g$ једнака је збиру (респективно разлици) граничних вредности тих функција, тј.*

$$\lim_{x \to x_0, x \in A} (f(x) + g(x)) = L + K$$

$$\lim_{x \to x_0, x \in A} (f(x) - g(x)) = L - K$$

*б) гранична вредност производа функција $f$ и $g$ једнака је производу граничних вредности тих функција, тј.*

$$\lim_{x \to x_0, x \in A} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot K$$

*в) гранична вредност количника функција $f$ и $g$ једнака је количнику граничних вредности тих функција, тј.*

$$\lim_{x \to x_0, x \in A} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K} \qquad K \neq 0.$$

**Теорема 11.** *Нека су реалне функције $f$ и $g$ дефинисане на скупу $A \subset \mathbf{R}$ и нека је тачка $x_0$ тачка нагомилавања скупа $A$. Ако постоје граничне вредности:*

$$\lim_{x \to x_0, x \in A} f(x) = L \qquad \lim_{x \to x_0, x \in A} g(x) = K$$

*и за све $x \in A \setminus \{0\}$ важи неједнакост $f(x) \leq g(x)$, тада је $L \leq K$.*

**Теорема 12.** *Теорема: Нека су реалне функције $f$, $g$ и $h$ дефинисане на скупу $A \subset \mathbf{R}$ и нека је тачка $x_0$ тачка нагомилавања скупа $A$. Ако постоје граничне вредности*

$$\lim_{x \to x_0, x \in A} f(x) = \lim_{x \to x_0, x \in A} g(x) = L$$

*и за све $x \in A \setminus \{0\}$ важи $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, тада је $\lim h(x) = L$ када $n \to \infty$.*

**Дефиниција** 12. Нека домен $\mathbf{A}$ функције $f : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ садржи интервал $(a, +\infty)$ за неки реалан број $a$. Број $L$ је **гранична вредност** функције $f$ у $+\infty$ ако:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists T > a) \qquad x > T \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

тада је:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

**Дефиниција** 13. Нека домен **A** функције $f : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ садржи интервал $(-\infty, b)$ за неки реалан број $b$. Број $L$ је **гранична вредност** функције $f$ у $-\infty$ ако:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists T < b) \qquad x < T \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

тада је:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

**Дефиниција** 14. Нека домен **A** функције $f : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ садржи интервал $(a, +\infty)$ за неки реалан број $a$. Ако:

$$(\forall M > 0)(\exists T > a) \qquad x > T \Rightarrow f(x) > M$$

тада је:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

**Дефиниција** 15. Нека домен **A** функције $f : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ садржи интервал $(x_0, b)$ за неко $b > x_0$. Ако:

$$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A) \qquad 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

тада је

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = +\infty.$$

**Пример** 17. *Одредити граничну вредност*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x} + 2}{2x^2 + 5x}.$$

**Решење.**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{x} + 2}{2x^2 + 5x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(1 + \frac{\sqrt{x}}{x^2} + \frac{2}{x^2})}{x^2(2 + \frac{5x}{x^2})} = \frac{1}{2}.$$

**Пример** 18. *Одредити граничну вредност*

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} - \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}).$$

**Решење.**

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} - \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 + 2x^2 - 1 - x^4 + 2x^2 + 1}{\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} + \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{x^2(\sqrt{1 + \frac{2x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}} + \sqrt{1 - \frac{2x^2}{x^4} - \frac{1}{x^4}})} = 2.$$

*Асимптоте графика функције:*

**Дефиниција** 16. **Асимптота графика** функције у $+\infty$ (у $-\infty$) је права $y = kx + n$ за коју важи:

1) Ако је $k = 0$, тј. ако $f$ има граничну вредност $n$ у $+\infty$ (у $-\infty$), тада график функције $f$ има **хоризонталну асимптоту** у $+\infty$ (у $-\infty$), чија је једначина $y = n$.

2) Ако је $k \neq 0$, тада се права $y = kx + n$ зове **коса асимптота** графика функције $f$ у $+\infty$ (у $-\infty$).

Бројеви $k$ и $n$ се у том случају одређују:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx),$$

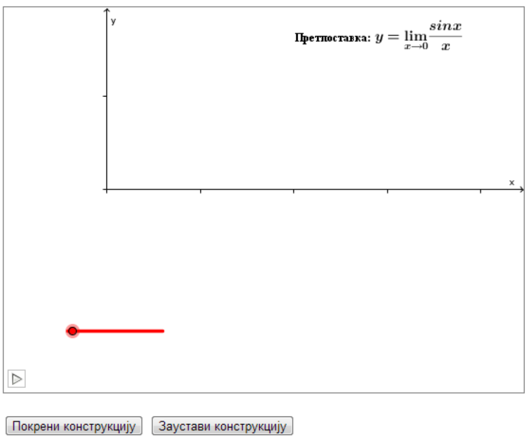
$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx).$$

**Дефиниција** 17. **Вертикална асимптота** графика функције $f$ у тачки $x_0$ је права $x = x_0$, ако $f$ дивергира ка $+\infty$ или $-\infty$, када $x \to x_{0+}$ или $x \to x_{0-}$.

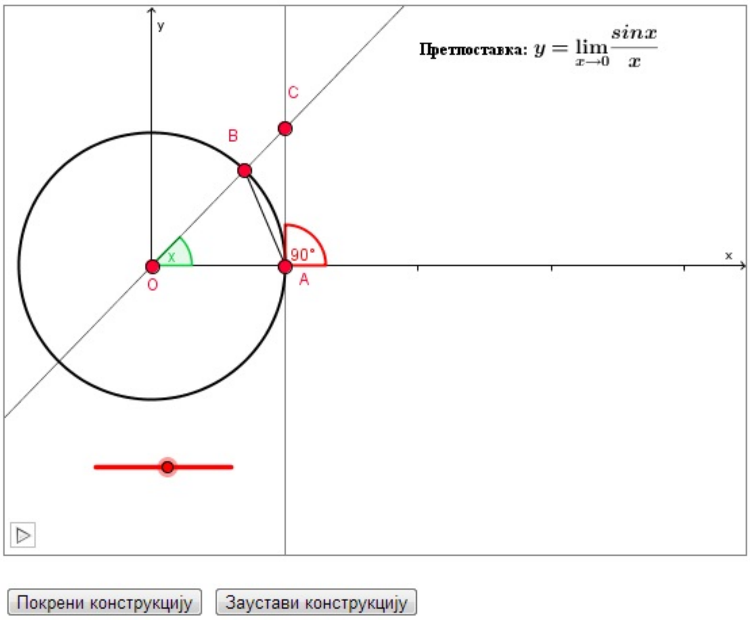
**Пример** 19. *Показати да је*

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

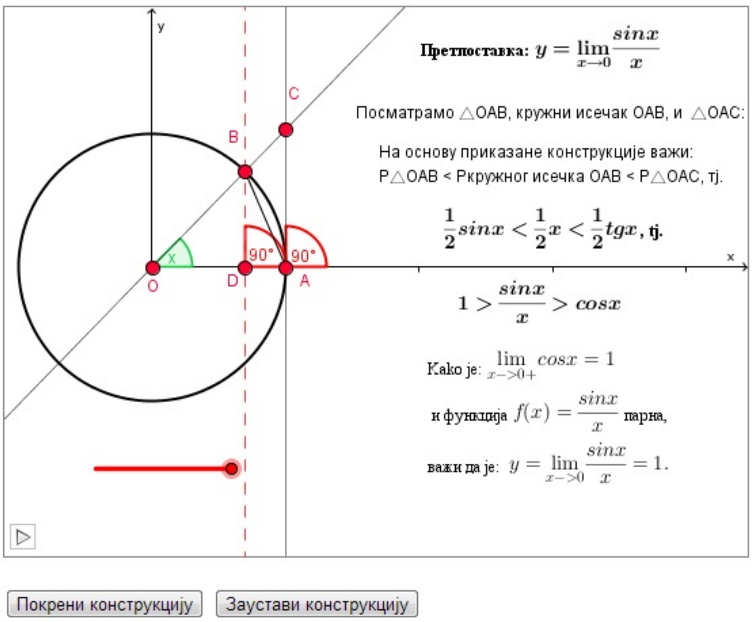
Посматрамо тачку $O(0,0)$ и јединичну кружницу чији је она центар. Нека је дат угао $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , чији краци секу кружницу у тачкама $A(1,0)$ и $B(x,y)$. Тангента кружнице у тачки $A$ нека сече крак $OB$ у тачки $C$ и нека је $D$ подножје нормале из тачке $B$ на $x$ - осу. Након што смо конструисали наведене елементе, изводимо доказ за почетну претпоставку (детаљно у [8]).




Слика 3.3. *Почетак конструкције доказа*




Слика 3.4. *Конструкција доказа*




Слика 3.5. *Крај конструкције доказа*

*Смена промењљивих:*

У случају потребе израчунавања граничне вредности нпр.

$$\lim_{x \to 0} \sin 3x$$

Поступамо тако што уведемо смену $t = 3x$ и посматрамо:

$$x \to 0 \Rightarrow t \to 0$$

$$\lim_{t \to 0} \sin t = 0$$

Одакле је:

$$\lim_{x \to 0} \sin 3x = \lim_{t \to 0} \sin t = 0.$$

За решавање сличних примера граничних вредности уводимо две теореме:

**Теорема 13.** *(Правило смене промењљивих за граничне вредности функције) Ако постоје граничне вредности*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \lim_{y \to b} g(y) = K \qquad x \neq x_0$$

*у некој околини* $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ *важи да је* $f(x) \neq L$*, тада постоји*

$$\lim_{x \to a} (g \cdot f)(x) \qquad \lim_{x \to a} (g \cdot f)(x) = K.$$

**Теорема 14.** *Нека је* $f : A \to \mathbf{R}$, $a, b \in \mathbf{R}$. *Потребан и довољан услов за*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

*је да је*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = a$$

*за сваки низ* $(x_n)n \in \mathbf{N}$ *такав да је* $x_n \in A \setminus \{a\}$ *за свако* $n \in \mathbf{N}$.

На основу претходне теореме важи да за сваки низ $(a_n)n \in \mathbf{N}$ такав да је

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.$$

**Пример** 20. *Одредити граничну вредност*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 4x}{x}.$$

**Решење.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 4x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{x \cos 4x} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \sin 4x}{4x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos 4x} = 4.$$

**Пример** 21. *Одредити граничну вредност*:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-2x^3+2x-1}{x^4-5x^3+9x^2-7x+1}.$$

**Решење.**

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-2x^3+2x-1}{x^4-5x^3+9x^2-7x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^3(x+1)}{(x-1)^3(x-2)} = -2.$$

**Пример** 22. *Одредити граничну вредност*:

$$\lim_{x\to\infty} (\frac{x^2-1}{x^2-3x+2})^x.$$

**Решење.**

$$\lim_{x\to\infty} (\frac{x^2-1}{x^2-3x+2})^x = \lim_{x\to\infty} (\frac{x^2-3x+2+3x-3}{x^2-3x+2})^x = \lim_{x\to\infty} ((1+\frac{3x-3}{x^2-3x+2})^{\frac{x^2-3x+2}{3x-3}})^{\frac{(3x-3)x}{x^2-3x+2}} = e^3.$$

**Пример** 23. *Одредити граничну вредност*:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{(x^2+1)\arctan(1-x)}.$$

**Решење.**

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{(x^2+1)\arctan(1-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2+1} \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{\arctan(1-x)} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\sin(x-1)}{x-1}}{\frac{\arctan(1-x)}{1-x}} =$$

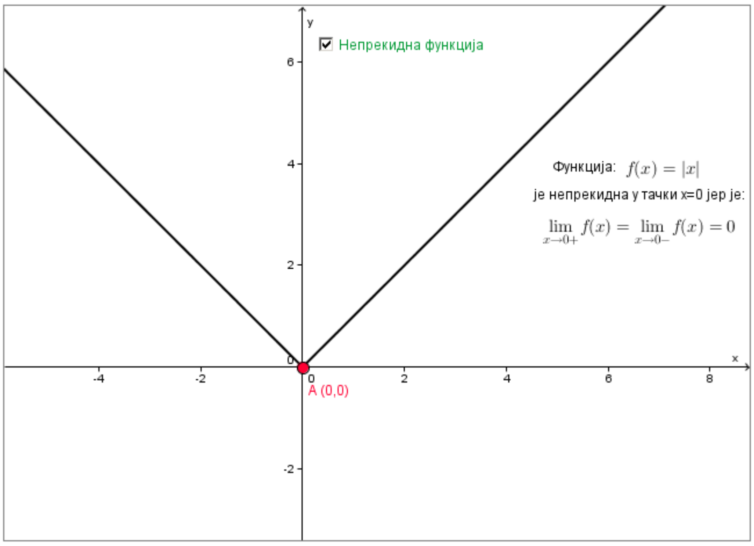
$$= -\frac{1}{2} \lim_{x\to 1} \frac{1}{\frac{\arctan(1-x)}{1-x}} = -\frac{1}{2} \lim_{u\to 0} \frac{u}{\tan u} = -\frac{1}{2} \lim_{u\to 0} \frac{\frac{u}{1}}{\frac{\sin u}{\cos u}} = -\frac{1}{2}.$$

# 4 Непрекидност функције

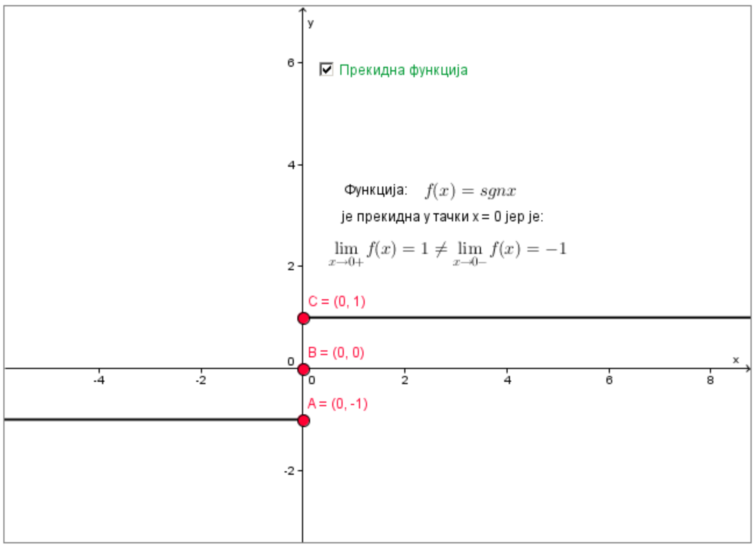
**Кошијева дефиниција непрекидности**: Функција $f$ је непрекидна у тачки $x_0$ ако је

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(x_0).$$

**Пример** 24. *Анимација непрекидне и прекидне функције*




Слика 4.1. *Непрекидна функција*




Слика 4.2. *Прекидна функција*

## 4.1 Дефиниција непрекидне функције

**Дефиниција** 18**.** Функција $f : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ је **непрекидна у тачки** $x_0 \in \mathbf{A}$ ако:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbf{A}) \qquad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

**Дефиниција** 19**.** Функција $f : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ је **прекидна у тачки** $x_0 \in \mathbf{A}$ ако није непрекидна у тој тачки.

**Дефиниција** 20**.** Функција $f : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ је **непрекидна на скупу** $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ ако је непрекидна у свакој тачки скупа $\mathbf{B}$.

**Дефиниција** 21**.** Функција $f : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ је **униформно непрекидна** на интервалу $[a, b] \subset \mathbf{A}$ ако важи:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x_1, x_2 \in [a, b]) \qquad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

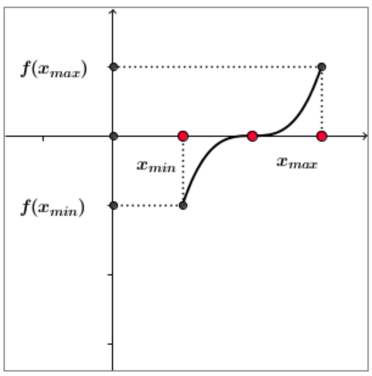
**Теорема 15.** *Ако су функције $f$ и $g$ непрекидне у тачки $x_0$, тада су у тој тачки непрекидне и функције:*

*а) збир функција $f + g$*
*б) разлика функција $f - g$*
*в) производ функција $f \cdot g$*
*г) количник функција $f/g$ (ако је $g(x_0) \neq 0$)*
*д) композиција функција $f \circ g$ .*

Основне елементарне функције су непрекидне на свом дефиниционом скупу, а на основу претходне теореме су на њему непрекидне и елементарне ф-је.

**Теорема 16.** *(Вајерштрасова[3] теорема о ограничености непрекидне функције) Непрекидна функција на затвореном и ограниченом интервалу достиже свој максимум и минимум.*

То значи да ако је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидна функција постоји $x_{min} \in [a, b]$ тако да је $f(x_{min}) \leq f(x)$ за све $x \in [a, b]$ и постоји $x_{max} \in [a, b]$ тако да је $f(x_{max}) \geq f(x)$ за све $x \in [a, b]$.

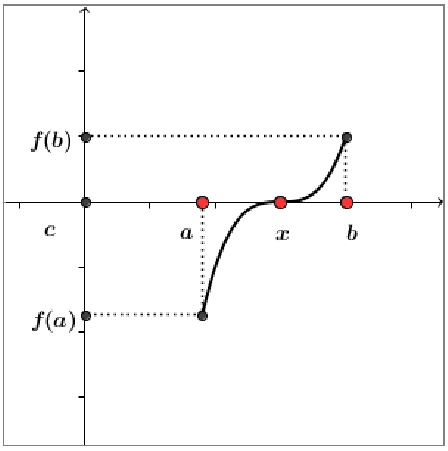



Слика 4.3. *Илустрација Вајерштрасове теореме*

[3] Karl Theodor Wilhelm Weierstras, (1815 - 1897), немачки математичар

**Теорема 17.** *(Болцано - Кошијева теорема о међувредности)*
*Ако је функција $f$ непрекидна на затвореном интервалу $[a, b]$ и ако је $f(a) \neq f(b)$, тада она узима све вредности између $f(a)$ и $f(b)$ у интервалу $[a, b]$.*

То значи да ако је $f(a) < c < f(b)$ или $f(a) > c > f(b)$ постоји $x \in (a, b)$ такво да је $f(x) = c$ . У случају да су $f(a)$ и $f(b)$ различитог знака, тада постоји $x \in (a, b)$ такво да је $f(x) = 0$.




Слика 4.4. *Илустрација Болцано - Кошијеве теореме*

*Врсте прекида функције:*

Ако функција $f$ није непрекидна у некој тачки $x_0 \in A$, каже се да функција има прекид у тој тачки и то:

а) **привидан прекид**, ако постоји:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \qquad L \neq f(x_0)$$

б) **прекид прве врсте**, ако постоје:

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = L_1 \qquad \lim_{x \to x_{0-}} f(x) = L_2 \qquad L_1 \neq L_2$$

в) **прекид друге врсте**, ако није ни привидан прекид ни прекид прве врсте.

## 4.2 Метода половљења

**Теорема 18.** *(Последица Болцано - Кошијеве теореме о међувредности) Ако је функција $f$ непрекидна на затвореном интервалу $[a, b]$ и ако је $f(a) \cdot f(b) < 0$, онда једначина $f(x) = 0$ има бар једно решење $x \in (a, b)$.*

На основу наведене теореме, једноставно налазимо решење било које нелинеарне једначине са једном непознатом облика $f(x) = 0$.
Нека је $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидно пресликавање такво да су $f(a)$ и $f(b)$ различитог знака. Ако је:

$$f(\frac{a+b}{2}) = 0 \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

Онда је број $c$ решење једначине $f(x) = 0$. Ако је:

$$f(\frac{a+b}{2}) \neq 0 \Rightarrow f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0 \vee f(\frac{a+b}{2}) \cdot f(b) < 0$$

Бирамо онај од интервала на чијим је крајевима функција $f$ различитог знака. Означимо га са $[a_1, b_1]$. У овом интервалу постоји бар једно решење једначине $f(x) = 0$ . Настављајући овај поступак добијамо низ интервала $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$ таквих да је:

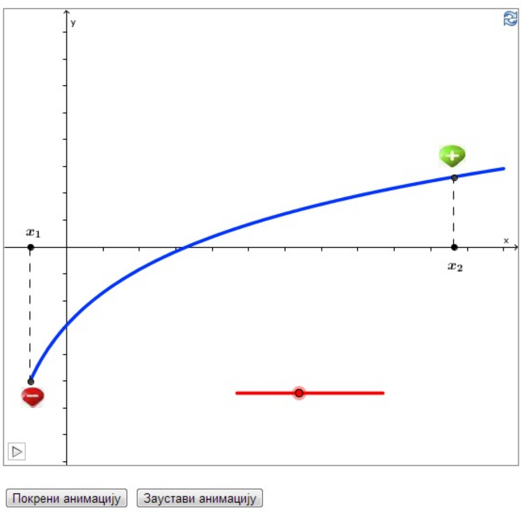
$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

Како је низ $a_{n,n\in\mathbf{N}}$ ограничен и монотоно неопадајући, а низ $b_{n,n\in\mathbf{N}}$ ограничен и монотоно нерастући онда постоји $c$ такво да је:

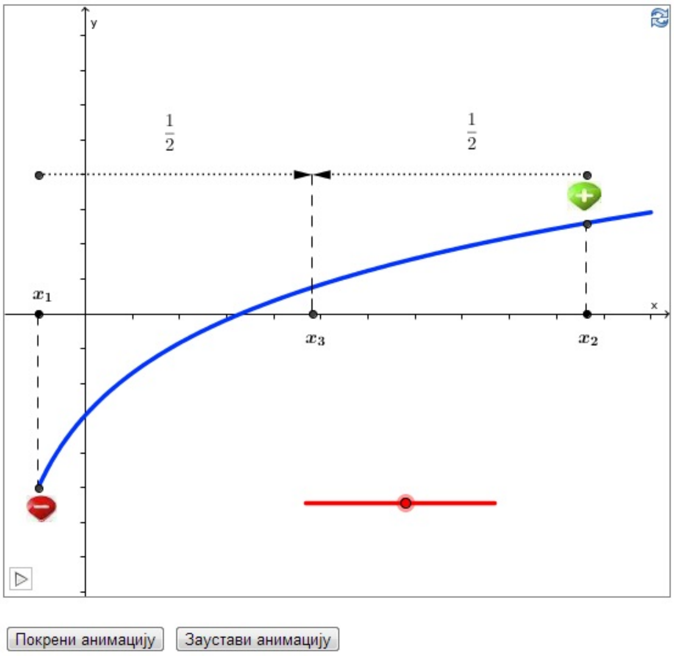
$$\lim_{n\to\infty} = c = \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$(\forall n \in N) f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \Rightarrow f(c)^2 \leq 0 \Rightarrow f(c) = 0.$$

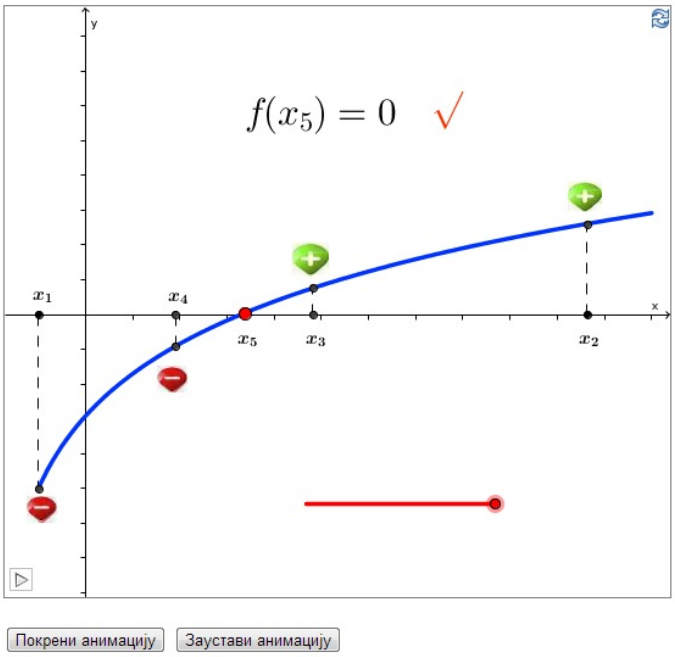
Дакле, број $c$ је решење једначине $f(x) = 0$.




Слика 4.5. *Метода половљења*




Слика 4.6. *Метода половљења*




Слика 4.7. *Метода половљења - решење*

*Оцена грешке методе:*

За оцену грешке која настаје при апроксимацији решења $c$ бројем $a_n$ користи се неједнакост

$$(\forall n \in N) \qquad |c - a_n| < \frac{b-a}{2^n}$$

На основу ње се за дато $\epsilon$ може одредити $n_0 \in \mathbf{N}$ тако да је $c - a_{n_0} < \epsilon$ и на тај начин постићи жељена тачност апроксимације решења $c$ бројем $a_{n_0}$.

*Напомена:*

Приказана метода је једноставна, али се са повећањем тачности знатно повећава обим рачунања - због чега се углавном примењује када се не захтева велика тачност или за добијање приближне вредности решења код примене других метода (као што се види из [4]).

Недостатак методе је то што је њено уопштење на вишедимензионе случајеве (тј. на системе једначина) практично немогуће.

# 5 Изводи

Појам извода се појавио у 17-ом веку у вези са неравномерним кретањем. Помоћу извода је било могуће одредити брзину праволинијског кретања као и брзину промена величина које се неравномерно мењају (нпр. брзину промене температуре тела, електричне струје,...).

**Пример** 25. *Посматрамо тело (материјалну тачку) које се креће праволинијски.* Нека је

$$s = f(t), \qquad t \geq 0$$

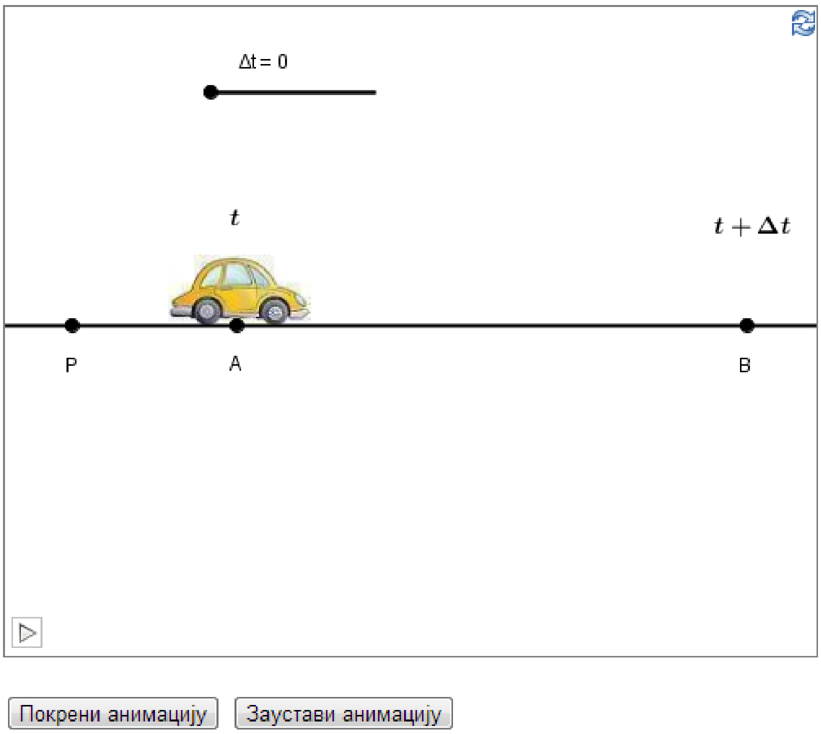
функција која описује зависност пређеног пута од почетне тачке $P$. У тренутку $t$ тело се налази у положају $A$, а у тренутку $t + \Delta t$ у положају $B$. Средња брзина тела $V_{sr}$ на путу $AB$ је једнака:

$$V_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

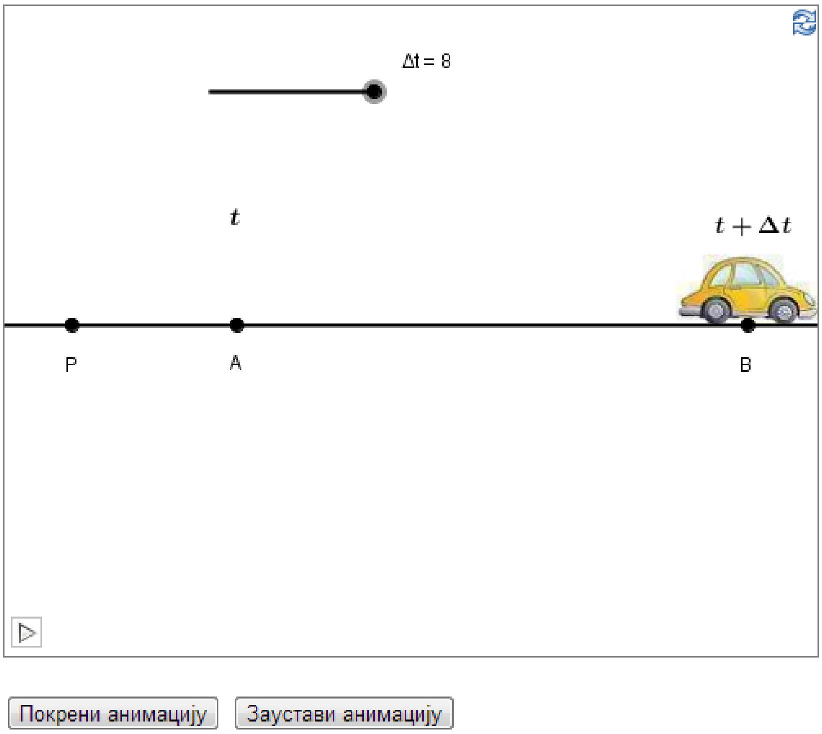
Када се временски интервал сужава тј. када $\Delta t \to 0$ уочимо да је тренутна брзина тела $V_t$ у тачки $A$ једнака:

$$V_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t)$$

ако овај лимес постоји (детаљније у [2]).




Слика 5.1. *Почетак праволинијског кретања материјалне тачке*




Слика 5.2. *Крај праволинијског кретања материјалне тачке*

Значај извода је сразмеран његовој примени у разним природним наукама. Наведено је неколико таквих примера:

1) Брзина хлађења тела у тренутку $t$ je:

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t+\Delta t)-T(t)}{\Delta t}.$$

Где загрејано тело има температуру $T(t+\Delta t)$ и хлади се.

2) Брзина реаговања материје при хемијској реакцији у тренутку $t$ je:

$$\lim_{t\to 0}\frac{Q(t+\Delta t)-Q(t)}{\Delta t}.$$

Где je $Q(t)$ количина материје у хемијској реакцији у тренутку $t$.

3) Линеарна густина шипке у тачки $x$ je:

$$\lim_{x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}.$$

Где je $m = m(x)$ маса нехомогене шипке на делу $[0, x]$.

## 5.1 Дефиниција извода

**Дефиниција** 18. Нека је реална функција $f$ дефинисана на интервалу $(a, b)$ и нека је $x_0$ тачка из интервала $(a, b)$.
Гранична вредност

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ако постоји, назива се **први извод функције** $f$ у тачки $x_0$.

Функција $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ је **диференцијабилна у тачки** $x_0 \in (a, b)$ ако има први извод у тој тачки.
Функција $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ је **диференцијабилна на интервалу** $(a, b)$ ако је диференцијабилна у свакој тачки тог интервала.
У том се случају функција $f' : (a, b) \to \mathbf{R}$ која броју $x_0 \in (a, b)$ додељује број $f'(x)$ зове **први извод функције** $f$.

**Леви извод** (респективно **десни извод**) функције $f$ у тачки $x_0$ се дефинише са:

$$f'_{-}(x_0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Функција $f$ има извод у тачки $x_0$ ако постоје леви и десни извод у тој тачки и једнаки су, тј:

$$f'_{-}(x_0) = f'_{+}(x_0)$$

**Теорема 19.** *Ако је функција $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ диференцијабилна у тачки $x_0 \in (a, b)$, тада је она непрекидна у тој тачки. (Потребан услов)*

*Доказ.*

$$\lim_{h \to 0} (f(x_0+h) - f(x_0)) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h = f'(x) \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

□

Наведена теорема не даје и довољан услов, па не важи да ако је функција ф непрекидна у тачки $x_0$ да је и диференцијабилна у истој.

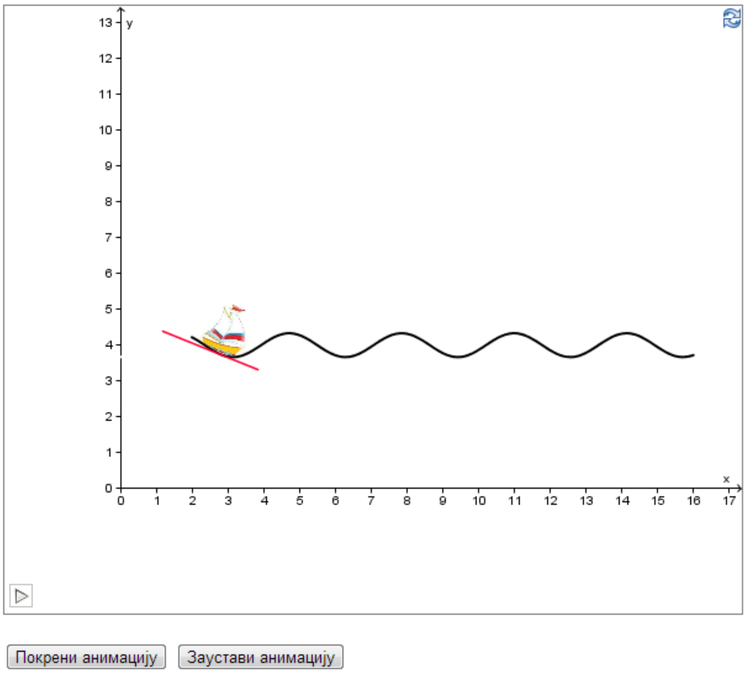
**Пример** 26. *Испитати непрекидност функције $f(x) = |x|$ у тачки $x = 0$.*

$$f'_{-}(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

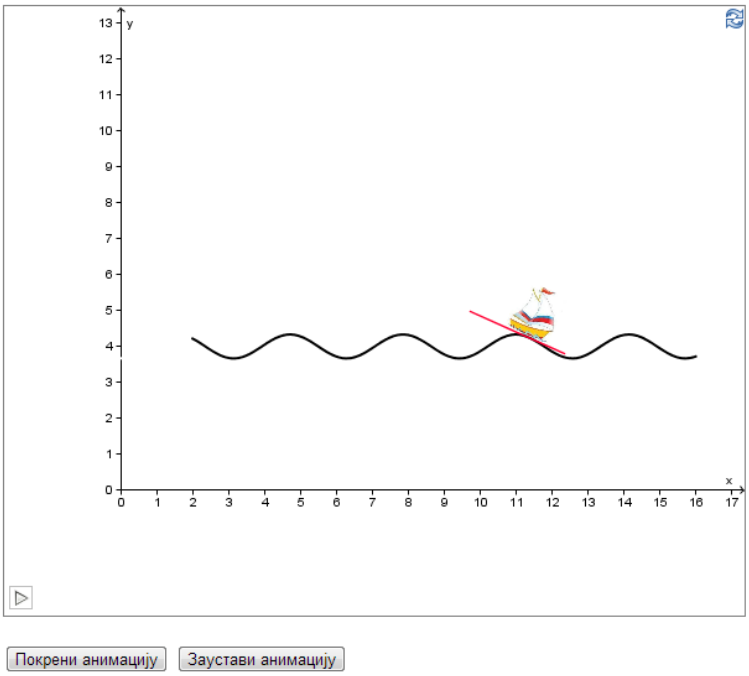
$$f'_{+}(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0)$$

Дакле, ова функција нема први извод у тачки 0 и поред тога што је у њој непрекидна.




Слика 5.3. *Анимација диференцијабилне функције*




Слика 5.4. *Анимација диференцијабилне функције*

*Таблица првих извода:*

1. $(c)' = 0, \qquad c = const$

2. $(x^n)' = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbf{N}, x \in \mathbf{R}$

3. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, x > 0$

4. $(\sin x)' = \cos x, \qquad x \in \mathbf{R}$

5. $(\cos x)' = -\sin x, \qquad x \in \mathbf{R}$

6. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbf{Z}\}$

7. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{k | k \in \mathbf{Z}\}$

8. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \qquad a > 0, x \in \mathbf{R}$

9. $(e^x)' = e^x, \qquad x \in \mathbf{R}$

10. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot lna}, \qquad a > 0, a \neq 1, x > 0$

11. $(lnx)' = \frac{1}{x}, \qquad x > 0$

12. $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x| < 1$

13. $(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x| < 1$

14. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbf{R}$

15. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbf{R}$

## 5.2 Правила диференцирања

**Теорема 20.** *Ако су функције $f$ и $g$ дефинисане на интервалу $(a,b)$ и имају прве изводе у тачки $x \in (a,b)$, тада важи:*

$$(Af(x)+Bg(x))' = Af'(x)+Bg'(x) \Rightarrow (f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$$

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g'(x)$$

$$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

**Пример** 27. *Одредити изводе функција:*

а) $f(x) = 2^x + 3tgx + 8$

б) $f(x) = e^x lnx$

в) $f(x) = \frac{\sin x}{x^2+1}$.

**Решење.**

а) $f'(x) = 2^x ln2 + \frac{3}{\cos^2 x}$

б) $f'(x) = e^x lnx + \frac{e^x}{x}$

в) $f'(x) = \frac{\cos x(x^2+1)-2x\sin x}{(x^2+1)^2}$.

*Извод сложене функције:*

**Теорема 21.** *Нека функција $g:(a,b)\to(c,d)$ има извод у тачки $x_0 \in (a,b)$ и нека функција $f:(c,d)\to \mathbf{R}$ има извод у тачки $g(x_0)\in(c,d)$. Тада сложена функција $h(x)=f(g(x))$, $x\in(a,b)$ има извод у тачки $x_0$ и важи:*

$$h'(x_0) = f_g'(g(x_0))\cdot g'(x_0).$$

**Пример** 28. *Одредити изводе функција:*

а) $f(x) = ln^2 x, x > 0$

б) $f(x) = \sin^3 x(x^2+e^x)$

в) $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}, x > 0$.

**Решење.**

а) $f'(x) = (ln^2 x)' = 2lnx \cdot \frac{1}{x}$

б) $f'(x) = (\sin^3 x(x^2 + e^x))' = 3(\sin(x^2 + e^x))^2 \cdot \cos(x^2 + e^x) \cdot (2^x + e^x)$

в) $f'(x) = (x^\alpha)' = e^{alnx} \cdot (\alpha lnx)' = e^{alnx} \cdot (\alpha \frac{1}{x}) = \alpha x^\alpha x^{-1} = \alpha x^{\alpha-1}$.

*Извод инверзне функције:*

Извод инверзне функције $f^{-1}$ за дату функцију $f$ може се одредити или експлицитним налажењем инверзне функције, или помоћу релације:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

**Пример** 29. *За функцију* $f(x) = sinx$ , $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *одредити извод инверзне функције* $arcsinx$.

**Решење.**

$$f(x) = sinx, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow f^{-1}(x) = arcsin(x), x \in [-1, 1]$$

$$f(x) = sinx, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f'(f^{-1}(x)) = \cos arcsinx = \sqrt{1 - \sin^2 arcsinx} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, |x| < 1.$$

## 5.3 Диференцијал

За диференцијабилну функцију $f$ над интервалом $(a, b)$ величина

$$\Delta x := x_0 + h - x_0 = h \qquad x_0, x_0 + h \in (a, b)$$

се назива прираштај аргумента $x$ у тачки $x_0$ , а величина

$$\Delta y := f(x_0 + h) - f(x_0)$$

се назива прираштај функције $f$ у тачки $x_0$.
Релација

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

се може записати у облику

$$f(x + h) - f(x) = f'(x) \cdot h + \lambda(h) \cdot h, \qquad \lim_{h \to 0} \lambda(h) = 0$$

односно:

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

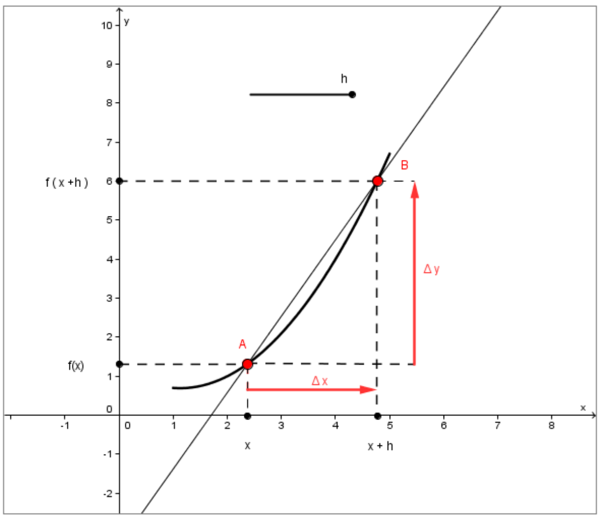
Последња релација значи да је прираштај зависно промењиве $y$ у тачки $x$ приближно једнак $f'(x)\Delta x$.

**Дефиниција** 19. Нека је $f$ диференцијабилна функција и $\Delta x$ прираштај аргумента. Тада је:

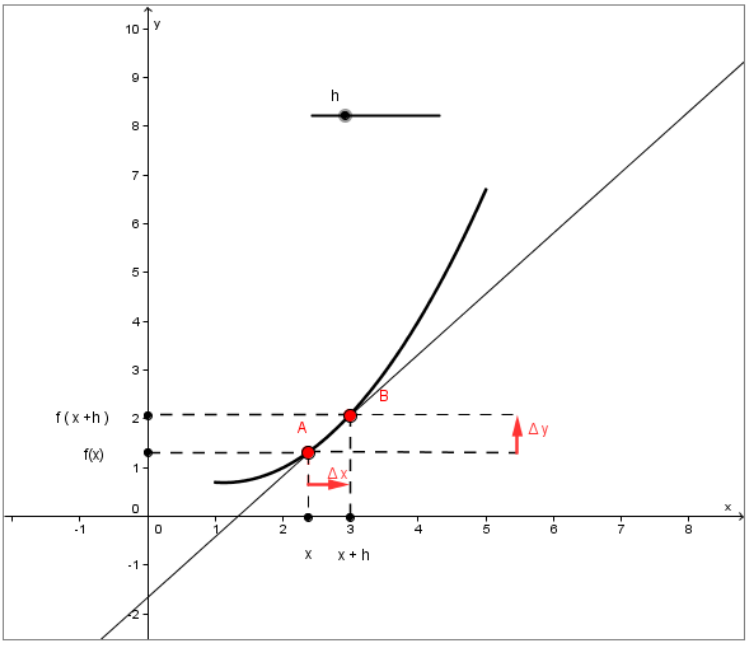
1) **диференцијал независно промењиве** $dx = \Delta x$
2) **диференцијал функције** $dy = f'(x)\Delta x$

и важи да је

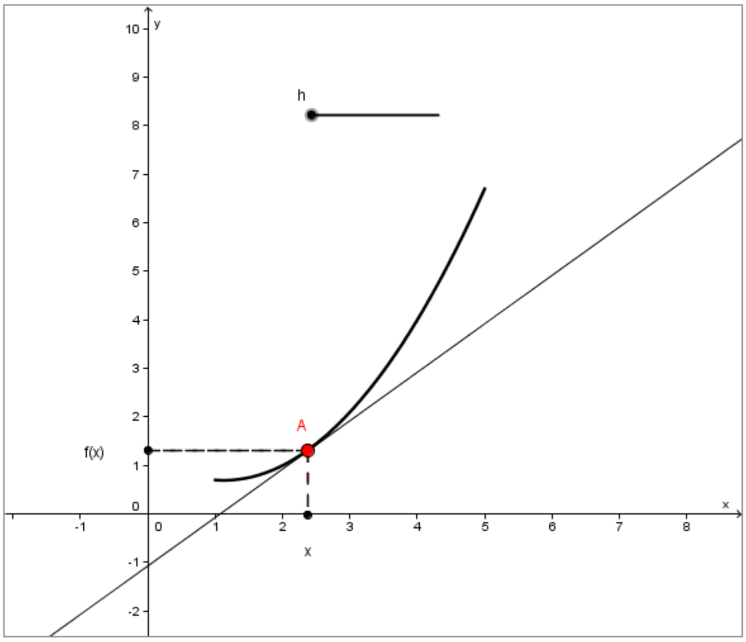
$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$




Слика 5.5. *Геометријска илустрација диференцијала функције*




Слика 5.6. *Геометријска илустрација диференцијала функције*




Слика 5.7. *Геометријска илустрација диференцијала функције*

## 5.4 Геометријско тумачење

Нека функција $f$ у тачки $x_0$ има први извод, тј. постоји:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Тада је:

$$tg\alpha = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

што представља коефицијент правца сечице $AB$. Када $h \to 0$ тачка $B$ се приближава тачки $A$, па у граничном случају имамо тангенту у тачки $A$ на график функције $f$.
Према томе, први извод функције $f$ у тачки $x_0$ представља коефицијент правца тангенте на график функције у тачки $A(x_0, f(x_0))$, одређен углом $\beta$:

$$tg\beta = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

*Једначина тангенте :*

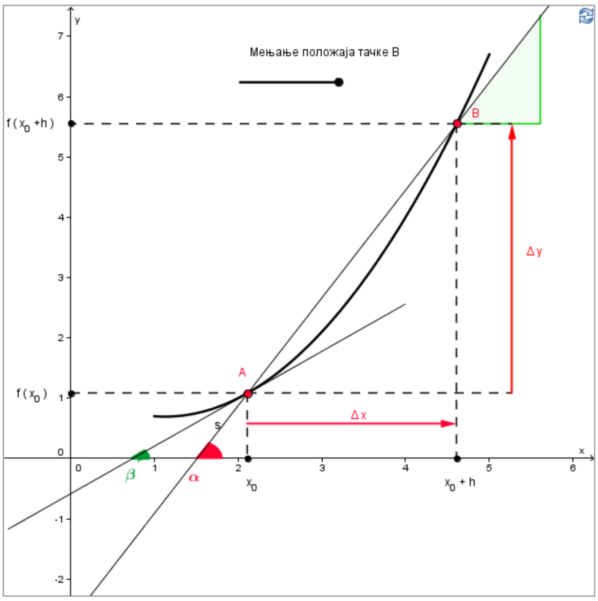
Једанчина тангенте на график функције $f$ у тачки $A(x_0, f(x_0))$ је:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \qquad y_0 = f(x_0).$$

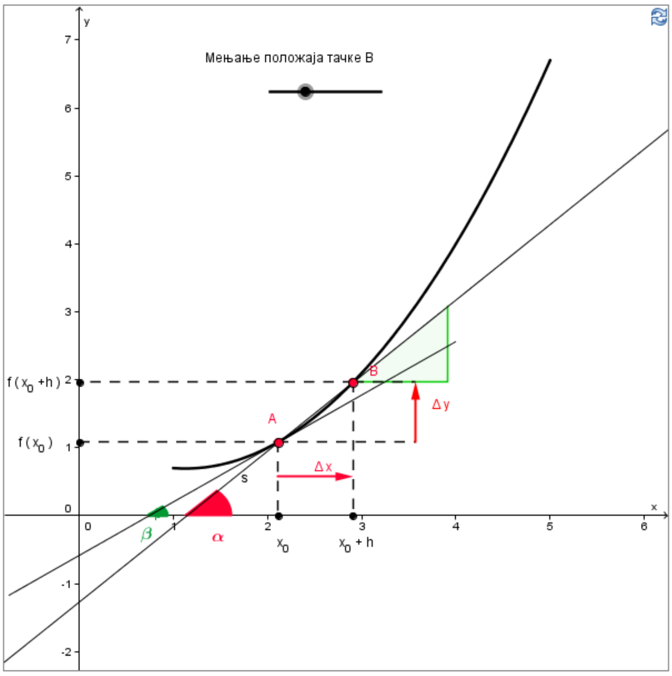
*Једначина нормале :*

Једначина нормале на график функције $f$ у тачки $A(x_0, f(x_0))$ $(f'(x_0) \neq 0)$ је:

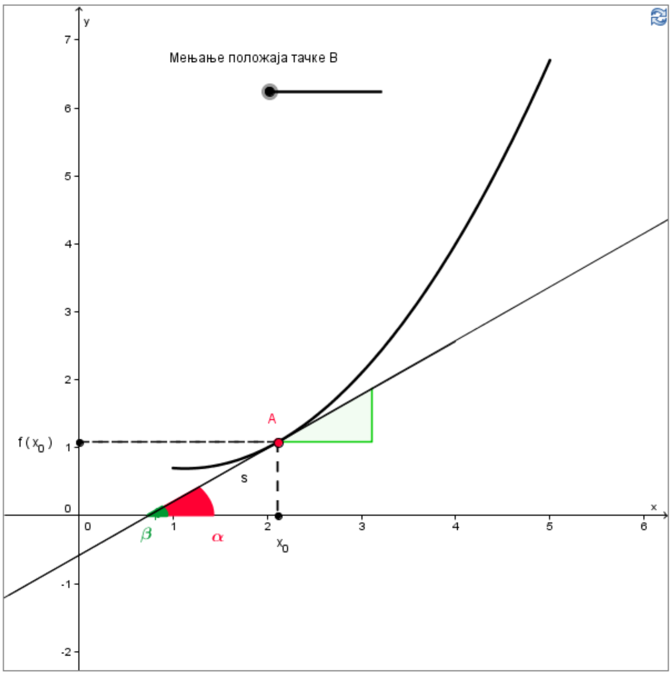
$$y - y_0 = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \qquad y_0 = f(x_0).$$




Слика 5.8 *Геометријско тумачење првог извода*



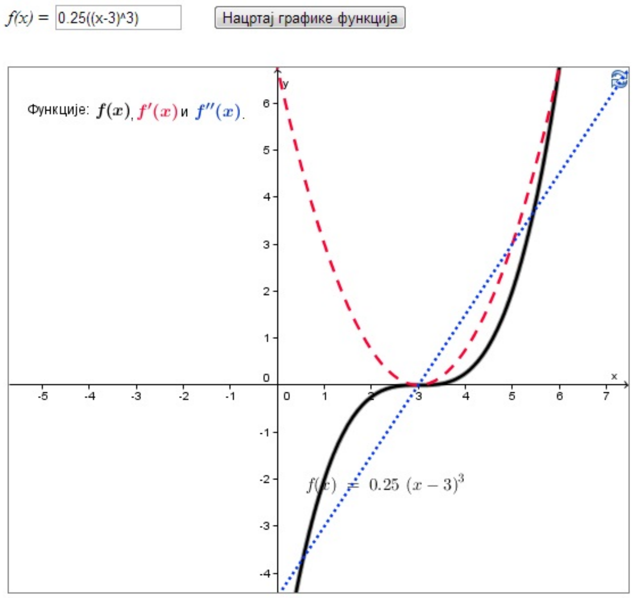

Слика 5.9. *Геометријско тумачење првог извода*




Слика 5.10. *Геометријско тумачење првог извода*

## 5.5 Изводи вишег реда

Претпоставимо да функција $f$ има **први извод** $f'$ на интервалу $(a,b)$ и нека је $x_0 \in (a,b)$.
**Други извод** функције $f$ у тачки $x_0$ је извод функције $f'$ у тачки $x_0$ (ако постоји) и обележава се са $f''(x_0) = (f'(x_0))'$ .
Аналогно се дефинишу **трећи, четврти, ..., $n$-ти извод** функције $f$ у тачки $x_0$ и обележавају се редом са $f''(x_0), f'''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$.




Слика 5.11. *Аплет који скицира графике функција $f$, $f'$ и $f$" на основу функције $f$ коју је корисник задао*

**Пример** 30. *Одредити изводе $f', f'', f'''$ и $f^{(4)}$ функције*

$f(x) = 2x^3 - x^2 + 1 + 3lnx, x > 0.$

**Решење.**

$f'(x) = 6x^2 - 2x + 3x^{-1}, \qquad x > 0$
$f''(x) = 12x - 2 - 3x^{-2}, x > 0$
$f'''(x) = 12 + 6x^{-3}, x > 0$
$f^{(4)}(x) = -18x^{-4}, x > 0.$

**Пример** 31. *Одредити изводе $f', f'', f'''$ и $f^{(4)}$ функције* $f(x) = \cos^2 x$ .

**Решење.**

$f'(x) = -2\cos x \sin x = -sin2x$
$f''(x) = -2\cos 2x$

$f'''(x) = 4\sin 2x$
$f^{(4)}(x) = 8\cos 2x.$

**Пример** 32. *Одредити* $f(0), f'(0), f''(0)$ *и* $f'''(0)$ *функције*:
$f(x) = 24e^x - 24x - 12x^2 - 4x^3 - x^4 - 20.$

**Решење.**

$f(x) = 24e^x - 24x - 12x^2 - 4x^3 - x^4 - 20 \Rightarrow f(0) = 4$
$f'(x) = 24e^x - 24 - 24x - 12x^2 - 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$
$f''(x) = 24e^x - 24 - 24x - 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$
$f'''(x) = 24e^x - 24 - 24x \Rightarrow f'''(0) = 0.$

**Пример** 33. *Одредити* $f^{(n)}(x), x \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}$ *функција*:

а) $f(x) = e^x$
б) $f(x) = \sin x.$

**Решење:.**

а) $f'(x) = e^x, f''(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(x) = e^x, x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$
б) $f^{(4j)}(x) = \sin x, f^{(4j+1)}(x) = \cos x, f^{(4j+2)}(x) = -\sin x,$
$f^{(4j+3)}(x) = -\cos x, \sin^{(j)}(x) = \sin{(x + \frac{j\pi}{2})}, x \in \mathbf{R}, j \in \mathbf{N}.$

**Пример** 34. *Доказати да функција* $y = e^x sinx$ *задовољава једначину*:
$y'' - 2y' + 2y = 0.$

**Решење.**

$y' = e^x \sin x + e^x \cos x$
$y'' = e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x = 2e^x \cos x$
$y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x - 2(e^x \sin x + e^x \cos x) + 2e^x \sin x = 0.$

**Пример** 35. *Нека је* $p(x)$ *полином другог степена. Ако је* $p(0) = 1$, $p'(0) = 2$, $p''(0) = 6$, *израчунати* $p''(3)$.

**Решење.**

$p(x) = x^2 + bx + c \Rightarrow p(0) = 1 = c$
$p'(x) = 2x + b \Rightarrow p'(0) = 2 = b$
$p''(x) = 2 \Rightarrow p''(0) = 6 = 2a$
$p(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow p''(3) = 6.$

Већина примера се заснива на [5].

# 6 Примена извода

*Примена математичког модела у земљотресном инжењерству*

Математички модел (примене извода у земљотресном инжењерству) присутан је у одређивању понашања грађевинских конструкција при дејству земљотреса помоћу диференцијалних једначина кретања. Услед дејства земљотреса долази до померања тла и конструкције која се посматра. Јављају се инерцијалне силе индуковане масом и убрзањем померања тла. Конструкција прихвата померање тла и услед инерцијалних сила се креће.

Разматра се дејство спољашње поремећајне силе $F(t)$ на пригушене осцилације система са једним степеном слободе померања. Претпоставља се да је дејство дате поремећајне силе независно од кретања разматраног механичког система и да јој се интензитет мења према хармонијском закону облика:

$$F(t) = F_0 \sin pt.$$

На основу Далемберовог приниципа (да се динамичка равнотежа сила може посматрати као статичка, ако се додају одговарајуће инерцијалне силе) једначина динамичке равнотеже система је:

$$my'' + cy' + ky = F_0 \sin pt$$

односно:

$$y'' + 2\epsilon y' + \omega^2 y = \frac{F_0}{m} \sin pt.$$

Опште решење претходне нехомогене диференцијалне једначине је у облику збира општег решења хомогене једначине и партикуларног решења нехомогене је-
дначине:

$$y = y_h + y_p,$$
$$y = Ce^{-\epsilon t} \sin(\omega_d t + \alpha) + N_p \sin(pt - \omega).$$

Део кретања описан датим решењем се брзо амортизује после неколико циклуса осцилација, тако да преостаје само устаљено хармонијско кретање одређено једначином:

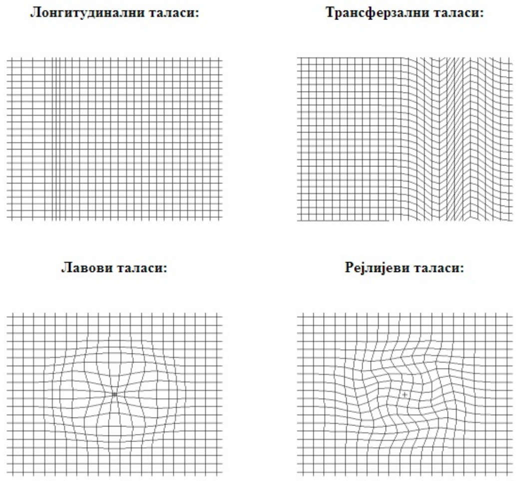
$$y = N_p \sin(pt - \omega).$$

При чему су амплитуда кретања и фазни угао, респективно, једнаки:

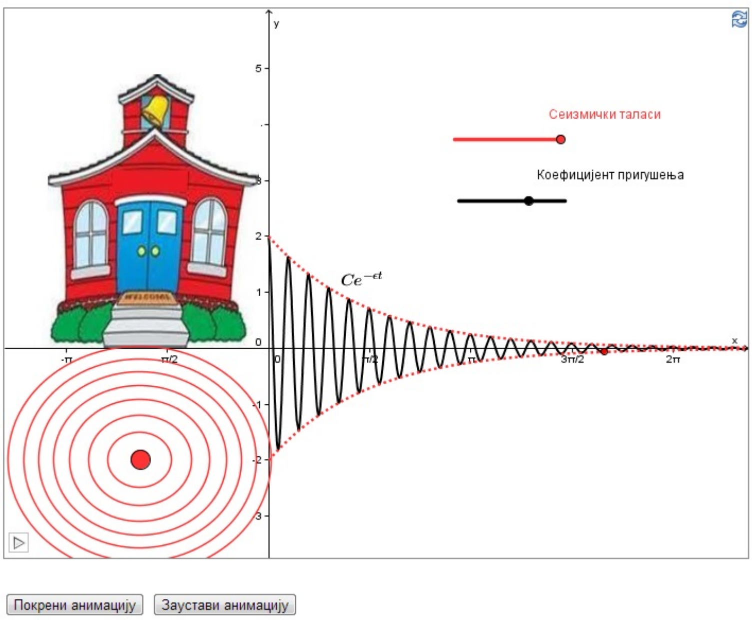
$$N_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\epsilon^2 p^2}} \qquad tg\phi = \frac{2\epsilon p}{\omega^2 - p^2}.$$

Посебан утицај на кретање конструкције при земљотресу имају површински сеизмички таласи (као што је истакнуто у [9]), који су приказани у наставку.


Слика 6.1. *Подручје захваћено земљотресом*




Слика 6.2. *Сеизмички таласи*




Слика 6.3. *Пригушене осцилације тела са једним степеном слободе*

## 6.1 Теореме о средњој вредности

**Теорема 22.** *Теорема Фермаа*[4]*: (потребан услов)*

*Нека за функцију $f$ важе следећи услови:*
1) *дефинисана је на интервалу* $[a, b]$
2) *достиже у некој унутрашњој тачки* $c \in [a, b]$ *екстремну вредност*
3) *постоји* $f'(c)$
*Тада је* $f'(c) = 0$.

*Доказ.* Претпоставимо да функција $f$ достиже у тачки $c$ највећу вредност.

Тада је $f(x) \leq f(c)$ за све $x \in [a, b]$, па за $x < c$ важи:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \qquad x \in [a, c) \Rightarrow f'_-(c) \geq 0$$

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \qquad x \in (c, b] \Rightarrow f'_+(c) \geq 0$$

Дакле: $f'(c) = 0$. □

**Теорема 23.** *Теорема Рола*[5]*: (довољан услов)*

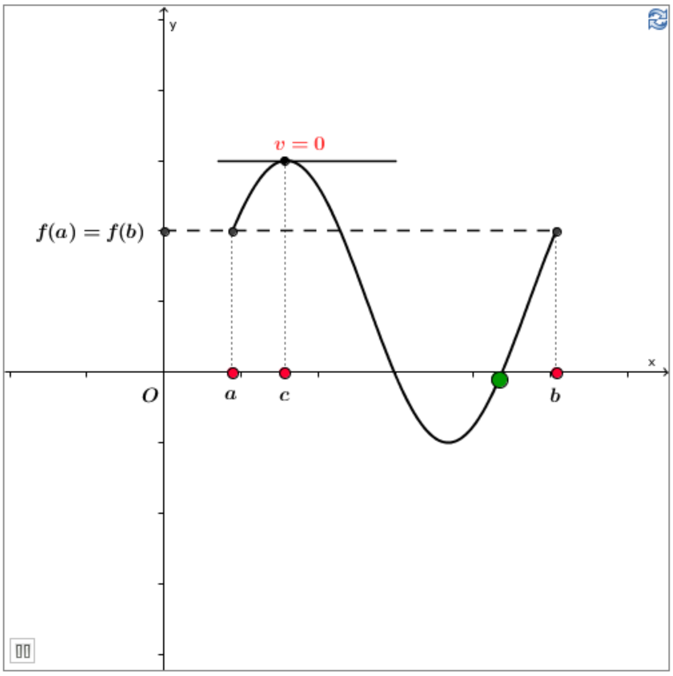
*Нека за функцију $f$ важе следећи услови:*
1) *непрекидна је на интервалу* $[a, b]$
2) *диференцијабилна је на интервалу* $(a, b)$
3) *важи* $f(a) = f(b)$
*Тада постоји* $c \in [a, b]$ *за коју је* $f'(c) = 0$.

*Доказ.* Како је функција $f$ непрекидна на интервалу $[a, b]$, постоје тачке $c_1$ и $c_2$ из интервала $[a, b]$ такве да су $f(c_1)$ и $f(c_2)$ најмања и највећа вредност функције $f$.
1) Ако се тачке $c_1$ и $c_2$ поклапају са крајевима интервала $[a, b]$, тада је функција $f$ константна и $f'(x) = 0$ за све $x \in [a, b]$ .
2) Нека је $c_1 \in [a, b]$. Како постоји $f'(c_1)$, према теореми Фермаа
је $f'(c_1) = 0$. □

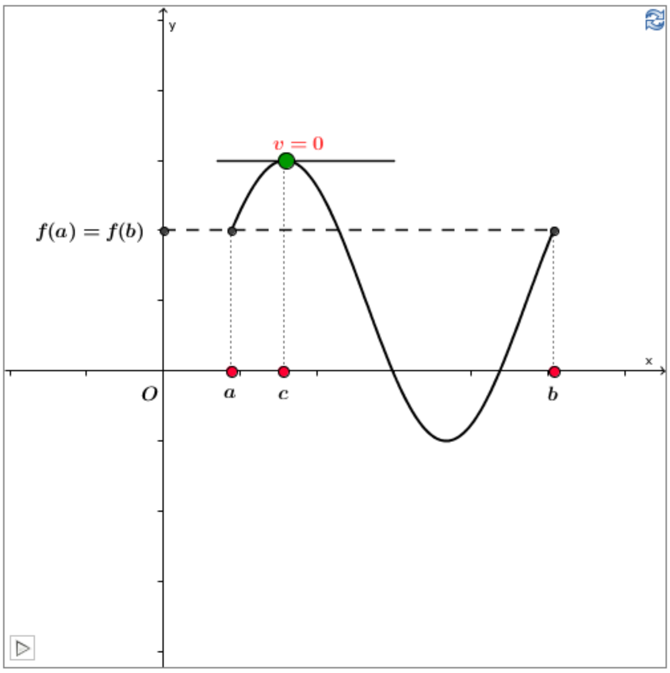
*Механичка интерпретација Ролове теореме:*

Нека се тачка креће по правој и нека се у тренутку т налази у тачки $c$ са координатом $x(t)$. Нека је функција $x(t)$ непрекидна за $t \in [a, b]$ и диференцијабилна за $t \in (a, b)$. Ако се положаји тачке у тренуцима $t = a$ и $t = b$ поклапају ( тј. $x(a) = x(b)$), онда мора постојати тренутак $c \in (a, b)$ у којем је брзина тачке једнака нули.

[4] Pierre de Fermat (1601-1665), француски математичар и правник
[5] Michel Rolle (1652-1719), француски математичар




Слика 6.4. *Илустрација Ролове теореме*




Слика 6.5. *Илустрација Ролове теореме*

**Теорема 24.** *Лагранжа*[6] *(Теорема о средњој вредности)*

*Нека за функцију $f$ важе следећи услови:*
1) *непрекидна је на интервалу* $[a, b]$
2) *диференцијабилна је на интервалу* $(a, b)$
*Тада постоји $c \in [a, b]$ за коју важи:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

*Доказ.* Функција

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a), \qquad x \in [a, b]$$

задовољава услове Ролове теореме,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Па на основу Ролове теореме постоји тачка $c \in [a, b]$ за коју је $g'(c) = 0$. Одакле следи:

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

*Механичка интерпретација Лагранжове теореме:*

Ако се тачка креће по правој по закону $x = x(t)$ $t \in [a, b]$, при чему је функција $x(t)$ непрекидна за $t \in [a, b]$ и диференцијабилна за $t \in (a, b)$, онда је средња брзина за временски интервал $[a, b]$ једнака:

$$\frac{x(b) - x(a)}{b - a}.$$

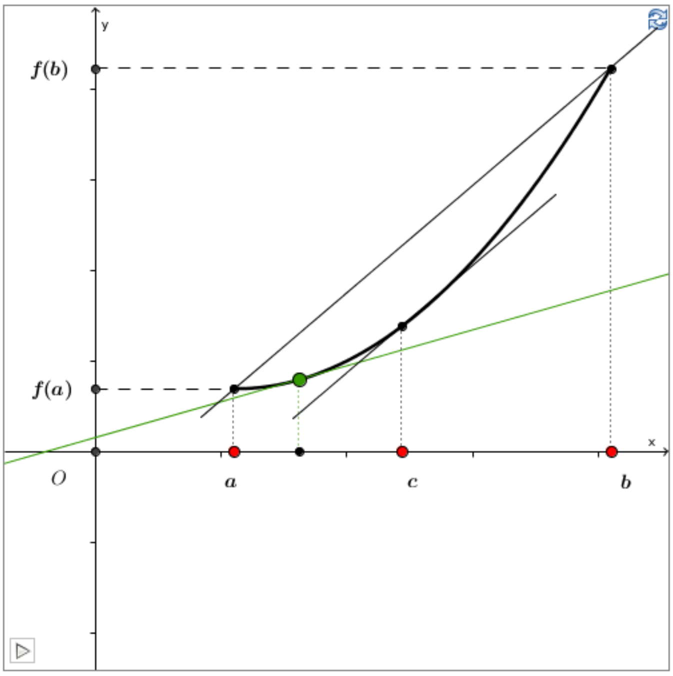
Тренутна брзина тачке у тренутку $t_0 \in (a, b)$ једнака је средњој брзини у поменутом интервалу, јер је:

$$\frac{x(b) - x(a)}{b - a} = x'(t_0).$$

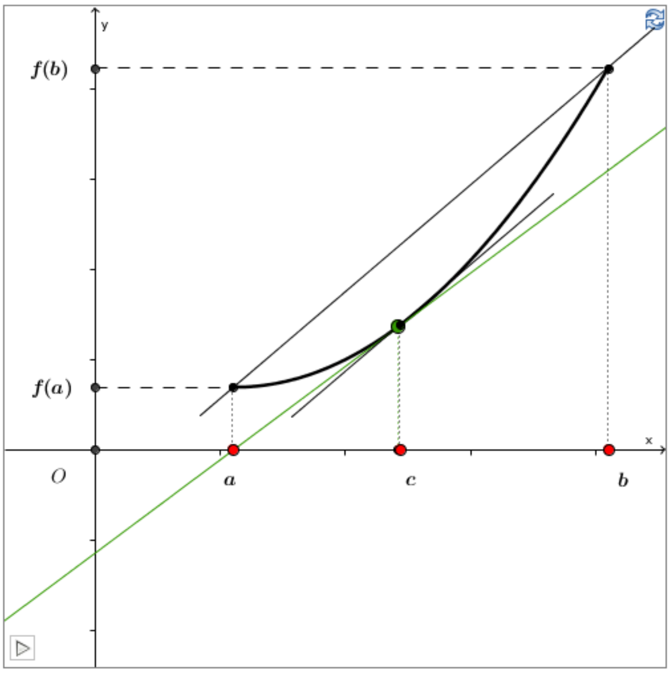
*Геометријска интерпретација Лагранжове теореме:*

Лагранжова теорема говори да ако је крива $y = f(x)$ непрекидна за $x \in [a, b]$ и у свакој тачки интервала $(a, b)$ има тангенту, онда постоји тачка $c \in (a, b)$, таква да је тангента у тачки $(c, f(c))$ паралелна сечици кроз тачке $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

[6] Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813), француско-италијански математичар и астроном




Слика 6.6. *Илустрација Лагранжове теореме*




Слика 6.7. *Илустрација Лагранжове теореме*

## 6.2 Тејлорова и Маклоренова формула

Тејлорова[7] формула са користи за апроксимацију функције $f$, дефинисане у некој околини тачке $a$, полиномом степена $n$.
Претпоставимо да функција $f(x)$ има у тачки $x = a$ све изводе до степена $n$ закључно. Имајући у виду да полином можемо записати у облику:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

апроксимирамо функцију $f(x)$ полиномом степена $n$:

$$P_n(x,a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Полином $P_n(x,a)$ се назива Тејлоров полином функције $f(x)$ .

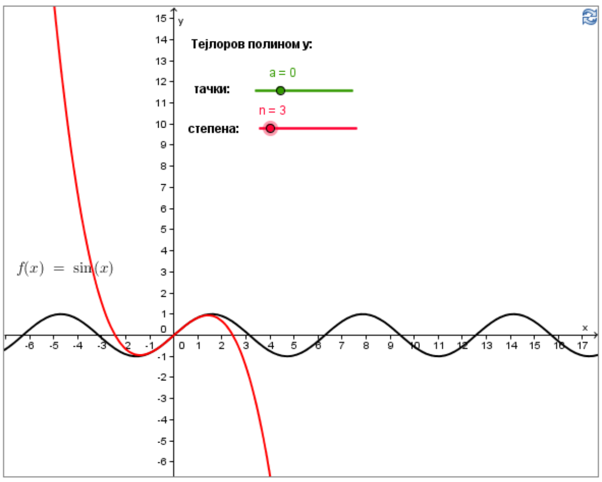
**Теорема 25.** *Нека функција $f(x)$, непрекидна са свим својим изводима до $n$-тог реда закључно у некој околини $U$ тачке $a$, има извод $(n+1)$-ог реда у тој околини. Ако је $x \in U$ и $p \in \mathbf{N}$, онда (за неко $\xi$ које је између $a$ и $x$) важи формула:*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = (\frac{x-a}{x-\xi})^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(\xi).$$

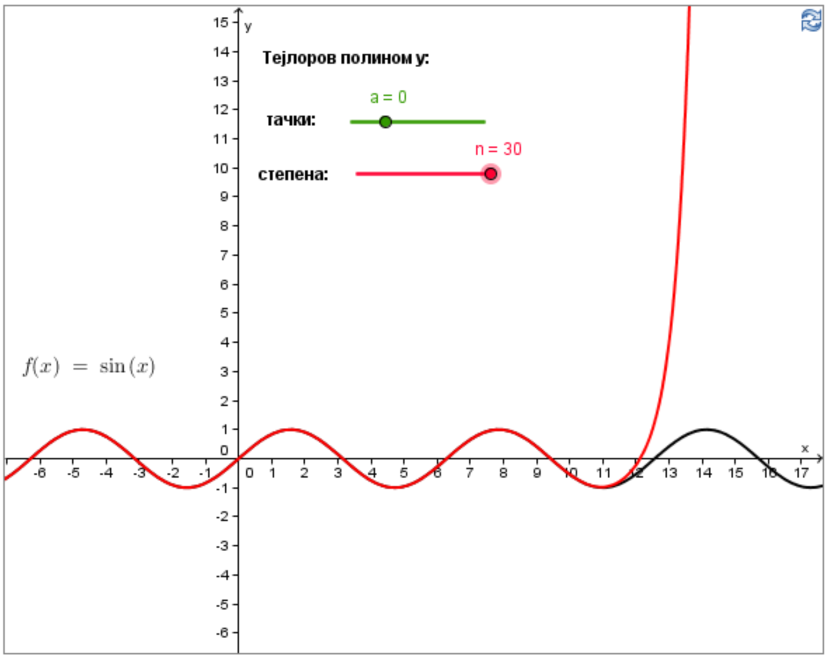
За $a = 0$ у претходној формули, добијамо Маклоренов[8] полином:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$




Слика 6.8. *Илустрација Тејлоровог полинома*

[7] *Brook Taylor* (1685 – 1731), амерички математичар
[8] *Colin Maclaurin*, (1698 – 1746), шкотски математичар




Слика 6.9. *Илустрација Тејлоровог полинома*

При апроксимацији функције $f(x)$ полиномом $P_n(x,a)$ правимо грешку која се назива остатак (детаљније у [2]) и износи:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x,a).$$

Облици остатка $R_n(x)$:

1) **Шлемилх - Рошов облик остатка $R_n(x)$:**

$$R_n(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{p\cdot n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

2) **Лагранжов облик остатка $R_n(x)$ (за $p = n+1, \xi = a + \theta(x-a)$):**

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))$$

3) **Кошијев облик остатка $R_n(x)$ (за $p = 1, \xi = a + \theta(x-a)$):**

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}\cdot(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))$$

4) **Пеанов облик остатка $R_n(x)$:**

$$R_n(x) = o((x-a)^n), \qquad x \to a.$$

## 6.3 Лопиталова правила

**Теорема 26.** *Лопиталово*[9] *правило*

*Нека су функције $f$ и $g$ диференцијабилне у свакој тачки интервала $(a, b)$ и нека су испуњени услови:*

$$g'(x) \neq 0, x \neq c,$$

*функције $f$ и $g$ теже 0 (респективно теже ка $\infty$) када $x$ тежи $c$,*

$$\exists \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*Тада постоји гранична вредност:*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Теорема 27.** *Лопиталово правило*

*Нека су функције $f$ и $g$ диференцијабилне у свакој тачки интервала $(a, \infty)$ и нека су испуњени услови:*

$$g'(x) \neq 0, x \in (\alpha, \infty) \qquad \alpha > a$$

*функције $f$ и $g$ теже* 0 *(респективно теже ка $\infty$) када $x$ тежи $\infty$*

$$\exists \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*Тада постоји гранична вредност:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Пример** 36**.** *Применом Лопиталове теореме израчунати:*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1}.$$

**Решење.**

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x^3 - 3x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{6x - 2}{12x^2 - 6x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

**Пример** 37**.** *Применом Лопиталове теореме израчунати:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

[9] *Guillaume Fransois Antoine*, *Marquis de l'Hopital*, ( 1661 - 1704 ), француски математичар

**Решење.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

**Пример** 38. *Применом Лопиталове теореме израчунати:*

$$\lim_{x\to\infty}x(\frac{\pi}{2}-arctgx).$$

**Решење.**

$$\lim_{x\to\infty}x(\frac{\pi}{2}-arctgx)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-arctgx}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1.$$

**Пример** 39. *Применом Лопиталове теореме израчунати:*

$$\lim_{x\to 0}xlnx.$$

**Решење.**

$$\lim_{x\to 0}xlnx=\lim_{x\to 0}\frac{lnx}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

**Пример** 40. *Применом Лопиталове теореме израчунати:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{3x}}.$$

**Решење.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{3x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{3e^{3x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3e^{3x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{9e^{3x}}=0.$$

## 6.4 Монотоност

**Теорема 28.** *Нека је функција $f$ непрекидна на затвореном интервалу $[a, b]$ и диференцијабилна на отвореном интервалу $(a, b)$.*

*1) Ако је $f'(x) > 0$ за свако $x \in (a, b)$, тада је функција $f$ монотоно растућа на интервалу $[a, b]$.*
*2) Ако је $f'(x) < 0$ за свако $x \in (a, b)$, тада је функција $f$ монотоно опадајућа на интервалу $[a, b]$.*

*Доказ.* Примењујући Лагранжову теорему добијамо да је за све:

$$x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2$$

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2), c \in [x_1, x_2]$$

Ако је $f'(x) > 0$ за свако $x \in (a, b)$, тада важи $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
Што значи да је функција $f$ монотоно растућа на интервалу $[a, b]$.
Аналогно се доказује за монотоно опадајућу функцију $f$. □

**Теорема 29.** *Нека је функција $f$ непрекидна на затвореном интервалу $[a, b]$ и диференцијабилна на отвореном интервалу $(a, b)$.*

*1) Ако је $f$ монотоно растућа на интервалу $[a, b]$, тада је $f'(x) \geq 0$ за свако $x \in (a, b)$.*
*2) Ако је функција $f$ монотоно опадајућа на интервалу $[a, b]$, тада је $f'(x) \leq 0$ за свако $x \in (a, b)$.*

*Доказ.* Доказ теореме следи непосредно из дефиниције првог извода. Ако је функција $f$ монотоно растућа на интервалу $[a, b]$, тада је за све:

$$x, x + h \in [a, b], h \neq 0$$

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

Аналогно се доказује за монотоно опадајућу функцију $f$ . □

Тачке у којима је извод функције једнак нули (или не постоји) се називају **стационарне (или критичне) тачке.**

**Теорема 30.** *Ако је функција $f$ непрекидна на интервалу $(a, b)$ и има екстремну вредност (тј. локални минимум или локални максимум) у тачки $c$, $c \in (a, b)$ , тада је тачка $c$ критична тачка функције $f$ (тј. или је $f'(c) = 0$ или $f'(c)$ не постоји).*

*Доказ.* Доказ следи из Фермаове теореме. □

Геометријска интерпретација наведене теореме је да диференцијабилна функција има хоризонталну тангенту у тачки локалног екстрема.

**Теорема 31.** *Нека је функција $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ непрекидна на затвореном интервалу $[a, b]$, диференцијабилна на отвореном интервалу $(a, b)$ и нека је тачка $c$ критична тачка за функцију $f$.*

1) *Ако је $f'(x) > 0$ за $x \in (a, c)$, а $f'(x) < 0$ за $x \in (c, b)$, тада функција $f$ има локални максимум у тачки $c$.*
2) *Ако је $f'(x) < 0$ за $x \in (a, c)$, а $f'(x) > 0$ за $x \in (c, b)$, тада функција $f$ има локални минимум у тачки $c$.*
3) *Ако је $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$ за све $x \in (a, b)$, тада функција $f$ нема екстремне вредности у тачки $c$.*

**Теорема 32.** *Нека је функција $f$ два пута диференцијабилна на отвореном интервалу $(a, b)$ који садржи тачку $c$ и нека је $f'(c) = 0$.*

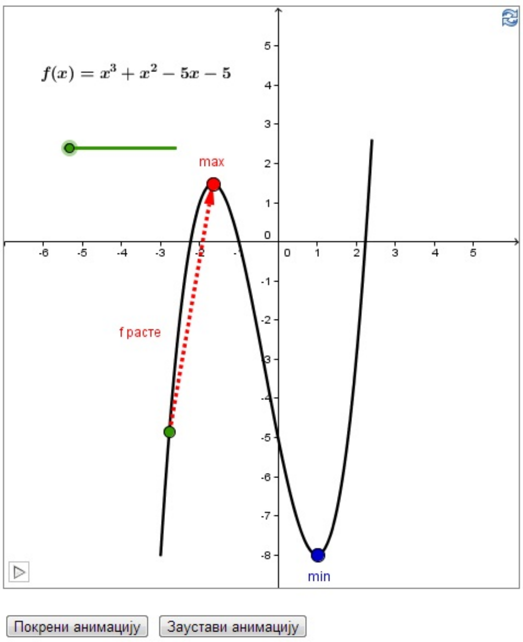
1) *Ако је $f"(c) < 0$ тада функција $f$ има локални максимум у тачки $c$.*
2) *Ако је $f"(c) > 0$ тада функција $f$ има локални минимум у тачки $c$.*

**Пример** 41. *Одредити интервале монотоности и екстремне вредности за функцију $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$.*

**Решење.**

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x + 5)(x - 1)$$

Функција $f(x)$ је позитивна за $x \in (-\infty, -5/3)$ и $x \in (1, \infty)$, па расте на тим интервалима, а опада на интервалу $(-5/3, 1)$. Функција $f$ достиже максимум у тачки $x = -5/3$, а минимум у тачки $x = 1$.




Слика 6.10. *График и монотоност функције $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$*

## 6.5 Конвексност

**Дефиниција:** Нека је функција $f$ диференцијабилна на интервалу $(a, b)$. График функције $f$ је ***конвексан (конкаван)*** на интервалу $(a, b)$, ако за свако $c \in (a, b)$ и за свако $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ важи:

$$f(x) > y_t(x)$$

$$(f(x) < y_t(x))$$

где је $y_t(x) = f(c) + f'(c)(x - c)$ једначина тангенте на криву $y = f(x)$ у тачки $(c, f(c))$.

Ако је график функције $f$ конвексан (конкаван) на интервалу $(a, b)$, каже се да је и функција $f$ **конвексна (конкавна)** на интервалу $(a, b)$.

**Теорема 33.** *Нека је функција $f$ два пута диференцијабилна на интервалу $(a, b)$.*

1) *Ако је $f'' > 0$ за $\forall x \in (a, b)$, тада је функција $f$ конвексна над $(a, b)$.*
2) *Ако је $f'' < 0$ за $\forall x \in (a, b)$, тада је функција $f$ конкавна над $(a, b)$.*

**Дефиниција** 19**.** Нека је функција $f$ непрекидна на интервалу $(a, b)$ и диференцијабилна у тачки $c \in (a, b)$. Тачка $P(c, f(c))$ је ***превојна тачка*** графика функције $f$ ако постоји такво $\delta > 0$ да је функција $f$ конвексна на интервалу $(c - \delta, c)$, а конкавна на интервалу $(c, c + \delta)$ (или: да је функција $f$ конкавна на интервалу $(c - \delta, c)$, а конвексна на интервалу $(c, c + \delta)$).

Из наведене дефиниције следи да је услов: $f''(c) = 0$ потребан да функција има превојну тачку (не и довољан).

**Теорема 34.** *Нека је функција диференцијабилна у тачки $c \in (a, b)$ и има други извод на интервалу $(a, b)$. Тачка $P(c, f(c))$ је превојна тачка графика функције $f$ ако важи један од следећа два услова:*

1) *$f'' > 0$ за $x \in (a, c)$ и $f'' < 0$ за $x \in (c, b)$ или*
2) *$f'' < 0$ за $x \in (a, c)$ и $f'' > 0$ за $x \in (c, b)$.*

**Пример** 42**.** *Дата је функција $f(x) = x^3$, одредити њене интервале конвексности/конкавности и превојне тачке.*

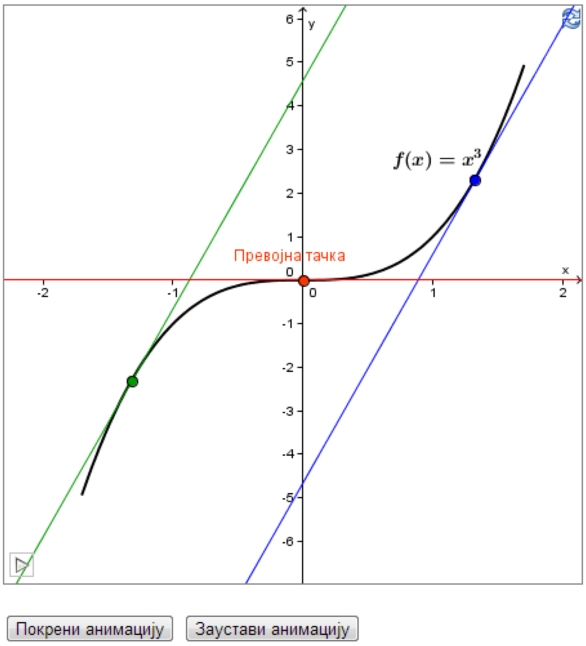
**Решење.**

Други извод функције $f(x) = x^3$ је $f''(x) = 6x$, а како је $f''(0) = 0$ то је испуњен потребан услов да тачка $(0, f(0)) = (0, 0)$ буде превојна тачка графика функције $f$. Функција $f(x) = x^3$ је:

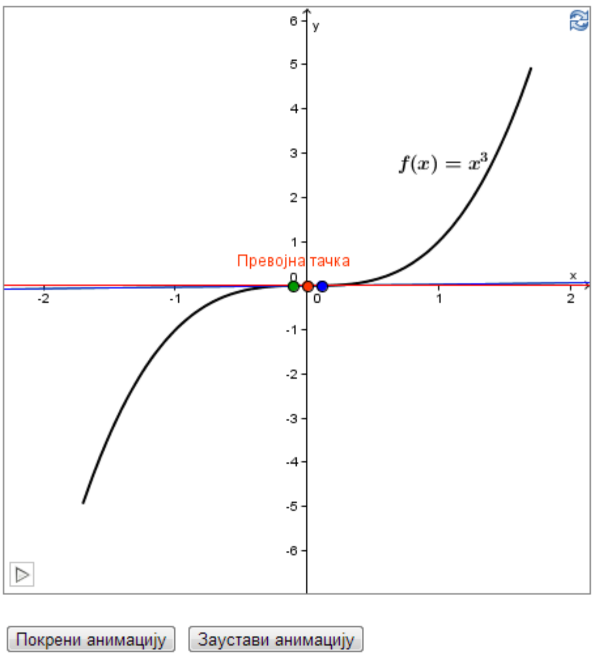
1) **конкавна** за $x > 0$ јер има негативан други извод (све тачке графика функције су испод тангенте било које тачке из овог интервала), а

2) **конвексна** за $x < 0$ јер има позитиван други извод (све тачке графика функције су изнад тангенте било које тачке из овог интервала).

Следи да је тачка $f(0) = (0, 0)$ **превојна тачка** графика функције $f$.




Слика 6.11. *График функције* $f(x) = x^3$

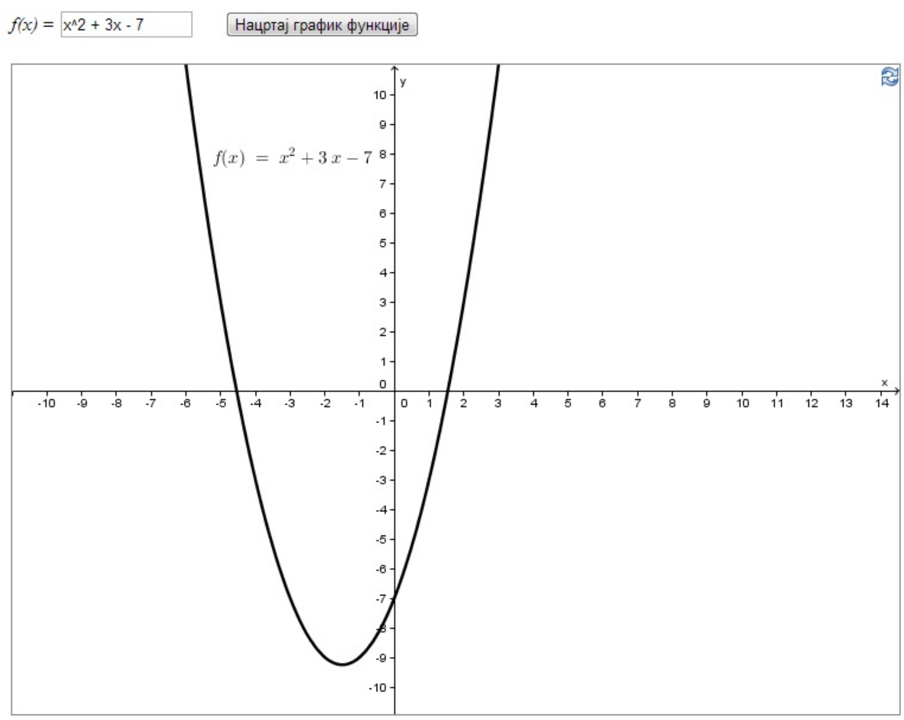



Слика 6.12. *График функције* $f(x) = x^3$

## 6.6 Графици функција

У циљу лакшег и бржег сагледавања својстава функције (дате аналитичким изразом) и скицирања њеног графика, обично се користи следећа схема (као што се може видети у [2]):

1) Одредити област дефинисаности функције.
2) Испитати специјална својства функције (парност, периодичност, ...).
3) Одредити нуле и знак функције.
4) Наћи први и други извод функције.
5) Одредити интервале монотоности и екстремне вредности.
6) Испитати конвексност/конкавност и одредити превојне тачке.
7) Испитати понашање функције на рубу домена; па одредити асимптоте.
8) Одредити остале специфичности функције и скицирати њен график.




Слика 6.13. *Аплет који скицира функцију $f$ коју је задао корисник*

У наставку рада следе примери детаљно испитаних функција са аплетима скицираних графика. Сваки од аплета омогућава визуелни интерактивни приказ одређеног својства функције, уз претходно одобравање корисника.

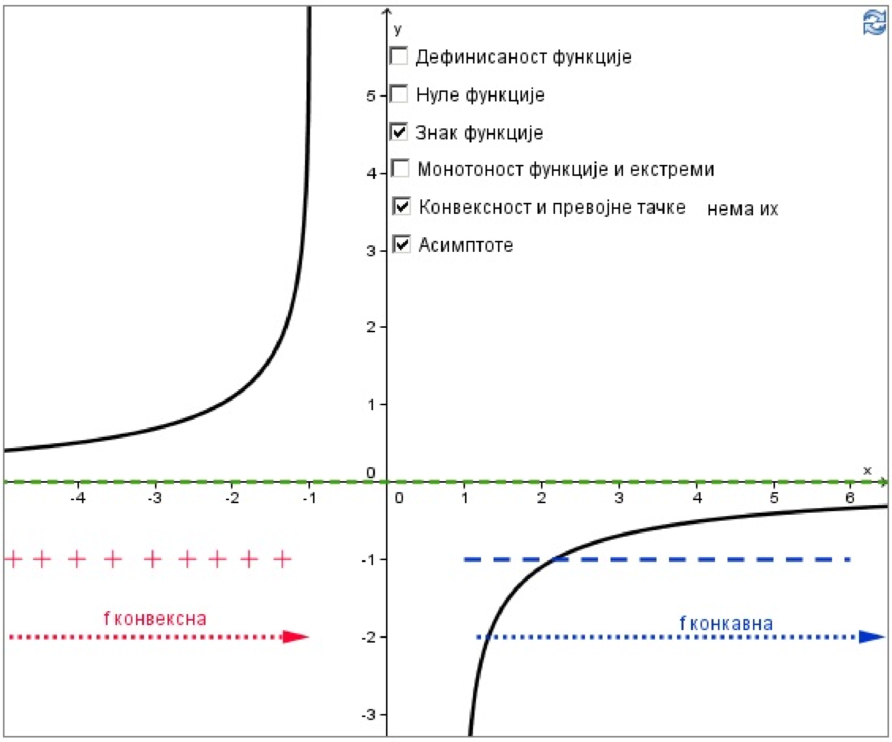
**Пример** 43. *Испитати особине и скицирати график функције:*

$$f(x) = ln\frac{(x-1)}{(x+1)}.$$

Особине функције $f$:

1) **Домен функције** $f$ : је $\mathbf{R}\setminus(-1,1)$
2) **Нуле функције** $f$ : нема их
3) **Знак функције** $f$ : је позитиван за $x<-1$, иначе негативан
4) **Монотоност функције** $f$ : $f'(x) = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$
   па функција $f$ расте за свако $x$ из домена
5) **Екстреми функције** $f$ : нема их
6) **Конвексност/конкавност функције** $f$ : $f''(x) = \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$
   па је функција $f$ конвексна за $x\in(-\infty,-1)$, иначе конкавна
7) **Превојна тачка** функције $f$ : нема их
8) **Асимптота функције** $f$ : је хоризонтална $y=0$

График функције $f$:




Слика 6.14. *График функције* $f(x) = ln\frac{(x-1)}{(x+1)}$

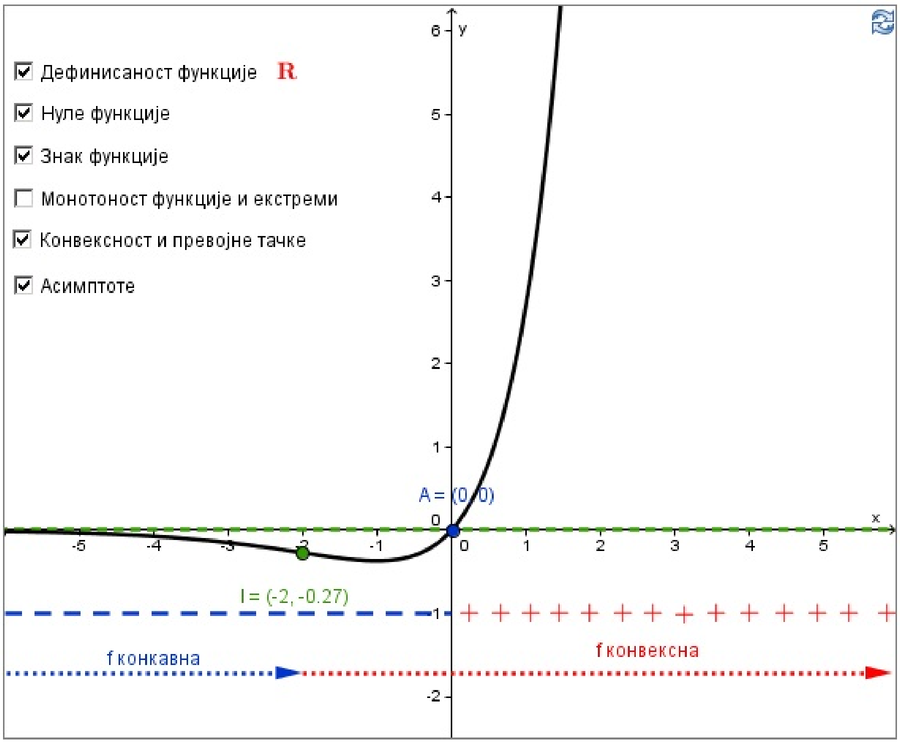
**Пример** 44. *Испитати особине и скицирати график функције:*

$$f(x) = xe^x.$$

Особине функције $f$:

1) **Домен функције** $f$ : је $\mathbf{R}$
2) **Нула функције** $f$ : је у тачки $x = 0$
3) **Знак функције** $f$ : је позитиван за $x > 0$, иначе негативан
4) **Монотоност функције** $f$ : $f'(x) = e^x \cdot (x+1)$
   па функција $f$ опада за $x \in (-\infty, -1)$, иначе расте
5) **Екстрем функције** $f$ : је у тачки $x = -1$, где функција $f$ минимум
6) **Конвексност/конкавност функције** $f$ : $f''(x) = e^x \cdot (x+2)$
   па је функција $f$ конвексна за $x \in (-2, \infty)$, иначе конкавна
7) **Превојна тачка** функције $f$ : је тачка $(-2, f(-2))$
8) **Асимптота функције** $f$ : је хоризонтална $y = 0$

График функције $f$:




Слика 6.15. *График функције* $xe^x$

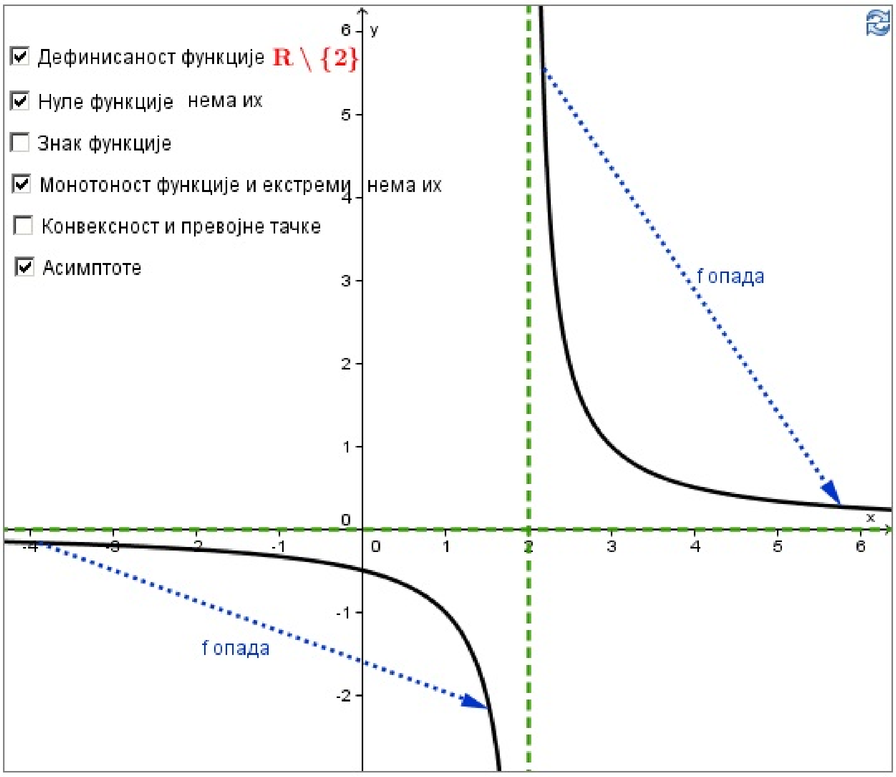
**Пример** 45. *Испитати особине и скицирати график функције:*

$$f(x) = \frac{(x-1)}{(x^2-3x+2)}.$$

Особине функције $f$:

1) **Домен функције** $f$ : је $\mathbf{R} \setminus \{2\}$
2) **Нула функције** $f$ : нема их
3) **Знак функције** $f$ : је позитиван за $x > 2$, иначе негативан
4) **Монотоност функције** $f$ : $f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$
   па функција $f$ опада за свако $x$ из домена
5) **Екстреми функције** $f$ : нема их
6) **Конвексност/конкавност функције** $f$ : $f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$
   па је функција $f$ конвексна за $x \in (2, \infty)$, иначе конкавна
7) **Превојне тачке** функције $f$ : нема их
8) **Асимптоте функције** $f$ : су вертикална $x = 2$ и хоризонтална $y = 0$

График функције $f$:




Слика 6.16. *График функције* $f(x) = \frac{(x-1)}{(x^2-3x+2)}$

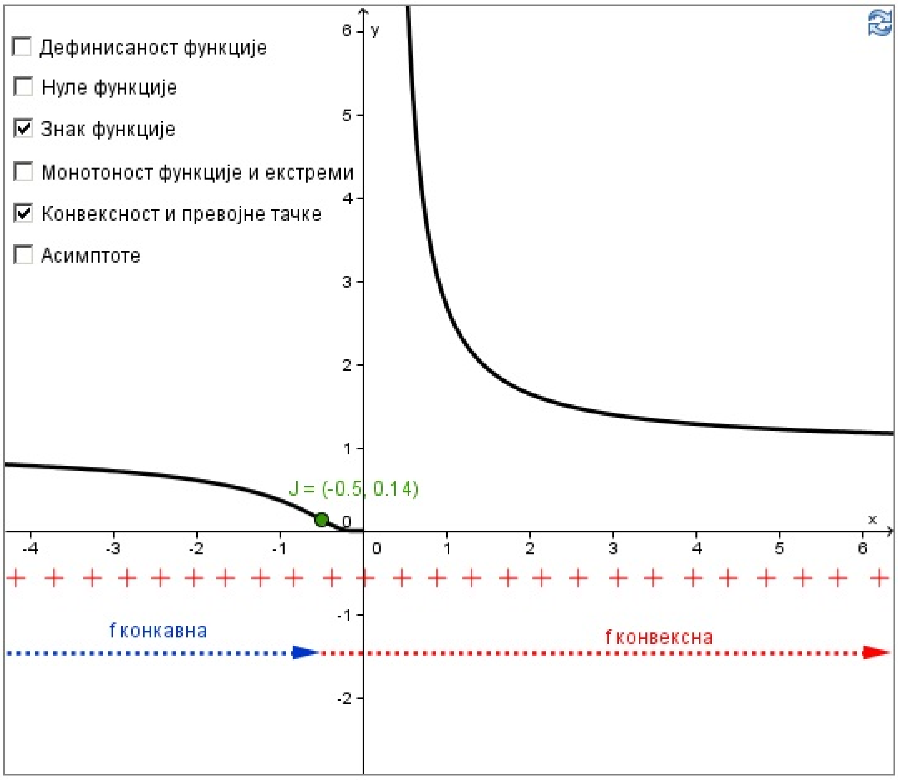
**Пример** 46. *Испитати особине и скицирати график функције:*

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

Особине функције $f$:

1) **Домен функције** $f$ : је $\mathbf{R} \setminus \{0\}$
2) **Нула функције** $f$ : нема их
3) **Знак функције** $f$ : је позитиван за свако $x$
4) **Монотоност функције** $f$ : $f'(x) = \frac{-1}{x^2} \cdot e^x$
   па функција $f$ опада за свако $x$
5) **Екстреми функције** $f$ : нема их
6) **Конвексност/конкавност функције** $f$ : $f''(x) = \frac{1}{x^4} \cdot e^x \cdot (2x+1)$
   па је функција $f$ конвексна за $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$, иначе конкавна
7) **Превојна тачка** функције $f$ : је тачка $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$
8) **Асимптоте функције** $f$ : су вертикална $x = 0$ и хоризонтална $y = 1$

График функције $f$:




Слика 6.17. *График функције* $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

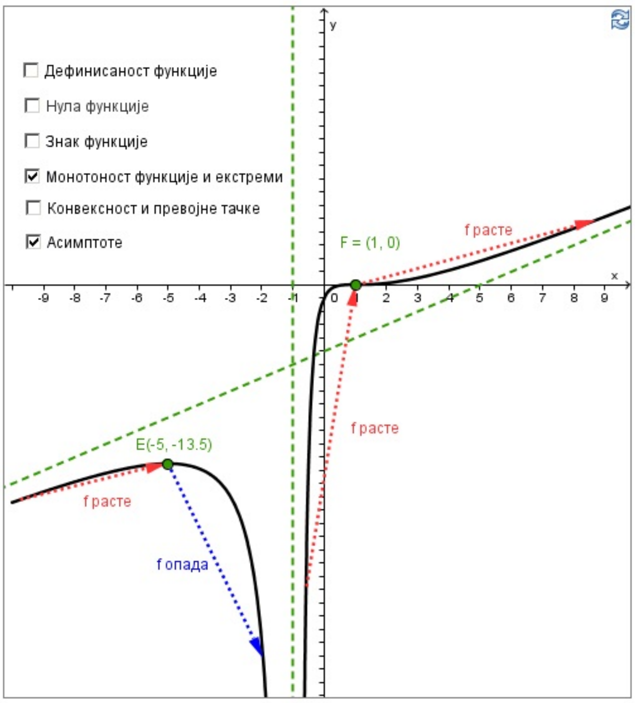
**Пример** 47. *Испитати особине и скицирати график функције:*

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}.$$

Особине функције $f$:

1) **Домен функције** $f$ : је $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$
2) **Нула функције** $f$ : је у тачки $x = 1$
3) **Знак функције** $f$ : је позитиван за $x > 1$, иначе негативан
4) **Монотоност функције** $f$ : $f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$
   па функција $f$ опада за $x \in (-5, 1)$, иначе расте
5) **Екстреми функције** $f$ : су у тачкама $x = -5$ и $x = 1$, где функција $f$
   респективно достиже максимум и минимум
6) **Конвексност/конкавност функције** $f$ : $f''(x) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$
   па је функција $f$ конвексна за $x \in (1, \infty)$, иначе конкавна
7) **Превојна тачка** функције $f$ : је тачка $(1, 0)$
8) **Асимптоте функције** $f$ : су вертикална $x = -1$ и коса $y = x - 5$

График функције $f$:




Слика 6.18. *График функције* $\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

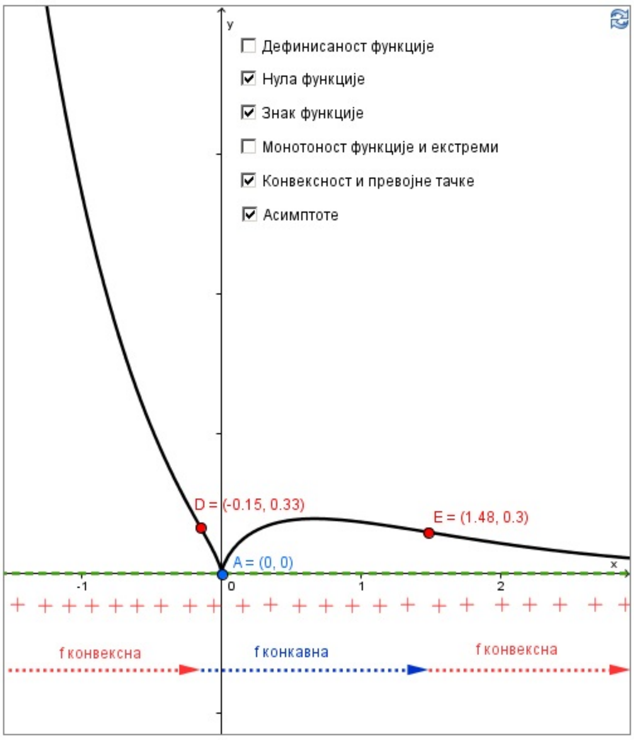
**Пример** 48. *Испитати особине и скицирати график функције:*

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}.$$

Особине функције $f$:

1) **Домен функције** $f$ : је $\mathbf{R}$
2) **Нула функције** $f$ : је у тачки $x = 0$
3) **Знак функције** $f$ : је позитиван за свако $x$
4) **Монотоност функције** $f$ : $f'(x) = \frac{e^{-x}\cdot(2-3x)}{3x^{\frac{1}{3}}}$
   па функција $f$ расте за $x \in (0, \frac{2}{3})$, иначе опада
5) **Екстреми функције** $f$ : су у тачкама $x = \frac{2}{3}$ и $x = 0$, где функција $f$ респективно достиже максимум и минимум
6) **Конвексност/конкавност** функције $f$ : $f''(x) = \frac{e^{-x}\cdot(9x^2-12x-2)}{9x^{\frac{4}{3}}}$
   па је функција $f$ конкавна за: $x \in (\frac{2-\sqrt{6}}{3}, \frac{2+\sqrt{6}}{3})$ иначе конвексна
7) **Превојне тачке функције** $f$ : су тачке: $(\frac{2-\sqrt{6}}{3}, f(\frac{2-\sqrt{6}}{3})), (\frac{2+\sqrt{6}}{3}, f(\frac{2+\sqrt{6}}{3}))$
8) **Асимптота функције** $f$ : је хоризонтална $y = 0$

График функције $f$:




Слика 6.19. *График функције* $f(x) = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$

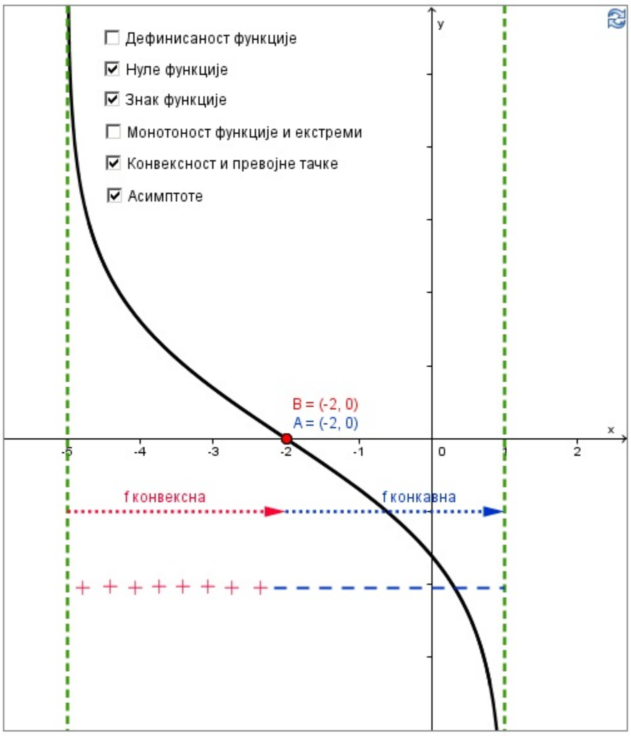
**Пример** 49. *Испитати особине и скицирати график функције:*

$$f(x) = \ln\frac{1-x}{x+5}.$$

Особине функције $f$:

1) **Домен функције** $f$ : је $(-5, 1)$
2) **Нула функције** $f$ : је у тачки $x = -2$
3) **Знак функције** $f$ : је позитиван за $x < -2$, иначе негативан
4) **Монотоност функције** $f$ : $f'(x) = \frac{-6}{(1-x)\cdot(x+5)}$
   па функција $f$ опада за $x \in (-5, 1)$
5) **Екстреми функције** $f$ : нема их
6) **Конвексност/конкавност функције** $f$ : $f''(x) = \frac{6(-2x-4)}{(1-x)^2\cdot(x+5)^2}$
   па је функција $f$ конвексна за $x \in (-5, -2)$, иначе конкавна
7) **Превојна тачка функције** $f$ : је тачка $(-2, 0)$
8) **Асимптоте функције** $f$ : су вертикалне $x = -5$ и $x = 1$

График функције $f$:




Слика 6.20. *График функције* $f(x) = \ln\frac{1-x}{x+5}$

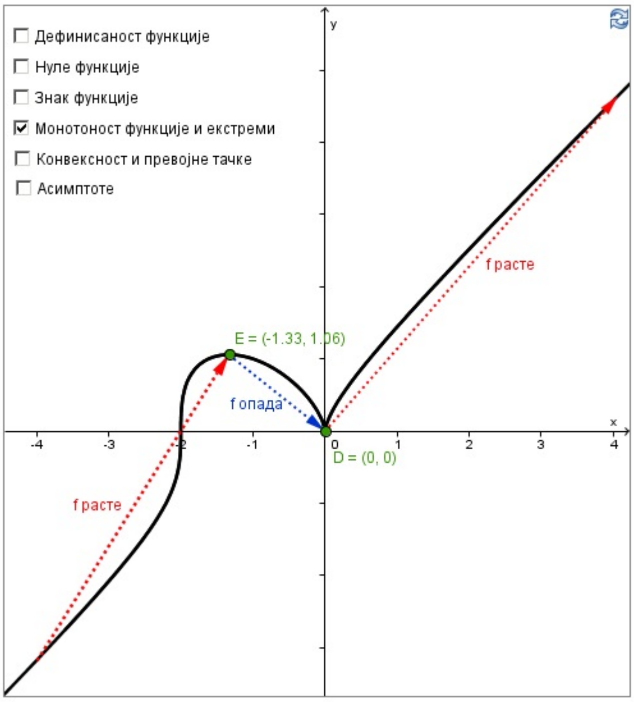
**Пример** 50. *Испитати особине и скицирати график функције:*

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}.$$

Особине функције $f$:

1) **Домен функције** $f$ : је $\mathbf{R}$
2) **Нуле функције** $f$ : су у тачкама $x = -2$ и $x = 0$
3) **Знак функције** $f$ : је позитиван за $x > -2$, иначе негативан
4) **Монотоност функције** $f$ : $f'(x) = \frac{3x+4}{3\sqrt[3]{x\cdot(x+2)^2}}$
   па функција $f$ опада за $x \in (-\frac{4}{3}, 0)$
5) **Екстреми функције** $f$ : су у тачкама $x = -\frac{4}{3}$ и $x = 0$ на којима
   функција $f$ достиже, респективно, максимум и минимум
6) **Конвексност/конкавност** функције $f$ : $f''(x) = \frac{-8}{9x\cdot(x+2)\cdot\sqrt[3]{x\cdot(x+2)^2}}$
   па је функција $f$ конвексна за $x \in (-\infty, -2)$, иначе конкавна
7) **Превојна тачка функције** $f$ : је тачка $(-2, 0)$
8) **Асимптота функције** $f$ : је коса асимптота $y = x + 2/3$

График функције $f$:




Слика 6.21. *График функције* $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 2x^2}$

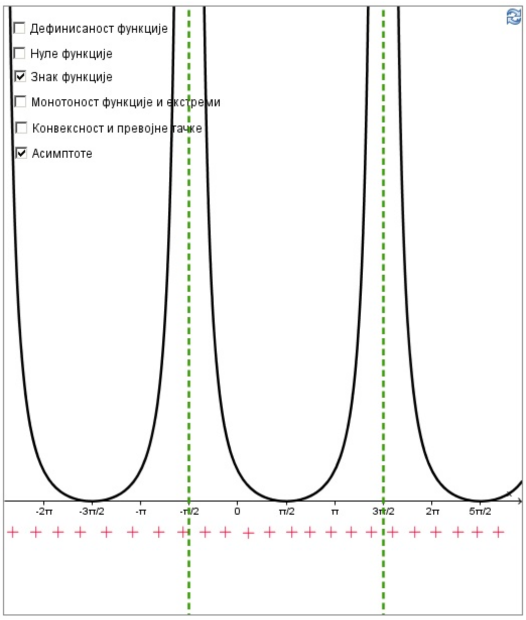
**Пример** 51. *Испитати особине и скицирати график функције:*

$$f(x) = \frac{1 - sinx}{1 + sinx}.$$

Особине функције $f$:

1) **Домен функције** $f$ : је $\mathbf{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$
2) **Нуле функције** $f$ : су у тачкама $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$
3) **Знак функције** $f$ : је позитиван за свако $x$ из домена
4) **Период функције** $f$ : је $2\pi$
5) **Монотоност функције** $f$ : $f'(x) = \frac{-2cosx}{(1+sinx)^2}$
   па функција $f$ опада за $x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, а расте за $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$
6) **Екстреми функције** $f$ : су у тачкама $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ на којима функција $f$ достиже минимум
7) **Конвексност/конкавност** функције $f$ : $f''(x) = \frac{-2sin^2x+2sinx+4}{(1+sinx)^3}$
   па је функција $f$ конвексна за свако $x$ из домена
8) **Превојна тачка функције** $f$ : нема их
9) **Асимптоте функције** $f$ : су вертикалне асимптоте $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

График функције $f$:




Слика 6.22. *График функције* $f(x) = \frac{1-sinx}{1+sinx}$

# 7 ГеоГебра

**ГеоГебра** је програмски пакет иницијално намењен за учење и интерактивну наставу математике (геометрије, алгебре, анализе, статистике,...) за узраст од основне школе до универзитетског нивоа.

Слика 7.1 *ГеоГебра знак*

Развијен је од стране **Маркуса Хоенвартера**[10] и међународног тима програмера. Овај програмски пакет је једноставан за употребу, а његово коришћење олакшава и постојање: бесплатне инсталације, упутства за употребу и помоћи при раду, као и мноштво готових материјала, чији се број процењује на више хиљада.

Програмски пакет ГеоГебра је програм намењен за динамичку геометрију, а са друге стране је у програм могуће алгебарски уности: координате тачки, једначине правих и др. при чему су ова два уноса међусобно зависна.

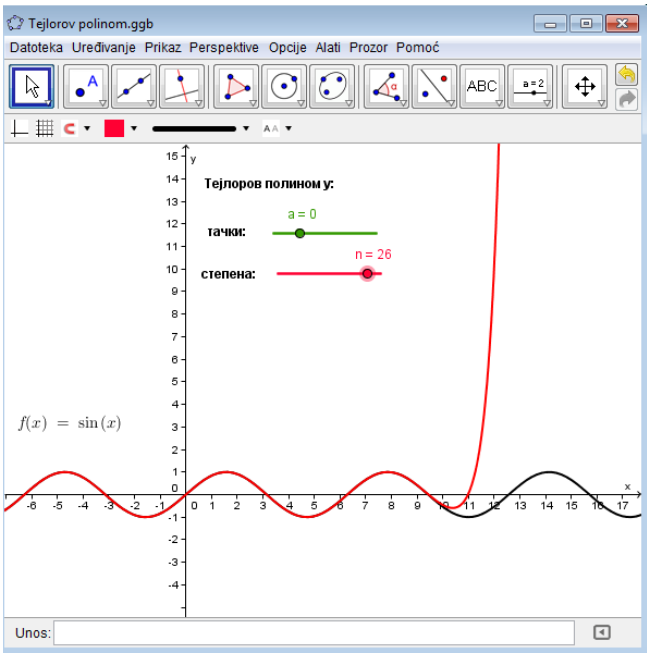
Комуникација и зависност ова два приступа су основне карактеристике ГеоГебре (отуда јој и назив: ,,Гео” - од геометрија и ,,Гебра” - од алгебра) која корисницима омогућава лакше савладавање, визуелизацију и повезивање разних математичких концепата.

Круцијалне карактеристике овог програма које омогућавају продуктивнији процес математичке едукације на свим нивоима су: визуелизација апстрактних концепата, повезивање различитих области математике и мотивација корисницима у учењу. Геогебра омогућава да, кроз интерактивност у сазнавању разних концепта, учење постане откриће. Тиме се постиже предуслов за мотивисаност ученика, а и популаризација математике и науке уопште.

Данас су примене ГеоГебре изван граница употребе у настави; ГеоГебра се користи и за моделовање садржаја попут аутоматског кретања и тродимензионих појава и објеката.

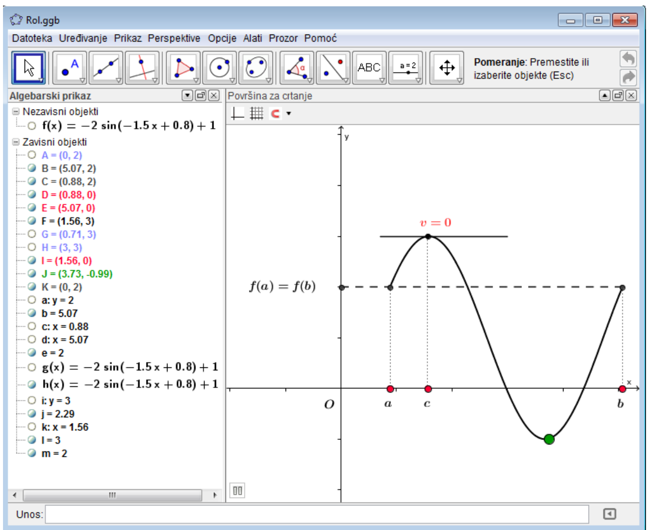
[10] Markus Hohenwarter

**Пример** 52. *Визуелизација апстрактних концепата*




Слика 7.2. *Анимација Тејлоровпг полинома*

**Пример** 53. *Повезивање различитих области математике*




Слика 7.3. *Алгебарски и геометријски приказ анимације Ролове теореме у ГеоГебри*

# 8 Закључак

Истраживања о визуелизацији у математичком образовању развила су се на основу студија из психологије још касних 1970 - их година.
Од тог периода извршена су многа истраживања ( Antonietti и Angelini; Bakar и Tall; Bodner и Goldin; Hershkowitz, Friedlander и Dreyfus; Lopez-Real; Mariotti; O'Brien; Presmeg; Shama и Dreyfus; Yerushalmy и Gafni; Zimmerman и Kaningem; 1991), Bishop (1983), Kosslyn (1980), Krutetskii (1976), Presmeg (1986), Gutierez (1996), Ierushalmi, Shternberg, и Galad (1999)) која се односе на: визуелизацију у решавању проблема и учењу; визуелну репрезентацију у учењу математике; визуелизацију у учењу 3 - димензионалне геометрије; визуелизацију у тригонометрији; визуелизацију у статистици; визуализацију као средство за смислено решавање проблема у алгебри; визуелни аспект компјутерске технологије у динамичком учењу математике и др. и која сведоче о корисности визуелизације у учењу и подучавању математичких садржаја (као што се детаљно може видети у [10]).

Мастер рад је конципиран да олакша учење, разумевање и подучавање области математичке анализе - диференцијалног рачуна, визуелизацијом ове теме. Осмишљен је као помоћно наставно средство које ће подучавање учинити продуктивнијим и интерактивнијиим а, са великом надом, и учење занимљивијим. У том циљу наведени су конкретни предлози за унапређење наставног процеса. Акценат у раду је стављен и на популаризацију математике, па су скициране везе између теорије, задатака и примене у реалном контексту. Предност оваквог облика рада (електронске лекције) је доступност материјала у сваком тренутку за учење, подучавање и проверу знања кроз интерактивне садржаје. Прилагођавање теме, којом се рад бави, различитим узрастима ученика у средњошколском и универзитетском образовању се реализовао уз помоћ програма за динамичку визуеализацију математичких појмова ,,ГеоГебра". Са друге стране, како се највећи део материјала заснива на [1], рад се првенствено базирао на потребама студената природних наука за овом темом.

Као прилог, у уводу су наведена истраживања која доказују значај и потребност визуелизације математичких концепата, али за даља разматрања ипак остаје отворено питање колико визуализација примењена у овом раду помаже математичку апстракцију и генерализацију обрађене области.

# Литература

[1] Хаџић Олга, Такачи Ђурђица, *,,Математика за студенте природних наука"*, Нови Сад, Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет у Новом Саду, 1998.

[2] Аднађевић Душан, Каделбург Зоран, *,,Математичка анализа* 1*"*, Београд, Математички факултет, 2008.

[3] Божић Милан, *,,Преглед историје и филозофије математике"*, Београд, Завод за уџбенике и наставна средства, 2002.

[4] Станић Зоран, *,,Увод у нумеричку математику"* - скрипта, Математички факултет, Београд, 2010.

[5] Ивановић Живорад, Огњановић Срђан, *,,Математика* 4*: збирка задатака и тестова за* 4*. разред гимназија и техничких школа"*, Круг, Београд, 2005.

[6] Ивановић Живорад, Огњановић Срђан, *,,Математика* 2*: збирка задатака и тестова за* 2*. разред гимназија и техничких школа"*, Круг, Београд, 2004.

[7] Ивановић Живорад, Огњановић Срђан, *,,Математика* 1*: збирка задатака и тестова за* 1*. разред гимназија и техничких школа"*, Круг, Београд, 2003.

[8] Смирнов В. И, *,,Курс виышей математики"*, Наука, Москва, 1974.

[9] Ћорић Бранислав, Салатић Ратко, *,,Динамика грађевинских конструкција"*, Грађевинска књига, Београд, 2011

[10] Истраживања о визуелизацији у математичком образовању, http://www.kaputcenter.umassd.edu