UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

INVARIJANTE U GALILEJEVOJ GEOMETRIJI RAVNI

MASTER RAD

Autor
Diana Pavlović

Mentor
dr Miroslava Antić

Beograd
05.06.2013.

Sadržaj

Uvod

Geometrija je nauka koja je nastala još u najstarijim ljudskim civilizacijama. Napredovanjem civilizacija napredovao je i pogled na geometriju. Do dokaza geometrijskih tvrđenja dolazilo se na različite načine. Ove metode su se razvijale paralelno sa razvojem društva. U najstarijim civilizacijama do geometrijskih zakonitosti se dolazilo indukcijom. Induktivni metod je bio prisutan u geometriji sve dok vodeću ulogu u kulturi i nauci nisu preuzeli stari Grci. Tada razvoj geometrije kreće potpuno novim putem. Induktivni metod zamenio je deduktivni metod. Deduktivnim metodom su se na potpuno novi način dokazivale geometrijske zakonitosti. Iz deduktivnog metoda, pojavom atinske škole "Akademije", starogrčkog filozofa Platona, nastala je geometrija zasnovana na aksiomama. Godinama kasnije jedan od istaknutih matematičara tog doba je objedinio sva saznanja iz geometrije, do tada otkrivena, u jednu knjigu. Taj matematičar je Euklid a njegova knjiga nosi poznato ime "Elementi". Kao Platonov učenik, Euklid je napisao knjigu "Elementi" i time postavio temelje geometrije zasnovane na aksiomama. Ovako zasnovana geometrija se izučavala sve do pojave Feliksa Klajna koji je 1872. godine dao još jedan pogled na geometriju. Prema Klajnovom programu neku geometriju možemo posmatrati kao skup objekata i njihovih svojstava invarijantnih pri (tranzitivnom) dejstvu neke grupe transformacija. Jednu takvu grupu transformacija predstavljaju Galilejeve transformacije. Galileo Galilej je do ovih transformacija došao baveći se svojim principom relativnosti: *Nijednim mehaničkim eksperimentom izvedenim u datom fizičkom sistemu ne može se otkriti ravnomerno kretanje tog sistema.*

Cilj ovog rada je da predstavimo model Galilejeve geometrije u euklidskoj ravni i prikažemo sličnosti i razlike između Galilejeve i euklidske dvodimenzione geometrije. U prvom poglavlju videćemo da su Galilejeve transformacije jedna podgrupa afinih transformacija. Zatim su prikazani koncepti tačaka i pravih sa svojim osobinama. Videćemo specijalnu ulogu pravih paralelnih $y-$osi i specijalni oblik krugova. Ono što je specifično za ovu geometriju je pojava principa dualnosti. U trećem poglavlju bavićemo se njegovom primenom kroz različite osobine četvorouglova i trouglova, a zatim videćemo i konkretan dokaz da ovaj princip stvarno važi. U poslednjoj sekciji ovog rada obrađeni su ciklovi, i njihove osobine, koji su u osnovi euklidske parabole.

Na kraju, želela bih da se zahvalim svom mentoru dr Miroslavi Antić za odabir teme i pomoć pri pisanju ovog rada, kao i članovima komisije, dr Zoranu Rakiću i dr Mirjani Đorić, na odličnim sugestijama koje su mi mnogo pomogle.

1 Afine transformacije

1.1 Afini prostor i potprostor. Afine transformacija

Definicija 1.1 Pod afinim prostorom nad poljem $\mathbb{K}$ podrazumevamo svaku uređenu trojku $(\mathcal{A}, \mathbb{V}, +)$, takvu da je:

- $\mathcal{A}$ - neprazan skup čije elemente zovemo tačkama,
- $\mathbb{V}$ - vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$,
- $+ : \mathcal{A} \times \mathbb{V} \to \mathcal{A}$ - preslikavanje $(A, u) \to A + u$ koje zadovoljava sledeće aksiome:

  A1 $(\forall A \in \mathcal{A})\ \ A + 0 = A$,

  A2 $(\forall A \in \mathcal{A})(\forall u, v \in \mathbb{V})\ \ (A + u) + v = A + (u + v)$,

  A3 $(\forall A, B \in \mathcal{A})(\exists! u \in \mathbb{V})\ \ B = A + u$.

Vektorski prostor $\mathbb{V}$ nazivamo direktrisom afinog prostora $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathbb{V}, +)$. Dimenzija afinog prostora $\mathcal{A}$ je:

$$\dim \mathcal{A} = \dim \mathbb{V}.$$

Definicija 1.2 Neka je $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mathbb{V}, +)$ bilo koji afini prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Za neprazan skup Π tačaka iz $\mathcal{A}$ kažemo da je jedan *afini potprostor* ili samo *potprostor* u tom afinom prostoru, ako postoji i neki vektorski potprostor $\mathbb{U}$ od $\mathbb{V}$, takav da je $(\Pi, \mathbb{U}, +)$ jedan afini prostor.

Neka je $\dim \mathcal{A} = n$, ako je

- $\dim \Pi = 1$, tada je afini potprostor Π prava,
- $\dim \Pi = 2$, tada je afini potprostor Π ravan,
- $\dim \Pi = n - 1$, tada je afini podprostor Π hiperravan.

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ bilo koji afini prostori nad istim poljem $\mathbb{K}$, sa direktrisama $\mathbb{V}$ i $\mathbb{W}$ redom. Ako je P fiksna tačka iz $\mathcal{A}$, za svaki vektor u iz $\mathbb{V}$ postoji tačno jedna tačka M iz $\mathcal{A}$ za koju je $P + u = M$. Neka je dato preslikavanje $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Postoji jedinstveni vektor $w \in \mathbb{W}$ takav da je $f(P) + w = f(M)$. Tada je sa

$$L_P(u) = w$$

definisano i jedno preslikavanje direktrise $\mathbb{V}$ afinog prostora $\mathcal{A}$ u direktrisu $\mathbb{W}$ afinog prostora $\mathcal{B}$ koje je pridruženo tački P, a možemo pisati

$$f(P + u) = f(P) + L_P(u) \qquad (u \in \mathbb{V}).$$

Pretpostavimo da je za bar jednu tačku $Q \in \mathcal{A}$ odgovarajuće pridruženo preslikavanje direktrisa L_Q linearno. Neka je $v_0 \in \mathbb{V}$, takav da je $Q + v_0 = P$, i za proizvoljnu tačku $M \in \mathcal{A}$ neka je $u_M \in \mathbb{V}$, takav da važi $P + u_M = M$. Tada je i $Q + (v_0 + u_M) = P + u_M = M$. Dalje sledi

$$\begin{aligned} f(P) + L_P(u_M) &= f(M) \\ &= f(Q + (v_0 + u_M)) \\ &= f(Q) + L_Q(v_0 + u_M) \\ &= (f(Q) + L_Q(v_0)) + L_Q(u_M) \\ &= f(P) + L_Q(u_M). \end{aligned}$$

Dakle, ako je za bar jednu tačku $Q \in \mathcal{A}$ preslikavanje L_Q linearno tada je za svaku tačku $P \in \mathcal{A}$, $L_P = L_Q$, odgovarajuće preslikavanje direktrisa i ne zavisi od izbora tačke. Uočimo da je afino preslikavanje na jedinstven način određeno svojim linearnim delom i slikom jedne tačke.

Definicija 1.3 Za preslikavanje $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ afinog prostora $\mathcal{A}$ u afini prostor $\mathcal{B}$, nad istim poljem $\mathbb{K}$ i sa direktrisama $\mathbb{V}$ i $\mathbb{W}$, kažemo da je *afino preslikavanje*, ako je, za bar jednu tačku P iz $\mathcal{A}$, njoj pridruženo preslikavanje $L_P : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ linerano.

Definicija 1.4 Bijektivno preslikavanje $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ naziva se i *afinom transformacijom prostora* $\mathcal{A}$.

Stav 1.1 *Kompozicija dve afine transformacije istog prostora je afina transformacija*

Dokaz: Neka su f i g dve afine transformacije afinog prostora $\mathcal{A}$, L_f i L_g njihovi linearni delovi, $P \in \mathcal{A}$, proizvoljna tačka i u proizvoljni vektor direktrise prostora. Tada je

$$f \circ g(P + u) = f(g(P) + L_g(u)) = f(g(P)) + L_f \circ L_g(u),$$

kako je $L_f \circ L_g$ linearno preslikavanje sledi da je $f \circ g$ afina transformacija. ∎

Dakle, linearni deo kompozicije afinih preslikavanja je kompozicija odgovarajućih linearnih delova. Takođe, preslikavanje f je bijektivno ako i samo ako je bijektivan njegov linearni deo.

1.2 Afina preslikavanja euklidske ravni

Skup $\mathbb{R}^2$ uređenih parova realnih brojeva je jedan model euklidske geometrije ravni. Naime, elementi $\mathbb{R}^2$, odnosno tačke i podskupovi $\mathbb{R}^2$ su oblika

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | ax + by + c = 0\}, \text{gde su } \ a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0,$$

odnosno prave, zadovoljavaju aksiome euklidske geometrije ravni. Naglasimo, ako su $M = (x_1, y_1)$ i $N = (x_2, y_2)$ tačke $\mathbb{R}^2$, tada još kažemo i da su (x_1, y_1) i (x_2, y_2), redom, koordinate tačaka M i N i definišemo funkciju rastojanja tačaka na sledeći način $d(M, N) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Takođe kažemo da su parovi tačaka (A, B) i (C, D) podudarni ako je $d(A, B) = d(C, D)$.
Euklidska ravan $\mathbb{R}^2$ je i dvodimenzioni afini prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Zapravo, skup uređenih parova realnih brojeva $\mathbb{R}^2$ sa operacijama:

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

datih sa:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \text{ i } \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

čini i jedan dvodimenzioni vektorski prostor. Dalje,$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, +)$, skup tačaka $\mathbb{R}^2$, vektorski prostor $\mathbb{R}^2$ i operacija koja njihov proizvod slika u skup tačaka $\mathbb{R}^2$, koju ćemo isto označiti sa $+$, a datu sa $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v), x, y, u, v \in \mathbb{R}$, čine dvodimenzioni afini prostor nad skupom realnih brojeva. Njegov jednodimenzioni potprostor koji sadrži tačku (x_0, y_0) ima direktrisu razapetu vektorom oblika $(u, v), u^2 + v^2 \neq 0$, pa tačka (x, y) pripada tom potprostoru ako je $x = x_0 + tu, y = y_0 + tv$, za neko $t \in \mathbb{R}$, odakle sledi da je jednodimenzioni potprostor opisan jednačinom $v(x - x_0) = u(y - y_0)$, odnosno euklidske prave su jednodimenzioni afini potprostori $\mathbb{R}^2$.
Jedna linearna transformacija vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$ data je u koordinatama sa

$$\begin{aligned} L:\ x' &= a_{11}x + a_{12}y, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned}$$

Označimo sa O tačku sa koordinatama $(0, 0)$ i neka je $P(p_1, p_2)$ proizvoljna tačka, $(p_1, p_2) = 0 + (p_1, p_2)$. S obzirom da je afina transformacija ravni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data sa $f(P) = f(O) + L(p_1, p_2)$ sledi da je afina transformacija u koordinatama data sa

$$\begin{aligned} f:\ x' &= a_{11}x + a_{12}y + q_1, \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + q_2. \end{aligned}$$

Ove relacije možemo i matrično zapisati

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

uz uslov $\det(a_{ij} \neq 0), a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, q_1, q_2 \in \mathbb{R}$, odnosno

$$X' = AX + q,$$

gde su X i X' kolone koordinata tačaka M i M', $q = (q_1, q_2)^T$. Matrica $A = (a_{ij})$ predstavlja *linearni deo afinog preslikavanja*, a vektor q naziva se *vektor translacije.* Kolone matrice A su koordinate slika vektora $(1, 0)$ i $(0, 1)$, redom. Afinu transformaciju možemo predstaviti i matricom

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & q_1 \\ a_{21} & a_{22} & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

koju nazivamo matricom afine transformacije. Pomoću nje afina transformacija se može zapisati na sledeći način

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & q_1 \\ a_{21} & a_{22} & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ako su $\hat{L}_f$ i $\hat{L}_g$, redom, matrice afinih transformacija f i g afine ravni, a $\hat{L}_{f\circ g}$ matrica afine transformacije $f \circ g$, direktno sledi da važi

$$\hat{L}_{f\circ g} = \hat{L}_f \circ \hat{L}_g.$$

Stav 1.2 *Afine transformacije imaju sledeće osobine:*

1. *preslikavaju prave na prave, a krive drugog reda na krive drugog reda,*
2. *čuvaju razmeru dve kolinearne duži.*
3. *čuvaju paralelnost (slika paralelograma je paralelogram).*
4. *postoji afina transformacija koja slika jedan trougao u drugi proizvoljan trougao.*
5. *ako je F' slika figure F pri nekoj afinoj transformaciji f, tada će za njihove površine važiti $P(F) : P(F') = |detA|$.*

Dokaz:
1. Kako je u (1) $\det(a_{ij}) \neq 0$, koordinate x i y mogu se na jedinstveni način, i to linearno izraziti preko x' i y', te će dobijene formule, koje u koordinatama izražavaju inverzno preslikavanje biti formule afine transformacije.
Neka je

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

inverzna transformacija datoj. Jednačine:

$$ax + by + c = 0, \;\; a^2 + b^2 \neq 0$$

i

$$c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + 2c_{13}x + 2c_{23}y + c_{33} = 0, \;\; \det(c_{ij}) \neq 0$$

su jednačine prave i nedegenerisane krive drugog reda, redom. Tada je slika date prave data sa

$$(ab_{11} + bb_{21})x' + (ab_{12} + bb_{22})y' + ar_1 + br_2 = 0.$$

Kako je matrica (b_{ij}) invertibilna a vektor (a, b) nije nula vektor, očigledno je i da koeficijenti uz x' i y' ne mogu oba biti nula.
Neka je

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & r_1 \\ b_{21} & b_{22} & r_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tada afinu transformaciju možemo zapisati i sa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{B} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix},$$

dok je jednačina krive data sa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T (c_{ij}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Dakle, slika krive je data sa

$$\left(\overline{B}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}\right)^T (c_{ij})\overline{B} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

odnosno

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}^T \overline{B}^T (c_{ij})\overline{B} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Kako su $\overline{B}$ i (c_{ij}) nedegenerisane matrice reda 3, zaključujemo da je dobijeni skup tačaka opisan jednačinom drugog reda i da pri tom predstavlja nedegenerisanu krivu drugog reda.

2. Neka su A, B, C kolinearne tačke i λ razmera duži njima određena, tj. $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Neka su A', B', C' njihove slike pri afinoj transformaciji f i neka je L njen linearni deo. Tada važi:

$$\overrightarrow{A'C'} = L(\overrightarrow{AC}) = L(\lambda\overrightarrow{CB}) = \lambda L(\overrightarrow{CB}) = \lambda\overrightarrow{C'B'}.$$

3. Paralelne prave određene su kolinearnim vektorima $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2} = \lambda\overrightarrow{v_1}$. Njihove slike su vektori $L(\overrightarrow{v_1})$ i $L(\overrightarrow{v_2}) = \lambda L(\overrightarrow{v_1})$ koji su takođe kolinearni. Dakle, slike paralelnih pravih su paralelne prave.

4. Neka je $A(0,0), B(1,0), C(0,1)$. Dokažimo da se trougao ABC može preslikati na proizvoljan trougao $A'B'C'$. Vektor $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{e_1}$ je prvi bazni vektor, a njegova slika je vektor $\overrightarrow{A'B'}$. Vektor $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{e_2}$ je drugi bazni vektor, a njegova slika je $\overrightarrow{A'C'}$. Tačka A je koordinatni početak, a njena slika je tačka A'. Dakle, prva i druga kolona matrice su koordinate vektora $\overrightarrow{A'B'}$ i $\overrightarrow{A'C'}$, a koordinate vektora translacije su koordinate tačke A'. Dakle odredili smo preslikavanje f_1 koje slika trougao ABC na $A'B'C'$. Slično možemo dobiti preslikavanje f_2 koje slika trougao ABC na trougao $A''B''C''$. Kompozicija $f_2 \circ f_1^{-1}$ je preslikavanje koje slika trougao $A'B'C'$ na $A''B''C''$.

5. Translacija ne menja površinu figura. Dovoljno posmatrati kako linearni deo menja površinu. Posmatrajmo kvadrat ivice jedan (i površine jedan) čiji su vektori ivica upravo bazni vektori $\overrightarrow{e_1}$ i $\overrightarrow{e_2}$. On se preslikava u paralelogram čiji su vektori ivica $\overrightarrow{a_1} = (a_{11}, a_{21})$ i $\overrightarrow{a_2} = (a_{12}, a_{22})$, a to su zapravo kolone matrice A. Površina paralelograma razapetog tim vektorima je

$$|(a_{11}, a_{21}, 0) \times (a_{12}, a_{22}, 0)| = |detA|.$$

Dakle u tom slučaju tvrđenje važi. Ako ivicu kvadrata reskaliramo $\lambda > 0$ puta, reskaliraće se i površina kvadrata, ali i paralelograma λ^2 puta, pa je odnos površina opet jednak $|detA|$. Kako svaki lik možemo aproksimirati kvadratima, dobijemo da tvrđenje važi u opštem slučaju. ∎

1.2.1 Translacija i transvekcija

1. Translacija $\tau_{\overrightarrow{q}}$.

Translacija $\tau_{\overrightarrow{q}}(x,y) = (x',y')$ za vektor $\overrightarrow{q} = (q_1,q_2)$ je transformacija data formulama:

$$x' = x + q_1, \quad y' = y + q_2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Matrični zapis ove transformacije glasi:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Matrica ove transformacije $\tau_{\overrightarrow{q}}$ je : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dakle translacija je afina transformacija, njen linearni deo je identitet i pri tom je $|\det \tau_{\overrightarrow{q}}| = 1$.

Ako je f proizvoljna afina transformacija ravni, sa linearnim delom L_f, koja slika tačku P u $Q = P + u$ i τ_{-u} translacija, koja očigledno slika Q u P, njihova kompozicija $g = \tau_{-u} \circ f$ je afina transformacija sa fiksnom tačkom P. Kako je linearni deo kompozicije $I \circ L_f$, važi $L_g = L_f$. Tada $f = \tau_u \circ g$, $(\tau_u = \tau_{-u}^{-1})$, odnosno f je kompozicija jedne afine transformacije sa bar jednom fiksnom tačkom i translacije.

2. Transvekcija S_λ.

Jedine transformacije afine ravni koje fiksiraju sve tačke jedne prave su dilatacije i transvekcije. Neka je p prava afine ravni i P tačka van nje. Slika tačke P pri afinoj tansformaciji je tačka P'. Ako je M proizvoljna druga tačka koja ne pripada p, M' je slika tačke M pri istoj transformaciji, prave PM, $P'M'$ i p pripadaju istom pramenu. Ako se seku u tački S, tada je $SM : SP = SM' : SP'$, pa sledi da je $PP'||MM'$. Ako prava PM ne seče p, možemo odabrati tačku N ravni takvu da PN i MN seku p, pa važi $PP'||NN'||MM'$. Zato, ukoliko prava PP' seče pravu p, to će važiti i za bilo koju drugu pravu MM', tada je transformacija dilatacija. Ako je, međutim, $PP'||p$ (samim tim i $MM'||p$, za svaku tačku M) onda je u pitanju *transvekcija.*

Definicija 1.5 Transvekcija ravni sa *osnovom* p je afina transformacija koja sve tačke prave p ostavlja invarijantnim, a proizvoljnu tačku P van prave p slika u tačku P' takvu da je $PP'||p$.

Dakle, ove transformacije su jedinstveno određene još i slikom tačke P koja ne pripada pravoj p, P'.
Jedna transvekcija ravni, koja za osnovu ima $y-$osu, slika tačke oblika $(0,y)$ u sebe, a tačku $(1,0)$ u $(1,\lambda)$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}$, pa je data formulama:

$$x' = x,$$
$$y' = \lambda x + y,$$

odnosno matrično

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Matrica ove transformacije S_λ je : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Invarijante Galilejevih transformacija

2.1 Galilejeve transformacije

Neka je data transformacija euklidske ravni $\mathbb{R}^2$ u koordinatama $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$g(x, y) = (x + a, bx + y + c), \tag{3}$$

gde su $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Stav 2.1 *Transformacija $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data formulom (3), je afina transformacija.*

Dokaz: Transformaciju (3) možemo da napišemo u obliku

$$\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + bx + c, \end{aligned} \tag{4}$$

gde je $a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = b, a_{22} = 1, q_1 = a, q_2 = c$. Linearni deo ove transformacije je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

a vektor translacije:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}.$$

Dakle transformacija g jeste afina transformacija sa matricom transformacije:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ b & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. ∎

Definicija 2.1 Transformaciju g nazivamo *Galilejevom transformacijom ravni.*

S obzirom da je navedena transformacija određena koeficijentima $a, b, c \in \mathbb{R}$, nadalje pisaćemo je u skraćenom obliku

$$g = [a, b, c].$$

Matrični zapis transformacije (3) glasi:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}.$$

Matrica transformacije je:

$$\hat{A}_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ b & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stav 2.2 *Galilejeve transformacije čine grupu.*

Dokaz: 1. Dokažimo prvo da ako su $f = [a_1, b_1, c_1]$ i $g = [a_2, b_2, c_2]$ Galilejeve transformacije, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, i = \{1, 2\}$, tada je $f \circ g$ takođe Galilejeva transformacija. Neka je

$$f(x, y) = (x + a_1, y + b_1x + c_1),$$

tada

$$g(x + a_1, y + b_1x + c_1) = (x + a_1 + a_2, y + b_1x + c_1 + b_2(x + a_1) + c_2).$$

Dakle,

$$(f \circ g)(x, y) = (x + a_1 + a_2, y + (b_1 + b_2)x + c_1 + c_2 + a_1b_2),$$

jeste Galilejeva transformacija: $f \circ g = [a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2 + a_1b_2]$.

2. Pronađimo neutral Galilejeve transformacije, tj. transformaciju I takvu da je $f \circ I = I \circ f = f$. Iz tačke 1) vidimo da transformacija $I = [0, 0, 0]$ zadovoljava ovaj uslov za svaku transformaciju $f = [a, b, c]$.

3. Ako je $f = [a, b, c]$ Galilejeva transformacija, tada iz tačke 1) je očigledno da transformacija

$$f^{-1} = [-a, -b, ba - c]$$

ima osobinu:

$$f \circ f^{-1} = I = f^{-1} \circ f.$$

Transformacija f^{-1} je inverz transformacije f. ∎

Primetimo dalje da, ako su f i g Galilejeve transformacije sa matricama preslikavanja $\hat{A}_f$ i $\hat{A}_g$, tada je

$$\hat{A}_f \circ \hat{A}_g = \hat{A}_{f \circ g}.$$

Dakle, Galilejeve transformacije čine jednu grupu transformacija, tj. *Galilejevu grupu transformacija,* u oznaci G. Takođe, iz tačke 1) prethodnog dokaza zaključujemo da ova grupa nije komutativna. Invarijante dejstva ove grupe na $\mathbb{R}^2$ čine sadržaj nove geometrije koju ćemo zvati *Galilejeva geometrija,* a samu ravan $\mathbb{R}^2$, u tom kontekstu zovemo Galilejeva ravan. Pri tom, za date tačke (x, y) i (x', y') postoje $a, b, c \in \mathbb{R}$ takve da je $f = [a, b, c]$ i $f(x, y) = (x', y')$ pa je dejstvo grupe G na ravan $\mathbb{R}^2$ tranzitivno.

Definicija 2.2 Neke dve figure Φ_1 i Φ_2 Galilejeve ravni su podudarne ako postoji Galilejeva transformacija g takva da je $g(\Phi_1) = \Phi_2$.

S obzirom da Galilejeve transformacije čine grupu, očigledno je relacija podudarnosti figura u Galilejevom smislu jedna relacija ekvivalencije.
Uočimo dva podskupa grupe G:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{g_1 = [a, b, c] : a, c = 0, b \in \mathbb{R}\}, \\ G_2 &= \{g_2 = [a, b, c] : a, c \in \mathbb{R}, b = 0\}, \end{aligned} \tag{5}$$

sa transformacijama:

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= (x, y+bx) \\ g_2(x,y) &= (x+a, y+c). \end{aligned} \tag{6}$$

Pokažimo da su G_1 i G_2 su podgrupe Galilejeve grupe transformacija.
Iz definicija vidimo da su G_1 i G_2 podskupovi skupa G. Pokažimo još da važe aksiome grupe. Neka su $g_1 = [0, b_1, 0]$ i $g_1' = [0, b_1', 0]$ transformacije iz G_1 kao i $g_2 = [a_2, 0, c_2]$ i $g_2' = [a_2', 0, c_2']$ transformacije iz G_2, $b_1, b_1', a_2, a_2', c_2, c_2' \in \mathbb{R}$.
Tada će važiti:
1. $g_1 \circ g_1'$ je transformacija iz G_1:

$$\begin{aligned} &g_1'(x,y) = (x, y+b_1'x); \\ &g_1(x, y+b_1'x) = (x, y+b_1'x+b_1x); \end{aligned}$$

tj. $g_1(x, y+b_1'x) = (x, y+x(b_1'+b_1))$, a ovo jeste transformacije iz G_1.
$g_2 \circ g_2'$ je transformacija iz G_2:

$$\begin{aligned} &g_2'(x,y) = (x+a_2', y+c_2'); \\ &g_2(x+a_2', y+c_2') = (x+a_2'+a_2, y+c_2'+c_2); \end{aligned}$$

tj. $g_2(x+a_2', y+c_2') = (x+(a_2'+a_2), y+(c_2'+c_2))$, a ovo jeste transformacije iz G_2.

2. Na osnovu tačke 1) Stava 2.2 možemo da zaključimo da su neutrali grupa G_1 i G_2;

$$g_1 = [0,0,0], \quad g_2 = [0,0,0],$$

redom.

3. Inverzne transformacije ${g_1}^{-1} = [0, -b, 0]$ i ${g_2}^{-1} = [-a, 0, -c]$ takođe redom pripadaju grupama G_1 i G_2.
Dakle, možemo da zaključimo da su G_1 i G_2 podgrupe grupe G.

Matrični zapis transformacija koja pripadaju grupi G_1 glasi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica transformacije je

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrični zapis transformacija koja pripadaju grupi G_2 glasi:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica transformacije je

$$\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posmatrajući matrice transformacija iz grupa G_1 i G_2 možemo da primetimo da su transformacije grupe G_1 transvekcije sa $y-$osom kao osnovom, a transformacije grupe G_2 translacije. Uočimo takođe da se proizvoljna Galilejeva transformacija može predstaviti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ b & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

odnosno, elementi grupa G_1 i G_2 generišu grupu Galilejevih transformacija.

Stav 2.3 *Galilejeve transformacije čuvaju površinu.*

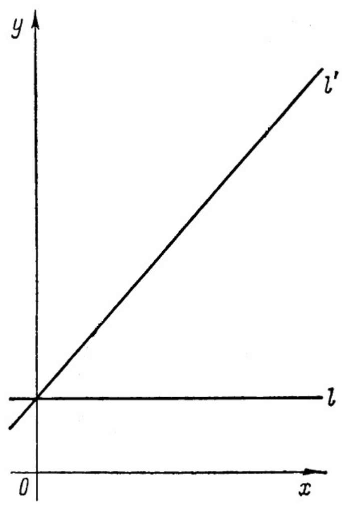
Dokaz: Kako elementi G_1 i G_2 čuvaju površinu, tako i sve Galilejeve transformacije čuvaju (euklidsku) površinu. ∎

2.2 Prave

Prave Galilejeve ravni imaju sledeću jednačinu:

$$y = kx + n \quad \text{ili} \quad x = p. \tag{7}$$

S obzirom da su Galilejeve transformacije afine transformacije, važiće da je slika svake prave takođe prava. Nađimo jednačinu slike prave pri dejstvu Galilejeve transformacije.



Slika 1: $f(l) = l'$

Neka je A proizvoljna tačka sa prave $l : y = kx + n$. Koordinate tačke A su $(x, kx + n)$. Neka je $g = [a, b, c]$ Galilejeva transformacija, tada je

$$g(x, kx + n) = (x + a, kx + n + bx + c).$$

Kako je $x_1 = x + a$, tada

$$g(x, kx + n) = (x_1, (k + b)x_1 + n + c - ak - ab).$$

Tačka $(x_1, (k + b)x_1 + n + c - ak - ab)$ je tačka sa prave:

$$l' : y_1 = (k + b)x_1 + n + c - ak - ab.$$

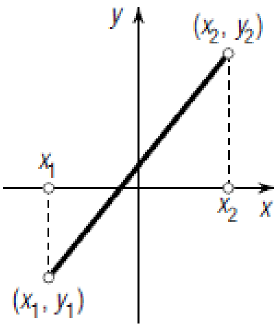
Stoga važi $g : l \mapsto l'$ (slika 1). Ako je l prava oblika $x = p$, tada će njena slika biti prava $l' : x' = p + a$.
U Galilejevoj geometriji razlikujemo dve vrste pravih, prave paralelne $y - osi$, koje zovemo *specijalnim pravama* i one koje nisu paralelne $y - osi$ koje nazivamo *običnim pravama*.
S obzirom da afine transformacije čuvaju osobinu paralelnosti, ovu osobinu će imati i Galilejeve transformacije.

2.3 Rastojanje

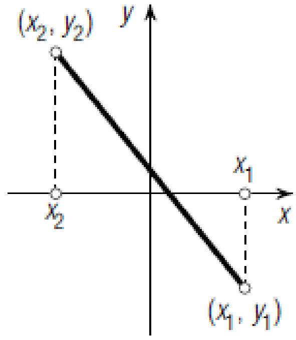
Neka su $A_1(x_1, y_1)$ i $A_2(x_2, y_2)$ tačke Galilejeve ravni. Rastojanje između ovih tačaka u Galilejevoj geometriji je dato formulom:

$$d_{A_1A_2} = x_2 - x_1. \tag{8}$$

Upravo definisano rastojanje predstavlja orijentisano rastojanje projekcija tačaka $A_1(x_1, y_1)$ i $A_2(x_2, y_2)$ na $x - osu$ (slika 2a). Karakteristično za ovu geometriju je da rastojanje može da ima negativnu vrednost (slika 2b) ili da bude jednako 0 (slika 3).



Slika 2a: $d_{A_1A_2} > 0$



Slika 2b: $d_{A_1A_2} < 0$

Ako je $d_{A_1A_2} = 0$, tada tačke A_1 i A_2 pripadaju istoj specijalnoj pravoj, tj. projekcije na x-osi im se poklapaju. Za ovakve tačke definišemo *specijalno rastojanje*:

$$\delta_{A_1A_2} = y_2 - y_1. \tag{9}$$

Stav 2.4 *Pri Galilejevim transformacija rastojanje i specijalno rastojanje ostaju invarijantni.*

Dokaz: Neka je $g = [a, b, c]$ Galilejeva transformacija takva da slika tačke A_1, A_2 u tačke A_1', A_2', redom:

$$g(A_1) = A_1', \quad \text{tj. } g(x_1, y_1) = (x_1 + a, y_1 + bx_1 + c)$$
$$g(A_2) = A_2', \quad \text{tj. } g(x_2, y_2) = (x_2 + a, y_2 + bx_2 + c).$$

Posmatrajmo rastojanje između tačaka A_1' i A_2'

$$d_{A_1' A_2'} = x_2 + a - x_1 - a = x_2 - x_1 = d_{A_1, A_2}.$$

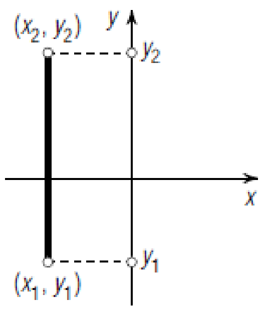
Ako je $d_{A_1, A_2} = 0$, tada je i specijalno rastojanje:

$$\delta_{A_1' A_2'} = y_2 + bx_2 + c - y_1 - bx_1 - c.$$

S obzirom da je $x_1 = x_2$, jer se tačke nalaze na istoj specijalnoj pravoj, važi:

$$\delta_{A_1' A_2'} = y_2 - y_1 = \delta_{A_1 A_2}.$$

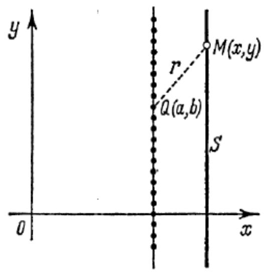
∎



Slika 3: $d_{A_1 A_2} = 0$

2.4 Krug i ugao

Krug S definišemo kao skup svih tačaka u ravni jednako udaljenih od fiksne tačke, $Q(a, b)$. Tu tačku $Q(a, b)$ nazivamo *centrom* kruga S. Rastojanje bilo koje tačke kruga, $M(x, y)$, od tačke Q nazivamo poluprečnikom r kruga S. Stoga krug u Galilejevoj geometriji je predstavljen kao specijalna prava (slika 4).



Slika 4: Krug $S(Q, 1)$, $\;r > 0$

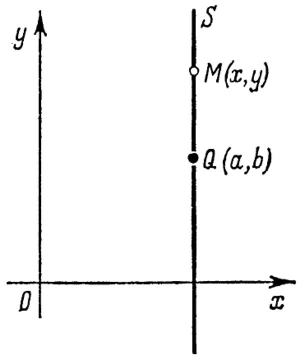
Neka je $M(x,y)$ tačka kruga $S(Q,r)$. Jednačina kruga glasi:

$$d_{MQ} = r,$$

tj.

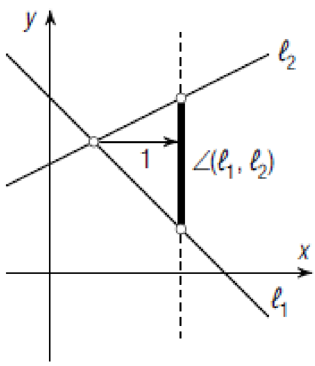
$$x - a = r. \tag{10}$$

Rastojanje može biti pozitivno i negativno, dakle, vrednost poluprečnika može biti pozitivna i negativna.



Slika 5: Specijalan krug, $r = 0$

Sve specijalne prave su međusobno paralelne i podudarne. Stoga važiće da su svi krugovi međusobno podudarni, a pošto su i paralelni oni se seku samo ako se poklapaju. Takođe, dokazali smo da je rastojanje invarijantno pri Galilejevim transformacijama. Dakle pri dejstvu ovih transformacija poluprečnik je invarijantan. Ako je $r = 0$ definisaćemo *specijalan krug*, koji će biti specijalna prava kroz centar kruga (slika 5). Uočimo i da jedan krug, poluprečnika r, može imati beskonačno mnogo centara. To su tačke specijalne prave koja sadrži tačku Q.



Slika 6 Ugao $\alpha = \sphericalangle(l_1 l_2)$

Definicija 2.3 Ugao između dve prave, l_1 i l_2, koje se seku u tački $Q(a, b)$, je duž na specijalnoj pravoj, koja predstavlja kružni luk između te dve prave, tj. deo kruga, sa centrom u tački Q i poluprečnika $r = 1$ (slika 6). Mera ugla između pravih $l_1 : y = k_1x + n_1$ i $l_2 : y = k_2x + n_2$, je specijalno rastojanje između presečnih tačaka kruga S i pravih l_1 i l_2, u oznaci:

$$\delta_{l_1l_2} = \delta_\alpha.$$

Kao i kod rastojanja, tako i kod uglova, važi da mera ugla može imati negativnu vrednost:

$$\delta_{l_1l_2} = -\delta_{l_2l_1}.$$

Primetimo da je mera ugla bilo koji realan broj. Ukoliko su prave paralelne ili se poklapaju, ugao između njih je 0. Ako jedna od pravih teži položaju specijalne prave tada ugao između njih teži beskonačnosti, pa možemo smatrati da je ugao između specijalne i obične prave ∞.

Stav 2.5 *Neka su date prave $l_1 : y = k_1x + n_1$ i $l_2 : y = k_2x + n_2$ Galilejeve ravni. Tada važi:*

$$\delta_{l_1l_2} = k_2 - k_1.$$

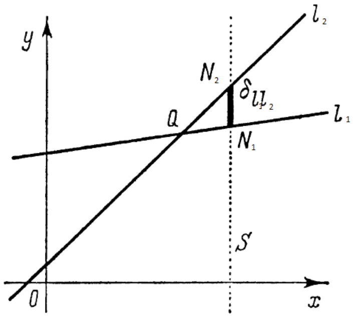
Dokaz: Neka su date prave $l_1 : y = k_1x + n_1$ i $l_2 : y = k_2x + n_2$, takve da se seku u tački $Q(a, b)$ (slika 7). Neka je $S(Q, 1)$ krug. Tačke preseka pravih l_1 i l_2 i kruga S su tačke N_1 i N_2, redom. Koordinate ovih tačaka su

$$N_1(a + 1, k_1(a + 1) + n_1) \text{ i } N_2(a + 1, k_2(a + 1) + n_2).$$

Pošto N_1 i N_2 pripadaju istom krugu S, tj. specijalnoj pravoj, posmatramo specijalno rastojanje:

$$\begin{aligned}\delta_{l_1l_2} &= k_2(a + 1) + n_2 - k_1(a + 1) - n_1 \\ &= k_2 - k_1,\end{aligned}$$

jer je $k_1a + n_1 = k_2a + n_2$. ∎



Slika 7: Mera ugla $\delta_{l_1l_2} = k_2 - k_1$

Stav 2.6 *Mera ugla δ ima sledeće osobine:*

a) *Ako je $\alpha < \beta$, tada je $|\delta_\alpha| < |\delta_\beta|$.*

b) *Ako je $\alpha = \beta$, tada je $|\delta_\alpha| = |\delta_\beta|$.*

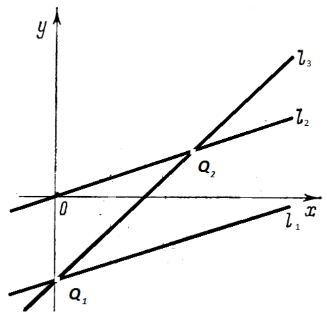
c) *Ako su α, β, γ uglovi takvi da je $\alpha - \beta = \gamma$, tada je $\delta_\alpha - \delta_\beta = \delta_\gamma$.*

d) *Ako je α ugao i k prirodan broj takav da je $k\alpha$ ugao, tada je: $\delta_{k\alpha} = k\delta_\alpha$*

Dokaz: Kako su u Galilejevoj geometriji uglovi duži na specijalnim pravama, a mere ugla su specijalna rastojanja, ovaj stav će važiti. ∎

Stav 2.7 *Ako dve prave u preseku sa trećom obrazuju iste uglove sa iste svoje strane, tada su te dve prave paralelne.*

Dokaz: Neka su prave $l_1 : y = k_1x + n_1$ i $l_2 : y = k_2x + n_2$ dve prave presečene trećom pravom $l_3 : y = k_3x + n_3$.



Slika 8: Paralelne prave

Neka su Q_1 i Q_2 presečne tačke prave l_3 i pravih l_1 i l_2. S obzirom da je:

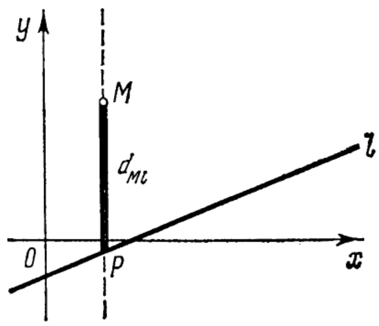
$$\sphericalangle(l_1, l_3) = \sphericalangle(l_2, l_3),$$

tada je:

$$\begin{aligned} k_3 - k_1 &= k_3 - k_2 \\ k_1 &= k_2. \end{aligned}$$

Kako meru ugla definišemo kao specijalno rastojanje, ona je invarijantna pri Galilejevim transformacijama. Dakle prave l_1 i l_2 su paralelne. ∎

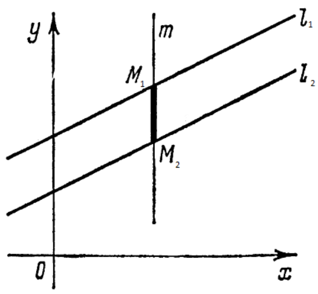
Definicija 2.4 Neka je $M(x, y)$ proizvoljna tačka ravni i l prava te ravni koja ne sadrži tačku M. Ako je m specijalna prava kroz tačku M i P tačka preseka specijalne prave m i prave l, tada je rastojanje tačke M od prave l specijalno rastojanje između tačaka M i P. Specijalnu pravu m kroz tačku M nazivamo još i ***normalom prave*** l kroz tačku M (slika 9).



Slika 9: $d_{Ml} = \delta_{MP}$

Rastojanje između tačke M i prave l računamo tako što tražimo infimum svih rastojanja MQ, gde je $Q \in l$. Međutim u ovoj geometriji to nije najpodesniji način, jer uvek postoji tačka sa date prave tako da je taj infimum jednak 0. Zato je definicija 2.4 podesnija.

Definicija 2.5 Rastojanje između dve paralelne prave l_1 i l_2 definišemo kao specijalno rastojanje između presečnih tačaka, M_1 i M_2, specijalne prave m i pravih l_1 i l_2, redom (slika 10).



Slika 10: $d_{l_1 l_2} = \delta_{M_1 M_2}$

Primetimo da rastojanje između paralelnih pravih ne zavisi od izbora specijalne prave m.

2.5 Trougao

Definicija 2.6 *Duž* AB u Galilejevoj geometriji je skup tačaka prave između datih tačaka A i B, u euklidskom smislu. S*pecijalna duž* A_1B_1 je skup tačaka specijalne prave između datih tačaka A_1 i B_1.

Središte obične i specijalne duži nalazimo na isti način kao i u euklidskoj geometriji.

Definicija 2.7 Neka su A, B, C tri nekolinearne tačke. Unija duži BC, CA, AB čine *trougao* ABC, pri čemu ni jedna od duži ne pripada specijalnim pravama.

Duži BC, CA, AB nazivamo *stranicama* trougla, a njihove apsolutne vrednosti su dužine stranica, u oznaci:

$$|d_{AB}| = c, \quad |d_{CA}| = b, \quad |d_{BC}| = a.$$

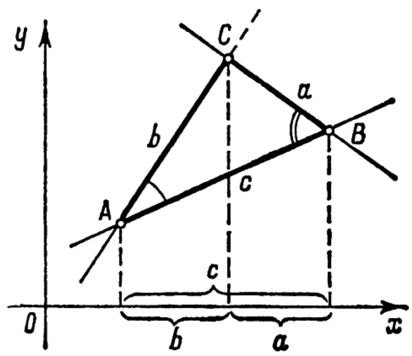
Tačke A, B, C su *temena* trougla. Apsolutne vrednosti mere uglova označavamo na sledeći način

$$|\delta_{bc}| = A, \quad |\delta_{ca}| = B, \quad |\delta_{ab}| = C.$$

Neka je dat $\triangle ABC$, i neka su koordinate temena $A = A(x_a, y_a),\ B = B(x_b, y_b),\ C = C(x_c, y_c)$, pri čemu važi: $x_a < x_c < x_b$. Tada važi:

$$\begin{aligned} a &= x_b - x_c \\ b &= x_c - x_a \\ c &= x_b - x_a. \end{aligned}$$

Primetimo da važi sledeći stav:



Slika 11: Trougao ABC

Stav 2.8 *Neka su a, b, c $(a, b < c)$ dužine stranica trougla, tada važi:*

$$a + b = c. \tag{11}$$

Dakle, umesto nejednakosti trougla koju imamo u euklidskog geometriji, u Galilejevoj geometriji važi *jednakost* trougla.
Neka su k_1, k_2, k_3 koeficijenti pravaca pravih a, b, c, redom, tako da važi $k_1 \geqslant k_3 \geqslant k_2$. Iz definicije za meru uglova imamo sledeće:

$$\begin{aligned} A &= k_3 - k_2 \\ B &= k_1 - k_3 \\ C &= k_1 - k_2. \end{aligned}$$

Dakle važiće stav:

Stav 2.9 *Neka su A, B, C $(A, B < C)$ mere uglova trougla, tada važi:*

$$A + B = C. \tag{12}$$

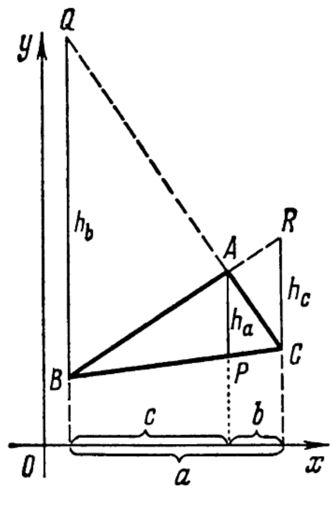
Stav 2.10 *Neka je dat $\triangle ABC$. Tada za stranice i uglove tog trougla važi jednakost*

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}. \tag{13}$$

Dokaz: Neka su P, Q, R tačke preseka specijalnih pravih kroz temena A, B, C sa naspramnim stranicama (slika 12). $AP = h_a, BQ = h_b, CR = h_c$ su visine ovog trougla. Na osnovu sličnosti euklidskih trouglova važiće sledeća relacija:

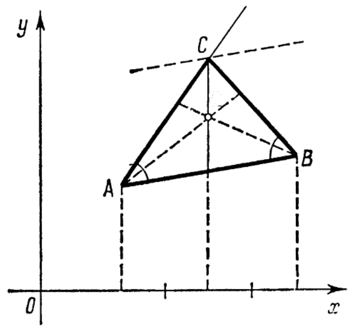
$$h_c = B \cdot a = A \cdot b.$$

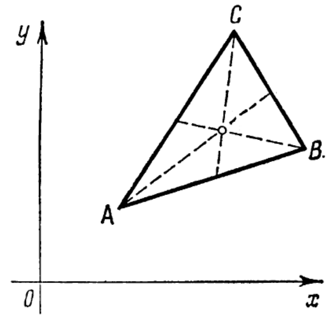
Iz prethodne relacije vidimo da važi: $\dfrac{a}{A} = \dfrac{b}{B}$.
Na isti način važiće i $\dfrac{a}{A} = \dfrac{c}{C}$ i $\dfrac{c}{C} = \dfrac{b}{B}$. Dakle, važi tražena jednakost. ∎



Slika 12: Visine trougla ABC

Kao i u euklidskoj tako i u Galilejevoj geometriji bisektrisa je prava koja deli ugao na dva jednaka dela. Za razliku od euklidske geometrije, ovde se bisektrise uglova jednog trougla ne seku u jednoj tački (slika 13a). S obzirom da su središta Galilejevih duži ujedno i euklidska središta, težišne duži jednog trougla seku se u jednoj tački T koja ih deli u donosu 2 : 1 (slika 13b).





Slika 13a: Simetrale uglova se ne seku u jednoj tački

Slika 13b: Težišne duži se seku u jednoj tački

Stav 2.11 *Naspram jednakih uglova leže jednake stranice, i obrnuto.*

Dokaz: Neka je dat trougao ABC takav da je $a = b$. Za svaki trougao važi sledeća relacija:

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B},$$

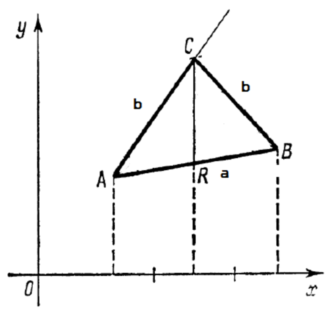
odnosno

$$\frac{a}{b} = \frac{A}{B}.$$

Kako važi da je $a = b$, važiće i $A = B$. Iz iste relacije možemo da zaključimo i obrnuto tvrđenje. ∎

Definicija 2.8 Trougao ABC je jednakokrak ako je $a = b$.

Primetimo da u Galilejevoj geometriji ne postoje jednakostranični trouglovi, ali zato postoje jednakokraki trouglovi. Za jednakokrake trouglove važi da su uglovi na osnovici jednaki i da naspram jednakih uglova leže jednake stranice. Visina jednakokrakog trougla iz temena C je incidentna sa specijalnom pravom koja sadrži teme C (slika 14), ta prava je takođe i simetrala osnove i incidentna sa težišnom duži iz temena C, ali nije bisektrisa ugla C.



Slika 14: Jednakokraki trougao

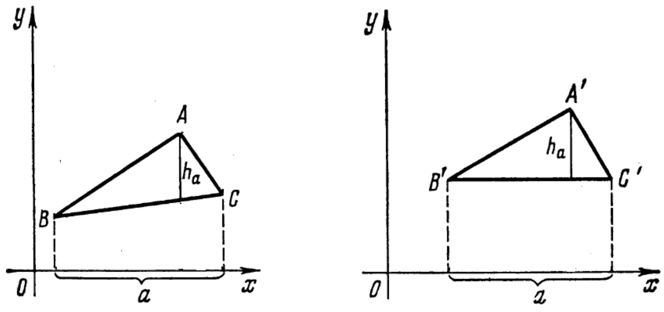
Već smo pokazali da Galilejeve transformacije čuvaju površinu. Stoga možemo da definišemo sledeće:

Definicija 2.9 Iako se definicije euklidske i Galilejeve mere duži razlikuju, površina ravne figure u Galilejevom smislu je, po definiciji, jednaka euklidskoj površini.

Stav 2.12 *Površinu trougla računamo formulom:*

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c. \tag{14}$$

Dokaz: Neka je dat $\triangle ABC$ i Galilejeva transformacija $g = [a, b, c]$ koja slika dati trougao u $\triangle A'B'C'$. Kako je površina invarijantna pri Galilejevim transformacijama ova dva trougla imaju istu površinu. Neka g takva transformacija da je stranica $B'C'$ trougla $A'B'C'$ paralelna $x-$osi.



Slika 15: Površina trougla

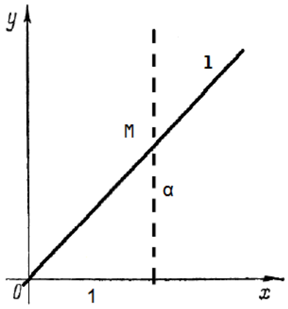
Tada je dužina $B'C'$, $a' = d_{B'C'}$, jednaka dužini te stranice u euklidskoj geometriji, a specijalna dužina $h_{a'}$ je jednaka dužini h_a u euklidskoj geometriji. Stoga površinu tog trougla možemo da računamo isto kao i u euklidskoj geometriji:

$$P' = \frac{1}{2}a'h_{a'}.$$

S obzirom da je rastojanje invarijantno biće: $h_{a'} = h_a$ i $a' = a$, tj. $P = \frac{1}{2}ah_a$. Na isti način dokazujemo i ostatak jednakosti. ∎

2.5.1 *sing* i *cosg*

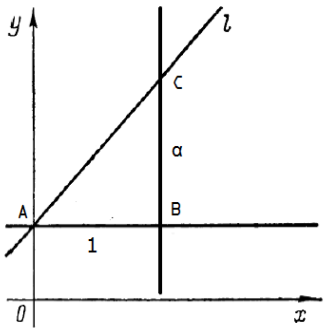
Neka je xOy koordinatni sistem Galilejeve ravni, takav da je ordinata Oy specijalna prava i apcisa $Ox = o$ obična prava, euklidski normalna na Oy. Neka je $S(O, 1)$, jedinični krug sa centrom u koordinatnom početku O i tačka $M(x, y)$ tačka sa kruga S. Obeležimo pravu OM sa l i ugao $\delta_{ol} = \alpha$ (slika 16). Možemo da definišemo trigonometrijske funkcije Galilejeve ravni:



Slika 16: Ugao α

Definicija 2.10 Za svaki ugao α Galilejeve ravni važi:

$$\begin{aligned} sing\alpha &= \alpha \\ cosg\alpha &= 1. \end{aligned} \tag{15}$$



Slika 17: *sing* i *cosg* na trouglu ABC

Neka je dat trougao ABC, kome je ugao u tački B u euklidskom smislu prav. U Galilejevoj geometriji to je trougao kome je stranica BC incidentna sa specijalnom pravom (slika 17).
U datom trouglu ABC važi sledeće:

$$d_{AC} = d_{AB} cosg\alpha, \quad \delta_{BC} = d_{AC} sing\alpha.$$

Stav 2.13 *Za funkcije sing i cosgα važi:*

1. $sing(\alpha \pm \beta) = sing\alpha cosg\beta \pm sing\beta cosg\alpha$
2. $sing2\alpha = 2sing\alpha cosg\alpha$

Dokaz: Na osnovu definicije funkcije *sing* znamo da je

$$\begin{aligned} sing(\alpha \pm \beta) &= \alpha \pm \beta. \\ &= sing\alpha \pm sing\beta \\ &= sing\alpha cosg\beta \pm sing\beta cosg\alpha, \end{aligned}$$

jer je $cosg\alpha = cosg\beta = 1$.
Slično:

$$\begin{aligned} sing2\alpha &= 2\alpha \\ &= 2sing\alpha \\ &= 2sing\alpha cosg\alpha, \end{aligned}$$

jer je $cosg\alpha = 1$. ∎

Primetimo da jednakost (13) možemo da pišemo i na sledeći način:

$$\frac{a}{singA} = \frac{b}{singB} = \frac{c}{singC}.$$

Dakle, površina trougla biće:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}absingC.$$

Uočimo da su formule (14), u Galilejevoj geometriji, ekvivalenti sinusne zakonitosti u euklidskoj geometriji.

2.5.2 Podudarnost trouglova

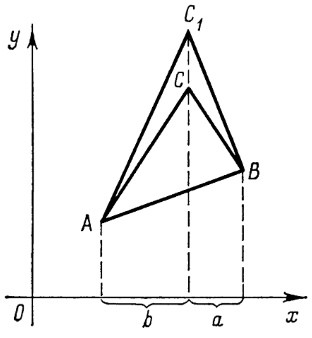
Neka je dat trougao ABC u Galilejevoj ravni. Umesto pozitivnih vrednosti veličina a, b, c, A, B, C posmatrajmo označene veličine $\bar{a} = d_{BC}$, $\bar{b} = d_{AC}$, $\bar{c} = d_{AB}$, $\overline{A} = \delta_{AB,AC}$, $\overline{B} = \delta_{BC,BA}$, $\overline{C} = \delta_{CA,CB}$, tada jednakosti (11), (12), (13) pišemo:

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{c} \tag{16}$$

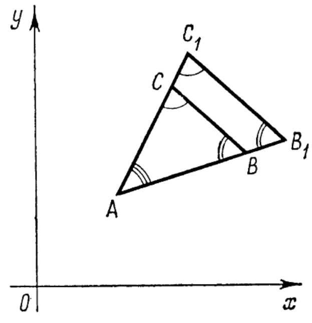
$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{C} \tag{17}$$

$$\frac{\bar{a}}{\overline{A}} = \frac{\bar{b}}{\overline{B}} = \frac{\bar{c}}{\overline{C}}. \tag{18}$$

Trouglovi sa podudarnim stranicama i uglovima ne moraju biti podudarni. U Galilejevoj geometriji dve kraće stranice određuju treću i (kao i u euklidskoj geometriji) dva manja ugla određuju treći, ali dve stranice ili dva ugla ne određuju trougao (slika 18a i 18b). Šta više, poznati kriterijumi podudarnosti euklidske geometrije ne važe u Galilejevoj geometriji.

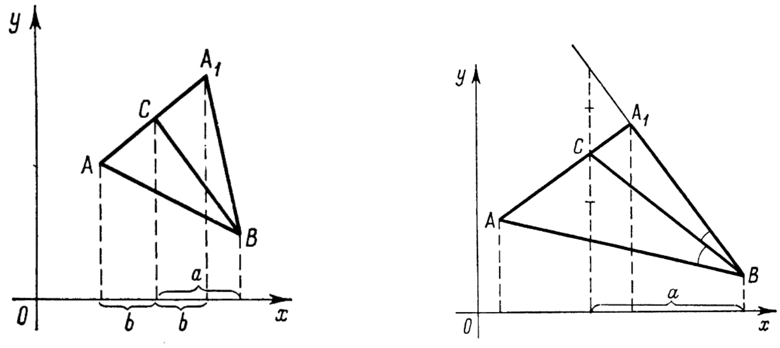


Slika 18a: Dve stranice ne određuju trougao



Slika 18b: Dva ugla ne određuju trougao

Neka su dati trouglovi ABC i A_1BC (slika 19a) sa zajedničkim uglom C koji je zahvaćen zajedničkom stranicom BC, dužine a i podudarnim stranicama CA, CA_1 dužine b. Važi da je, $AB = a + b$, $A_1B = a - b$, stoga trouglovi nisu podudarni. Slično, trouglovi ABC i A_1BC na slici 19b imaju zajedničku stranicu BC zahvaćenu jednakim uglovima. Trouglovi nisu podudarni jer je $AB > A_1B$. Ipak euklidski kriterijumi za podudarnost, SUS i USU, važiće u Galilejevoj geometriji ukoliko posmatramo označene veličine.



Slika 19a: SUS

Slika 19b: USU

Stav 2.14 *Dva trougla ABC i $A'B'C'$ su podudarna ako važi:* $\bar{a} = d_{BC} = d_{B'C'} = \bar{a'}$, $\bar{b} = d_{CA} = d_{C'A'} = \bar{b'}$, *i* $\overline{C} = \overline{C'}$.

Stav 2.15 *Dva trougla ABC i $A'B'C'$ su podudarna ako važi:* $\bar{a} = d_{BC} = d_{B'C'} = \bar{a'}$, $\overline{B} = \overline{B'}$ *i* $\overline{C} = \overline{C'}$.

2.5.3 Sličnost trouglova

Uočimo da dva trougla ABC i $A'B'C'$ sa podudarnim uglovima imaju proporcionalne stranice. Dakle,

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k.$$

U ovom slučaju trougao $A'B'C'$ dobijamo od trougla ABC takozvanom sličnošću prve vrste sa koeficijentom k, tj. preslikavanjem Galilejeve ravni na sebe koje čuva mere uglova i množi dužinu duži fiksnim brojem k. Slično, dva trougla ABC i $A'B'C'$ sa podudarnim stranicama imaju proporcionalne uglove:

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = k.$$

U ovom slučaju trougao $A'B'C'$ dobijamo iz trougla ABC sličnošću druge vrste sa koeficijentom k, tj. preslikavanje Galilejeve ravni na sebe koja čuva dužine duži, a mere uglova množi fiksnim brojem k.

3 Princip dualnosti

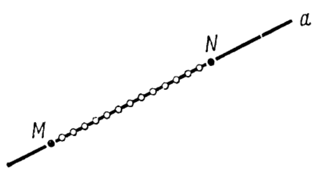
U prethodonom delu napomenuli smo da se težišne duži seku u jednoj tački koju nazivamo težištem trougla. Težište, kao i u euklidskoj geometriji, deli težišnu duž u poznatom odnosu 2 : 1. Za razliku od euklidske geometrije, simetrale uglova nisu konkurentne. Ovo je posledica pojave koju nazivamo *princip dualnosti.*
Posmatrajući euklidsku geometriju primetićemo da postoje osobine pravih i tačaka u kojima može da se uspostavi određena analogija između ova dva pojma. Međutim to ne važi za sve osobine. Posmatrajmo neke osobine pravih i tačaka u euklidskoj geometriji.

Tačke:

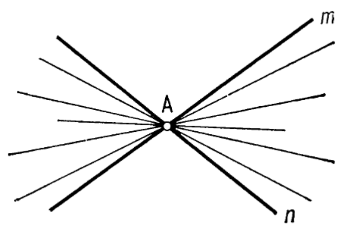
- Postoji najviše jedna prava kroz dve različite tačke.
- Neka su M i N tačke date prave a, sve tačke između tačaka M i N čine duž MN (slika 20a).

Prave:

- Dve razne prave se seku u najviše jednoj tački.
- Ako su m i n prave koje se seku u tački A, unija pravih pramena A koje pripadaju jednom paru unakrsnih uglova određenih pravama m i n je upravo taj par unakrsnih uglova.



Slika 20a: Duž MN

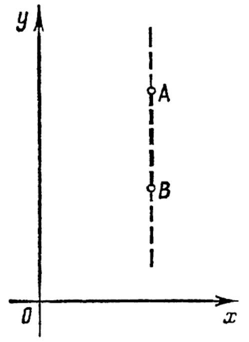


Slika 20b: Pramen A

Primetimo da je razlika između ovih tvrdnji ta da tamo gde u jednoj stoji pojam tačka u drugoj se nalazi pojam prave, slično možemo zaključiti i za duž i ugao, kao i za rastojanje i mera ugla. Ako posmatramo euklidsku geometriju ova analogija nije potpuna. Osobina koju imaju prave, a ne može se primeniti na tačke je paralelnost. U euklidskoj geometriji ne postoji pojam paralelnih tačaka. Takođe rastojanje može biti proizvoljno veliko dok je mera ugla ograničena.
U Galilejevoj geometriji postoji pojam *paralelnih tačaka* (slika 21).

Definicija 3.1 Kažemo da su tačke paralelne ako pripadaju istoj specijalnoj pravoj.

Princip dualnosti zasnivamo na mogućnosti zamene reči "tačka" i "prava", kao i "rastojanje" i "mera ugla", postojanjem paralelnih tačaka i neograničene mere ugla upotpunjujemo uslove za postojanje ovog principa. Tj. analogija između tačaka i pravih, kao i rastojanja i mere ugla je kompletna.



Slika 21: Paralelne tačke

Definicija 3.2 Dualno tvrđenje datom tvrđenju u Galilejevoj geometriji dobijamo kada u početnom zamenimo reč tačka rečju prava ili reč duž rečju ugao, i obrnuto.

Teorema (Princip dualnosti) Ako je neko tvrđenje u Galilejevoj geometriji tačno onda je tačno i njemu dualno tvrđenje.

Dokaz ovog principa biće dat kasnije. Sada prvo, inspirisani ovim principom pokazaćemo da važi kroz primere. Dokazali smo da važi jednakost trougla:

$$a + b = c,$$

gde su a, b, c stranice trougla. Dualna jednakost ovoj je

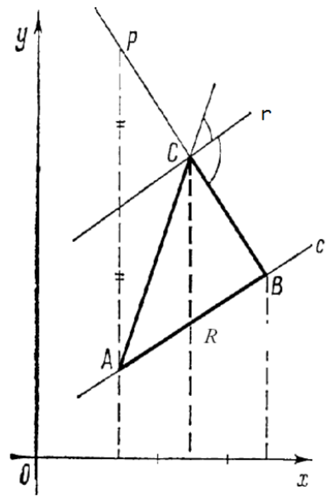
$$A + B = C.$$

Ponekada izvedene, dualne, jednakosti su jednake originalu, posmatrajmo jednakost: $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$, dualna jednakost ovoj glasi $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$, njih nazivamo *samodualne.*

Neka je dat jednakokraki trougao ABC, takav da važi $AC = CB$. Specijalna prava koja sadrži teme C je incidentna sa visinom iz tog temena, takođe je i simetrala stranice AB. Neka je tačka R središte stranice AB, tada je specijalna duž CR visina koja odgovara toj stranici. S obzirom da se tačke C i R nalaze na istoj specijalnoj pravoj, one su paralelne. Na osnovu principa dualnosti, dualni elementi tačkama C i R su prava $c = AB$ i prava r koja je ujedno i simetrala ugla kod temena C.

Stav 3.1 *Neka je dat jednakokraki $\triangle ABC$, takav da je $AC = CB$. Simetrala ugla kod temena C je prava r za koju važi $r || c$, $c = AB$.*

Dokaz: Dokazaćemo ovo tvrđenje direktno. Posmatrajmo trougao ABC (slika 22). Neka je prava r simetrala ugla kod temena C i neka su P, Q, R podnožija visina iz temena A, B, C, redom. Prava r je, takođe, simetrala visine AP, jer je $AC = PC$. Posmatrajmo trougao ABP, prava r je srednja linija tog trougla, dakle paralelna je sa osnovicom AB. ∎



Slika 22: Prava r je simetrala ugla C i dualni element središtu stranice c

3.1 Paralelogram i koparalelogram

Definicija 3.3 Četvorougao $ABCD$, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, takav da su parovi stranica a, c i b, d paralelni nazivamo *paralelogramom* (Slika 23a).

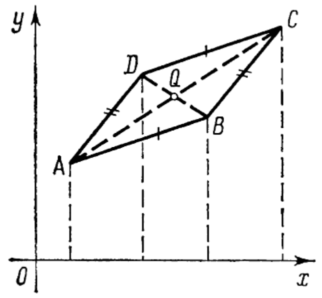
Neke od njihovih osobina su:

- U paralelogramu su naspramne stranice jednake.
- Dijagonale paralelograma se seku u jednoj tački Q, koja ih polovi.

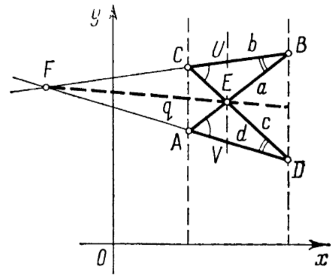
Primenom principa dualnosti možemo izvesti dualnu definiciju:

Definicija 3.4 Četvorougao u kome su parovi tačaka A, C i B, D paralelni, tj. nalaze se na istim specijalnim pravama, nazivamo *koparalelogram* (Slika 23b). Neke od njegovih osobina su:

- U četvorouglu $ABCD$ naspramni uglovi su jednaki.
- Neka je q prava koja sadrži tačke E i F, preseke stranica a i c, b i d. Prava q polovi uglove E i F.



Slika 23a: Paralelogram



Slika 23b: Koparalelogram

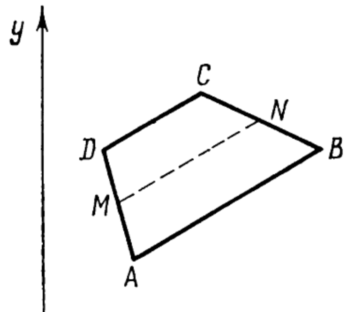
3.2 Trapez i kotrapez

Definicija 3.5 Četvorougao, $ABCD$, $AB = a, BC = b, CD = c$, $AD = d$, koji ima jedan par paralelnih, naspramnih stranica, AB i CD, nazivamo trapezom (slika 24a).

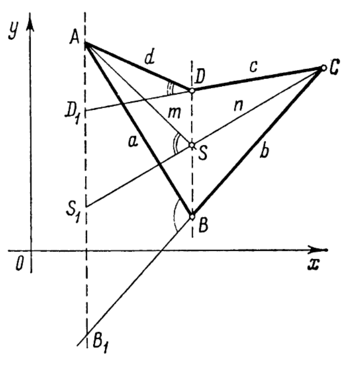
Poznata osobina trapeza je da je srednja linija $s = MN$ prava paralelna sa osnovicama, tačke M i N su središta stranica BC i AD.
Primenom principa dualnosti izvodimo dualnu definiciju:

Definicija 3.6 Kotrapez je četvorougao u kome je par tačaka B, D paralelan, tj. nalazi se na istoj specijalnoj pravoj. (Slika 24b)

Kod kotrapeza važiće da je tačka S, tačka preseka simetrala uglova C i A, tj. pravih $n = CS$ i $m = AS$, je paralelna sa temenima B i D. Primetimo da je ova osobina kotrapeza dualna navedenoj osobini za trapez.



Slika 24a: Trapez



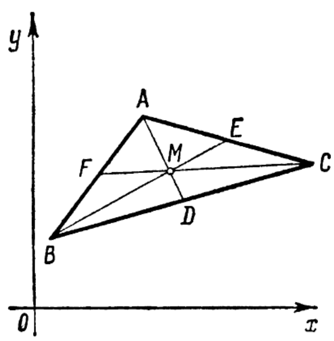
Slika 24b: Kotrapez

3.3 Težišne duži i simetrale uglova u trouglu

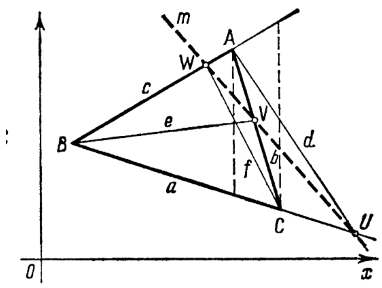
Rekli smo da se težišne duži trougla seku u jednoj tački. Dualno tvrđenje ovom je da tačke preseka simetrala uglova sa naspramnim stranicama leže na istoj pravoj.

Stav 3.2 *Neka je dat proizvoljan trougao ABC. Tačke preseka simetrala uglova tog trougla sa odgovarajućim naspramnim stranicama leže na pravoj m. Prava m deli uglove između simetrala uglova i naspramnih stranica u odnosu 2:1.*

Dokaz: Dat je $\triangle ABC$. Obeležimo sa D, E, F središta stranica BC, AC, BA, redom. Dualni elementi ovim tačkama su simetrale d, e, f uglova A, B, C. Prave AD, BE, CF su incidentne sa težišnim dužima datog trougla, one se seku u tački M. Tačkama $\{U\} = a \cap d, \{V\} = b \cap e, \{W\} = c \cap f$ obeležićemo duale pravih AD, BE, CF (slika 25a i 25b).



Slika 25a: $AD \cap BE \cap CF = \{M\}$



Slika 25b: $U, V, W \in m$

Znamo da u trouglu važi da se težišne duži, AD, BE, CF, seku u tački M. Dualna tvrdnja ovoj je da tačke U, V, W leže na pravoj m. Takođe, dualna relacija relaciji:

$$AM : MD = BM : ME = CM : MF = 2 : 1$$

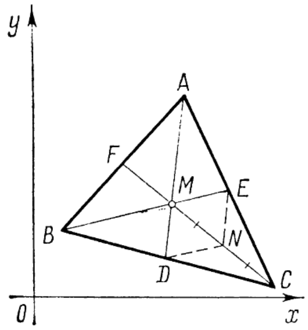
je:

$$\sphericalangle aUm : \sphericalangle mUd = \sphericalangle bVm : \sphericalangle mVe = \sphericalangle cWm : \sphericalangle mWf = 2 : 1.$$

Iako je očigledno da se osobine težišnih duži nasleđuju iz euklidske geometrije pokazaćemo još jedan dokaz čiji će nam dual dati traženo tvrđenje. Dokažimo prvo da tačka M deli težišne duži u odnosu $2 : 1$. Neka je $\{M\} = AD \cap BE$ i N središte segmenta CM (slika 26). DN je srednja linija trougla BMC, EN je srednja linija trougla CMA. Stoga važi: $DN || BE$ i $EN || AD$, tj. četvorougao $MDNE$ je paralelogram. Dakle biće:

$$DM = NE = \frac{1}{2} MA$$
$$EM = ND = \frac{1}{2} MB,$$

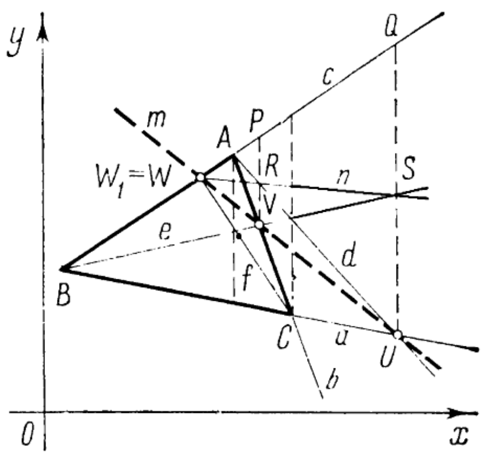
tj. $AM : MD = BM : ME = 2 : 1$. Analogno dobijemo da važi i $CM : MF = 2 : 1$, dakle tačka M pripada i duži CF.



Slika 26: $AM : MD = BM : ME = CM : MF = 2 : 1$

Sada pokažimo da ovaj odnos važi u dualnom tvrđenju.
Posmatajmo trougao ABC. Neka su tačke U, V tačke preseka simetrala uglova A i B sa naspramnim stranicama i neka je prava m odeđena njima. Neka se c i m seku u tački W_1 i neka je n simetrala ugla $\sphericalangle cW_1m$. Tačke preseka prave n sa pravama d i e, obeležićemo sa R i S. Tačka R se nalazi u preseku simetrala d i n uglova trougla AVW_1, dakle ona se nalazi na visini VP. Tačka S se nalazi u preseku simetrala e i n uglova trougla BUW_1, dakle ona se nalazi na visini UQ. Stoga četvorougao $RUVS$ je koparalelogram, pa će važiti $\sphericalangle mUd = \sphericalangle eSn$ i $\sphericalangle mVe = \sphericalangle dRs$, tj.

$$\sphericalangle dUm = \sphericalangle nSe = \frac{1}{2}\sphericalangle mUa$$
$$\sphericalangle eVm = \sphericalangle nRd = \frac{1}{2}\sphericalangle mVb,$$



Slika 27: $\sphericalangle aUm : \sphericalangle mUd = \sphericalangle bVm : \sphericalangle mVe = \sphericalangle cWm : \sphericalangle mWf = 2 : 1$

tj. prava m deli uglove koje obrazuju prave d i e sa naspramnim stranicama a i b, redom, u odnosu $2:1$ (slika 27).
Neka je W tačka preseka simetrale ugla kod temena C, f, i naspramne stranice $c = AB$. Slično kao i u prethodnom delu prava $UW = m_1$ ima osobinu: $\sphericalangle aUm_1 = \sphericalangle m_1Ud = 2:1$. Otud će važiti $m = m_1$ i $W = W_1$. Dakle prava m sadrži tačke U, V, W i

$$\sphericalangle aUm : \sphericalangle mUd = \sphericalangle bVm : \sphericalangle mVe = \sphericalangle cWm : \sphericalangle mWf = 2:1.$$

∎

3.4 Menelajeva i Čevina teorema

Navedimo sada Čevinu i Menelajevu teoremu Galilejeve ravni:

Čevina teorema: *Neka je ABC trougao i neka su tačke A_1, B_1, C_1 tačke na pravama BC, AC, AB, redom. Tada je potreban i dovoljan uslov da se prave AA_1, BB_1, CC_1 seku ili da su paralelne:*

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = 1.$$

Podsetimo se da je $\overline{AC_1}$ oznaka za orijentisanu meru duži AC_1. S obzirom da su odnosi euklidske i Galilejeve mere dve kolinearne duži iste, ovo tvrđenje važi u Galilejevoj geometriji, jer važi i u euklidskoj.
Pomoću Čevine teoreme možemo ponovo videti da se težišne duži seku u jednoj tački: Neka je dat trougao ABC takav da je $\overline{AB} = \bar{c}, \overline{BC} = \bar{a}, \overline{AC} = \bar{b}$, i tačke C_1, A_1, B_1 središta stranica redom. Tada će važiti:

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = \frac{\frac{\bar{c}}{2}}{\frac{\bar{c}}{2}} \frac{\frac{\bar{a}}{2}}{\frac{\bar{a}}{2}} \frac{\frac{\bar{b}}{2}}{\frac{\bar{b}}{2}} = 1.$$

Iz sličnih razloga važi i Menelajeva teorema:

Menelajeva teorema: *Neka je ABC trougao i neka su tačke A_1, B_1, C_1 tačke na pravama BC, AC, AB, redom. Tada potreban i dovoljan uslov da su tačke A_1, B_1, C_1 kolinearne:*

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \frac{\overline{BA_1}}{\overline{CA_1}} \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AB_1}} = 1.$$

3.5 Dokaz principa dualnosti

3.5.1 Mebijusov dokaz

Pokažimo sada zašto važi princip dualnosti.

Neka je data transformacija $g(x,y) = (x', y')$, tj.

$$x' = x + a,$$
$$y' = bx + y + c.$$

Inverzna transformacija transformacije g, u oznaci g^{-1}, dato je formulama:

$$x = x' - a,$$
$$y = -b(x' - a) + y' - c.$$

Slika date prave l, tj. skupa tačaka (x,y) koji zadovoljava jednačinu

$$y = kx + n,$$

je takođe prava, u oznaci l', tj. skup tačaka (x', y') koji zadovoljava jednačinu

$$y' = (k + b)x' + c + n - ak - ab.$$

Svaka prava je određena koeficijentom pravca k i slobodnim članom n. Uređen par (k, n) nazivaćemo "koordinatama" prave l. Dakle, koordinate prave l' biće uređen par (k', n'), takav da je:

$$k' = k + b,$$
$$n' = c + n - ak - ab,$$

tj.

$$k' = k + A,$$
$$n' = Bk + n + C, \tag{19}$$

gde je $B = -a$, $A = b$, $C = c - ab$. Dakle, Galilejeve transformacije smo predstavili u zavisnosti od novouvedenih koordinata pravih. Primetimo da jednakost (19) ima isti oblik kao i jednakost (4).

Neka su date tačke $A(x,y)$ i $A_1(x_1, y_1)$. Rastojanje između tačaka smo definisali na sledeći način:

$$d_{AA_1} = x_1 - x.$$

Ako je $d_{AA_1} = 0$, tada posmatramo specijano rastojanje:

$$\delta_{AA_1} = y_1 - y.$$

Neka su date prave $l = l(k,n)$ i $l_1 = l_1(k_1, n_1)$. Meru ugla između pravih računamo na sledeći način:

$$\sphericalangle ll_1 = \delta_{ll_1} = k_1 - k. \tag{20}$$

Ako su prave paralelne, tj. $\delta_{ll_1} = 0$, tada posmatramo specijalnu meru ugla

$$d_{ll_1} = n_1 - n. \tag{21}$$

Uređena dvojka (k, n), kao što smo napomenuli, predstavlja koordinate prave l. Stoga, jednačina prave može biti zapisana i na sledeći način:

$$n = (-x)k + y, \tag{22}$$

gde su $-x$ i y koeficijenti. Dakle, vidimo da postoji simetrija između tačaka (x, y) i (k, n), pravih $y = kx + n$ i $n = (-x)k + y$, kao i načina na koji računamo rastojanja između tačaka, odnosno mere uglova koje zaklapaju prave. Jasno je da postoji paralela između jednakosti (4) i (19), tj. između geometrije tačaka i geometrije pravih, stoga zaključujemo da važi princip dualnosti.

3.5.2 Ponseleov dokaz

Posmatrajmo transformaciju π, koje slika datu tačku $M(X, Y)$ u pravu $m(X, Y)$ $(m : y = Xx - Y)$, i obrnuto:

$$\pi : M(X, Y) \leftrightarrow m(X, Y). \tag{23}$$

Transformacija π je takva da poseduje seledeće osobine:

1) Ako je $\pi(M) = m$ (važiće i $\pi(m) = M$) i $\pi(N) = n$, tada je $d_{MN} = \delta_{mn}$.

2) Ako su M i N paralelne tačke tada su $\pi(M) = m$ i $\pi(N) = n$ paralelne prave i važiće $\delta_{MN} = d_{mn}$.

3) Neka je $\pi(M) = m$ i $\pi(N) = n$ tada je $d_{Mn} = d_{Nm}$.

4) Ako je M tačka prave n, tada prava $\pi(M) = m$ sadrži tačku $\pi(n) = N$ (tj. ako je $d_{Mn} = 0$ tada je $d_{Nm} = 0$).

Transformacija π razmenjuje dualne elemente. Na osnovu osobina ove transformacije možemo zaključiti da će važiti princip dualnosti.

4 Ciklovi

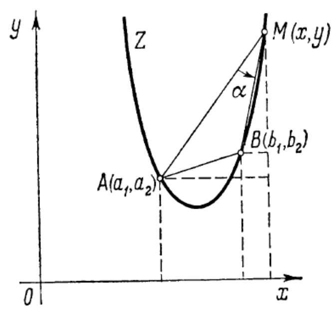
4.1 Šta su ciklovi?

U euklidskoj ravni krug definišemo kao *skup svih tačaka koje su na datom odstojanju r od zadate tačke Q*. Ekvivalentna, ali manje uobičajna definicija kruga je *skup svih tačaka iz kojih se data duž AB vidi pod konstantnim uglom α (odnosno $180^o - \alpha$, u zavnisnosti od poluravni sa rubom AB kojoj tačka pripada).* U Galilejevoj geometriji ove dve definicije daju različite skupove tačaka. U poglavlju 2.4 krug u Galilejevoj ravni definisali smo kao skup svih tačaka koje su na fiksiranom rastojanju r od date tačke Q. Ovako definisan krug predstavlja specijalnu pravu i zato nema neki veliki značaj.

Definicija 4.1 Skup tačaka Z iz kojih se obična duž AB (duž obične prave) vidi pod konstantnim, orijentisanim, uglom α nazivamo *ciklom.*

Neka su date dve tačke Galilejeve ravni $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$ i neka je $M(x, y)$ tačka takva da je $\sphericalangle AMB = \alpha$. Koeficijenti pravaca, k_1 i k_2, pravih MA i MB dati su jednačinama:

$$k_1 = \frac{y - a_2}{x - a_1} \qquad k_2 = \frac{y - b_2}{x - b_1}.$$



Slika 28: Cikl Z

Ugao između pravih MA i MB po definiciji jednak je:

$$\alpha = k_2 - k_1 = \frac{y - b_2}{x - b_1} - \frac{y - a_2}{x - a_1}.$$

Dakle, koordinate svih tačaka $M(x, y)$, takvih da je $\sphericalangle AMB = \alpha$, zadovoljavaju jednakost:

$$\alpha = \frac{y - b_2}{x - b_1} - \frac{y - a_2}{x - a_1},$$

tj.

$$\alpha(x - b_1)(x - a_1) - (x - a_1)(y - b_2) + (x - b_1)(y - a_2) = 0.$$

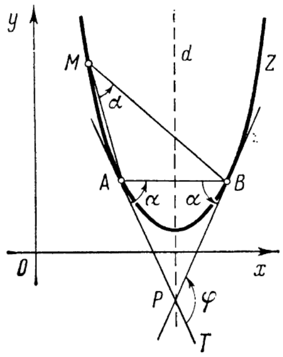
Poslednju jednakost možemo da pišemo kao:

$$(b_1 - a_1)y = \alpha x^2 + [(b_2 - a_2) - \alpha(b_1 + a_1)]x + \alpha a_1 b_1 - a_1 b_2 + a_2 b_1,$$

tj.

$$y = px^2 + qx + r, \tag{24}$$

gde je $p = \dfrac{\alpha}{b_1 - a_1} \neq 0$, $q = \dfrac{(b_2 - a_2) - \alpha(b_1 + a_1)}{b_1 - a_1}$, $r = \dfrac{\alpha a_1 b_1 - a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 - a_1}$.
S obzirom da je AB obična duž važiće uslov $b_1 - a_1 \neq 0$. Primetimo da je jednačina (24) jednačina euklidske parabole.
Dakle, u Galilejevoj ravni cikl je euklidska parabola, čija je osa specijalna prava.

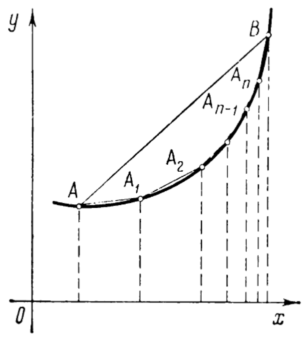


Slika 29: $\sphericalangle AMB = \sphericalangle PBA = \sphericalangle PAB$

Stav 4.1 *Ugao između tetive AB cikla Z i tangenti tog cikla u tačkama A i B jednak je $\sphericalangle AMB = \alpha$.*

Dokaz: Da bismo dokazali ovaj stav posmatrajmo šta se dešava kada tačka M teži tački A. Tada tetiva AM teži tangenti AT u tački A, a tetiva BM teži tetivi AB. Ugao između pravih AM i MB je α, dakle to će biti ugao između AT i AB (slika 29). ∎

Na osnovu ovog stava možemo da zaključimo da su tangente PA i PB iz tačke P na cikl Z jednake, kao i da je trougao PAB jednakokrak, sa jednakim uglovima na osnovici AB.



Slika 30: Poligonska linija upisana u cikl

U euklidskoj geometriji dužinu luka definišemo kao limes dužine $AA_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n + A_nB$ poligonske linije $AA_1A_2...A_nB$ upisane u krivu kada najduži segment poligonske linije teži 0. Sobzirom da je, u Galilejevoj geometriji, dužina bilo koje poligonske linije $AA_1A_2...A_nB$ upisane u luk AB je jednaka dužini tetive AB, dužinu luka AB, u oznaci s, definisaćemo kao dužinu tetive AB, tj. $s = d_{AB}$.

Stav 4.2 *Odnos dužine luka krive i periferijskog ugla α nad tim lukom, tj. $\frac{s}{\alpha}$, je konstantan.*

Dokaz: Neka su $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$ krajnje tačke tetive AB cikla Z, i neka je α periferijski ugao nad tetivom AB. Tada je

$$\frac{s}{\alpha} = \frac{d_{AB}}{\alpha} = \frac{b_1 - a_1}{\alpha} = \frac{1}{p} = const,$$

gde je p koeficijent uz x^2 u jednakosti (24). ∎

Dakle, kao i u euklidskoj geometriji odnos $\frac{s}{\alpha}$ je konstantan. Stoga poluprečnik cikla možemo da definišemo na sledeći način:

Definicija 4.2 Poluprečnik, r, cikla Z jednak je polovini odnosa dužine luka AB i periferijskog ugla nad tim lukom, tj.

$$r = \frac{1}{2}\frac{s}{\alpha} = \frac{1}{2}\frac{b_1 - a_1}{\alpha} = \frac{1}{2p}.$$

Kao i krug, cikl može da ima pozitivan i negativan poluprečnik. U ovom slučaju ta činjenica ukazuje na to da li je cikl konveksan ($r > 0$) ili konkavan ($r < 0$). Neka je dat cikl

$$y = px^2 + qx + r,$$

i proizvoljna Galilejeva transformacija $g = [a, b, c]$:

$$\begin{aligned} x' &= x + a \\ y' &= bx + y + c. \end{aligned}$$

Primetimo da je slika datog cikla pri Galilejevoj transformaciji g cikl istog poluprečnika:

$$y' = px'^2 + (b - 2ap + q)x' + (pa^2 - qa + r - ba + c).$$

Stoga kažemo da su ciklovi istog poluprečnika podudarni jer postoji Galilejeva transformacija, koja će slikati jedan u drugi. Važi i obrnuto, ako su $y = px^2 + qx + r$ i $y' = px'^2 + q_1x' + r_1$ jednačine dva cikla istih poluprečnika. Jednačine

$$\begin{aligned} q_1 &= b - 2ap + q \\ r_1 &= pa^2 - qa + r - ba + c \end{aligned}$$

imaju beskonačno mnogo rešenja, pa postoji Galilejeva transformacija koja slika jedan cikl u drugi, i ima ih beskonačno mnogo.

4.2 Ciklička rotacija

Neka je dat proizvoljan cikl Galilejeve ravni, podudaran nekom ciklu $Z : y = px^2$. Napomenuli smo da je cikl euklidska parabola, dakle translacijom cikl Z se slika u cikl Z_1. Transvekcija, sa osnovom $x = 0$, je transformacija data formulama:

$$\begin{aligned} x_1 =& x \\ y_1 =& bx + y, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} x =& x_1 \\ y =& y_1 - bx. \end{aligned}$$

Dakle transvekcija preslikava cikl

$$Z : y = px^2 \tag{25}$$

u cikl

$$Z_1 : y_1 - bx_1 = p{x_1}^2,$$

tj.

$$y_1 = p{x_1}^2 + bx_1 = p\left({x_1}^2 + \frac{bx_1}{p} + \frac{b^2}{4p^2}\right) - \frac{b^2}{4p}$$

ili

$$y_1 + \frac{b^2}{4p} = p\left(x_1 + \frac{b}{2p}\right)^2. \tag{26}$$

Ciklovi dati jednačinama (25) i (26) su podudarni. Ako primenimo translaciju:

$$\begin{aligned} x' &= x_1 + \frac{b}{2p} \\ y' &= y_1 + \frac{b^2}{4p} \end{aligned} \tag{27}$$

na cikl Z_1 dobićemo cikl Z. Transformaciju

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{b}{2p} \\ y' &= bx + y + \frac{b^2}{4p}, \end{aligned} \tag{28}$$

kompoziciju translacije i transvekcije, nazivamo *cikličkom rotacijom* sa koeficijentom b, $b \in \mathbb{R}$.
Primetimo da ciklička rotacija svaku tačku A sa cikla Z slika u tačku A' koja se takođe nalazi na ciklu Z i pri tom je

$$d_{AA'} = \frac{b}{2p}.$$

Dakle, važi sledeći stav:

Stav 4.3 *Postoji ciklička rotacija kojom se cikl Z preslikava na sebe.*

U euklidskoj ravni se susrećemo sa pojmom koncentričnih krugova. Ako je S krug euklidske ravni, krug sa njim koncentričan je skup slika jedne tačke pri rotacijama koje S slikaju u sebe. Analogno, u Galilejevoj ravni definišemo paralelne ciklove.

Definicija 4.3 Cikl Z_1 je paralelan datom ciklu Z Galilejeve ravni ako je skup svih slika jedne tačke pri cikličkoj rotaciji koje fiksiraju cikl Z.

Neka je dat cikl $Z : y = px^2$. Posmatrajmo transformacije (28). Skup slika tačke (x_0, y_0) dat je sa:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{b}{2p} \\ y &= bx_0 + y_0 + \frac{b^2}{4p}. \end{aligned}$$

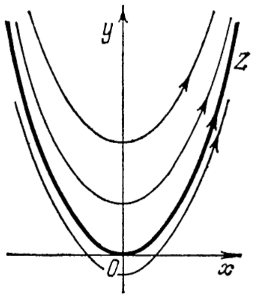
Tada je:

$$\begin{aligned} b &= 2p(x - x_0) \\ y &= 2p(x - x_0)x_0 + y_0 + \frac{1}{4p}4p^2(x - x_0)^2, \end{aligned}$$

tj.

$$y = px^2 + (y_0 - px_0^2). \tag{29}$$

Dakle, skup slika tačke (x_0, y_0) čini jedan cikl, za koji kažemo da je paralelan početnom.



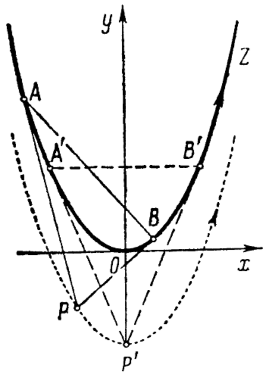
Slika 31: Paralelni ciklovi

Stav 4.4 *Tangente PA i PB, iz tačke P na cikl Z, su podudarne.*

Dokaz: Neka je data ciklička rotacija formulama (28), koja preslikava cikl Z u sebe i tačku P u tačku P', čija je y koordinata 0. Ovom transformacijom se tangente PA i PB slikaju u tangente $P'A'$ i $P'B'$. S obzirom da je parabola simetrična u odnosu na $y-$osu, tangente $P'A'$ i $P'B'$ su podudarne. Pošto je ciklička rotacija Galilejeva transformacija, a one ostavljalju dužine invarijantnim, biće:

$$d_{AP} = d_{A'P'} = d_{P'B'} = d_{PB}.$$

∎



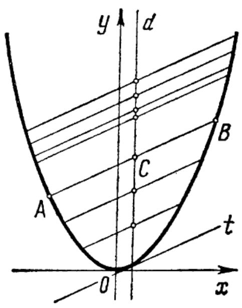
Slika 32: $PA = PB$

Stav 4.5 *Središta paralelnih tetiva cikla Z se nalaze na istoj specijalnoj pravoj d.*

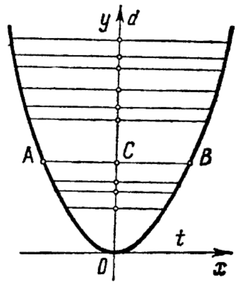
Dokaz: Posmatrajmo cikl $Z : y = px^2$ (slika 33a). Posmatrajmo paralelne tetive ovog cikla sa nagibom k_0. Znamo da transvekcija preslikava pravu $y = kx + n$, sa nagibom k, u pravu $y_1 - bx_1 = kx_1 + n$, tj.

$$y_1 = k_1 x + n,$$

sa nagibom $k_1 = k + b$. Postoji ciklička rotacija sa koeficijentom $b = -k_0$, takva da date tetive slika u tetive paralelne $x-$osi (slika 33b). Središta dobijenih tetiva se nalaze na $y-$osi, koja predstavlja i osu simetrije parabole $y = px^2$. Dakle, središta originalnih tetiva pripadaju jednoj pravoj d. Prava d je prava koja se pri cikličkoj rotaciji slika u $y-$osu, koja je specijalna prava. Dakle prava d je specijalna prava. ∎



Slika 33a: Središta tetiva pripadaju specijalnoj pravoj



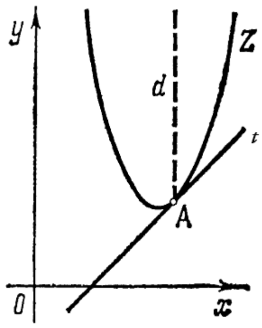
Slika 33b: Tetive paralelne $x-$osi

Definicija 4.4 Pravu d iz Stava 4.5 nazivamo *dijametrom* cikla Z.

Stav 4.6 *Svaka specijalna prava predstavlja dijametar cikla Z.*

Dokaz: Neka je $l : x = m$ specijalna prava. Cikličkom rotacijom sa koeficijentom b takav da je $\frac{b}{2p} = -m$, tj. $b = -2pm$, prava l se slika u $y-$osu. Dakle, prava l sadrži središta svih tetiva cikla Z koje se cikličkom rotacijom slikaju u tetive paralelne $x-$osi. ∎

U euklidskoj geometriji važi da je prečnik (dijametar) kruga normalan na tangentu tog kruga. Analogno, u Galilejevoj geometriji kažemo da je dijametar cikla normalan na tangentu tog cikla (slika 34).



Slika 34: Dijametar je normalan na tangentu

4.3 Upisani i opisan cikl trougla

Stav 4.7 *Postoji jedinstven cikl z koji je tangentan na date tri prave.*

Dokaz: Neka su date tri obične nekonkurentne prave, takve da ni koje dve nisu paralelne:

$$
\begin{aligned}
l_1 &: y = k_1 x + n_1 \\
l_2 &: y = k_2 x + n_2 \\
l_3 &: y = k_3 x + n_3,
\end{aligned}
$$

i $k_1 \neq k_2 \neq k_3$. Pokažimo da postoji jedinstven cikl $z : y = px^2 + qx + r$, takav da je:

$$
\begin{aligned}
(q - k_1)^2 - 4p(r - n_1) &= 0 \\
(q - k_2)^2 - 4p(r - n_2) &= 0 \\
(q - k_3)^2 - 4p(r - n_3) &= 0,
\end{aligned}
$$

Rešavanjem sistema dobijemo sistem linearnih jednačina:

$$
\begin{aligned}
2q(k_1 - k_2) + 4p(n_1 - n_2) &= {k_1}^2 - {k_2}^2 \\
2q(k_1 - k_3) + 4p(n_1 - n_3) &= {k_1}^2 - {k_3}^2.
\end{aligned}
$$

Posmatrajmo determinantu ovog sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 2(k_1 - k_2) & 4(n_1 - n_2) \\ 2(k_1 - k_3) & 4(n_1 - n_3). \end{vmatrix}$$

Kako prave nisu paralelne, $k_1 \neq k_2 \neq k_3$, prva kolona nije nula. Ako bi determinanta bila 0, tada je:

$$\begin{vmatrix} 4(n_1 - n_2) \\ 4(n_1 - n_3) \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 2(k_1 - k_2) \\ 2(k_1 - k_3). \end{vmatrix}$$

Sledi, $n_1 + \lambda k_1 = n_2 + \lambda k_2 = n_3 + \lambda k_3$, tj. tačka $(\lambda, \lambda k_1 + n_1)$ je zajednička za sve tri prave. Međutim, na početku smo rekli da prave nisu konkurentne, pa odbacijemo taj slučaj. Dakle, determinanta sistema je različita od nule, stoga postojaće jedinstveno rešenje za trojku (p, q, r), samim tim i jedinstven cikl z. ∎

Stav 4.8 *Postoji jedinstven cikl Z koji sadrži tri date tačke.*

Dokaz: Neka su sada date tri tačke $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, među kojima ni koje dve nisu paralelne. Pokažimo da postoji jedninstven cikl $Z : y = px^2 + qx + r$ koji ih sadrži. Posmatrajmo sistem:

$$\begin{aligned} p{x_1}^2 + qx_1 + r &= y_1 \\ p{x_2}^2 + qx_2 + r &= y_2 \\ p{x_3}^2 + qx_3 + r &= y_3. \end{aligned}$$

Oduzimanjem druge i treće jednačine od prve dobijemo sistem dve linearne jednačine:

$$\begin{aligned} p({x_1}^2 - {x_2}^2) + q(x_1 - x_2) &= y_1 - y_2 \\ p({x_1}^2 - {x_3}^2) + q(x_1 - x_3) &= y_1 - y_3. \end{aligned}$$

Determinanta ovog sistema glasi:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} {x_1}^2 - {x_2}^2 & x_1 - x_2 \\ {x_1}^2 - {x_3}^2 & x_1 - x_3 \end{vmatrix} \\ &= ({x_1}^2 - {x_2}^2)(x_1 - x_3) - ({x_1}^2 - {x_3}^2)(x_1 - x_2) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \neq 0, \end{aligned}$$

jer tačke nisu paralelne, tj. $x_1 \neq x_2 \neq x_3$. Determinanta sistema je različita od nule, dakle, postojaće jedinstveno rašenje za trojku (p, q, r), samim tim i jedinstven cikl Z. ∎

Definicija 4.5 Neka je u Galilejevoj ravni dat trougao ABC. Cikl Z koji sadrži tačke A, B, C je *opisan cikl* oko trougla ABC. Cikl, z, kome su stranice trougla a, b, c tangente nazivamo *upisan cikl* u trougao ABC.

Neka je dat trougao ABC i u njega upisan cikl z (slika 35). Stranica AB je tangenta na taj cikl u tački F, a produžeci stranica CA i CB su tangente u tačkama E i D. Tada su trouglovi DCE, FAE i DBF jednakokraki. Primetimo da će važiti sledeće:

$$\begin{aligned} CD + CE &= (CB + BD) + (CA + AE) \\ &= CB + BF + CA + AF \\ &= CB + CA + (BF + AF) \\ &= CB + CA + AB. \end{aligned}$$

Dakle imamo:

$$CD = CE = \frac{a+b+c}{2} = c = a + b. \tag{30}$$

Primetimo da je tada

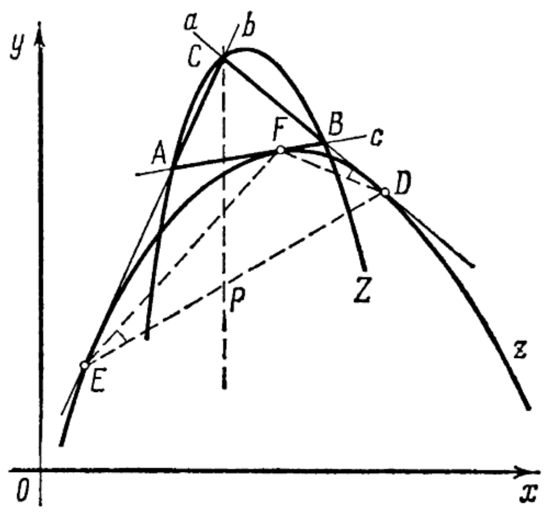
$$\begin{aligned} AE &= CE - CA = a \\ BD &= CD - CB = b. \end{aligned}$$

S obzirom da je $AF = AE$ i $BF = BD$ imamo:

$$AF = a \ \text{ i } \ BF = b,$$

tj.

$$EF = 2a, \quad DF = 2b, \quad ED = 2c.$$



Slika 35: Upisan i opisan cikl

Primetimo da upisan cikl z u trougao ABC, sa tangentama u tačkama D, E, F, je opisan cikl oko trougla FDE. Neka su nam dati uglovi C i A jednakokrakih trouglova DCE i FAE. Tada je:

$$\sphericalangle DEC = \frac{C}{2}, \quad \sphericalangle FEA = \frac{A}{2},$$

dakle biće:

$$\sphericalangle DEF = \frac{C}{2} - \frac{A}{2} = \frac{C-A}{2} = \frac{B}{2}.$$

Slično važiće da i relacije:

$$\sphericalangle EDF = \frac{A}{2} \quad \text{i} \quad \sphericalangle DFE = \frac{C}{2}.$$

Neka je cikl Z opisan cikl oko trougla ABC. Na osnovu definicije poluprečnika cikla važi:

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = 2R, \tag{31}$$

primenom sinusnog zakona imamo:

$$\frac{a}{singA} = \frac{b}{singB} = \frac{c}{singC} = 2R.$$

Primetimo da važi:

$$R = \frac{a}{2A} = \frac{abc}{2(Abc)} = \frac{abc}{2 \cdot 2S},$$

gde je S površina trougla ABC. Dakle formula za dobijanje poluprečnika opisanog cikla je:

$$R = \frac{abc}{4S}. \tag{32}$$

Uočimo da je dobijena formula za izračunavanje poluprečnika opisanog cikla ekvivalentna formuli za izračunavanje poluprečnika opisanog kruga oko trougla u euklidskoj geometriji.
Neka je z upisan cikl u trougao ABC sa poluprečnikom r. Tada je on opisan cikl za trougao DEF sa stranicama $EF = d$, $DF = e$, $DE = f$ i uglovima $\sphericalangle EDF = D$, $\sphericalangle DEF = E$ i $\sphericalangle DFE = F$. Znamo da je tada:

$$D = \frac{A}{2}, \quad E = \frac{B}{2}, \quad F = \frac{C}{2},$$

kao i:

$$d = 2a, \quad e = 2b, \quad f = 2c.$$

Dakle:

$$\frac{d}{D} = \frac{e}{E} = \frac{f}{F} = 2r,$$

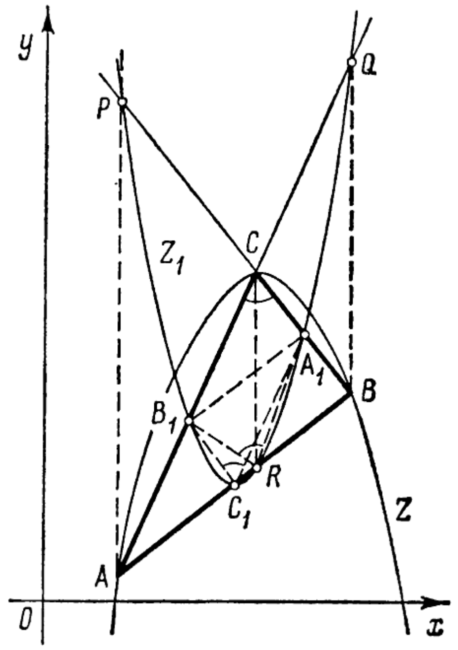
tj.

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{r}{2}.$$

Tada važi jednakost:

$$r = 4R. \tag{33}$$

Stav 4.9 *Postoji cikl Z koji sadrži središta stranica datog trougla i podnožja visina istog trougla. Takav cikl nazivamo cikl "šest tačaka".*



Slika 36: Cikl šest tačaka

Dokaz: Neka je dat trougao ABC (slika 36). Tačke A_1, B_1, C_1 su središta stranica a, b, c, a tačke P, Q, R su tačke podnožija visina AP, BQ, CR. Neka je Z_1 cikl opisan oko trougla $A_1B_1C_1$. Primetimo da je $BC||B_1C_1$ i $AC||A_1C_1$, sledi:

$$\sphericalangle B_1C_1A_1 = \sphericalangle A_1CB_1.$$

Euklidski A_1B_1 polovi CR, pa su orijentisani uglovi jednaki

$$\sphericalangle RB_1A_1 = \sphericalangle A_1B_1C$$
$$\sphericalangle RA_1B_1 = \sphericalangle B_1A_1C.$$

Ako su $k_{A_1B_1}, k_{B_1R}, k_{RA_1}, k_{B_1C}, k_{A_1C}$ koeficijenti pravaca pravih $A_1B_1, B_1R, RA_1, B_1C, A_1C$, sledi da je:

$$k_{B_1R} - k_{A_1B_1} = k_{A_1B_1} - k_{CB_1}$$
$$k_{A_1B_1} - k_{RA_1} = k_{A_1C} - k_{A_1B_1}.$$

sabiranjem ove dve jednakosti:

$$k_{B_1R} - k_{RA_1} = k_{A_1C} - k_{CB_1},$$

tj.

$$\sphericalangle A_1RB_1 = \sphericalangle B_1C_1A_1.$$

Dakle tačka R će se nalaziti na ciklu Z_1.

∎

Stav 4.10 *Cikl šest tačaka trougla ABC je tangentan sa upisanim ciklom istog trougla.*

Dokaz: Neka je Z_1 cikl šest tačaka i C_1T tangenta na taj cikl u tački C_1, koja predstavlja središte stranice AB trougla ABC (slika 37). Uočimo da je

$$\sphericalangle AC_1T = \sphericalangle AC_1B_1 - \sphericalangle TC_1B_1 = B - A,$$

jer je

$$\sphericalangle AC_1B_1 = \sphericalangle ABC = B, \quad \sphericalangle TC_1B_1 = \sphericalangle C_1A_1B_1 = A.$$

Neka su F, D, E tačke dodira cikla z i stranica AB, BC, CA trougla ABC. Specijalna prava CR, $R \in AB$, je dijametar cikla z, koji sadrži teme C. Neka je RK tangenta na cikla z. Dakle važiće:

$$FR = RK, \ \text{tj.} \ d_{FR} = d_{RK}.$$

S obzirom da je: $AR = AC = b$ i $AF = CB = a$, biće $FR = RK = b - a$, tj. $FK = FR + RK = 2(b - a)$. Sledi:

$$\frac{FK}{2r} = \frac{2(b-a)}{2r} = \frac{b-a}{4R} = \frac{1}{4}\left(\frac{b}{R} - \frac{a}{R}\right) = \frac{1}{4}(2B - 2A) = \frac{B-A}{2}.$$

Dakle,

$$\sphericalangle KFR = \sphericalangle RKF = \frac{B-A}{2},$$

pa je

$$\sphericalangle KRB = \sphericalangle KFR + \sphericalangle RKF = B - A \ \ (= \sphericalangle AC_1T).$$

Sledi:

$$RK || C_1T.$$

Neka je tačka L, druga tačka preseka prave C_1K i upisanog cikla z. Pokažimo da tačka L pripada ciklu Z_1.

$$AF = a, \ \ AC_1 = \frac{c}{2} = \frac{a+b}{2}, \ \ AR = b,$$

dakle,

$$FC_1 = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2} \ \text{ i } \ C_1R = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

U sledećoj sekciji pokazaćemo da važi:

$$C_1K \cdot C_1L = C_1R^2 = C_1F^2. \tag{34}$$

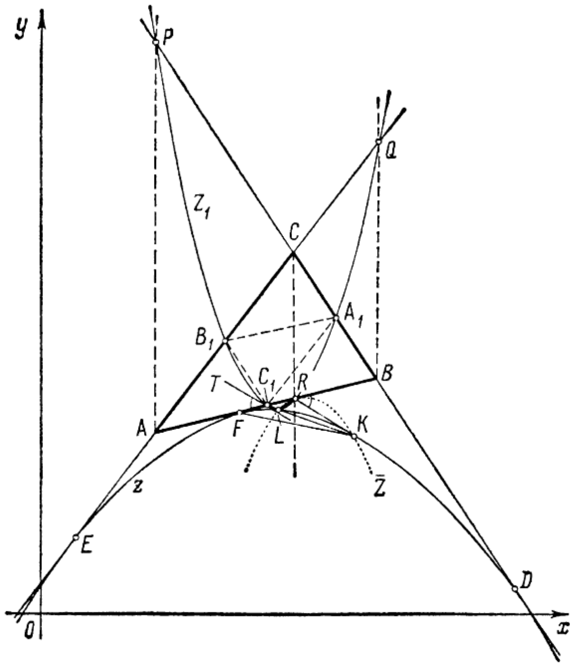
Neka je cikl $\overline{Z}$ opisan oko trougla KLR i neka je AB tangenta na taj cikl u tački R. Stoga, kako su periferijski ugao nad tetivom i ugao između tetive i tangente jednaki, važi:

$$\sphericalangle KLR = \sphericalangle KRB = B - A.$$

Tada sledi

$$\sphericalangle RLC_1 = \sphericalangle AC_1T = B - A.$$

Dakle, tačka L se nalazi na ciklu Z_1.



Slika 37: Cikla šest tačaka i upisan cikl

Pokažimo sada da ciklovi z i Z_1 imaju zajedničku tangentu u tački L. Neka tangenta u tački L na cikl z seče AB u tački M. Tada je

$$MF = ML.$$

Primetimo da važi:

$$RK = b - a, \ \ FC_1 = \frac{b-a}{2}.$$

Dalje,

$$MF = ML \ \text{ i } \ ML + MF = FL,$$

kao i

$$FC_1 + C_1L = FL.$$

Kako je

$$C_1K = \frac{3}{2}(b-a) \ \text{ i } \ C_1L = \frac{b-a}{6},$$

sledi da je

$$FL = \frac{2}{3}(b-a),$$

tj.

$$ML = \frac{1}{3}(b-a).$$

Uočimo da je

$$MC_1 = FC_1 - MF = FC_1 - ML = \frac{1}{6}(b-a),$$

kao i

$$MR = FR - MF = \frac{2}{3}(b - a).$$

Primetimo da je

$$ML^2 = MC_1 \cdot MR,$$

tj. prava ML je tangenta na cikl Z_1 u tački L. ∎

4.4 Potencija u odnosu na cikl

Definicija 4.6 Neka je data tačka M i cikl Z u Galilejevoj ravni. Neka je l prava kroz M koja seče cikl Z u tačkama A i B. Proizvod $MA \cdot MB$ nazivamo *potencijom tačke M u odnosu na cikl Z.*

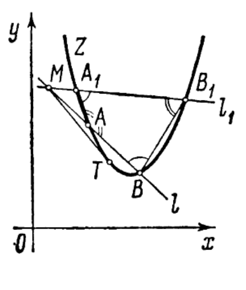
Za tačku M kažemo da se nalazi unutar cikla Z, ako svaka prava kroz M seče cikl Z. Ako se tačka ne nalazi u unutrašnjosti cikla ili na ciklu kažemo da se nalazi van cikla. Tačka M se nalazi van cikla Z ako postoji tangenta iz tačke M na cikl Z.

Stav 4.11 *Potencija tačke u odnosu na cikl ne zavisi od izbora prave.*

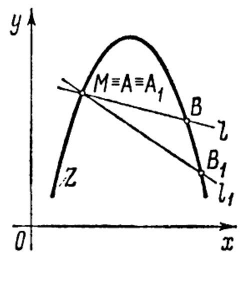
Dokaz: Neka su l i l_1 prave kroz M, koje seku cikl Z u tačkama A, B i A_1, B_1 (slika 38a-c). Ako se tačka M nalazi na ciklu Z tada je proizvod $MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1 = 0$. Ako M nije na Z tada su uglovi $\sphericalangle ABB_1$ i $\sphericalangle AA_1B_1$, odnosno $\sphericalangle A_1AB$ i $\sphericalangle A_1B_1B$, periferijski uglovi nad istim lukovima. Sledi da su trouglovi MAA_1 i MBB_1 slični. S obzirom da su stranice trougla proporcionalne naspramnim uglovima važi relacija:

$$\frac{MA}{MA_1} = \frac{MB_1}{MB} \quad \text{ili} \quad MA \cdot MB = MA_1 \cdot MB_1.$$

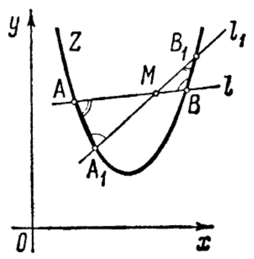
Dakle, možemo da zaključima da potencija tačke M u odnosu na cikl Z ne zavisi od izbora prave l. ∎



Slika 38a: $MA \cdot MB > 0$



Slika 38b: $MA \cdot MB = 0$



Slika 38c: $MA \cdot MB < 0$

Potencija tačke M u odnosu na cikl Z je pozitivna ako se tačka M nalazi van cikla Z, nula ako je tačka M na ciklu Z i negativna ako se tačka M nalazi unutar cikla Z.

Stav 4.12 *Neka je u Galilejevoj ravni dat cikl Z i tačka M van njega. Neka je prava p prava kroz M koja seče cikl Z u dvema tačkama A i B i prava t tangenta iz tačke M na cikl Z u tački T. Tada važi*

$$MT^2 = MA \cdot MB. \tag{35}$$

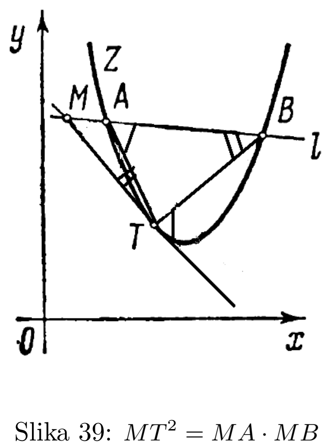
Dokaz: Da bismo pokazali jednakost (35) posmatrajmo sliku 39. Trouglovi MTA i MTB su slični, sličnošću druge vrste, sa koeficijentom 1, pa je

$$\frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB},$$

tj.

$$MT^2 = MA \cdot MB.$$

∎



Slika 39: $MT^2 = MA \cdot MB$

Pokažimo da potenciju tačke M u odnosu na cikl Z možemo dobiti zamenom koordinata tačke M u jednačinu cikla.

Neka je Z cikl dat jednačinom

$$x^2 + q_1 x + q_2 y + r = 0 \tag{36}$$

i neka je prava l prava kroz tačku $M(x_0, y_0)$ koja zadovoljava jednakost:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{37}$$

Neka su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ tačke preseka prave l i cikla Z. Jednačinu prave l možemo da napišemo u obliku

$$y = kx + (y_0 - kx_0).$$

Kada zamenimo y u jednačinu (36) dobijemo:

$$x^2 + (q_1 + kq_2)x + [q_2(y_0 - kx_0) + r] = 0,$$

tako da je

$$x_1 + x_2 = -(q_1 + kq_2), \qquad x_1 x_2 = q_2(y_0 - kx_0) + r.$$

Potenciju tačke M u odnosu na cikl Z računamo:

$$MA \cdot MB = (x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_0) = {x_0}^2 - (x_1 + x_2)x_0 + x_1 x_2,$$

tj.

$${x_0}^2 + (q_1 + kq_2)x_0 + q_2(y_0 - kx_0) + r = {x_0}^2 + q_1 x_0 + q_2 y_0 + r$$

Dakle, geometrijsko mesto tačaka čija potencija u odnosu na cikl Z ima vrednost k je:

$$x^2 + q_1 x + q_2 y + r = k, \quad \text{tj.} \quad x^2 + q_1 x + q_2 y + (r - k) = 0,$$

tj. cikl koji je paralelan datom ciklu Z.
Posmatrajmo dva paralelna cikla $y = px^2$ i $y = px^2 + r$. Primetimo da jednačina

$$x^2 - \frac{1}{p}y = x^2 - \frac{1}{p}y + \frac{r}{p}$$

nema rešenja po (x, y), stoga zaključujemo da ne postoji tačka koja ima istu potenciju u odnosu na ova dva cikla. Međutim za neparalelne ciklove $x^2 - \frac{1}{p}y = 0$ i $x^2 + q_1 x + q_2 y + r = 0$ dobijemo

$$x^2 - \frac{1}{p}y = x^2 + q_1 x + q_2 y + r,$$

tj. u preseku ova dva cikla je:

$$q_1 x + (q_2 + \frac{1}{p})y + r = 0.$$

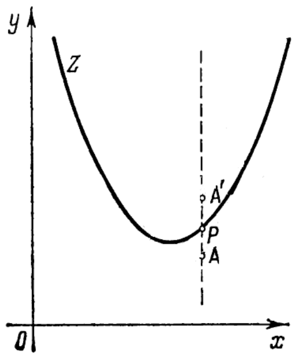
Dakle tačke sa istom potencijom u odnosu na ova dva cikla pripadaju jednoj pravoj.

Definicija 4.7 Skup tačaka koje imaju istu potenciju u odnosu na dva neparalelna cikla, Z_1 i Z_2, je prava. Tu pravu nazivamo *radikalnom osom* ta dva cikla.

Ukoliko ciklovi Z_1 i Z_2 imaju isti poluprečnik, radikalna osa je specijalna prava. U svi ostalim slučajevima ona je obična prava. Ako se ciklovi Z_1 i Z_2 seku u dvema tačkama, radikalna osa biće prava kroz te dve tačke. Neka su Z_1, Z_2, Z_3 tri neparalelna cikla. Ako se dve od tri radikalne ose seku u nekoj tački R, tada će i treća radikalna osa sadržati tačku R. Tačku R nazivamo *radikalnim centrom* tri cikla.

4.5 Refleksija u odnosu na cikl

Definicija 4.8 *Refleksija u odnosu na cikl* Z je transformacija koje ostavlja sve tačke cikla Z fiksnim i svaku tačku A van cikla slika u tačku A' koja se nalazi na specijalnoj pravoj kroz A, tako da cikl Z sadrži središte specijalne duži AA'.



Slika 40: Refleksija u odnosu na cikl

Na osnovu definicije vidimo da je refleksija u odnosu na cikl bijekcija i involucija koja slika spoljašnjost cikla u unutrašnjost, i obrnuto, kao i specijalne prave u sebe. Uočimo da običnu pravu možemo smatrati specijalnim slučajem cikla

$$y = px^2 + qx + r,$$

ako je $p = 0$.

Stav 4.13 *Refleksijom u odnosu na cikl Z slike ciklova su ciklovi.*

Dokaz: Neka je dat cikl $Z : y = \alpha x^2$. Refleksija u odnosu na Z preslikava tačku $A(x, y)$ u tačku $A'(x', y') = A'(x, y')$ na specijalnoj pravoj kroz A, tako da je središte duži AA', tačka $P(x, \alpha x^2)$ (slika 41). Važi:

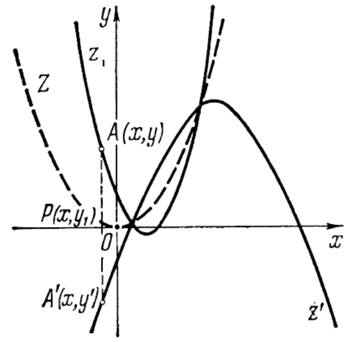
$$y' - \alpha x^2 = \alpha x^2 - y,$$

tj.

$$x' = x, \qquad y' = 2\alpha x^2 - y$$

ili

$$x = x', \qquad y = 2\alpha x'^2 - y'.$$



Slika 41: Pri refleksiji slika cikla je cikl

Dakle, ako je dat proizoljan cikl jednačinom

$$y = px^2 + qx + r$$

njegova slika biće cikl oblika

$$2\alpha x'^2 - y' = px'^2 + qx' + r,$$

tj.

$$y = p'x^2 + q'x + r',$$

gde je

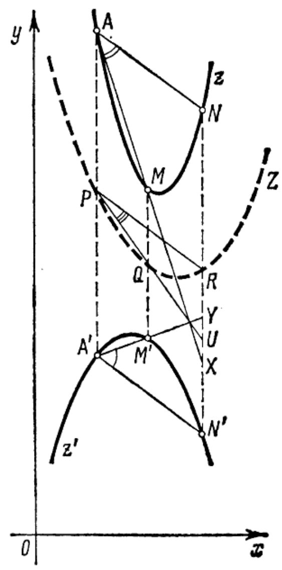
$$p' = 2\alpha - p, \quad q' = -q, \quad r' = -r.$$

∎

Stav 4.14 *Pri refleksiji u odnosu na cikl uglovi su invarijantni.*

Dokaz: Neka je u Galilejevoj ravni dat cikl Z. Pretpostavimo da refleksija u odnosu na cikl Z slika tačke A, N, M u tačke A', N', M'. Sa P, Q, R obeležimo tačke preseka cikl Z i duži AA', NN', MM', a sa X, Y, U obeležimo tačke preseka duži NN' sa pravama $AM, A'M', PQ$ (slika 42). Prava PQ sadrži središta osnovica trapeza $AA'MM'$, dakle sadržaće i središte duži XY, koja je paralelna osnovicama trapeza. Dakle imamo:

$$\begin{aligned}
N'Y &= N'U + UY = (N'R - UR) + UY \\
&= RN - UR + XU = (UN - UR) - UR + XU \\
&= (XU + UN) - 2UR \\
&= XN - 2UR.
\end{aligned}$$



Slika 42: $\sphericalangle M'A'N' = 2\sphericalangle QPR - \sphericalangle MAN$

Dakle

$$N'Y = XN - 2UR,$$

podelimo ovu jednakost sa $A'N' = AN = PR$ i iskoristimo činjenicu da je:

$$\frac{N'Y}{A'N'} = \sphericalangle N'A'M', \quad \frac{XN}{AN} = \sphericalangle MAN, \quad \frac{UR}{PR} = \sphericalangle QPR,$$

dobijemo jednakosti:

$$\begin{aligned} \sphericalangle N'A'M' &= \sphericalangle MAN - 2\sphericalangle QPR, \\ \sphericalangle M'A'N' &= 2\sphericalangle QPR - \sphericalangle MAN. \end{aligned} \tag{38}$$

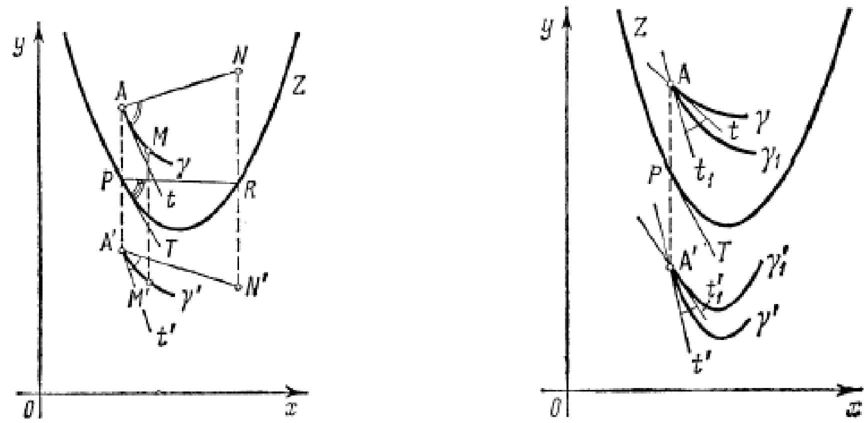
Neka je γ proizvoljan cikl i γ' njegova slika u odnosu na cikl Z. Tačke A i N su tačke sa cikla γ, njihove slike su tačke A' i N' na ciklu γ' (slika 43). Važi ralacija:

$$\sphericalangle t'A'N' = 2\sphericalangle TPR - \sphericalangle tAN,$$

gde je At tangenta na cikl γ u tački A, $A't'$ je tangenta na cikl γ' u tački A' i PT tangenta na Z u tački P. Posmatrajmo dve krive γ i γ_1 koje se seku u tački A, i njihove slike γ' i γ_1', pri refleksiji u odnosu na cikl Z, koje se seku u tački A'. Prave su t i t_1 su tangente na krive γ i γ_1 u tački A, a t' i t_1' tangente na krive γ' i γ_1' u tački A'. Tada važi:

$$\begin{aligned} \sphericalangle t'A't_1' &= \sphericalangle t'A'N' - \sphericalangle t_1'A'N' \\ &= (2\sphericalangle TPR - \sphericalangle tAN) - (2\sphericalangle TPR - \sphericalangle t_1AN) \\ &= \sphericalangle t_1AN - \sphericalangle tAN \\ &= \sphericalangle t_1At. \end{aligned}$$

∎



Slika 43: Pri refleksiji u odnosu na cikl uglovi su invarijantni

5 Sličnosti i razlike

U narednoj tabeli prikazane su neke od sličnosti i razlika između euklidske i Galilejeve geometrije.

	euklidska	Galilejeva
rastojanje	nikad nije negativno	može biti negativno
mera uglova među pravama	$[0, \pi]$	$(-\infty, +\infty)$
saglasni uglovi	podudarni	podudarni
zbir dve manje strane trougla	strogo veći od treće	jednak trećoj
zbir dva manja ugla trougla	manji je od π	jednak je trećem uglu
jednakostranični trouglovi	postoje	ne postoje
sinusna teorema	važi	važi
površina trougla	jednaka je $ah/2$	jednaka je $ah/2$
težišne duži trougla	seku se u jednoj tački	seku se u jednoj tački
simetrale uglova trougla	konkurentne	seku naspramne ivice u kolinearnim tačkama
Menelajeva	važi	važi
Čevina teorema	važi	važi
krugovi	postoje	ne postoje
duž se vidi pod datim orij. uglom	krug	cikl
krug i cikl	određeni sa tri tačke	određeni sa tri tačke
opisani i upisani krug/cikl trougla	postoji	postoji
postoji	krug 9 tačaka	cikl 6 tačaka
definisana potencija	u odnosu na krug	u odnosu na cikl
postoji	inverzija u odnosu na krug	refleksija u odnosu na cikl

Literatura

[1] Blažić N., Bokan N., Lučić Z., Rakić Z., *Analitička geometrija*, Newslines i Matematički fakultet Beograd, Beograd (2002).

[2] Dragović V., Milinković D., *Analiza na mnogostrukostima,* Matematički fakultet, Beograd (2003).

[3] Đorić M., Kalajdžić G., *Geometrija*, Beograd (2003).

[4] Hatchaturian A. V., *Galilean geometry*, Center for Continuous Mathematical Education, Moscow (2005).

[5] Yaglom I. M., *A Simple non-Euclidean Geometry and Its Phisical Basis,* Springer - Verlag, New York (1979).