

Универзитет у Београду
Математички факултет



Мастер рад

Тема: Геометријски случајни процеси

Ментор:

Проф. др Слободанка Јанковић

Кандидат:

Радојка Станковић, дипл. математичар

Београд, 2012

Садржај

Садржај.....	1
Увод.....	2
1. Пуасонов процес и процес обнављања.....	4
1.1. Пуасонов процес.....	4
1.2. Процес обнављања	8
2. Геометријски процеси.....	14
2.1. Дефиниција и својство.....	14
2.2. Геометријски процес са експоненцијалном расподелом	18
3. Геометријска функција и геометријска једначина	20
3.1. Дефиниција геометријске функције и геометријска једначина	20
3.2. Опште решење геометријске једначине.....	22
3.3. Нумеричко решење геометријске једначине	24
3.4. Приближно решење геометријске једначине	27
4. Статистички закључци о геометријским процесима	33
4.1. Тестирање хипотезе да је процес геометријски процес	33
4.2. Оцена параметара за геометријски процес.....	35
4.3. Асимптотска расподела оцена	36
5. Примена модела геометријских процеса.....	39
5.1. Модел геометријских процеса у одржавању система	39
5.2. Оптимална стратегија замене	43
Модел 1. Модел под Претпоставкама 1-4.	44
Модел 2. Модел под Претпоставкама 1-3 и 4'.	45
6. Закључак.....	47
Литература	48

Увод

Многи практични проблеми у различитим областима, као што су природне наука, инжињерство, медицина и социологија своде се на изучавање геометријских процеса. Како је већина система склона квару, успешно функционисање (време експлоатације) система после поправке се смањује, док се време узастопних поправки после квара повећава. У епидемиолошким студијама, број заражених случајева обично показује растући тренд у раној фази и стабилан у средњој фази, а опадајући у касној фази. У економским истраживањима, економски развој земље или региона често показује периодични циклус, то значи да ће БДП (Бруто домаћи производ) да расте у раној фази циклуса, бити стабилан у средњој фази и опадати у завршној фази. Многи модели као што су минимални модел поправке, модел нелинеарне регресије, модел нелинеарних временских серија, су развијени да третирају (моделирају) проблеме поменутих појава са трендом. Међутим, много директнији приступ представља модел монотоног процеса, које је увео Лам¹ 1988. Године. Његов најпростији случај је геометријски процес.

Дефиниција: Случајни процес $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ се назива *геометријски процес* ако постоји реалан број $a > 0$ такав да је $\{a^{i-1}X_i, i = 1, 2, \dots\}$ процес обнављања. Реалан број a се назива *коэффициент* геометријског процеса.

Очигледно, геометријски процес је стохастички опадајући ако $a \geq 1$, а стохастички растући у случају $0 < a \leq 1$. Када је $a = 1$ геометријски процес се своди на процес обнављања. Дакле, геометријски процес је уопштење процеса обнављања.

У овом раду ћемо сажето изложити неке теоријске и примењене резултате о геометријским процесима.

Прво поглавље садржи кратки резиме о Пуасоновом процесу и процесу обнављања, као посебним случајевима геометријског процеса.

У другом поглављу упознаћемо се са геометријским процесом и његовим основним особинама.

У следећем поглављу ћемо се упознати са основним питањима везаним са геометријским процесом. Дефинисаћемо геометријску функцију која задовољава геометријску једначину и изложити више решења те једначине.

¹ Yeh Lam, хонгконшки математичар

У четвртој глави ћемо видети шта је потребно да бисмо применили неки модел геометријских процеса на одређене податке, видећемо статистичку анализу параметара и оценити поузданост.

И на крају, у петој глави, видећемо основну примену геометријских процеса која ће објаснити откуд идеја за увођењем овог модела.

Већина доказа која је изостављена у овом раду може се наћи у Лам [10].

1. Пуасонов процес и процес обнављања

1.1. Пуасонов процес

Основни концепт у теорији вероватноће је случајни експеримент. Случајни експеримент је експеримент чији исход није унапред одређен. Скуп свих могућих исхода случајног експеримента чини узорачки простор и означаваћемо га са S . Подскуп простора вероватноће назива се догађај. Догађај E се догодио ако је исход случајног експеримента елемент скупа E . Случајна променљива X је реална функција дефинисана на простору S .

Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је фамилија случајних променљивих таква да, за свако $t \in T$, $X(t)$ је случајна променљива. Скуп T зовемо индексни скуп или скуп индекса. Можемо да посматрамо t као време, тада $X(t)$ представља стање случајног процеса у тренутку t . Ако је скуп T пребројив онда се процес $\{X(t), t \in T\}$ назива дискретни случајни процес, а ако је T непребројив скуп, на пример интервал, онда је процес $\{X(t), t \in T\}$ непрекидни случајни процес или случајни процес са непрекидним временом.

Дефиниција 1.1.1. За случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ кажемо да има *независне прираштаје* ако су, за свако $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ и $t_i \in T$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, случајне променљиве

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

независне.

Дакле, случајни процес има *независне прираштаје* ако су промене у процесу у дисјунктним временским интервалима независне.

Дефиниција 1.1.2. Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ има *стационарне прираштаје* ако је, за свако $t, t + s \in T$, расподела $X(t + s) - X(t)$ је иста за свако t .

Дефиниција 1.1.3. Случајан процес $\{N(t), t \geq 0\}$, који показује укупан број догађаја који су се десили за време t , назива се *процес бројања*.

Особине процеса бројања:

- (1) $N(t) \geq 0$
- (2) $N(t)$ је природан број
- (3) ако је $s < t$, онда је $N(s) \leq N(t)$
- (4) за $s < t$, $N(t) - N(s)$ представља број догађаја који су се десили у интервалу $(s, t]$.

Из *Дефиниције 1.1.2* следи да процес бројања има независне прираштаје ако су бројеви догађаја у дисјунктним интервалима времена независни, из *Дефиниције 1.1.3* следи да процес бројања има стационарне прираштаје ако расподела броја догађаја који су се десили у неком интервалу времена зависи само од дужине интервала.

Дефиниција 1.1.4. Процес бројања се назива *Пуасонов процес са интензитетом λ* ако важи:

- (1) $N(0) = 0$
- (2) процес има независне прираштаје,
- (3) за свако $s, t \geq 0$,

$$P\{N(t + s) - N(s) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Пуасонов процес има следећу алтернативну дефиницију, која је еквивалентна са *Дефиницијом 1.1.4*.

Дефиниција 1.1.5. Процес бројања се назива *Пуасонов процес са интензитетом λ* ако важи:

- (1) $N(0) = 0$,
- (2) процес бројања има независне и стационарне прираштаје
- (3) $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$,
- (4) $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$.

Дефиниција 1.1.6. Непрекидна случајна променљива X има *експоненцијалну расподелу $\text{Exp}(\lambda)$* ако је густина расподеле дата са:

$$f = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Важна особина експоненцијалне расподеле је својство одсуства памћења :

$$P\{X > s + t \mid X > s\} = \frac{P\{X > s + t, X > s\}}{P\{X > s\}} = \frac{P\{X > s + t\}}{P\{X > s\}} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P\{X > t\}.$$

Дефиниција 1.1.7. Дискретна случајна променљива X има *геометријску расподелу $G(p)$* са параметром p ако је расподела вероватноће дата са:

$$p(x) = P\{X = x\} = pq^{x-1} \quad x = 1, 2, \dots, \quad q = 1 - p$$

Геометријска расподела такође има особину одсуства памћења:

$$P\{X > m + n \mid X > n\} = P\{X > m\} \quad \text{за} \quad m, n = 0, 1, \dots$$

За Пуасонов процес са интензитетом λ нека је X_1 време када се десио први догађај, а X_n , $n \geq 1$ су времена између узастопних догађаја $n - 1$ и n .

Теорема 1.1.8. Нека је дат Пуасонов процес са интензитетом λ . Тада су времена између догађаја X_n , $n = 1, 2, \dots$ независне и једнако расподељене случајне променљиве са експоненцијалном расподелом $\text{Exp}(\lambda)$.

Доказ.

Јасно је да је $P\{X_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$,

Тако да X_1 има експоненцијалну расподелу $\text{Exp}(\lambda)$. Сада размотримо

$$\begin{aligned} P\{X_1 > s, X_2 > t\} &= \int_0^\infty P\{X_1 > s, X_2 > t \mid X_1 = x\} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_s^\infty P\{\text{нема догађаја у интервалу } (x, x+t] \mid X_1 = x\} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_s^\infty P\{\text{нема догађаја у интервалу } (x, x+t]\} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= e^{-\lambda t} \int_s^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t} e^{-\lambda s} \\ &= P\{X_1 > s\} P\{X_2 > t\}. \end{aligned}$$

Према томе, X_1 и X_2 су независне и имају $\text{Exp}(\lambda)$ расподелу. Тврђење теореме следи индукцијом. ■

Дефинишимо:

$$S_0 = 0 \quad \text{и} \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

S_n је време које прође до n -тог догађаја. Очигледно имамо:

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t.$$

С обзиром да су X_n , $n = 1, 2, \dots$ независне случајне променљиве са истом, експоненцијалном расподелом $\text{Exp}(\lambda)$ имамо:

$$P\{S_n \leq t\} = P\{N(t) \geq n\} = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}.$$

С обзиром да је S_n сума случајних променљивих које имају $\text{Exp}(\lambda)$ расподелу, она има гама расподелу $\Gamma(n, \lambda)$ са густином:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda x} x^{n-1}, & x > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Претпоставимо да је N случајна променљива са Пуасоновом расподелом $Poiss(\lambda)$ и $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ су независне случајне променљиве са истом функцијом расподеле F и $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ су независне од N . Случајна променљива $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ се назива сложена Пуасонова случајна променљива са параметром λ и компонентом F .

Дефиниција 1.1.9. Претпоставимо да је $\{N(t), t \geq 0\}$ Пуасонов процес и $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ независне случајне променљиве са истом расподелом и независне од $\{N(t), t \geq 0\}$. Нека је $X(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}$. Тада случајни процес $\{X(t), t \geq 0\}$ називамо сложени Пуасонов процес.

Очигледно, ако је $\{X(t), t \geq 0\}$ сложени Пуасонов процес онда је $X(t)$ сложена Пуасонова случајна променљива са Пуасоновим параметром λt .

Када је интензитет Пуасоновог процеса λ констаната, такав процес је хомоген Пуасонов процес. Сада ћемо размотрити случај када је интензитет функција од времена t .

Дефиниција 1.1.10. Процес бројања $\{N(t), t \geq 0\}$ се назива *нехомоген Пуасонов процес* са функцијом интензитета $\lambda(t), t \geq 0$ ако је:

- (1) $N(0) = 0$,
- (2) процес бројања има независне и стационарне прираштаје
- (3) $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$,
- (4) $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$.

Теорема 1.1.11. Нека је дат нехомоген Пуасонов процес $\{N(t), t \geq 0\}$ са интензитетом $\lambda(t), t \geq 0$, тада је:

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = \frac{(\int_s^{s+t} \lambda(x) dx)^n}{n!} \exp \left\{ - \int_s^{s+t} \lambda(x) dx \right\}.$$

Доказ овде нећемо изводити, а он може да се нађе у Рос [12].

Нека је X време до првог квара (дакле, догађај који пратимо је квар). Тада из претходне формуле имамо:

$$\bar{F}(t) = P\{X > t\} = P\{N(t) = 0\} = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(x) dx \right\}.$$

Функцију $\bar{F}(t)$ називамо функцијом *преживљавања*. Стога су функција расподеле F и густина расподеле f променљиве X дате су са:

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^x \lambda(u) du \right\} \quad \text{и} \quad \lambda(x) = \frac{f(x)}{F(x)}.$$

Другим речима, функција интензитета $\lambda(t)$ и функција расподеле F су јединствено одређене међусобно.

У пракси су доста заступљена следећа два нехомогена Пуасонова процеса:

(1) Кокс-Луисов модел [2], са функцијом интензитета:

$$\lambda(t) = \exp\{\alpha_0 + \alpha_1 t\}, \quad -\infty < \alpha_0, \alpha_1 < \infty, \quad t > 0.$$

(2) Вејбулов² модел [11], са функцијом интензитета:

$$\lambda(t) = \alpha \theta t^{\theta-1}, \quad \alpha, \theta > 0, \quad t > 0.$$

1.2. Процес обнављања

Нека је $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ низ ненегативних независних случајних променљивих са истом расподелом F , $F(0) = P\{X_n = 0\} < 1$.

Означимо $\mu = E(X_n) = \int_0^\infty x dF(x)$, $0 < \mu \leq \infty$.

Ако X_n посматрамо као време између $(n-1)$ -тог и n -тог догађаја (или обнављања) тада, као код Пуасоновог процеса, можемо да дефинишемо време до n -тог догађаја на следећи начин:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_0 = 0.$$

Према томе, број догађаја који су се догодили за време дужине t је дат са:

$$N(t) = \sup \{n: S_n \leq t\},$$

где је $\{N(t), t \geq 0\}$ процес бројања.

Дефиниција 1.2.1. Процес бројања $\{N(t), t \geq 0\}$ се назива *процес обнављања*.

Ако је заједничка расподела F експоненцијална, онда процес обнављања постаје Пуасонов процес. Дакле, процес обнављања је уопштење Пуасоновог процеса.

Дефинишимо функцију обнављања $M(t)$ као очекивани број догађаја за време t :

² Waloddi Weibull, шведски математичар

$$M(t) = E[N(t)].$$

Као и за Пуасонов процес и овде имамо:

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t. \quad (1.2.1)$$

Такође важи и:

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\} = P\{S_n \leq t\} - P\{S_{n+1} \leq t\} \\ &= F_n(t) - F_{n+1}(t), \end{aligned}$$

где је F_n функција расподеле за S_n .

Теорема 1.2.2

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

Доказ.

$$M(t) = E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} nP\{N(t) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n\{F_n(t) - F_{n+1}(t)\} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \quad \blacksquare$$

За функцију обнављања такође важи и:

Теорема 1.2.3.

$$M(t) < \infty, \text{ за свако } 0 \leq t < \infty.$$

За функцију обнављања важи следеће:

$$M(t) = E[N(t)] = \int_0^t E[N(t)|X_1 = x]dF(x). \quad (1.2.2)$$

Где је $N(t)$ под условом да је $X_1 = x$, једнако:

$$(N(t)|X_1 = x) = \begin{cases} 0, & x > t, \\ 1 + N_1(t - x), & x \leq t, \end{cases} \quad (1.2.3)$$

и $N_1(t) = \sup\{n: \sum_{i=2}^{n+1} X_i \leq t\}.$

Односно, заменом (1.2.2) у (1.2.3) добијамо:

$$M(t) = \int_0^t \{1 + E[N(t - x)]\}dF(x),$$

јер $N_1(t)$ и $N(t)$ имају исту расподелу. Према томе:

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t - x)dF(x). \quad (1.2.4)$$

Једначина (1.2.4) се назива *једначином обнављања*, то је интегрална једначина коју задовољава функција обнављања.

Дефиниција 1.2.4. Случајна променљива X је *решеткаста* ако узима само целе умношке неког броја $d \geq 0$. Другим речима, X је решеткаста ако постоји број $d \geq 0$ такав да је

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} P\{X = nd\} = 1.$$

Највећи број d који има ово својство се назива *периодом* случајне променљиве X . Ако је X решеткаста и ако је F расподела случајне променљиве X , тада за F такође кажемо да је *решеткаста*.

За расподелу F која није решеткаста важи следеће теорема.

Теорема 1.2.5. Ако F није решеткаста, $E[X] = \mu$ и $Var[X] = \sigma^2$, тада је:

$$M(t) = \frac{t}{\mu} + \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2} + o(1), \quad \text{када } t \rightarrow \infty.$$

Нека је $N(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$. Тада важи:

Лема 1.2.6.

$$P\{N(\infty) = \infty\} = 1.$$

Доказ. Из (1.2.1) имамо

$$P\{N(\infty) < \infty\} = P\{X_n = \infty, \text{ за неко } n\} = P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n = \infty)\right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = \infty\} = 0. \quad \blacksquare$$

Лема 1.2.6 каже да $N(t)$ тежи ка бесконачности кад $t \rightarrow \infty$, са вероватноћом 1.

Лема 1.2.7. Са вероватноћом 1 важи следеће:

$$\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \quad \text{када } t \rightarrow \infty.$$

Дефиниција 1.2.8. Нека је дат низ случајних променљивих $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$. Целобројна променљива N се назива *време заустављања* за $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ ако је, за свако $n = 1, 2, \dots$, догађај $\{N = n\}$ независан од случајних променљивих $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$

Теорема 1.2.9. (Валдова³ једначина) Ако је $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ низ независних и једнако расподељених случајних променљивих са заједничким очекивањем $E[X] < \infty$, и ако је N време заустављања за низ $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ и $E[N] < \infty$, тада је:

$$E\left[\sum_{n=1}^N X_n\right] = E[N]E[X].$$

Последица 1.2.10. Ако је $E[X] = \mu < \infty$, тада је

$$E[S_{N(t)+1}] = \mu[M(t) + 1].$$

Теорема 1.2.11. (Елементарна теорема обнављања)

$$\frac{M(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu} \quad \text{када } t \rightarrow \infty.$$

За доказ погледати Рос [12].

Теорема 1.2.12. Нека су μ и σ^2 средња вредност и варијанса заједничке расподеле времена између два догађаја процеса обнављања $\{N(t), t \geq 0\}$. Тада је:

$$P\left\{\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{\mu^3}}} < y\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{када } t \rightarrow \infty.$$

Подсетимо се неких чињеница у вези са интеграбилношћу функције. Нека је функција h дефинисана на интервалу $[0, \infty)$, нека су за свако $a > 0$, $\overline{m}_n(a)$ и $\underline{m}_n(a)$ супремум и инфимум функције $h(t)$ на интервалу $[(n-1)a, na]$. Функција h је Риман интеграбилна (интеграбилна у Римановом смислу) ако су за свако $a > 0$, $\overline{m}_n(a)$ и $\underline{m}_n(a)$ коначни и важи:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \{a \sum_{n=1}^{\infty} \overline{m}_n(a)\} = \lim_{a \rightarrow \infty} \{a \sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n(a)\}.$$

Довољни услови да функција h буде Риман интеграбилна су:

- (1) $h(t) \geq 0$ за све $t \geq 0$,
- (2) $h(t)$ је нерастућа,
- (3) $\int_0^{\infty} h(t)dt < \infty$.

³ Abraham Wald (1902–1950), мађарски математичар немачког порекла

Теорема 1.2.13. (Кључна теорема обнављања)

Нека је F заједничка расподела времена између узастопних догађаја у процесу обнављања. Ако F није решеткаста, а h је Риман-интеграбилна функција тада је:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(t-x) dM(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} h(t) dt,$$

где је

$$M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \quad \text{и} \quad \mu = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt.$$

Доказ се може наћи у Фелер [3].

Нека је дат процес обнављања $\{N(t), t \geq 0\}$ са временима између узастопних догађаја $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$; можемо да дефинишемо *узраст* као функцију по времену t на следећи начин:

$$A(t) = t - S_{N(t)},$$

остатак живота у тренутку t као:

$$B(t) = S_{N(t)+1} - t,$$

и *целокупан живот* у тренутку t као:

$$X_{N(t)+1} = S_{N(t)+1} - S_{N(t)} = A(t) + B(t).$$

Теорема 1.2.14. Нека је F заједничка расподела времена између узастопних догађаја код процеса обнављања. Ако F није решеткаста са очекивањем $\mu < \infty$, тада је:

$$(1) \lim_{t \rightarrow \infty} P\{A(t) \leq x\} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{B(t) \leq x\} = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy,$$

$$(2) \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X_{N(t)+1} \leq x\} = \frac{1}{\mu} \int_0^x y dF(y).$$

Доказ се може наћи у Рос [12].

Размотримо сада процес обнављања $\{N(t), t \geq 0\}$ са временима између узастопних догађаја $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ која имају заједничку расподелу F . Претпоставимо да смо сваки пут када се обнављање догодило ми примили неки добитак. Нека је R_n добитак добијен у тренутку n -тог обнављања. Очигледно, R_n -ови ће зависити од X_n -ова, али

претпостављамо да су парови $\{(X_n, R_n), n = 1, 2, \dots\}$ независни случајни вектори са истом расподелом. Тада се процес $\{(X_n, R_n), n = 1, 2, \dots\}$ назива процес обнављања са добитком. Дакле, укупан добитак за време t је дат са:

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n.$$

Означимо $E[R] = E[R_n]$, $E[X] = E[X_n]$.

Теорема 1.2.15. Претпоставимо да је $E[R] < \infty$ и $E[X] < \infty$. Тада са вероватноћом 1 важи:

$$\frac{R(t)}{t} \rightarrow \frac{E[R]}{E[X]} \quad \text{када } t \rightarrow \infty,$$

и

$$\frac{E[R(t)]}{t} \rightarrow \frac{E[R]}{E[X]} \quad \text{када } t \rightarrow \infty. \quad (1.2.5)$$

Доказ се може наћи у Рос [12].

Ако кажемо да се циклус завршио кад год се десило обнављање, тада формула (1.2.5) показује да је „на дуже стазе“ просечна зарада у јединици времена - очекивани добитак током циклуса подељен очекиваном дужином циклуса. Добитак може бити и негативан. У том случају, можемо дефинисати R_n као трошкове који су настали у време n -тог догађаја. Тада (1.2.5) представља просечну вредност трошкова по јединици времена на дуже стазе која износи:

$$\text{просечна цена} = \frac{\text{очекивани трошкови унутар циклуса}}{\text{очекивано дужина циклуса}}.$$

Иако смо претпоставили да добијамо добитак одједном на крају циклуса обнављања, Теорема (1.2.15) важи и када добитак зарађујемо равномерно током циклуса.

2. Геометријски процеси

2.1. Дефиниција и својство

Дефиниција 2.1.1. За низ ненегативних случајних променљивих $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ се каже да је *геометријски процес* ако су оне међусобно независне и њихова функција расподеле је дата са $F(a^{n-1}x)$ за свако $n = 1, 2, \dots$. Такво $a > 0$ називамо *коэффицијентом* геометријског процеса.

Да би све ово имало смисла претпостављамо да је $F(0) = P(X_1 = 0) < 1$.

Дефиниција 2.1.2. За случајни процес $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ се каже да је *геометријски процес* ако постоји реалан број $a > 0$ такав да је процес $\{a^{n-1}X_n, n = 1, 2, \dots\}$ процес обнављања. Позитиван број a за који то важи називамо *коэффицијентом* геометријског процеса.

Очигледно, ове две дефиниције су еквивалентне.

За случајну променљиву X каже се да је *стохастички већа (мања)* од случајне променљиве Y ако важи:

$$P\{X > t\} \geq (\leq) P\{Y > t\}, \quad \text{за свако } t.$$

То означавамо $X \geq_{\text{ст}} (\leq_{\text{ст}}) Y$. Низ случајних променљивих $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ је *стохастички растући (опadaјући)* ако

$$X_{n+1} \geq_{\text{ст}} (\leq_{\text{ст}}) X_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Геометријски процес је стохастички растући за $0 < a \leq 1$, а стохастички опадајући за $a \geq 1$. Овај процес је увео Лам (1988 а, б).

Претпоставимо да је $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ геометријски процес са коэффициентом a . Нека су функција и густина расподеле случајне променљиве X_1 редом F и f , означимо очекивање и варијансу са $E(X_1) = \lambda$ и $Var(X_1) = \sigma^2$, тада је

$$E[X_n] = \frac{\lambda}{a^{n-1}},$$

и

$$Var(X_n) = \frac{\sigma^2}{a^{2(n-1)}}.$$

Дакле, a, λ и σ^2 су три значајна параметра за геометријски процес.

Приметимо да, ако је $F(0) < 1$, онда је $\lambda > 0$.

Случајни процес $\{M_n, n = 1, 2, \dots\}$ је *мартингал* у односу на $\{\mathcal{F}_n, n = 1, 2, \dots\}$ ако су, за свако n , испуњени услови:

- (1) M_n је $\mathcal{F}_n$ -мерљиво,
- (2) $E(|M_n|) < \infty$,
- (3) $E(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}$, за свако n .

Субмартингал је низ случајних променљивих за који важе услови (1) и (2), и

$$E(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) \geq M_{n-1}, \text{ за свако } n.$$

Дефинишимо сада

$$S_0 = 0 \quad \text{и} \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Нека је $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ σ -алгебра генерисана са $\{X_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Приметимо да је $\{S_n, n = 1, 2, \dots\}$ низ ненегативних растућих случајних променљивих са

$$E[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] = S_n + E[X_{n+1}] \geq S_n.$$

Ако је коефицијент $a \leq 1$ тада је јасно да важи

$$S_n \xrightarrow{\text{с.с.}} \infty \quad \text{за } n \rightarrow \infty.$$

Међутим, ако је коефицијент $a > 1$ онда имамо

$$\sup_{n \geq 0} E[|S_n|] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[S_n] = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a^{-n}}{1-a^{-1}} = \frac{a\lambda}{a-1} < \infty.$$

Одавде следи да је $\{S_n, n = 1, 2, \dots\}$ ненегативан субмартингал у односу на $\{\mathcal{F}_n, n = 1, 2, \dots\}$.

Теорема 2. 1.3. *Ако је $a > 1$, постоји случајна променљива S таква да*

$$S_n \xrightarrow{\text{с.с.}} S \quad \text{кад } n \rightarrow \infty,$$

$$S_n \xrightarrow{\text{с.к.}} S \quad \text{кад } n \rightarrow \infty,$$

и

$$E[S] = \frac{a\lambda}{a-1},$$

$$\text{Var}[S] = \frac{a^2 \sigma^2}{a^2 - 1}.$$

Дефиниција 2.1.4. Случајни процес $\{Z, n = 1, 2, \dots\}$ назива се *геометријски процес са прагом* ако постоје реални бројеви $\{a_i > 0, i = 1, 2, \dots, k\}$ и природни бројеви $\{1 = M_1 < M_2 < \dots < M_k < M_{k+1} = \infty\}$ такви да за свако $i = 1, \dots, k$ важи да је:

$$\{a_i^{n-M_i} Z_n, \quad M_i \leq n < M_{i+1}\}$$

процес обнављања. Реални бројеви $\{a_i, i = 1, 2, \dots, k\}$ се називају *коэффицијентима*, $\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ *праговима*, а број k представља број граничника граничног геометријског процеса. Осим тога, $\{Z_n, M_i \leq n < M_{i+1}\}$ се назива i -тим делом геометријског процеса са прагом.

Нека су λ и σ^2 заједничко очекивање и варијанса случајне променљиве $\{a_i^{n-M_i} Z_n, M_i \leq n < M_{i+1}\}$. Тада је

$$E[Z_n] = \frac{\lambda_i}{a_i^{n-M_i}}$$

и

$$Var(Z_n) = \frac{\sigma_i^2}{a_i^{2(n-M_i)}} \quad M_i \leq n < M_{n+1}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Ако је $k = 1$, геометријски процес са прагом се своди на обичан геометријски процес.

Нека је дат геометријски процес $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$. Као и за процес обнављања дефинишемо *узраст* као функцију од t на следећи начин:

$$A(t) = t - S_{N(t)},$$

преостало време живота као:

$$B(t) = S_{N(t)+1} - t,$$

и *укупно време живота*:

$$X_{N(t)+1} = S_{N(t)+1} - S_{N(t)} = A(t) + B(t).$$

Нека је F_n функција расподеле од S_n .

Теорема 2. 1.5.

$$(1) P(A(t) > x) = \begin{cases} \bar{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t-x} \bar{F}(a^n(t-u)) dF_n(u), & 0 < x < t, \\ 0, & x \geq t, \end{cases}$$

$$(2) \quad P(B(t) > x) = \begin{cases} \bar{F}(t+x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \bar{F}(a^n(x+t-y)) dF_n(y), & 0 < x, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$(3) \quad P(X_{N(t)+1} > x) = \begin{cases} \bar{F}(t \vee x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \bar{F}(a^n(x \vee (t-y))) dF_n(y), & x > 0, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases}$$

$$(4) \quad P(S_{N(t)} \leq x) = \begin{cases} \bar{F}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \bar{F}(a^n(t-y)) dF_n(y), & 0 < x \leq t, \\ 1, & x > t, \end{cases}$$

где је F функција расподеле од X_1 и $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, а F_n расподела од S_n и $\bar{F}_n(x) = 1 - F_n(x)$.

Теорема 2. 1.6.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}(a^n x) F_n(t) P(N(t) = n) \leq P(X_{N(t)+1} > x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \bar{F}(a^n x) F_n(t) \quad t > 0, x > 0,$$

где је F функција расподеле од X_1 и $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, а F_n расподела од S_n и $\bar{F}_n(x) = 1 - F_n(x)$.

Теорема 2. 1.7. (Валдова теорема за геометријски процес)

Претпоставимо да је $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ геометријски процес са коефицијентом a , и очекивањем $E[X_1] = \lambda < \infty$, тада за $t > 0$ имамо:

$$E[S_{N(t)+1}] = \lambda E \left[\sum_{n=1}^{N(t)+1} a^{-n+1} \right].$$

Ако је $a \neq 1$ онда

$$E[S_{N(t)+1}] = \frac{\lambda}{1-a} \{E[a^{-N(t)}] - a\}.$$

Последица 2. 1.8.

$$E[a^{-N(t)}] \begin{cases} > a + \frac{(1-a)t}{\lambda}, & 0 < a < 1, \\ = 1, & a = 1, \\ < a + \frac{(1-a)t}{\lambda}, & a > 1, t \leq \frac{a\lambda}{a-1}, \end{cases}$$

и

$$E[S_{N(t)+1}] \begin{cases} > \lambda\{E[N(t)] + 1\} & 0 < a < 1, \\ = \lambda\{E[N(t)] + 1\} & a = 1, \\ < \lambda\{E[N(t)] + 1\} & a > 1. \end{cases}$$

Теорема 2. 1.9. Нека је $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ геометријски процес са коефицијентом $a > 0$, тада имамо:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[a^{-N(t)}]}{t} &= 0, \\ (2) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[\sum_{n=1}^{N(t)} a^{-n+1}]}{t} &= 0 \quad u \\ (3) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[S_{N(t)+1}]}{t} &= 0. \end{aligned}$$

Теорема 2.1.10. Претпоставимо да је $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ геометријски процес са коефицијентом $a = 1$, тада имамо:

$$\begin{aligned} (1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[a^{-N(t)}]}{t} &= 0, \\ (2) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[\sum_{n=1}^{N(t)} a^{-n+1}]}{t} &= \frac{1}{\lambda'}, \\ (3) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[S_{N(t)+1}]}{t} &= 1 \quad u \\ (4) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B(t)}{t} &= 0. \end{aligned}$$

2.2. Геометријски процес са експоненцијалном расподелом

Када се расподела конкретизује и када се претпостави да X_1 има експоненцијалну расподелу, онда могу да се нађу очекивања за различите случајне променљиве од интереса.

Теорема 2.2.1. Нека је дат геометријски процес $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ са коефицијентом a . Претпоставимо да X_1 има експоненцијалну расподелу $\text{Exp}(\frac{1}{\lambda})$. Тада за $0 < a \leq 1$ или $a > 1$ и $t < \frac{a\lambda}{a-1}$ имамо:

$$\begin{aligned} (1) E[a^{-N(t)}] &= 1 + \frac{(1-a)t}{a\lambda}, \\ (2) E[S_{N(t)+n+1}] &= \frac{a\lambda}{a-1} + \frac{1}{a^{n+1}} \left(t - \frac{a\lambda}{a-1}\right). \end{aligned}$$

Последица 2.2.2.

(1) $E[S_{N(t)}] = t,$

(2) $E[S_{N(t)+1}] = \lambda + \frac{t}{a},$

(3) $E[A(t)] = 0,$

(4) $E[B(t)] = \lambda + (\frac{1}{a} - 1)t,$

(5) $E[X_{N(t)+1}] = \lambda + (\frac{1}{a} - 1)t.$

3. Геометријска функција и геометријска једначина

3.1. Дефиниција геометријске функције и геометријска једначина

Нека је дат геометријски процес $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ са коефицијентом a , дефинишимо $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Имамо процес бројања:

$$N(t) = \sup\{n \mid S_n \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Нека је сада

$$M(t, a) = E[N(t)].$$

Функцију $M(t, a)$ називамо *геометријском функцијом геометријског процеса* $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$.

Ако је X_n време између $(n - 1)$ -ог и n -тог догађаја, онда ће $M(t, a)$ бити очекивани број догађаја који су се догодили за време t . Ако је X_n време рада неке машине после $(n - 1)$ -ве поправке, онда ће $M(t, a)$ бити очекивани број кварова за време t . Очигледно, ако је коефицијент $a = 1$, геометријски процес се своди на процес обнављања, а геометријска функција $M(t, a)$ на функцију обнављања $M(t)$. Дакле, геометријска функција $M(t, a)$ је генерализација функције обнављања.

За $N(t)$ као процес бројања важи:

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t.$$

Нека је $F_n(x)$ функција расподеле за S_n , где је

$$F_0(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

За овако дефинисан процес бројања важи следеће уопштење *Теореме 1.2.2*, која се доказује на сличан начин као и *Теорема 1.2.2*.

Теорема 3.1.1.

$$M(t, a) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \quad (3.1.1)$$

Нека је F функција расподеле случајне променљиве X_1 . Слично као и за процес бројања, код процеса обнављања аналогно једначини (1.2.4), имамо интегралну једначину за $M(t, a)$.

$$M(t, a) = F(t) + \int_0^t M(a(t-u), a) dF(u), \quad (3.1.2)$$

Да бисмо ово доказали користићемо математичку индукцију:

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(a(t-u)) dF(u). \quad (3.1.3)$$

За $n = 1$ је тривијално. Претпоставимо да (3.1.3) важи за n . За $n + 1$, пошто је S_{n+1} сума две независне променљиве S_n и X_{n+1} , тј, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, имамо:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(t) &= \int_0^t F_n(t-u) dF(a^n u) \\ &= \int_0^t \left\{ \int_0^{t-u} F_{n-1}(a(t-u-v)) dF(v) \right\} dF(a^n u) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^t \left\{ \int_0^{t-v} F_{n-1}(a(t-v-u)) dF(a^n u) \right\} dF(v) \\ &= \int_0^t \left\{ \int_0^{a(t-v)} F_{n-1}(a(t-v)-y) dF(a^{n-1} y) \right\} dF(v) \\ &= \int_0^t F_{n-1}(a(t-v)) dF(v). \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Овде (3.1.4) следи из индукцијске хипотезе, а (3.1.5) добијамо јер је S_n збир две независне случајне променљиве $S_n = S_{n-1} + X_n$. Дакле, (3.1.3) важи за свако n па можемо (3.1.3) да заменимо у (3.1.1) и тиме добијемо (3.1.2).

Како интегралну једначину (3.1.2) задовољава геометријска функција $M(t, a)$ ту једначину називамо *геометријском једначином*. Ако је f функција густине случајне променљиве X_1 , тада једначина (3.1.2) постаје:

$$M(t, a) = F(t) + \int_0^t M(a(t-u), a) f(u) du. \quad (3.1.6)$$

У вези са геометријском функцијом важе следеће теореме.

Теорема 3.1.2. *Ако је $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ геометријски процес са коефицијентом $0 < a \leq 1$, онда за све $t > 0$, $N(t)$ је коначно са вероватноћом 1 и геометријска функција $M(t, a)$ је ограничена.*

Теорема 3.1.3. *Нека је $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ геометријски процес са коефицијентом $a > 1$; означимо са F функцију расподеле случајне променљиве X_1 и нека је:*

$$\theta = \inf\{x | F(x) > F(0)\}. \quad (3.1.7)$$

Тада важи:

$$M(t, a) = \infty \quad \text{за} \quad t > \frac{a\theta}{a-1}.$$

Ако функција расподеле F расте у 0 из (3.1.7) следи да је $\theta = 0$, па на основу *Теореме 3.1.3* важи да је $M(t, a) = \infty$ за свако $t > 0$. Због тога ћемо даље да се бавимо геометријском функцијом само за $0 < a < 1$.

3.2. Опште решење геометријске једначине

Да бисмо решили геометријску једначину (3.1.2) по $M(t, a)$ почећемо са

$$M_0(t, a) = F(t).$$

Итерацијом добијамо

$$M_n(t, a) = F(t) + \int_0^t M_{n-1}(a(t-u), a) dF(u).$$

Индукцијом се може показати да је низ $M_n(t, a)$ неоппадајући по n за све $t > 0$. Према томе, постоји лимес тог низа:

$$M(t, a) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(t, a).$$

Применом теореме о монотonoј конвергенцији, гранична функција $M(t, a)$ ће бити решење једначине (3.1.2). Штавише, ако је $F(x)$ непрекидна онда ће решење $M(t, a)$ бити јединствено на било ком интервалу $[0, d]$ где је $F(d) < 1$. Да бисмо ово доказали, претпоставимо да је $0 < a \leq 1$. Нека је $C[0, d]$ Банахов простор свих непрекидних функција на интервалу $[0, d]$. Дефинишимо линеарни оператор L на $C[0, d]$ тако да за $G \in C[0, d]$, $H = L(G)$ буде:

$$L: H(t) = F(t) + \int_0^t G(a(t-u)) dF(u), \quad \text{за} \quad 0 \leq t \leq d.$$

Може се показати да је овај оператор контракција. За $G_1, G_2 \in C[0, d]$ и $H_1 = L(G_1)$, $H_2 = L(G_2)$ важи:

$$\|H_1 - H_2\| \leq F(d) \|G_1 - G_2\|,$$

па је оператор L контракција јер је $F(d) < 1$. Затим, по теореме о фиксној тачки, постоји јединствена фиксна тачка у $C[0, d]$. Како за произвољан позитиван број d важи $F(d) < 1$ решење једначине (3.1.2) је такође јединствено.

Нека је дат геометријски процес $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ са коефицијентом a , нека је $f(x)$ густина расподеле случајне променљиве X_1 . Означимо Лапласову трансформацију од $f(x)$ са:

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

и Лапласову трансформацију од $M(t, a)$ са:

$$M^*(s, a) = \int_0^\infty e^{-st} M(t, a) dt.$$

Када заменимо ово у једначину (3.1.2) имамо:

$$M^*(s, a) = \frac{f^*(s)}{s} + \frac{1}{a} M^*\left(\frac{s}{a}, a\right) f^*(s). \quad (3.2.1)$$

За $0 < a \leq 1$ по Теореме 3.1.2 имамо да је $M(t, a)$ ограничена, па можемо итерацијом да решимо једначину (3.2.1) по $M^*(s, a)$. Почећемо са

$$M_0^*(s, a) = \frac{f^*(s)}{s},$$

Затим итеративно:

$$M_n^*(s, a) = \frac{f^*(s)}{s} + \frac{1}{a} M_{n-1}^*\left(\frac{s}{a}, a\right) f^*(s).$$

Индукцијом се може показати да важи:

$$M_n^*(s, a) = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^n \left\{ \prod_{j=0}^i f^*\left(\frac{s}{a^j}\right) \right\}. \quad (3.2.2)$$

Како је ред с десне стране једнакости (3.2.2) конвергентан за $0 < a \leq 1$ кад $n \rightarrow \infty$, имамо решење једначине (3.2.1):

$$M^*(s, a) = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^\infty \left\{ \prod_{j=0}^i f^*\left(\frac{s}{a^j}\right) \right\}. \quad (3.2.3)$$

Инверзијом од $M^*(s, a)$ се добија $M(t, a)$ која је решење једначине (3.1.5).

Међутим, за $a > 1$ ред из једнакости (3.2.3) дивергира.

Можемо да $M^*(s, a)$ напишемо $M^*(s, a) = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^\infty \left\{ \prod_{j=0}^i f^*\left(\frac{s}{a^j}\right) \right\} = \sum_{i=0}^\infty a_i(s)$, где је $a_i(s) = \frac{1}{s} \prod_{j=0}^i f^*\left(\frac{s}{a^j}\right)$.

Тада по Рабовом⁴ тесту имамо да лимес:

⁴Joseph Ludwig Raabe (1801-1859), швајцарски математичар

$$\lim_{i \rightarrow \infty} i \left\{ \frac{a_i(s)}{a_{i+1}(s)} - 1 \right\} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i \{1 - f^*(\frac{s}{a^{i+1}})\}}{f^*(\frac{s}{a^{i+1}})} = 0 \geq -1.$$

Одатле следи да ред (3.2.3) дивергира па једначина (3.2.1) нема решење.

Дакле, једначина (3.2.1) нема решење, што се слаже са тврђењем *Теореме 3.1.3*.

3.3. Нумеричко решење геометријске једначине

У овом одељку ћемо за $0 < a \leq 1$ тражити нумеричко решење за једначину (3.1.6) применом трапезастог правила интеграције. Пре тога ћемо се упознати са лемом коју ћемо користити за апроксимацију грешке овог нумеричког метода.

Лема 3.3.1. *Нека је дат ненегативан низ $\{y_n, n = 1, 2, \dots, N\}$. Претпоставимо да је:*

- (1) $y_0 = 0$,
- (2) $y_n \leq A + Bh \sum_{j=0}^{n-1} y_j, \quad 1 \leq n \leq N$,

где је $h = 1/N$, а A и B позитивне константе независне од h . Тада је:

$$\max_{0 \leq i \leq N} y_i \leq Ae^B.$$

Доказ. Пре свега, докажимо индукцијом да важи:

$$y_n \leq A(1 + Bh)^{n-1}. \quad (3.3.1)$$

За $n = 1$ је тривијално. Претпоставимо да неједнакост (3.3.1) важи за $j = 1, 2, \dots, n-1$, проверићемо да ли важи и за n :

$$y_n \leq A + Bh \sum_{j=1}^{n-1} y_j \leq A + Bh \sum_{j=1}^{n-1} A(1 + Bh)^{j-1} = A(1 + Bh)^{n-1}.$$

Дакле, по индукцији неједнакост важи за све n . Пошто је $h = \frac{1}{N}$ имамо:

$$y_n \leq A(1 + \frac{B}{N})^{n-1} \leq A(1 + \frac{B}{N})^N \leq Ae^B. \quad \blacksquare$$

Због лакшег писања означимо $M(t, a)$ са $L(t)$. Сада ћемо сменом $s = a(t - y)$ једначину (3.1.6) трансформисати у:

$$L(t) = F(t) + \frac{1}{a} \int_0^{at} L(s) f(t - \frac{s}{a}) ds.$$

Без ограничења општости претпоставимо да је $t \in [0, T]$ и нека је $f(0) = 0$ да би било једноставније. Поделитемо интервал $[0, T]$ тачкама $T_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$ са размаком између тачака $h = T/N$. Нека је:

$$\begin{aligned} L(T_i) &= F(T_i) + \frac{1}{a} \int_0^{aT_i} L(s) f\left(T_i - \frac{s}{a}\right) ds \\ &= F(T_i) + \frac{1}{a} \int_0^{T_{[ai]}} L(s) f\left(T_i - \frac{s}{a}\right) ds + \frac{1}{a} \int_{T_{[ai]}}^{aT_i} L(s) f\left(T_i - \frac{s}{a}\right) ds \\ &= F(T_i) + I_1 + I_2, \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

где $[x]$ означава цео део броја из заграде. Решавамо интеграле:

$$I_1 = \frac{1}{a} \int_0^{T_{[ai]}} L(s) f\left(T_i - \frac{s}{a}\right) ds,$$

и

$$I_2 = \frac{1}{a} \int_{T_{[ai]}}^{aT_i} L(s) f\left(T_i - \frac{s}{a}\right) ds.$$

Означимо

$$g(t) = \frac{1}{a} L(s) f\left(T_i - \frac{s}{a}\right).$$

Применимо, сада, правило трапеза за интеграљење на I_1 , са тачкама поделе $\{T_i, i = 0, 1, \dots, [ai]\}$ интервала $(T_0, T_{[ai]}) = (0, T_{[ai]})$.

$$T_1(g) = \frac{h}{2} g(T_0) + h \sum_{k=1}^{[ai]-1} g(T_k) + \frac{h}{2} g(T_{[ai]}).$$

Из тога што је $L(T_0) = L(0) = 0$ следи:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{T_{[ai]}} g(s) ds = T_1(g) + E_1(g) \\ &= \frac{h}{2a} L(T_0) f\left(T_i - \frac{T_0}{a}\right) + \frac{h}{a} \sum_{k=1}^{[ai]-1} L(T_k) f\left(T_i - \frac{T_k}{a}\right) + \frac{h}{2a} L(T_{[ai]}) f\left(T_i - \frac{T_{[ai]}}{a}\right) + E_1(g) \\ &= \frac{h}{a} \sum_{k=1}^{[ai]-1} L(T_k) f\left(T_i - \frac{T_k}{a}\right) + \frac{h}{2a} L(T_{[ai]}) f\left(T_i - \frac{T_{[ai]}}{a}\right) + E_1(g), \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Где је $E_1(g) = I_1 - T_1(g)$ грешка. А познато је да, ако је $g(t) \in C^2[0, T]$ простор функција са непрекидним другим изводом на интервалу $[0, T]$, тада је грешка метода трапезастог интеграљења реда 2, односно:

$$E_1(g) = O(h^2).$$

Слично, применом ове методе на интеграл I_2 имамо:

$$T_2(g) = \frac{aT_i - T_{[ai]}}{2a} \left\{ L(T_{[ai]})f\left(T_i - \frac{T_{[ai]}}{a}\right) + L(aT_i)f\left(T_i - \frac{aT_i}{a}\right) \right\} = \frac{aT_i - T_{[ai]}}{2a} L(T_{[ai]})f\left(T_i - \frac{T_{[ai]}}{a}\right),$$

Пошто је $f(0) = 0$, I_2 постаје:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{T_{[ai]}}^{aT_i} g(s)ds = T_2(g) + E_2(g) \\ &= \frac{aT_i - T_{[ai]}}{2a} L(T_{[ai]})f\left(T_i - \frac{T_{[ai]}}{a}\right) + E_2(g), \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

где је $E_2(g) = I_2 + T_2(g)$ грешка. Као и у претходном случају имамо

$$E_2(g) = O\left((aT_i - T_{[ai]})^2\right) = O((aih - [ai]h)^2) = O(h^2),$$

јер је $|ai - [ai]| \leq 1$.

Коришћењем (3.3.3), (3.3.4) и (3.3.2) имамо:

$$L(0) = 0,$$

и

$$\begin{aligned} L(T_i) &= F(T_i) + \frac{h}{a} \sum_{k=1}^{[ai]-1} L(T_k)f\left(T_i - \frac{T_k}{a}\right) + \frac{h}{2a} L(T_{[ai]})f\left(T_i - \frac{T_{[ai]}}{a}\right) \\ &\quad + \frac{aT_i - T_{[ai]}}{2a} L(T_{[ai]})f\left(T_i - \frac{T_{[ai]}}{a}\right) + (E_1(g) + E_2(g)), \end{aligned} \quad i = 1, \dots, N.$$

Да бисмо добили нумеричко решење, имајући у виду чињеницу да је $L(0) = 0$ можемо почети са:

$$L_0 = 0.$$

Уопште, приближно решење L_i се може добити из претходног $L(T_i)$ када покажемо да је грешка $E_1(g) + E_2(g)$ занемарљива. Другим речима, приближно решење L_i можемо да дефинишемо рекурзивно на следећи начин:

$$\begin{aligned} L_i &= F(T_i) + \frac{h}{a} \sum_{k=1}^{[ai]-1} L_k f\left(T_i - \frac{T_k}{a}\right) + \frac{h}{2a} L_{[ai]} f\left(T_i - \frac{T_{[ai]}}{a}\right) + \frac{aT_i - T_{[ai]}}{2a} L_{[ai]} f\left(T_i - \frac{T_{[ai]}}{a}\right), \\ &\quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Означимо са $e_i = L(T_i) - L_i$ грешку решења L_i . Тада је

$$e_0 = 0,$$

$$e_i = \frac{h}{a} \sum_{k=1}^{[ai]-1} e_k f\left(T_i - \frac{T_k}{a}\right) + \left\{ \frac{h}{2a} + \frac{aT_i - T_{[ai]}}{2a} \right\} e_{[ai]} f\left(T_i - \frac{T_{[ai]}}{a}\right) + E_1(g) + E_2(g),$$

$$i = 1, \dots, N \quad (3.3.5)$$

Означимо:

$$A = \max_{1 \leq i \leq N} |E_1(g) + E_2(g)|,$$

$$B_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{a} f\left(T_i - \frac{T_k}{a}\right) & \text{за } 1 \leq k \leq [ai] - 1 \\ \left(\frac{1}{2a} + \frac{aT_i - T_{[ai]}}{2ah}\right) f\left(T_i - \frac{T_{[ai]}}{a}\right) & \text{за } k = [ai] \\ 0 & \text{за } [ai] < k \leq i \end{cases},$$

$$B = \max_{1 \leq k \leq i \leq N} \{B_{ik}\}.$$

Тада ће горња граница грешке (3.3.5) бити:

$$|e_i| \leq h \sum_{k=1}^{[ai]-1} |e_k| \frac{1}{a} f\left(T_i - \frac{T_k}{a}\right) + h \left\{ \frac{1}{2a} + \frac{aT_i - T_{[ai]}}{2ah} \right\} |e_{[ai]}| f\left(T_i - \frac{T_{[ai]}}{a}\right) + A \leq A + Bh \sum_{k=1}^{i-1} |e_k|,$$

Како је још и $|e_0| = 0$ по претходној лемми имамо:

$$\max_{1 \leq i \leq N} |e_i| \leq Ae^B.$$

С обзиром на то да је $A = O(h^2)$, онда за неку константу c која је независна од h имамо:

$$\max_{1 \leq i \leq N} |e_i| \leq ch^2.$$

Дакле, грешка решења L_i је реда h^2 .

3.4. Приближно решење геометријске једначине

Нека је дат геометријски процес $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ са коефицијентом a , нека је густина расподеле случајне променљиве X_1 дата са $f(x)$, нека је још $E(X_1) = \lambda$, $Var(X_1) = \sigma^2$ и $\mu_k = E(X_1^k)$, $k = 1, 2, \dots$. Још један могући начин да одредимо геометријску функцију $M(t, a)$ је да нађемо њену Лапласову трансформацију $M^*(s, a)$ и онда добијемо $M(t, a)$ инверзијом. Ако је $a = 1$ геометријски процес је процес обнављања. Тада геометријска функција $M(t, 1)$ постаје функција обнављања, а за функцију обнављања важи:

$$M^*(s, 1) = \frac{f^*(s)}{s(1-f^*(s))}, \quad (3.4.1)$$

Где је $M^*(s, 1)$ Лапласова трансформација функције $M(t, 1)$, а $f^*(s)$ је Лапласова трансформација функције $f(x)$. Инверзија ове функције није лака, осим за неке специјалне случајеве. Наравно, за $a \neq 1$ већи је проблем. С обзиром на једначине (3.2.1) и (3.2.3) чак

иако постоји није лако изразити $M^*(s, a)$. Али, можемо да нађемо приближно апроксимацију функције $M(t, a)$, у пракси је то довољно добро. На пример, ако је $a = 1$ по Теорему 1.16. функција обнављања је дата са:

$$M(t, 1) = \frac{t}{\lambda} + \frac{\sigma^2 - \lambda^2}{2\lambda^2} + o(1).$$

Да бисмо приближно изразили функцију $M(t, a)$, можемо развити $M^*(s, a)$ у Тејлоров ред у тачки $a = 1$.

$$M^*(s, a) = M^*(s, 1) + \frac{\partial M^*(s, a)}{\partial a} \Big|_{a=1} (a - 1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 M^*(s, a)}{\partial a^2} \Big|_{a=1} (a - 1)^2 + o\{(a - 1)^2\}. \quad (3.4.2)$$

С обзиром на (3.4.1) имамо:

$$\frac{\partial M^*(s, 1)}{\partial s} = \frac{s f^{*'}(s) - f^*(s)(1 - f^*(s))}{s^2 (1 - f^*(s))^2}, \quad (3.4.3)$$

$$\frac{\partial^2 M^*(s, 1)}{\partial s^2} = \frac{1}{s^3 [1 - f^*(s)]^3} \{2f^*(s)[1 - f^*(s)]^2 + [s^2 f^{*''}(s) - 2s f^{*'}(s)][1 - f^*(s)] + 2s^2 [f^{*'}(s)]^2\}.$$

Уведимо смену: $u = s/a$ и диференцирајмо једначину (3.2.1) по a добићемо:

$$\frac{\partial M^*(s, a)}{\partial a} = f^*(s) \left\{ -\frac{1}{a^2} M^*(u, a) - \frac{s}{a^3} \frac{\partial M^*(u, a)}{\partial u} + \frac{1}{a} \frac{\partial M^*(u, a)}{\partial a} \right\}. \quad (3.4.4)$$

Када пустимо $a = 1$, (3.4.4) помоћу (3.4.1) и (3.4.3) постаје:

$$\frac{\partial M^*(s, a)}{\partial a} \Big|_{a=1} = -\frac{f^*(s)}{1 - f^*(s)} \left\{ M^*(s, 1) + s \frac{\partial M^*(s, 1)}{\partial s} \right\} = -\frac{f^*(s) f^{*'}(s)}{[1 - f^*(s)]^3}. \quad (3.4.5)$$

Диференцирањем ове једначине по s имамо:

$$\frac{\partial^2 M^*(s, a)}{\partial a \partial s} \Big|_{a=1} = -\frac{1}{[1 - f^*(s)]^4} \{f^*(s) f^{*''}(s) [1 - f^*(s)] + [f^{*'}(s)]^2 + 2f^*(s) [f^{*'}(s)]^2\}.$$

Диференцирањем једначине (3.4.4) по a добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M^*(s, a)}{\partial a^2} = f^*(s) \left\{ \frac{2}{a^3} M^*(u, a) + \frac{4s}{a^4} \frac{\partial M^*(u, a)}{\partial u} - \frac{2}{a^2} \frac{\partial M^*(u, a)}{\partial a} + \frac{s^2}{a^5} \frac{\partial^2 M^*(u, a)}{\partial u^2} \right. \\ \left. - \frac{2s}{a^3} \frac{\partial^2 M^*(u, a)}{\partial a \partial u} + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 M^*(u, a)}{\partial a^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Заменом $a = 1$ у (3.4.6) имамо:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 M^*(s, a)}{\partial a^2} \Big|_{a=1} \\
&= \frac{f^*(s)}{1-f^*(s)} \left\{ 2M^*(s, 1) - 2 \frac{\partial M^*(s, a)}{\partial a} \Big|_{a=1} + 4s \frac{\partial M^*(s, 1)}{\partial s} - 2s \frac{\partial^2 M^*(s, a)}{\partial a \partial s} \Big|_{a=1} + s^2 \frac{\partial^2 M^*(s, 1)}{\partial s^2} \right\} \\
&= \frac{f^*(s)}{[1-f^*(s)]^5} \{ [sf^{*''(s)} + 2f^{*'(s)}][1-f^*(s)]^2 \\
&\quad + 2\{s[f^*(s)f^{*''(s)} + (f^{*'}(s))^2] + f^*(s)f^{*'(s)}\}[1-f^*(s)] \\
&\quad + 2s(f^{*'(s)})^2(1+2f^*(s)) \}. \tag{3.4.7}
\end{aligned}$$

С друге стране имамо следеће приближне развоје:

$$(1) f^*(s) = 1 - \lambda s + \frac{1}{2}(\lambda^2 + \sigma^2)s^2 - \frac{1}{6}\mu_3 s^3 + \frac{1}{24}\mu_4 s^4 + o(s^4), \tag{3.4.8}$$

$$(2) f^{*'(s)} = -\lambda + (\lambda^2 + \sigma^2)s - \frac{1}{2}\mu_3 s^2 + \frac{1}{6}\mu_4 s^3 + o(s^3), \tag{3.4.9}$$

$$(3) f^{*''(s)} = (\lambda^2 + \sigma^2) - \mu_3 s + \frac{1}{2}\mu_4 s^2 + o(s^2). \tag{3.4.10}$$

Заменом (3.4.8), (3.4.9) и (3.4.10) у једначине (3.4.1), (3.4.5) и (3.4.7) добијамо:

$$M^*(s, 1) = \frac{1}{\lambda s^2} + \frac{\sigma^2 - \lambda^2}{2\lambda^2 s} + O(1),$$

$$\frac{\partial M^*(s, a)}{\partial a} \Big|_{a=1} = \frac{1}{\lambda^2 s^3} + \frac{\sigma^2 - \lambda^2}{2\lambda^3 s^2} + O(1),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 M^*(s, a)}{\partial a^2} \Big|_{a=1} &= \frac{4}{\lambda^3 s^4} + \frac{3(\sigma^2 - \lambda^2)}{\lambda^4 s^3} + \frac{1}{6\lambda^5 s^2} [9(\sigma^2 + \lambda^2)^2 - 12\sigma^2 \lambda^2 - 4\lambda \mu_3] \\
&\quad + \frac{1}{12\lambda^6 s} [(9\lambda^2 + 15\sigma^2)(\sigma^2 + \lambda^2)^2 - 4\lambda \mu_3(3\lambda^2 + 4\sigma^2) + 3\lambda^2 \mu_4] + O(1).
\end{aligned}$$

Сада Тејлоров развој (3.4.2) изгледа овако:

$$\begin{aligned}
M^*(s, a) &= \frac{1}{\lambda s^2} + \frac{\sigma^2 - \lambda^2}{2\lambda^2 s} + \left\{ \frac{1}{\lambda^2 s^3} + \frac{\sigma^2 - \lambda^2}{2\lambda^3 s^2} \right\} (a - 1) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{4}{\lambda^3 s^4} + \frac{3(\sigma^2 - \lambda^2)}{\lambda^4 s^3} + \frac{1}{6\lambda^5 s^2} [9(\sigma^2 + \lambda^2)^2 - 12\sigma^2 \lambda^2 - 4\lambda \mu_3] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12\lambda^6 s} [(9\lambda^2 + 15\sigma^2)(\sigma^2 + \lambda^2)^2 - 4\lambda \mu_3(3\lambda^2 + 4\sigma^2) + 3\lambda^2 \mu_4] \right\} (a - 1)^2 \\
&\quad + O(1). \tag{3.4.11}
\end{aligned}$$

Инверзијом за Лапласову трансформацију (3.4.11) можемо приближно да одредимо $M(t, a)$, користећи Тауберијеовску⁵ теорему:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t, a) = \lim_{s \rightarrow 0} sM^*(s, a).$$

Теорема 3.4.1. *За $0 < a \leq 1$ важи:*

$$\begin{aligned} M(t, a) = & \frac{t}{\lambda} + \frac{\sigma^2 - \lambda^2}{2\lambda^2} + \left\{ \frac{t^2}{2\lambda^2} + \frac{(\sigma^2 - \lambda^2)t}{2\lambda^3} \right\} (a - 1) \\ & + \left\{ \frac{t^3}{3\lambda^3} + \frac{3(\sigma^2 - \lambda^2)t^2}{4\lambda^4} + \frac{t}{12\lambda^5} [9(\sigma^2 + \lambda^2)^2 - 12\sigma^2\lambda^2 - 4\lambda\mu_3] \right. \\ & \left. + \frac{1}{24\lambda^6} [(9\lambda^2 + 15\sigma^2)(\sigma^2 + \lambda^2)^2 - 4\lambda\mu_3(3\lambda^2 + 4\sigma^2) + 3\lambda^2\mu_4] \right\} (a - 1)^2 + o(1). \end{aligned}$$

Сада ћемо размотрити неке специјалне случајеве који се често срећу код тестирања дужине живота и у теорији поузданости.

- **Експоненцијална расподела**

Претпоставимо да X_1 има експоненцијалну расподелу $Exp(\frac{1}{\lambda})$ са густином расподеле:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Тада је:

$$E[X_1] = \lambda, \quad Var(X_1) = \lambda^2 \quad \text{и} \quad \mu_k = E[X_1^k] = \lambda^k \Gamma(k + 1), k = 1, 2, \dots$$

Из Теореме 3.4.1 имамо, када је $0 < a < 1$ и X_1 има $Exp(\lambda)$ расподелу, да је:

$$M(t, a) = \frac{t}{\lambda} + \frac{t^2}{2\lambda^2} (a - 1) + \frac{t^3}{3\lambda^3} (a - 1)^2 + o(1).$$

- **Гама расподела**

Претпоставимо да X_1 има гама расподелу $\Gamma(\alpha, \beta)$ са густином расподеле:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Тада је:

⁵ Alfred Tauberian (1866-1942), аустријски математичар

$$E[X_1] = \frac{\alpha}{\beta}, \quad Var(X_1) = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad \text{и} \quad \mu_k = E[X_1^k] = \frac{k+\alpha}{\beta^k \Gamma(\alpha)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из Теореме 3.4.1 имамо, када је $0 < a < 1$ и X_1 има $\Gamma(\alpha, \beta)$ расподелу, да је:

$$M(t, a) = \frac{\beta t}{\alpha} + \frac{1-\alpha}{2\alpha} + \frac{\beta}{2\alpha^2} [\beta t^2 + (1-\alpha)t](a-1) \\ + \frac{1}{24\alpha^3} \{8\beta^3 t^3 + 18(1-\alpha)\beta^2 t^2 + 2(1-\alpha)(1-5\alpha)\beta t + (1-\alpha^2)\}(a-1)^2 + o(1).$$

- **Вејбулова расподела**

Претпоставимо да X_1 има Вејбулову расподелу $W(\alpha, \beta)$ са густином расподеле:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^\alpha), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Математичко очекивање, варијанса и моменти к-тог реда су:

$$E[X_1] = \frac{\Gamma(1+1/\alpha)}{\beta^{1/\alpha}}, \quad Var(X_1) = \frac{\Gamma(1+1/\alpha) - [\Gamma(1+1/\alpha)]^2}{\beta^{2/\alpha}} \quad \text{и} \quad \mu_k = E[X_1^k] = \frac{\Gamma(1+k/\alpha)}{\beta^{k/\alpha}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Из Теореме 3.4.1, када је $0 < a < 1$ и X_1 има $W(\alpha, \beta)$ расподелу, геометријска функција је:

$$M(t, a) = \frac{\beta^{\frac{1}{\alpha}} t}{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})} + \frac{\Gamma(1+\frac{2}{\alpha})}{2[\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})]^2} - 1 + \frac{1}{2[\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})]^2} \left\{ \beta^{\frac{2}{\alpha}} t^2 + \frac{\{\Gamma(1+\frac{2}{\alpha}) - 2[\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})]^2\} \beta^{\frac{1}{\alpha}} t}{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})} \right\} (a-1) \\ + \frac{1}{24[\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})]^3} \left\{ 8\beta^{\frac{3}{\alpha}} t^3 + \frac{18\{\Gamma(1+\frac{2}{\alpha}) - 2[\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})]^2\} \beta^{\frac{2}{\alpha}} t^2}{\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})} \right. \\ + \frac{2\beta^{\frac{1}{\alpha}} t}{[\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})]^2} \left\{ 9[\Gamma(1+\frac{2}{\alpha})]^2 - 12[\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})]^2 \left[\Gamma(1+\frac{2}{\alpha}) - \left(\Gamma(1+\frac{1}{\alpha}) \right)^2 \right] - 4\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\Gamma(1+\frac{3}{\alpha}) \right\} \\ + \frac{[\Gamma(1+\frac{2}{\alpha})]^2}{[\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})]^3} \left\{ \left[15\Gamma(1+\frac{2}{\alpha}) - 6\left(\Gamma(1+\frac{1}{\alpha}) \right)^2 \right] - 4\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})\Gamma(1+\frac{3}{\alpha}) \left[4\Gamma(1+\frac{2}{\alpha}) - \left(\Gamma(1+\frac{1}{\alpha}) \right)^2 \right] \right. \\ \left. \left. + 3\left(\Gamma(1+\frac{1}{\alpha}) \right)^2 \Gamma(1+\frac{4}{\alpha}) \right\} \right\} (a-1)^2 + o(1).$$

- **Логнормална расподела**

Претпоставимо да X_1 има логнормалну расподелу $LN(\mu, \tau^2)$ са густином расподеле:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau x}} \exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}(\ln x - \mu^2)\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Тада је:

$$\lambda = E[X_1] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\tau^2\right), \quad \sigma^2 = \text{Var}(X_1) = \lambda^2[\exp(\tau^2) - 1],$$

$$\text{и} \quad \mu_k = E[X_1^k] = \lambda^k \exp\left\{\frac{1}{2}k(k-1)\tau^2\right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ради лакшег записа означимо: $\delta = \exp(\tau^2)$.

Из *Теореме 3.4.1*, када је $0 < a < 1$ и X_1 има $LN(\mu, \tau^2)$ расподелу, геометријска функција је:

$$\begin{aligned} M(t, a) &= \frac{t}{\lambda} + \frac{\delta - 2}{2} + \left\{ \frac{t^2}{2\lambda^2} + \frac{(\delta - 2)t}{2\lambda} \right\} (a - 1) \\ &\quad + \left\{ \frac{t^3}{3\lambda^3} + \frac{3(\delta - 2)t^2}{4\lambda^2} - \frac{t}{12\lambda} (4\delta^3 - 9\delta^2 + 12\delta - 12) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{24} (3\delta^6 - 16\delta^4 + 19\delta^3 - 6\delta^2) \right\} (a - 1)^2 + o(1). \end{aligned}$$

4. Статистички закључци о геометријским процесима

Да бисмо применили неки модел на одређене податке морамо прво одговорити на следећа три питања. Прво, како можемо да тврдимо да дати подаци одговарају том моделу? Или, како да тестирамо да ли су подаци сагласни са моделом? Друго, ако су подаци сагласни са моделом како да проценимо параметре у моделу? И треће, ако смо нашли одговарајући модел за податке, колико добро тај модел одговара подацима? При коришћењу модела геометријског процеса за анализирање скупа података $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$, такође треба одговорити на ова питања.

4.1. Тестирање хипотезе да је процес геометријски процес

Нека је дат случајни процес $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$, треба га тестирати да ли је геометријски. У ту сврху формираћемо два низа случајних променљивих:

$$U_i = \frac{X_{2i}}{X_{2i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (4.1.1)$$

и

$$U'_i = \frac{X_{2i+1}}{X_{2i}}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.1.2)$$

За фиксирани природан број m формираћемо још два низа случајних променљивих:

$$V_i = X_i X_{2m+1-i}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.1.3)$$

и

$$V'_i = X_{i+1} X_{2m+2-i}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.1.4)$$

У наставку ћемо формулисати две теореме које су врло важне за тестирање да ли је случајни процес геометријски.

Теорема 4.1.1. *Ако је $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ геометријски процес тада су $\{U_i, i = 1, 2, \dots\}$ и $\{U'_i, i = 1, 2, \dots\}$ два низа независних случајних променљивих са истом расподелом.*

Теорема 4.1.2. *Ако је $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ геометријски процес тада су за сваки фиксирани природан број m , $\{V_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ и $\{V'_i, i = 1, 2, \dots, m\}$ два низа независних случајних променљивих са истом расподелом.*

Да бисмо тестирали да ли је скуп података $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ геометријски процес тестираћемо да ли су низови случајних променљивих (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) и (4.1.4) заиста низови независних случајних променљивих са истом расподелом. У односу на то да ли је n паран или непаран број довољно је тестирати само два од четири низа и то:

Ако је $n = 2m$ паран, тестираћемо:

$$\{U_i, i = 1, 2, \dots, m\} \quad \text{и} \quad \{V_i, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Ако је $n = 2m + 1$ непаран, тестираћемо:

$$\{U'_i, i = 1, 2, \dots, m\} \quad \text{и} \quad \{V_i, i = 1, 2, \dots, m\};$$

или

$$\{U_i, i = 1, 2, \dots, m\} \quad \text{и} \quad \{V'_i, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Нека је I_A индикатор догађаја A . За тестирање да ли су случајне променљиве $\{W_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ независне са истом расподелом можемо користити следеће тестове. Ове и још неке тест статистике за тестирање хипотезе да ли је неки процес геометријски разматрали су Ачер и Фајнголд [1].

(1) Тест тачака заокрета.

Дефинишимо

$$T_W = \sum_{i=2}^{m-1} I_{[(W_i - W_{i-1})(W_{i+1} - W_i) < 0]}.$$

Ако су случајне променљиве $\{W_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ независне са истом расподелом, тада је приближно:

$$T(W) = \frac{[T_W - \frac{2(m-2)}{3}]}{[\frac{16m-29}{90}]^{1/2}} \sim N(0, 1).$$

(2) Тест знака разлике.

Нека је

$$D_W = \sum_{i=2}^m I_{[W_i > W_{i-1}]}.$$

Ако су случајне променљиве $\{W_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ независне са истом расподелом, тада је приближно:

$$D(W) = \frac{[D_W - \frac{m-1}{2}]}{[\frac{m+1}{12}]^{1/2}} \sim N(0, 1).$$

4.2. Оцена параметара за геометријски процес

Да бисмо одговорили на друго питање претпоставимо да $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ јесте геометријски процес. Нека је

$$Y_i = a^{i-1}X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тада је $\{Y_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ низ независних и једнако расподељених случајних променљивих, а такав је и низ $\{\ln Y_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. Означимо њихово заједничко очекивање и варијансу редом са $\mu = E[\ln Y_i]$ и $\tau^2 = \text{Var}[\ln Y_i]$. Логаритмовањем претходне једнакости имамо:

$$\ln Y_i = (i - 1)\ln a + \ln X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

С друге стране, можемо да пишемо:

$$\ln Y_i = \mu + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где су e_i независне и једнако расподељене случајне променљиве са очекивањем 0 и варијансом τ^2 . Тада имамо

$$\ln X_i = \mu - (i - 1)\ln a + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Добили смо једначину регресије, методом најмањих квадрата Лам (1992 б) је добио оцене параметара $\mu, \beta = \ln a$ и τ^2 .

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n (2n - 3i + 2) \ln X_i, \\ \hat{\beta} &= \frac{6}{(n-1)n(n+1)} \sum_{i=1}^n (n - 2i + 1) \ln X_i, \\ \hat{\tau}^2 &= \frac{1}{n-2} \left\{ \sum_{i=1}^n (\ln X_i)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln X_i \right)^2 - \frac{\hat{\beta}}{2} \sum_{i=1}^n (n - 2i + 1) \ln X_i \right\}. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Оцену параметра a добијамо из

$$\hat{a} = \exp(\hat{\beta}).$$

Означимо:

$$\hat{Y}_i = \hat{a}^{i-1} X_i, \quad \bar{\hat{Y}} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{Y}_i}{n} \quad \text{и} \quad \hat{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}.$$

Тада ће оцене за λ и σ^2 , добијене методом момената, бити редом:

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \bar{\hat{Y}}, & a \neq 1, \\ \hat{X}, & a = 1, \end{cases}$$

и

$$\hat{\sigma}^2 = \begin{cases} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}})^2, & a \neq 1 \\ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, & a = 1 \end{cases}.$$

Очигледно, оцене $\hat{a}$, $\hat{\lambda}$ и $\hat{\sigma}^2$ су непараметарске оцене. Оцена $\hat{a}$ параметра a се може добити минимизирањем суме квадрата грешки

$$Q = \sum_{i=1}^n [\ln X_i - \mu + (i-1) \ln a]^2.$$

Друге непараметарске оцене за a и λ могу се добити директно минимизирањем суме квадрата грешки

$$Q_D = \sum_{i=1}^n [X_i - a^{-(i-1)} \lambda]^2.$$

Друге оцене овде нећемо изводити.

4.3. Асимптотска расподела оцена

Сада ћемо одговорити на треће питање које смо поставили. Одређивање граничних расподела за оцене $\hat{a}$, $\hat{\lambda}$ и $\hat{\sigma}^2$. Резултати из овог параграфа су објављени у раду Лам и други [8].

Теорема 4.3.1. *Ако је $E[(\ln Y)^2] < \infty$, тада је:*

$$n^{\frac{3}{2}}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{L} N(0, 12\tau^2). \quad (4.3.1)$$

При чему је $\beta = \ln a$.

Из ове теореме, имамо следећу теорему.

Теорема 4.3.2. *Ако је $E[(\ln Y)^2] < \infty$ тада је:*

$$n^{\frac{3}{2}}(\hat{a} - a) \xrightarrow{L} N(0, 12a^2\tau^2).$$

Као резултат, на основу претходне две теореме, може да се тестира да ли је $a = 1$ или није, јер је $\beta = \ln a$. То је еквивалентно са тестом

$$H_0: \beta = 0 \quad \text{против} \quad H_1: \beta \neq 0.$$

Из Теореме 4.3.1, може се користити следећа тест статистика

$$R = n^{\frac{3}{2}} \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{12\tau}}.$$

Где је τ израчунато на основу (4.2.1).

R има приближно $N(0, 1)$ расподелу, под претпоставком H_0 . Приметимо да је тестирање да ли је $a = 1$ еквивалентно са тестирањем да ли подаци чине процес обнављања или хомоген Пуасонов процес. Други начин је да применимо Лапласов тест са тест статистиком:

$$L = \frac{[12(n-1)]^{1/2}}{T_n} \left(\frac{\sum_{i=1}^n T_i}{n-1} - \frac{T_n}{2} \right),$$

где је $T_i = \sum_{j=1}^i X_j$, $T_0 = 0$ и T_i означава време када се десио i -ти догађај. Под претпоставком H_0 имамо $L \sim N(0, 1)$. Детаљније погледати Кокс и Луис [2].

Следеће теореме описују граничну расподелу оцена $\hat{\lambda}$ и $\hat{\sigma}^2$ редом.

Теорема 4.3.3.

(1) Ако је $a \neq 1$, $E[Y^2] < \infty$ и $E[(\ln Y)^2] < \infty$ тада је:

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2 + 3\lambda^2\tau^2).$$

(2) Ако је $a = 1$ и $E[X^2] < \infty$ тада је:

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{L} N(0, \sigma^2).$$

Теорема 4.3.4.

(1) Ако је $a \neq 1$, $E[Y^4] < \infty$ и $E[(\ln Y)^2] < \infty$ тада је:

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \xrightarrow{L} N(0, \omega^2 + 12\sigma^4\tau^2).$$

(2) Ако је $a = 1$ и $E[X^4] < \infty$ тада је:

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \xrightarrow{L} N(0, \omega^2).$$

где је $\omega^2 = \text{Var}(X - \lambda)^2$.

Коришћењем *Теорема 4.3.1-4.3.4.* могу се одредити p -вредности за оцене или интервали поверења за параметре α , λ и σ^2 . У пракси, непознати параметар може се заменити његовом оценом. На пример, из (4.3.1) следи да је 95%-тни интервал поверења за α :

$$(\hat{\alpha} - 1.96\sqrt{12\hat{\alpha}\hat{\tau}n^{-\frac{3}{2}}}, \hat{\alpha} + 1.96\sqrt{12\hat{\alpha}\hat{\tau}n^{-3/2}}).$$

5. Примена модела геометријских процеса

5.1. Модел геометријских процеса у одржавању система

Лам (1988) је први увео модел геометријског процеса код изучавања проблема одржавања сложених система чије се стање погоршава. У овом поглављу ћемо видети неке моделе геометријских процеса за одржавање система са једном компонентом.

Систем који посматрамо може бити на пример машина у фабрици, у том случају догађаји који нас интересују су кварови машине. Када се машина поквари потребно је време да се квар отклони. У зависности од типа машине, време потребно за поправку се може сваки следећи пут смањивати због на пример искуства радника који поправља, такође, време успешног рада машине до квара се може временом повећавати уколико се стари делови замењују новим савременијим деловима, али време потребно за поправку може се и повећавати због дотрајалости и оних делова који још увек нису поковарени.

Опште је познато да превентивна поправка обично побољша поузданост или употребљивост система. На основу тога, размотрићемо и модел са превентивном поправком за одржавање система.

Претпоставићемо да важе следеће претпоставке.

Претпоставка 1. У почетку, систем је „нов“, односно, није коришћен и исправан је. Сваки пут кад систем крахира, биће поправљен. Стратегија замене N се примењује тако што се систем поправља или замењује новим тек после N -тог квара.

Претпоставка 2. Нека X_1 буде време оперативног рада система после инсталације или замене. Уопште, за $n > 1$, нека X_n буде време рада система после $(n - 1)$ -ве поправке, тада $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ формира геометријски процес са очекивањем $E(X_1) = \lambda > 0$ и коефицијентом a . Даље, нека Y_n буде дужина поправке система после n -тог отказа. Тада $\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$ представља геометријски процес са очекивањем $E(Y_1) = \mu \geq 0$ и коефицијентом b . Нека време замена буде Z са очекивањем $E(Z) = \tau$.

Претпоставка 3. Нека оперативни добитак износи r , а цена поправке c . Трошкови замене се састоје од два дела: један део је основна цена замена R , а други део је пропорционалан времену замене Z и износи c_p .

Осим тога, додатна претпоставка може бити једна од следећих.

Претпоставка 4. $a \geq 1$ и $0 < b \leq 1$.

Претпоставка 4'. $0 < a \leq 1$ и $b \geq 1$, осим у случају $a = b = 1$.

Под *Претпоставкама 1-4*, добијамо модел геометријских процеса за одржавање система чије се стање погоршава. За систем који ради под *Претпоставкама 1-3 и 4'*, добијамо модел геометријских процеса за одржавање система чије се стање побољшава.

Примедба.

За почетак ћемо објаснити мотивацију увођења модела геометријских процеса. У пракси, многи системи се погоршавају због старења и оштећења, тако да се узастопне дужине времена рада након поправке у смањују, док узастопна трајања времена поправке после кvara расту. Код система који се погоршава, узастопна времена рада система се могу моделирати опадајућим геометријским процесом, док се времена узастопних поправки система могу се моделирати растућим геометријским процесом. У том случају, полазимо од *Претпоставки 1-4*, и имамо модел геометријског процеса за систем чији се рад погоршава.

С друге стране, у стварном животу, постоје системи који се побољшавају са временом. На пример, дужина времена рада система након поправке може бити продужена јер оператор система може да акумулира радно искуство, или да се неки пропали делови система замене бољим деловима након кvara, док дужина трајања поправке може да се смањи јер онај који поправља постаје све више и више упознат са системом и у многим случајевима, поправка само постаје замена неких делова. Код система који се побољшава, узастопна времена рада система до кvara могу моделирати растућим геометријским процесом, док се времена узастопних поправки система могу се моделирати опадајућим геометријским процесом. У том случају, полазимо од *Претпоставки 1-4*, и имамо модел геометријског процеса за систем чији се рад побољшава.

Затим ћемо показати разлоге коришћења стратегије замене N . У литератури, постоје две врсте стратегије замене (поправке) система. Стратегија T каже да систем треба да се ремонтује сваки пут по истеку времена заустављања T . Друга, стратегија N , је она по којој се систем поправља тек након N -тог кvara. Ми ћемо упоредити ове две стратегије. Испитивањем дугорочне просечне цене по јединици времена, Стађ⁶ и Закерман⁷ 1990. године и Лам 1991. су показали под slabим условима да је оптимална стратегија замене N^* оптимална бар исто онолико колико је оптимална и стратегија замене T^* . Осим тога, примена стратегије N је згоднија него стратегије T , ово је додатни мотив за коришћења стратегије N . Дакле, стратегија N се примењује у нашем моделу.

⁶ Wolfgang Stadje, немачки математичар

⁷ Dror Zuckerman, израелски математичар

Један део трошкова замене су основни трошкови замене R који укључују трошкове производње новог дела, административни трошкови и трошкови транспорта. Јасно је да су независни од времена замене Z . Поред трошкова R , други део трошкова замене, као што су плате и потрошња енергије, ће бити пропорционалан времену замене Z .

Кажемо да је циклус завршен, ако је обављена замена. Тако је заправо циклус временски интервал између инсталације система и прве замене или временски интервал између две узастопне замене. Затим, узастопни циклуси, заједно са трошковима који су настали у сваком од њих, ће представљати процес обнављања добитка. Применом *Теореме 1.2.15*, дугорочна просечна цена по јединици времена (или једноставно просечна цена) је дата са:

$$\frac{\text{очекивана цена унутар циклуса}}{\text{очекивана дужина циклуса}}.$$

Под *Претпоставкама 1-3* и користећи стратегију N просечна цена је дата са:

$$\begin{aligned} C(N) &= \frac{E(c \sum_{k=1}^{N-1} Y_k - r \sum_{k=1}^N X_k + R + c_p Z)}{E(\sum_{k=1}^N X_k + \sum_{k=1}^N Y_k + Z)} = \frac{c\mu \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{b^{k-1}} - r\lambda \sum_{k=1}^N \frac{1}{a^{k-1}} + R + c_p \tau}{\lambda \sum_{k=1}^N \frac{1}{a^{k-1}} + \mu \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{b^{k-1}} + \tau} \\ &= A(N) - r, \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

где је:

$$A(N) = \frac{(c + r)\mu \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{b^{k-1}} + R + c_p \tau + r\tau}{\lambda \sum_{k=1}^N \frac{1}{a^{k-1}} + \mu \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{b^{k-1}} + \tau}.$$

Наш циљ, сада, је да одредимо оптималну стратегију замене N^* која минимизује $C(N)$ или $A(N)$. Да бисмо то урадили, прво ћемо одредити разлику између $A(N + 1)$ и $A(N)$:

$$\begin{aligned} A(N + 1) - A(N) &= \frac{(c + r)\mu\{\lambda(\sum_{k=1}^N a^k - \sum_{k=1}^{N-1} b^k) + \tau a^N\} - (R + c_p \tau + r\tau)(\lambda b^{N-1} + \mu a^N)}{a^N b^{N-1} \left[\lambda \sum_{k=1}^N \frac{1}{a^{k-1}} + \mu \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{b^{k-1}} + \tau \right] \left[\lambda \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{a^{k-1}} + \mu \sum_{k=1}^N \frac{1}{b^{k-1}} + \tau \right]} \end{aligned}$$

Пошто је именилац овог разломка увек позитиван, знак ове разлике биће исти као знак бројиоца.

Сада дефинишемо помоћну функцију:

$$g(N) = g(N, a, b, \lambda, \mu, \tau, r, c, R, c_p) = \frac{(c+r)\mu\{\lambda(\sum_{k=1}^N a^k - \sum_{k=1}^{N-1} b^k) + \tau a^N\}}{(R+c_p\tau+r\tau)(\lambda b^{N-1} + \mu a^N)}. \quad (5.1.2)$$

Из дефиниције функције $g(N)$ следи следећа лема о монотоности функције $A(N)$.

Лема 5.1.1.

$$\begin{array}{ccc} & > & > \\ A(N+1) & = & A(N) \Leftrightarrow g(N) = 1. \\ & < & < \end{array}$$

Ови закључци су изведени из *Претпоставки 1-3*, односно важе и за системе који се поправљају и за системе који се погоршавају.

Размотримо модел геометријских процеса за одржавање система у којем се примењују две стратегије замене (T, N) . То подразумева да ће систем бити замењен или по истеку времена T или после квара у зависности од тога се прво догоди.⁸ Сада, користећи стратегију замене (T, N) под *Претпоставкама 1-3* и под претпоставком да су $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ и $\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$ два међусобно независна процеса можемо проценити просечну цену на сличан начин као раније. Нека је:

$$U_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{и} \quad V_n = \sum_{i=1}^n Y_i,$$

при чему је $U_0 = 0$ и $V_0 = 0$.

Циклус је завршен када је урађена замена. Нека W представља дужину циклуса:

$$W = \sum_{i=0}^N (T + V_i) I_{\{U_i < T \leq U_{i+1}\}} + (U_N + V_{N-1}) I_{\{U_N < T\}} + Z,$$

где је I_A индикатор догађаја A .

Претпоставимо да је време рада и време поправке непрекидно. Тада имамо:

$$\begin{aligned} E(W) &= E \left\{ \sum_{i=0}^N (T + V_i) I_{\{U_i < T \leq U_{i+1}\}} + (U_N + V_{N-1}) I_{\{U_N < T\}} + Z \right\} \\ &= E \{ T I_{\{T \leq U_N\}} \} + \sum_{i=0}^N E(V_i) E \left(I_{\{U_i < T \leq U_{i+1}\}} \right) + E \{ (U_N + V_{N-1}) I_{\{U_N < T\}} \} + \tau \\ &= E \{ T I_{\{T \leq U_N\}} \} + \sum_{i=1}^{N-1} \left(\sum_{j=1}^i \frac{\mu}{b^{j-1}} \right) \{ F_i(T) - F_{i+1}(T) \} + E \{ E(U_N + V_{N-1}) I_{\{U_N < T\}} | U_N \} + \tau \\ &= T \bar{F}_N(T) + \sum_{j=1}^{N-1} \left(\sum_{i=j}^{N-1} \frac{\mu}{b^{j-1}} \right) \{ F_i(T) - F_{i+1}(T) \} + E \{ E[(U_N + V_{N-1}) I_{\{U_N < T\}} | U_N] \} + \tau \\ &= T \bar{F}_N(T) + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{j-1}} \{ F_j(T) - F_N(T) \} + \int_0^T E(U_N + V_{N-1} | U_N = u) dF_N(u) + \tau \\ &= T \bar{F}_N(T) + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{j-1}} F_j(T) - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{j-1}} F_N(T) + \int_0^T u dF_N(u) + E(V_{N-1}) \int_0^T dF_N(t) + \tau \end{aligned}$$

⁸ Овакав начин замене први је разматрао Zhang Y. L. (1994)

$$= \int_0^T \bar{F}_N(u) du + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{j-1}} F_j(T) + \tau.$$

Овде смо користили чињенице да је $E(V_i) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mu}{b^{j-1}}$ и да су $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ и $\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$ независни процеси. Са друге стране, очекивани трошкови унутар циклуса дата је са:

$$\begin{aligned} cE \left(\sum_{i=1}^{N-1} V_i I_{\{U_i < T \leq U_{i+1}\}} + V_{N-1} I_{\{U_N < T\}} \right) - rE(T I_{\{T \leq U_N\}} + U_N I_{\{U_N < T\}}) + R + c_p E(Z) \\ = c \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{j-1}} F_j(T) - r \int_0^T \bar{F}_N(u) du + R + c_p \tau. \end{aligned}$$

Дакле, просечни трошкови при стратегији (T, N) су:

$$C(T, N) = \frac{c \mu \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{b^{j-1}} F_j(T) - r \int_0^T \bar{F}_N(u) du + R + c_p \tau}{\int_0^T \bar{F}_N(u) du + \mu \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{b^{j-1}} F_j(T) + \tau}.$$

Приметимо да стратегију N можемо сматрати да је једнака (∞, N) и $T \equiv (T, \infty)$, одакле следи да је оптимална стратегија (T, N) бар једнако добра као оптимална стратегија N^* и оптимална стратегија T^* .

5.2. Оптимална стратегија замене

У овом одељку ћемо одредити оптималну стратегију замене N^* која минимизира $C(N)$ за систем који се погоршава или $A(N)$ за систем који се побољшава. За ову сврху дефинишимо функцију:

$$h(N) = \lambda b^{N-1} + \mu a^N$$

и користимо функцију $g(N)$ из (5.1.2) за коју важи:

$$\begin{aligned} g(N+1) - g(N) = \frac{(c+r)\mu}{(R+c_p\tau+r\tau)h(N)h(N+1)} \{ \lambda^2 b^{N-1} (1-b) \sum_{k=1}^N a^k + \lambda^2 b^{N-1} (a^{N+1} - b) \\ + \lambda \mu a^N (a - b^N) + \lambda \mu a^N (a - 1) \sum_{k=1}^{N-1} b^k + \lambda \tau a^N b^{N-1} (a - b) \}. \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Модел 1. Модел под Претпоставкама 1-4.

Ово је модел система који се погоршава. Из једначине (5.2.1) и Претпоставке 4 имамо следећу лему.

Лема 5.2.1. Функција $g(N)$ је неопадајућа по N .

Као последицу Леме 5.1.1 и Леме 5.2.1 имамо следећу теорему.

Теорема 5.2.2. Оптимална стратегија замене N_d^* за систем који се погоршава је:

$$N_d^* = \min\{N \mid g(N) = g(N, a, b, \lambda, \mu, \tau, r, c, R, c_p) \geq 1\}.$$

И она је јединствена ако и само ако је $g(N_d^*) > 1$.

Пример.

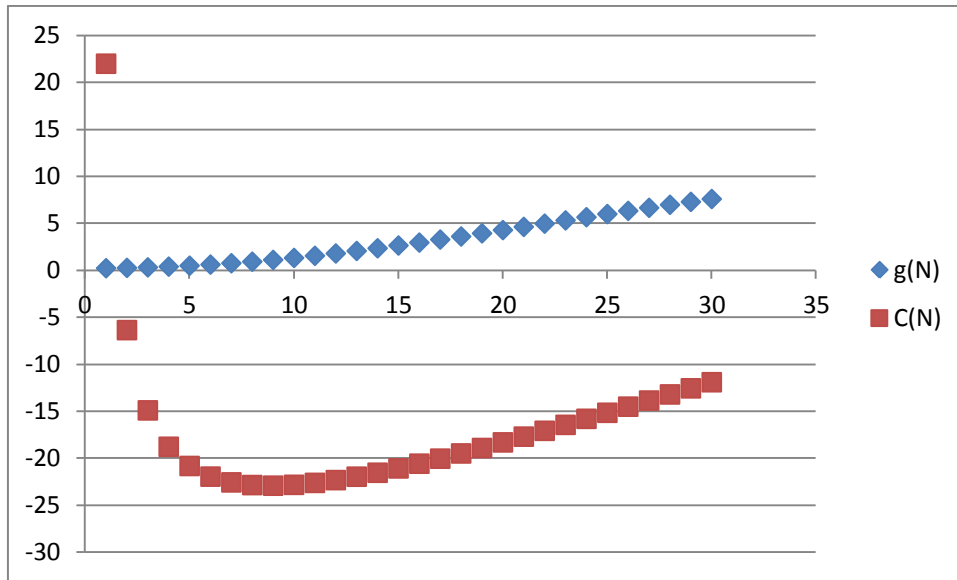
Одредити оптималну стратегију замене за систем који се погоршава ако су његови параметри дати:

$a = 1.05, b = 0.95, R = 3000, \lambda = 40, \mu = 15, c = 10, r = 50, c_p = 10$ и $\tau = 10$.

Резултате ћемо представити помоћу табеле:

N	$C(N)$	$g(N)$	N	$C(N)$	$g(N)$	N	$C(N)$	$g(N)$
1	22.0000	0.2354	11	-22.6116	1.5565	21	-17.6895	4.6345
2	-6.3510	0.2710	12	-22.3166	1.8050	22	-17.0663	4.9794
3	-14.8933	0.3268	13	-21.9524	2.0716	23	-16.4336	5.3236
4	-18.7671	0.4035	14	-21.5328	2.3545	24	-15.7935	5.6655
5	-20.8101	0.5020	15	-21.0682	2.6520	25	-15.1481	6.0037
6	-21.9437	0.6227	16	-20.5666	2.9622	26	-14.4991	6.3368
7	-22.5571	0.7657	17	-20.0344	3.2832	27	-13.8480	6.6638
8	-22.8432	0.9311	18	-19.4766	3.6129	28	-13.1966	6.9838
9	-22.9089	1.1185	19	-18.8976	3.9494	29	-12.5460	7.2958
10	-22.8181	1.3272	20	-18.3008	4.2905	30	-11.8978	7.5994

Графички то изгледа овако:



Модел 2. Модел под Претпоставкама 1-3 и 4'.

Ово је модел система који се побољшава. Из једначине (5.2.1) и Претпоставке 4' имамо следећу лему.

Лема 5.2.3. Функција $g(N)$ је опадајућа по N .

Као последицу Леме 5.1.1 и Леме 5.2.3 имамо следећу теорему.

Теорема 5.2.4. Под Претпоставкама 1-3 и 4', стратегија замене $N_i^* = \infty$ је јединствена оптимална стратегија за систем који се побољшава.

Доказ. Како је $g(N)$ опадајућа по N , постоји природан број N_i такав да је:

$$N_i = \min\{N \mid g(N) \leq 1\}.$$

Другим речима, имамо:

$$g(N) > 1 \Leftrightarrow N < N_i \quad \text{и} \quad g(N) \leq 1 \Leftrightarrow N \geq N_i.$$

Из Леме 5.1.1 знамо да су и $C(N)$ и $A(N)$ унимодалне са N и имају екстремум у N_i . Због (5.1.1) и Претпоставке 4', следи да ће минимум од $C(N)$ бити:

$$\min(C(N)) = \min\{C(1), C(\infty)\} = \min\left\{\frac{R+c_p\tau-r\lambda}{\lambda+\tau}, -r\right\} = -r.$$

Дакле, $N_i^* = \infty$ је јединствена оптимална стратегија замене за систем који се побољшава, што је и требало доказати. ■

Интуитивно, опште је познато да за систем који се побољшава важи „што је старији, бољи је“. То значи да ћемо поправљати систем тек када се поквари, без претходне преправке.

Теорема 5.2.4 слаже са овим.

6. Закључак

Циљ овог рада је да се прикаже једна интересантна класа случајних процеса, такозваних, геометријских случајних процеса. Они представљају уопштење Пуасоновог процеса, као и процеса обнављања, који имају велику примену у пракси и зато су теоријски веома изучавани. Примере геометријског процеса у реалном животу срећемо „на сваком кораку“, у реду у банци, кад мењамо сијалицу или користимо неку машину. Ови процеси су изучавани и у вези са системима масовног опслуживања, као и у медицини за праћење развоја одређене инфекције. У раду је, такође, дата статистичка анализа параметара и оцењена поузданост. Приказане су неке од примена овог процеса на проблем одржавања система; на систем који се погоршава и на систем који се побољшава. Видели смо да систем који се погоршава не треба поправљати док се не поквари, а систем који се побољшава треба ремонтовати после одређеног периода јер на тај начин добијамо продуктивнији систем.

Литература

- [1] Ascher, H. and Feingold, H. (1984) *Repairable Systems Reliability* . MarcelDekker, New York.
- [2] Cox, D. R. and Lewis, P. A. (1966) *The Statistical Analysis of Series of Events*, Mathuen, London.
- [3] Feller, W. (1970) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II*, Wiley, New York.
- [4] Lam, Y. (1988a) A note on the optimal replacement problem. *Advances in Applied Probability*, 20, 479-782.
- [5] Lam, Y. (1988b) Geometric processes and replacement problem. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 4, 366-377.
- [6] Lam, Y. (1991a) A replacement model for repairable deteriorating system. *Asia-Pacific Journal of Operational Research* 8, 119-127.
- [7] Lam, Y. (1991b) Optimal policy for a general repair replacement: average reward case. *IMA Journal of Mathematics Applied in Business & Industry* 3, 117-129.
- [8] Lam, Y., Zhu, L. X., Chan, S. K. and Liu, Q. (2004) Analysis of data from a series of events by a geometric process model. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 20, 263-282.
- [9] Lam, Y. (2006) Geometric process. *Encyclopedia of Statistical Sciences, 2nd edition*, Balakrishnan, N., Read, C. B., Kotz, S. and Vidakovic, B., ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, to appear.
- [10] Lam Y. (2007) *The geometric process and its applications*. The University of Hong Kong & Northeastern University at Qinhuangdao, China.
- [11] Lee, L. (1980b) Comparing rates of several independent Weibull processes, *Technometrics*, 22, 427-430.
- [12] Ross, S. M. (1996) *Stochastic Processes*, second edition, Wiley, New York.
- [13] Stadje, W. and Zuckerman, D. (1990) Optimal strategies for some repair replacement models. *Advances in Applied Probability*, 22, 641-656.
- [14] Wang, G. J. and Zhang, Y. L. (2006) Optimal periodic preventive repair and replacement policy assuming geometric process repair. *IEEE Transactions on Reliability*, 55,118-122.