

Историја бесконачности у математици – опасно знање

Проф. др

Милан Божић

студент

Марко Маодуш

САДРЖАЈ

Увод	3
Појам бесконачности у Старој Грчкој (Зенонови парадокси)	4
Аристотел	11
Галилео Галилеј	14
Даљи кораци ка бесконачности	17
Исак Њутн	19
Лајбниц	21
Пут ка коначном проналаску	24
Георг Кантор	27
Лудвиг Едуард Болцман	33
Курт Гедел	37
Алан Тјуринг	41
Закључак	44
Литература	45

УВОД

Свет који познајемо, почива на правилима науке, али, испод њих, налази се скуп много дубљих, суштинских, чисто математичких правила, које још увек не разумемо најбоље.

Ово је прича о математичарима који су се, кроз историју човечанства, бавили појмом бесконачности, који и данас фасцинира много научнике, филозофе, уметнике... Ово је, такође и прича о људима који су своје изузетне интелектуалне способности посветили борби против опште прихваћених правила математике, логике и науке уопште, и који су видели, свако на свој начин, да су сигурност и предвидивост, на којима и данас почива наше друштво – само илузија. Овде говоримо и о трагичној судбини, оних ретких који су успели да, бар на тренутак, виде потпуну реалност света.

Неке од тих прича су истовремено инспиративне и тужне. Сви су, још као млади показали изузетан таленат, па се очекивало да ће на интелектуалном пољу достићи велику славу. Ипак, због природе њиховог истраживања, изузетне посвећености свом раду, великим препрекама које су морали да превазиђу и велике претње коју су представљали, готово свим фундаменталним веровањима, признања и славу су стицали тек постхумно, а смрт су дочекивали на ивици лудила, усамљени и заборављени.

Почетак приче води нас у Стару Грчку...

ПОЈАМ БЕСКОНАЧНОСТИ У СТАРОЈ ГРЧКОЈ (ЗЕНОНОВИ ПАРАДОКСИ)

Први писани трагови о изучавању бесконачности, воде нас у Стару Грчку. У 6. веку пре нове ере, антички филозоф Анаксимандер (антички грчки - Ἀναξίμανδρος), први је користио појам Апејрон (τὸ ἄπειρον). Њиме је желео да опише прапочетак света, као неодређену и бесконачну масу, која не може остарити ни пропасти и која представља неисцрпно врело, из које произилазе сва бића и ствари које опажамо. Међутим, Апејрон никада није прецизно дефинисан, тако да је тај појам имао разна значења, најчешће негативна, па чак и пежоративна. Аристотел (Ἀριστοτέλης), на пример, сматрао га је га неком врстом првобитног хаоса. За њега, Апејрон садржи супротности топло-хладно и влажно-суво, те управља кретањем свега, из чега настају различити облици које срећемо у нашем свету. Али, Апејрон је могао бити и произвољна, крива линија, или чак, прљава, згужвана марамица. Стога, он није представљао само бесконачно велико, већ и тотално неуређено, бесконачно сложено, без могућности да се дефинише. Стари Грци нису имали коректну математичку нотацију за појам бесконачности, њихово алгебарско знање није било толико развијено као геометријско, тако да су најчешће избегавали да се боре са овим проблемом, назвавши га апсурдним. На пример, Питагорејци једноставно нису желели да се сусретну са бесконачношћу, јер је за њих све имало свој број. Чак су везивали оно што је коначно за добро, а бесконачно за зло. Иако то нису разумели најбоље у то време, управо њихово откриће ирационалних бројева (нпр. $\sqrt{2}$) захтевало је јасан концепт и разумевање појма бесконачности. Ипак, појаве у физичком свету су их ипак приморале да на неки начин објасне бесконачност, понајвише због три традиционална опажања:

- „Време изгледа као да нема крај“
- „Простор и време могу бити дељени бескрајно“

- „Универзум нема границу“

Вероватно је на негативан став Грка према појму бесконачности пресудно утицао антички Грчки филозоф, Зенон из Елеје (Ζήνων ὁ Ἐλεάτης, око 490–око 430. п. н. е.), припадник Елејске школе, коју је основао Парменид (Παρμενίδης ὁ Ἐλεάτης). И данас „Зенонови парадокси“ интригирају савремене филозофе, математичаре, мислиоце... О његовом животу не зна се много. Главни извор обавештења о његовом животу представља Платонов (Πλάτων) дијалог „Парменид“, написан неких стотину година након Зенонове смрти. У том дијалогу Платон описује како су Парменид и Зенон посетили Атину, у доба када је Пармениду било „око 65 година“, Зенону „готово 40 година“, а Сократ (Σωκράτης) је био „веома млад“ (Парм. 127). У истом одељку Платон каже да је Зенон био „висок и леп човек“ те да је као младић био Парменидов „миљеник“. Остала мање - више поуздана обавештења о Зеноновом животу дају нам записи Диогена Лаертија (Διογένης ὁ Λαέρτιος) под насловом „Животи и мишљења грчких филозофа“, где се каже да је Зенон био рођени син Телеутагоре, али да га је усвојио Парменид, те да је Зенон имао „вештину расправљања у прилог обе стране неког питања“. Диоген Лаертије такође каже да је Зенон био ухапшен и можда убијен по наређењу елејскога тиранина. Зенон је био одлучни присталица Парменидове теорије о постојању „Једног“ и непостојању мноштва, промене и кретања. Парменид је, дакле, одбацио кретање и промену као пукe привиде, али пошто су нам они дати у чулном искуству, то је Парменидова теорија код неких могла изазвати подсмех. Зенон доказује да та теорија никако није смешна те да, штавише, питагорејски плурализам запада у много веће тешкоће, тако да кретање и промена нису могући чак ниако се покушају доказати самим питагорејским хипотезама. Зенон је саставио један прозни спис, у којем је било око четрдесет доказа или аргумената, које је Аристотел назвао „апоријама“, који побијају питагорејска схватања свдећи их на бесмисао (*reductio ad absurdum*), с циљем да се покаже како је бивствовање „Једно“. Платон у Пармениду 128б јасно износи сврху Зенонове књиге: „Ти су списи уствари замишљени као нека одбрана Парменидове тезе против оних који му се подсмевају и тврде да многе смешне и противречне последице следе из потврђивања Једног. Мој спис побија поборнике мноштва, одбацује њихов напад и уз то им још враћа, тежећи само да покаже како њихова претпоставка

да постоји мноштво, ако се пажљиво испита, води чак ка смешнијим последицама него хипотеза да Једно постоји“.

Увидом у сачуване фрагменте, може се закључити да је Зенон саставио три врсте доказа: доказе против тезе о постојању мноштва, доказе против тезе о постојању празнине, те доказе против тезе о постојању кретања.

Докази против мноштва

1. Претпоставимо, као што су то чинили Питагорејци, да је стварност састављена од јединица (монада). Те монаде или имају или немају величину. Ако имају величину, онда ће, на пример, једна линија бити бесконачно дељива, јер ће свака јединица, ма колико мала, и даље имати величину и бити даље дељива. У том случају линија ће бити састављена од бесконачног броја јединица, па ће нужно бити бесконачно велика. Према томе, све у свету мора бити бесконачно велико, па тако и сам свет. Ако монаде немају величину, онда је и цео свет без величине, односно он мора бити бесконачно мали, као и све остало у свету. Закључак који из ове дилеме проистиче јесте да је заправо бесмислена теза о томе да је космос и све у њему састављено од монада.
2. Ако постоји мноштво ствари, онда би требало да смо у стању да кажемо колико је заправо то мноштво. Прво морамо бити у могућности да пребројимо ствари, како би оне би морале да постоје. С друге стране, оне не смеју да буду бројиве, већ морају да буду бесконачне, јер ће иначе између сваке две одређене јединице увек бити других јединица, управо као што је раније споменута линија, бесконачно дељива. Према томе, питагорејска теза тера нас да кажемо да је мноштво истовремено коначно по броју и бесконачно по броју.
3. Ако мерицу жита изручимо на земљу, то ће произвести неки шум. Али када на земљу проспемо само једно зрно жита или део зрна, то не производи никакав звук. Ипак, мерица жита састављена је само од зрна жита или делова зрна жита. Ако делови при паду не производе никакав звук, како то да целина производи звук иако целину чине само делови?

Докази против празнине

Парменид је порицао постојање празнине или празног простора. Претпоставимо, ипак, да постоји простор у коме се налазе ствари. Ако је простор ништа, онда се у њему не може ништа ни налазити. Ако је простор нешто, онда се и он мора налазити у простору, а тај простор такође мора бити у простору, и тако у бесконачност. Према томе, ствари се не налазе у простору, а Парменид је био у праву када је негирао постојање празнине.

Докази против кретања

Најпознатији су Зенонови аргументи против кретања, којима он настоји показати како је кретање – које је Парменид порицао – једнако немогуће и према плуралистичкој теорији питагорејаца.

1. Претпоставимо да треба прећи једну стазу. Да би се то постигло, треба – према питагорејској тези – проћи кроз бесконачан низ тачака у коначном времену. Међутим, немогуће је у коначном времену прећи бесконачан број тачака, а самим тим и бесконачну раздаљину. Заправо, ниједан објекат не може прећи ниједну раздаљину, јер се увек појављује иста тешкоћа, па морамо закључити да, према томе, никакво кретање није могуће.
2. Претпоставимо да се Ахил (Ἀχιλλεύς) и корњача такмиче у трчању. Ахил даје одређену предност корњачи. У тренутку када Ахил стигне до места са којег је корњача кренула, она је већ одмакла до следеће тачке, а када Ахил стигне и до те тачке, корњача је већ прешла нову раздаљину, ма колико мала она била. Тако се Ахил стално приближава корњачи, али он је стварно никада не може достићи, под питагорејском претпоставком да је дужина састављена од бесконачног броја тачака. Према томе, иако питагорејци тврде могућност кретања, они га сами властитим учењем чине немогућим.
3. Стрела у лету, према питагорејској теорији, требало би да заузима одређени положај у простору, али одређени положај у простору значи бити у мировању. Зеноновим речима: „Стрела која изгледа као да лети, уствари не лети, него непомично стоји, јер ако би летела, морала би у

сваком тренутку да буде и да не буде на једном месту“ (фр. А 27). Аристотел овоме доказу приговара то што се у њему време неосновано дели на безвременске тренутке, уместо да се време посматра у континуираном току: стрела у стварности не мирује у појединим тачкама, него кроз те тачке пролази континуирано.

Предложена решења

Два парадокса, „Ахил и корњача“ и „Дихотомија“, зависе од поделе удаљености на низове удаљености који постају све мањи, па су и субјект истим против-аргументима.

Предложена решења за „Ахила и корњачу“

Аристотел је истакао да као што се удаљеност смањује, време потребно да се та удаљеност пређе, такође се смањује. Такав приступ решавању парадокса би довео до деманта тврдње да је потребно бесконачно много времена да се пређе преко бесконачно много удаљености, иако неки то споре.

Пре 212. п. н. е., Архимед је развио метод да изведе коначни одговор за бесконачно много чланова који постају прогресивно мањи. Теореме су развијене у модернијим облицима да би постигле исти резултат, али са тачнијом методом за доказивање. Ове методе дозвољавају конструкцију решења које кажу да (под нормалним условима) ако се удаљености стално смањују, време је коначно.

Ова решења су, у ствари, геометријски низови. Општи геометријски низови се могу писати као

$$a \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^k ,$$

што је једнако $a \cdot x / (x - 1)$ узевши да је $x > 1$ (у супротном низ је дивергентан). Парадокс се могу решити помоћу геометријских секвенци (низова), али је једноставније користити Аристотелово решење, које у обзир узима време (а не удаљености као у нивовима) које је потребно Ахилу да сустигне корњачу.

У случају Ахила и корњаче, треба замислити да корњача трчи константном брзином од v метара у секунди (m/s) и да добија предност од удаљености d метара (m), а да Ахил трчи константном брзином од $x \cdot v$ (m/s) за $x > 1$. Ахилу је потребно d/xv секунди (s) да дође до тачке са које је корњача отпочела трку, а за то време корњача је прешла d/x метара. После времена од d/x^2v секунди, Ахил има још једну d/x метара, и тако даље. Према томе, време потребно Ахилу да сустигне корњачу је

$$\frac{d}{v} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{d}{v(x-1)} \text{ s.}$$

Пошто је ово коначна вредност, Ахил ће једном сустићи корњачу.

Предложена решења за парадокс дихотомије

Аристотел је истакао да као што се удаљеност смањује, време потребно да се та удаљеност пређе такође се смањује. Такав приступ решавању парадокса би довео до деманта тврдње да је потребно бесконачно много времена да се пређе преко бесконачно много удаљености.

Предложена решења за парадокс стреле

Парадокс о стрели поставља питања о природи кретања на која није одговорено на математички начин, као у случају Ахила и корњаче и Дихотомије.

Овај парадокс се може решити математички на следећи начин: у граничној вриједности, дужина момента тежи нули, тренутна стопа мењања или брзине (која је количник пређеног пута у одређеном времену) не мора тежити нули. Ова ненултна гранична вредност је брзина стреле у тренутку.

Проблем са рачунским решењем је тај да рачунска радња може описати само кретање док се гранична вредност приближава, базирано на спољној обсервацији да се стрела креће напред. Међутим, у Зеноновом парадоксу, концепти као брзина губе своје значење и непостоји чинилац, који није под деловањем парадокса, који би могао стрели омогућити летење.

Друго гледиште је то да премиса каже да је у сваком тренутку, стрела непомична. Међутим, „не кретати се“, је релативан појам. Нико не може судити, посматрајући један тренутак, да стрела стоји у мјесту. Тачније, потребни су други, слични тренуци који би одредили, поредећи се са другим тренуцима, да је стрела у једном тренутку непомична. Према томе, у поређењу са другим тренуцима, стрела би била на другом месту него што је била и што ће бити у времену пре и после. Узевши ово у обзир, стрела се креће.

Аристотел

Аристотел је рођен у Стагири, грчкој колонији на македонском полуострву. Његов отац, Никомах, радио је као дворски лекар код краља Аминтаса III Македонског, деде Александра Великог. Верује се да су Аристотелови преци били на овој дужности и код ранијих македонских краљева. Претпоставља се да је, када је отишао у Атину са 18 година, Аристотел имао и нека знања из медицине која је добио од оца.

Од 18.-е до 37.-е године похађа Академију као Платонов ученик. Разлике у филозофским ставовима биле су основа за стварање разних легенди о односима Платона и Аристотела. Евидентно је да су неслагања у ставовима постојала, пошто Аристотел врло рано показује интересовање за природне чињенице и законе за разлику од Платонових идеалистичких ставова. Било како било, нема никаквих доказа да су за време Аристотеловог боравка на Академији односи између двојице филозофа били затегнути или прекинути.

Заправо, Аристотелово понашање после Платонове смрти, његова стална сарадња са Ксенократом (Платоновим учеником) и осталим платонистима, те референце на Платоново учење у његовим делима доказују да је, иако је и било сукоба мишљења између Аристотела и Платона, међу њима постојало дубоко разумевање и толеранција.

За време тринаестогодишњег периода (335. п. н. е. — 322. п. н. е.) који је провео поучавајући у Лицеју, Аристотел је написао већину својих дела. По узору на Платона, пише „Дијалоге“ у којима популарним језиком износи основе свог учења. Међутим, своје студије о математици и физици, писао је формалнијим стилем и "ученијим" језиком.

Аристотел генерално одбија постојање бесконачности, али, са неким изузецима. Бави се овом темом у својим студијама „Физика“ и „Метафизика“. Он уводи две различите бесконачности, тј. правио је разлику између стварне (актуелне, чињеничне) и потенцијалне (посредне, скривене). Аристотел је видео бесконачно као „мноштво из којег је увек могуће узети нешто мање“, или да „бесконачно постоји зато што време нема почетак и крај“. Он је сматрао је да бесконачност не постоји у реалном свету, пошто свако тело, па

и Универзум имају границе. Актуелна бесконачност је нешто што је коначно и дефинитивно и састоји се од бесконачно много елемената, и по његовом веровању, то је парадоксална идеја, како у теорији, тако и у природи.

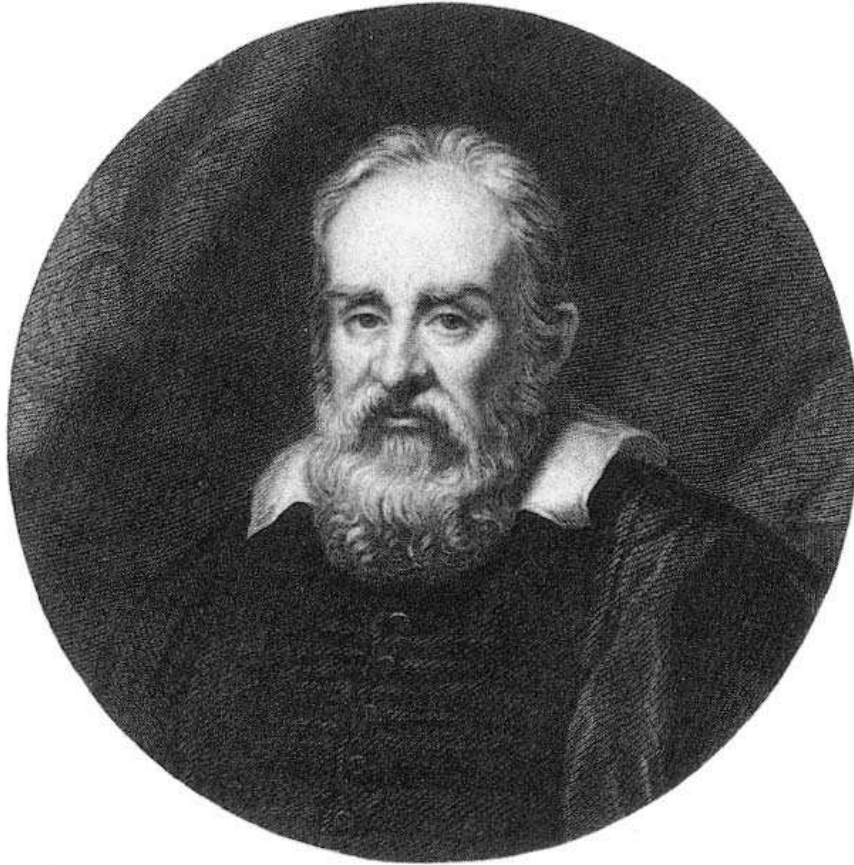
Аристотел наводи неколико примера и тврди да, математичарима, бесконачност у осталим ситуацијама није ни потребна. Један од примера је нпр. бесконачни низ дељења бројем 2, па, почев од 1 (1, 0.5, 0.25, 0.125,...) он то посматра као процес у коме се никада не долази до резултата 0, иако можемо извести колико год желимо дељења. То је за њега потенцијално, али не и актуелно бесконачан процес, јер се у стварном животу, природи – не може се заиста догодити.

За нашу причу, Аристотел је значајан јер управо од њега креће традиција неславног завршетка живота, великог броја познатих научника и мислилаца који су се ухватили у коштац са појмом бесконачности. Опште је познато да је Аристотел био животни учитељ Александра Македонског, једног од највећих императора у историји. Међутим, у последњим годинама Аристотеловог живота односи између њега и Александра постају веома затегнути захваљујући страдању и казни Калистеновој, којег је Аристотел својевремено препоручио Александру. Без обзира на све, у Атини су и даље сматрали Аристотела Александровим пријатељем и представником Македоније. Наравно, након што је у Атину стигла вест о Александровој смрти, Аристотел постаје непопуларан као и остали Македонци. Атмосферу непоштовања, коју су осетили Анаксагора (Ἀναξαγόρας) и Сократ, доживео је, још безразложније, и он сам. Напушта Атину изјављујући (по сведочењима многих античких ауторитета) да неће пружити Атињанима шансу да се по трећи пут огреше о филозофију. Налази уточиште на свом сеоском имању у Калкису у Еубеји где и умире следеће године, усамљен, 322. п. н. е. од дугогодишње болести.

Следећи учења старих Грка, Арапи су унапредили њихова учења, посебно у алгебри. Користили су се ирационалним бројевима слободно, али нису дубље анализирали њихову природу. Ова дефиниција Аристотела је била прихваћена међу математичарима готово два миленијума. Европски

математичари су такође, наследили знања од арапских научника, такође користили ирационалне бројеве, али се повремено појављивао проблем са бесконачношћу. Свети Август (лат. Augustinus) је прихватио Платоново гледиште да је Бог бесконачан и да може имати бесконачно много мисли. Свети Тома Аквински (лат. Thomas Aquinas) је дозволио неограниченост Бога, али је сматрао да он није креирао ствари без граница. Николас де Куза (лат. Nicolaus Cusanus, 1401-1464) је користио бесконачност и бесконачне процесе како би досегао Божанско. Бавио се проблемом квадратуре круга и сматрао је умео да реши тај проблем. Гледао је на круг као на полигон са највећим могућим бројем страна. Ипак, први модерни математичар који се озбиљније бавио бесконачношћу, био је Галилео Галилеј.

ГАЛИЛЕО ГАЛИЛЕЈ



Галилео Галилеј (итал. Galileo Galilei, 1564 - 1642) је био италијански астроном, физичар, математичар и филозоф, чија су истраживања поставила темеље модерној механици и физици. Рођен је у Пизи. Углавном је образован у манастиру Валоμβроза поред Фиренце, а на универзитету у Пизи студирао је од 1581. до 1585. године. Убрзо после тога, неко време је предавао на фирентинској Академији. На универзитету у Пизи је предавао математику од 1592. до 1610. Био је филозоф и математичар код великог тосканског војводе од 1610. па до краја свог живота.

Године 1616, теолошки саветници инквизиције осудили су га због тога што се залагао за „нову“ астрономију (Коперников (лат. Nicolaus Copernicus) хелиоцентрични систем), и тада му је забрањено да заступа,

предаје и брани осуђено учење. Иако Папа никад није потврдио ту осуду, 1632. године, након објављивања његовог дијалога о алтернативним светским системима, Инквизиција је Галилеју наредила да дође у Рим. Тамо је стигао у фебруару 1633. и био испитан на основу оптужбе да је споменута публикација из 1632. у супротности са одлуком од 1616. године. Дан после суђења, 1633. године, Галилеј је јавно прочитао своје порицање и, на задовољство суда, био осуђен на утамничење. Ипак, допуштено му је да се врати у своју вилу у Фиренци и тамо остане под условом да живи у строгој изолацији, што је он и учинио и последњих осам година свог живота провео, усамљен, у сталном научном раду и експериментисању.

Галилеј је први од модерних научника који се бавио бесконачношћу, на другачији начин од Старих Грка. Доказао је да се кружница састоји од бесконачног броја тачака, што је било велико откриће, али је потом наишао на, како му се чинило, много већи проблем. Посматрајући точак на колима, односно 2 концентрична круга различитог пречника, приметио је да у мањем кругу постоји бесконачан број тачака, па би бесконачно танком оловком било могуће нацртати бесконачно велики број пречника. Међутим, када би те пречнике проширио до концентричне кружнице већег обима, између тачака њиховог пресека са кружницом налазе се "празнине". Мислио је да би било логично да, ако у мањем кругу има бесконачно тачака, да сви ти продужени пречници мањег круга, секу све тачке већег круга. То Галилеј никако није могао да разуме, па је, не успевши да реши овај проблем, сматрао да само Бог може разумети бесконачност.

У свом делу „Две нове науке“, Галилеј је представио проблем који носи се данас назива Галилејевим парадоксом. У њему је навео два контрадикторна става која важе за природне бројеве.

Он је приметио да су неки природни бројеви савршени квадрати, као нпр. 1, 4, 9, 16, 25..., док неки други то нису. Самим тим, сви природни бројеви, тј. скуп савршених квадрата и осталих бројева, мора бити бројнији од скупа самих квадрата. Са друге стране, пошто је сваки природни број квадратни корен савршеног квадрата, и за сваки постоји тачно један, онда следи да је број савршених квадрата једнак броју природних бројева. То можемо приказати упаривањем одговарајућег природног броја и његовог квадрата.

1	2	3	4	5	...	n
↕	↕	↕	↕	↕		↕
1	4	9	16	25	...	n²

На основу ове контрадикције, Галилеј је закључио да релације „мање“, „веће“ или „једнако“ важе за коначне, али не и за бесконачне скупове.

Даљи кораци ка бесконачности

После Галилеја, треба поменути да је следећи корак напред учинио Стивен Сајмон (енг. Steven Simon, 1548-1620), инжењер по занимању, за кога је важило да је веома практичан, а да је све радио изузетно педантно и детаљно. Приликом доказивања да медијана троугла полови троугао на два троугла једнаке површине, у доказу је користио и да израз $\frac{1}{2^n}$ тежи 0, када n тежи бесконачности. Тврдио је да је то очигледно, без посебног доказа.

У том тренутку, било је јасно да се мора пронаћи боље решење за дефиницију бесконачности, јер, у супротном, ни теорија о ирационалним бројевима не може постојати. Такође, не може се постојати ни инфинитезимални рачун, тј. математичка анализа, једна од најважнијих грана математике.

Џон Волис (енг. John Wallis, 1616-1703), вероватно је, уз Њутна, најзначајнији енглески математичар 17.-ог века. Он је први математичар који је почео да изучава бесконачне процесе и на тај начин прешао са алгебре на анализу. Иначе, предавао је геометрију на Оксфордском универзитету. Сматра се да је он креатор идеје о бројевној оси, на којој су представљени негативни и позитивни бројеви.

Његово најзначајније дело је *Arithmetica Infinitorum*, које је објављено 1656.-е. У том делу он проширује рад Торичелија (ита. Evangelista Torricelli, 1608-1647) и Кавалијерија (Bonaventura Cavalieri 1598 – 1647) и закључује да је

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \dots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \dots}$$

Данас се овај производ назива Волисов производ. Ово бесконачно проширење за број π , иако не прво у историји, јасно илуструје бесконачни процес, без оправдања.

Године 1657.-е је симболом ∞ означио „бесконачно“, са идејом да прикаже криву без краја. Иначе, овај симбол су користили Римљани како би означили једну хиљаду, док је код Грка тај симбол означавао десет хиљада. За старе Кинезе је 10 000 такође значило „бесконачно“ и цар је називан „десет хиљада година“, што је био начин да му поданици пожеље бесконачно дуг живот.

Ипак, Волис, а потом и Њутн, Лајбниц, Бернулиј и Ојлер, као и остали научници који су се бавили инфинитезималним рачуном, тада потпуно новом категоријом у математици, нису превише трагали за доказом или теоремом о границама и бесконачности. Када би се симбол ∞ појавио у рачуну – сматран је парадоксом. Самим тим, било је и много математичара који су оспоравали њихов рад.

Упркос томе, непобитан је велики развитак те дисциплине у том периоду. У слично време, Њутн и Лајбниц су дошли до сличних законитости, користећи се сличним методама.

ИСАК ЊУТН



Исак Њутн (енгл. Isaac Newton, 1642 - 1727) био је енглески физичар, математичар, астроном, алхемичар и филозоф природе, који је данас за већину људи једна од највећих личности у историји науке.

Његова студија, Математички принципи природне филозофије (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*), објављена 1687.-е, која описује универзалну гравитацију и три закона кретања, поставила је темеље класичне (Њутнове) механике и послужила као пример за настанак и развој других модерних физичких теорија. Изводећи из овог свог система Кеплерове (нем, Johannes Kepler) законе кретања планета, он је био први који је показао да се кретања тела на Земљи и кретања небеских тела потчињавају истим физичким законима. Уједињујућа и детерминистичка моћ његових закона довела је до револуције у науци и до даљег напретка и уздизања хелиоцентризма.

У механици, Њутн је такође указао на један нови, велики, значај принципа одржања импулса и момента импулса. У оптици, он је направио први практични рефлексион (огледалски) телескоп и открио да се пропуштањем беле светлости кроз стаклену призму она разлаже у спектар

свих боја (у складу са тврђењем Роцера Бејкона (Roger Bacon, 1214.-1294.)) Њутн се снажно залагао у прилог честичне природе светлости. Он је такође формулисао емпиријски закон хлађења, проучавао брзину звука и предложио теорију о пореклу звезда. Он је такође изложио и уопштену биномску теорему, развијајући на тај начин тзв. „Њутнов метод“ за апроксимације нула функције и доприносећи проучавањима разлагања функција у редове. На крају, у математици, Њутн дели заслуге са Готфридом Лајбницом за откриће инфинитезималног рачуна.

Њутн је дошао до „методе граница“, у којој, на место Лајбникових бесконачно малих количина, у рачун улазе, као помоћне количине – „друге количине“. То су границе, којима теже количници или размере нараштаја првобитних количина, које се у проучаваној појави јављају.

Како се код ове методе има посла, не са самим нараштајима количина, већ са границама њених размера, то је онда јасно, да се нараштај сваке количине може и сме сменити ма каквом другом простијом количином, ако само количник између тога нараштаја и количине којом се он смењује, тежи јединици.

Њутнова метода граница нема оних мана, које се пребацују Лајбниковој методи, јер се код методе граница не одступа од општих и допуштених закона умовања и јер су с'тога, једначине, које се узастопно прелазе, увек тачне. Ипак, Њутнова метода граница ипак остала иза Лајбникова, па је, због тога, у свим применама инфинитезималног рачуна „метода граница“ морала уступити место Лајбниковој методи.

Њутн је покушао инфинитезимални рачун да разјасни на још један начин, који је познат под именом „метод флуksiја и флуената“. Међутим, ни тај метод није био много другачији од метода граница. На крају, остала је замерка која се с`правом може пребацити, да се ни једном од тих метода није постигло оно што се хтелo, а то је да се појам бесконачно малог избегне.

ГОТФРИД ЛАЈБНИЦ



Готфрид Лајбниц, (нем. Gottfried Wilhelm Freiherr (baron) von Leibniz, 1646 - 1716) био је немачки филозоф, математичар, проналазач, правник, историчар, дипломата и политички саветник. Дао је значајан допринос у оптици и механици. Сматра се последњим човеком енциклопедијског знања западне цивилизације.

Стекао је образовање из права и филозофије, радио је као секретар у два најпознатијим племићким породицама у Немачкој (од којих је једна током његовог службовања постала енглеска краљевска породица). Заузима подједнако значајно место како у историји филозофије тако и у историји математике. Установио је инфинитезимални рачун (калкулус, математичка анализа) независно од Њутна, као и бинарни систем који представља основу модерне рачунарске технологије. У филозофији остаће

најпознатији по оптимизму. Његов је закључак да је Бог створио најбољи од свих могућих светова.

Лајбниц је дао велики допринос у физици (оптици и механици) и технологији, као и, што ће се касније утврдити, биологији, медицини, геологији, теорији вероватноће, психологији и информатици. Писао је на латинском, француском и немачком и то о политици, праву, етици, теологији, историји и филологији. Иако је много писао, мало тога је објављено.

Према Лајбницовим белешкама до пресудног открића дошло је 11. новембра 1675. године када је по први пут применио интегрални рачун како би пронашао домен функције $y = x$. Слободно се користио математичким ентитетима називајући их инфинитезималима, сугеришући да они имају парадоксалне особине (квалитете). Према томе, не треба да чуди, што је Лајбницов инфинитезимални рачун одмах после појаве постао предмет најжешћих напада од стране оних научника, који су желели, да се и у новом рачуну очува она особина математике, којом се она с`правом поноси, а то је несумњиво не само тачност њених резултата већ и умовање којим се до решења долази. О овом рачуну изјаснио се и чувени мислилац 19-ог века Огист Конт рекавши: *"Ваша анализа, гледана са филозофске стране, има ту велику ману, што је још основана на метафизичким принципима, од којих је дух човечији тек после силних напора могао очистити све своје позитивне теорије. И на другом месту..."*

Од постанка Лајбницевог методе па све до данас њена је владавина у скоро свим применама била неограничена, апсолутна, искључива, и захваљујући њој су све општије теорије у геометрији, механици итд., достигле онај високи ступањ савршенства и лепоте, на коме се сада налазе. Принципи, на којима је Лајбниц подигао свој нови рачун, јесу: бесконачно мале количине могу се у инфинитезималним рачунима занемаривати наспрам коначних величина, а тако исто и бесконачно мале количине виших редова наспрам бесконачно малих количина нижих редова.

На основу тих принципа Лајбниц је себи допуштао, да криве линије сматра као полигоне са бесконачно великим бројем бесконачно малих пљосни, променљива кретања као бесконачни низ једнаких кретања, извршених у узастопним бесконачно кратким размацима времена итд.

Уместо да тражи једначине између првобитних количина проучаване појаве, Лајбниц тражи најпре једначине између других помоћних количина, које са првобитним количинама проучаване појаве стоје у познатој вези, па онда из тих једначина он тек изводи једначине између самих првобитних количина. Лајбницу су поменуте помоћне количине најпре бесконачно мали састојци или елементи, на које он разлаже оне количине, које се у проучаваној појави јављају. То јест, он елементе количина проучаване појаве смењује другим, простијим елементима, то јест таквим, чији се односи могу лакше сазнати. Само, ти простији, помоћни елементи морају бити стално такви, да је разлика између њих и оних, који се њима смењују, наспрам њих бесконачно мала.

Противници Лајбницовог рачуна поред замерке, коју су чинили, што се бесконачно мале количине употребљавају, а нису како ваља дефинисане, усмерили су своје ударце на претходно поменуте принципе смењивања бесконачно малих количина једних другима, и захтевали су, да се оправдају та одступања од обичних и допуштених правила размишљања, и да се на тај начин једном за свагда и изван сваке сумње истави тачност резултата постигнутих Лајбницовом методом.

Опхрван проблемима, умро је, заборављен, у Хановеру 14. новембра 1716, савладан болешћу и усред спора око свог проналаска инфинитезималног рачуна. Његов гроб обележен је тек после 50 година, односно 1766.

ПУТ КА КОНАЧНОМ ПРОНАЛАСКУ

У „Одбрани слободне мисли у математици“ (Defense of free-thinking in mathematics), 1735.-е, која је била наставак његовог претходног дела „Аналитичар“ ("The Analyst"), Беркли (George Berkeley, 1685.-1753.) разара нову анализу. „Неки лете ка пропорцијама између ничега. Неки одбијају количине јер су инфинитезималне. Други дозвољавају само коначне количине и одбацују их јер су безначајне. Други постављају метод флуksiја на ногу са методом исцрпљивања, и у њој не признају ништа ново. Други држе да могу приказати ствари које су неразумљиве. Неки би доказали алгоритам флуksiја по „reductio ad absurdum“; други „a priori“. Неки држе да су непостојана увећања реалне количине, неки да су ништа, неки да су границе. Колико људи, толико ћуди. На крају неколико, признаје да се на ове примедбе не може одговорити“.

Питање бесконачности је коначно дефинисано, тек са појавом Фуријеових редова и то тек пошто се дошло до питања када они конвергирају. Ово једноставно питање је имало веома значајан утицај на развој анализе и приморало научнике на прецизност и строгост на овој теми, прво за идеју непрекидности, потом за дефиницију интеграла, и коначно, за појам скупа. Овај пут је довео математичаре „очи у очи“ са самом бесконачношћу. То је једна од занимљивијих развојних нити у историји математике, јер је релативно једноставан проблем водио ка креацији теорије скупова и много строжијој математичкој анализи. Наводимо неколико корака који су томе претходили.

- 1817- Болцано (Bernard Bolzano) је покушао да докаже оно што се данас назива „Теорема средње вредности“, али је заустављен јер ни једна теорија о реалним бројевима није постојала. Њему је била неопходна теорема да сваки ограничен скуп има бар горњу границу.

- 1821 - Коши (Augustin Louis Cauchy) даје скоро модерну дефиницију граница и непрекидности, мада он користи униформну непрекидност када

претпоставља „тачка по тачка“ непрекидност. Он је дефинисао конвергенцију и дивергенцију реда, и произвео оно шта је сада познат као Кошијев критеријум конвергенције

1823 - Коши даје дефиницију "интегрални" у смислу граница сума правоугаоника. То чини употребу Фуријеових интеграла строжијом.

- 1829 - Дирихле (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet) одређује потребни услов да би функцији одговарао конвергентан Фуријеов ред, који каже да функција мора бити монотона са коначним број прекида.

- 1831 - Гаус (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777 - 1855) приговорио је на коришћење бесконачности у математици, речима, "Ја протестујем против употребе бесконачне количине као стварног ентитета, то никада није дозвољено у математици. „Бесконачно“ је само начин говора, у коме неко правилно говори о границама, којим одређени односи могу прићи докле желимо, док је другима дозвољено да се увећавају без граница".

- 1850 - Карл Вајерштрас (нем. Karl Theodor Wilhelm Weierstraß) даје модерну дефиницију непрекидности, открива и примењује униформну конвергенцију и објављује теорију ирационалних бројева (1860) као ред рационалних (нпр.

$$\sqrt{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) / n!$$

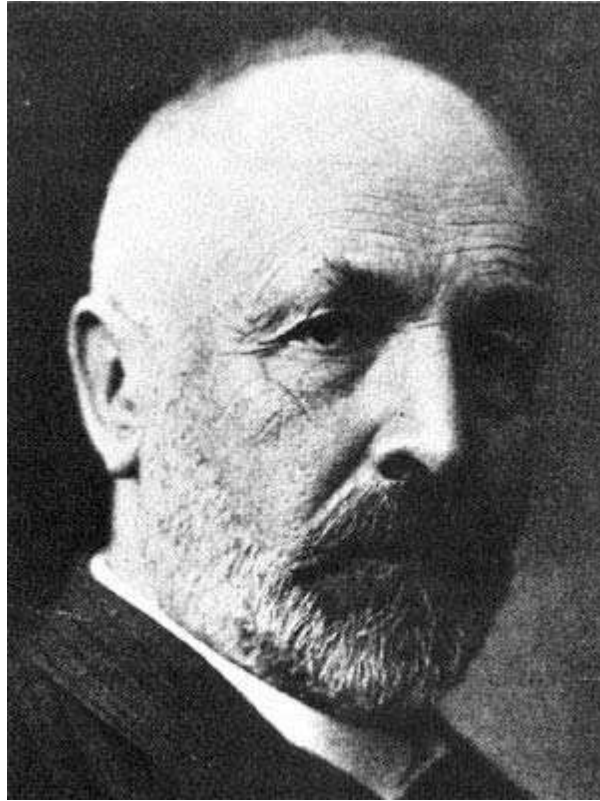
Пре тога, математичари су, ако су уопште дефинисали ирационалне бројеве, чинили то као да су границе рационалних. Користећи метод кондензације сингуларитета, Вајерштрас производи непрекидну функцију која нигде није диференцијабилна. Ово је поразило деценије истраживање утрошених како би се доказало да све непрекидне функције морају бити диференцијабилне, осим можда у скупу изузетних тачака.

- 1854 - Риман (нем, Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866), Дирихлеов студент, даје општију дефиницију интеграла, Риманов интеграл, за који су многи мислили да је најопштији могући. Он је дао пример

функције са безброј прекида која има свој интеграл. Риман је указао на много проблема везаних за Фуријеове редове, укључујући и оне, који су довели до проналаска теорије скупова.

- 1858 - Дедекинд (Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831 - 1916) даје теорију ирационалних бројева на основу пресека, који се сада се зову Дедекиндови пресеци.

ГЕОРГ КАНТОР



Георг Фердинанд Лудвиг Филипп Кантор (3. март 1845 – 6. јануар 1918), велики математичар, један од највећих математичких умова, рођен је у Санкт Петербургу. До његовог открића да теорија скупова има нетривијалан садржај, у математици су постојали само коначни скупови и „бесконачно“, које је сматрано филозофском темом, још од Аристотела. Доказао је да постоји бесконачно много величина за бесконачне скупове. Његова теорија скупова је постала фундаментална теорија у модерној математици, која се користи у свим традиционалним математичким дисциплинама (алгебра, анализа, топологија).

Ипак, нико није могао наслутити како ће излети његов животни пут када је био дете. Његов отац, Георг Валдемар Кантор, рођен је у Данској, а

важио је за успешног трговца, који се бавио велепродајом и радом на берзи у тадашњој престоници царске Русије. И он, као и Георгова мајка, Марија Ана Бом, родом из Русије, гајили су велику љубав ка уметности. Његов деда је био познати музичар, солиста у Руском царском оркестру. Као најстарије дете од шесторо, Георг је као дете учио да свира виолину и веома брзо постао толико успешан да су му многи прорицали музичку каријеру. Имао је приватне учитеље, док је паралелно, ишао у основну школу у свом родном граду. Ипак, када се његов отац разболео, преселио се са породицом у Немачку, 1865, у потрази за нешто топлијом климом. Најпре су живели у Висбадену, а потом се преселили у Франкфурт. Кантор је 1960. године завршио реалну гимназију у Дармштату. Истицао се талентом у математици, а посебно тригонометрији. Његов отац је желео да Георг постане грађевински инжињер, па га је и послао на студије у Цирих. Ипак, после две године и сталних молби Кантора да изучава математику, отац је пристао, а Георг био пресрећан. Већ следеће године, његов отац је умро. Георг се 1863.-е сели у Берлин и наставља студије на познатом универзитету, слушајући предавања Карла Вајерштраса (нем. Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815.-1897.), Ернста Кумера (Ernst Eduard Kummer, 1810.-1893.) и Леополда Кронекера (Leopold Kronecker, 1823.-1891.). Од када се преселио у Берлин, Кантор је био и председник математичког удружења, а био је и члан мале групе математичара, чији су се чланови састајали сваке недеље у кући вина.

Летњи семестар 1866.-е је провео у Гетингену, тада, а и касније, веома значајном центру за математичка истраживања. Годину дана касније, вратио у се Берлин и одбранио своју докторску тезу на тему теорије бројева: "De aequationibus secundi gradus indeterminatis".

После одбране доктората, 1867.-е, Кантор је предавао у женској школи у Берлину. У то време је радио на унапређивању рада, такође у области теорије бројева, па је, пошто је и то успешно завршио, добио запослење на универзитету у Халеу.

Пошто је кратко предавао у берлинској школи за девојчице, Кантор је преузео позицију на Универзитету у Халеу, где је провео читав своју каријеру. Кантор је своја истраживања преусмерио ка анализи, под утицајем Хајнеа, његовог старијег колеге, који га је изазвао да докаже, тада још увек

нерешени проблем јединственог представљања функције тригонометријским интегралом, који до тада нису успели ни сам Хајне (*Heinrich Eduard Heine*, 1821-1881), али ни Дирихле, Липшиц, Риман, и други. Кантор је у томе успео и објавио рад 1870.-е године.

Кантор је 1873.-е доказао да је скуп рационалних бројева пребројив, али је са доказом да скуп реалних није - имао много више проблема. Ипак, и у томе је успео и објавио рад наредне године. У том раду се по први пут може видети идеја о " $1-1$ " пресликавању, али, само имплицитно.

Георг је 1874. оженио Вали Гутман. Имали су шесторо деце, а последњи син, Рудолф, рођен је 1886. Кантор је био у стању да издржава бројну породицу, упркос скромној академској плати, захваљујући позамашном наслеђу свог оца. Током свог меденог месеца у Харц планинама, на северу Немачке, Кантор је провео много времена у разговорима са математичарем Ричардом Дедекиндом, кога је упознао две године раније на одмору Швајцарској. Међу њима се развило и пријатељство, као и богата математичка кореспонденција. Због великог броја противника његовог рада, ово пријатељство је Кантору изузетно много значило. Три године касније доказао је и да постоји " $1-1$ " пресликавање $[0,1]$ и тачака у n -димензионом простору. У писму Дедекинду је Кантор изразио и изненађење сопственим открићем: "Видим, али не верујем!"

Наравно, ово откриће је имало велики утицај на геометрију. Кантор је главни рад предао "*Crelle Journal*"-у, али није одмах објављен, због великих сумњи Кронекера, већ је то учињено, тек после интервенције Дедекинда. После овог догађаја, Георг никада више није предао рад поменутом магазину. Успео је да докаже да је скуп реалних бројева „бројнији“ од скупа природних, а тиме доказао, по први пут, да постоје бесконачни скупови различитих величина. Тако је поделио бесконачне скупове на пребројиве и непребројиве. У поменутом раду концепт " $1-1$ " пресликавања је сасвим јасан, помињу се непребројиви скупови који су у " $1-1$ " кореспонденцији са скупом природних бројева. Кантор изучава скупове једнаких кардиналних бројева, тј. скупове који су у " $1-1$ " кореспонденцији један са другим.

У наредних 5 година, Кантор је објавио серију од 6 радова, у којима је објаснио увод у теорију скупова.

Кантор је унапређен у ванредног професора 1872, а постао је редовни професор 1879, на Хајнеову препоруку. Достигао је ово звање већ у својој 34.-ој години, али, иако је то већ било велико достигнуће, он је желео место на неком од престижнијих и познатијих универзитета, а посебно у Берлину, тада водећем немачком универзитету. Међутим, његов научни рад је био толико другачији од онога на шта су људи у то време били спремни, па је наишао на превише противника да би то било могуће. Ирационални бројеви и његове нелогичне бесконачности, многи научници су видели као претњу да се математика учини недовољно прецизном и сигурном. Неретко је нападан и лично. Нпр. Анри Поанкаре (фра. - Jules Henri Poincaré, 1854 - 1912) је изјавио да је Канторова математика - "болест, од које ће се математика једног дана опоравити". Кронекер, тада водећи професор у Берлину, до своје смрти 1891, није желео Кантора за колегу, и чак га видео као „лош утицај за омладину“, јер је преносио своје математичке идеје студентима. Као афирмисана личност унутар математичке заједнице и Канторов бивши професор, изразио је фундаментално неслагање са његовим радом. Зато Кантор никада није радио на неком већем и познатијем универзитету. Судбина многих генија је да не буду схваћени за животног доба, па ни Кантор није био изузетак.

Едуард Хајне, умро је 1881, па је тако остало упражњено место на универзитету. Универзитет је, по Канторовом предлозима, место понудио редом, Дедекинду, Веберу (Heinrich Martin Weber) и Мартенсу (Franz Mertens), али су сви одбили то место. Кантор је био доста погођен чињеницом да његов пријатељ и најближи сарадник, Ричард Дедекинд није желео. На то место је на крају постављен Фридрих Вангерин (нем, Friedrich Vangerin), али он никада није био близак Кантору. Тада је математичка преписка између Кантора и Дедекинда била прекинута.

Ретки су били математички часописи у којима је Кантору било дозвољено да објављује своје радове, па је, 1882.-е, Кантор започео још једну важну преписку са Митаг-Лефлером, шведским математичарем. Убрзо је почео да објављује научне радове у његовом часопису „Acta Mathematica”.

Ипак, године непријатељских гестова су на Кантора оставиле велике последице, па је код њега, 1884.-е забележен први наступ депресије, која ће га прогонити до краја живота. Кантор је 1884.-е Митаг-Лефлеру послао 52 писма и у сваком је поменут Кронекер. У преписци су биле уочљиве лоше последице тог стања на Гергово самопоуздање. Годину дана касније, чак и Митаг-Лефлер је затражио од Кантора да повуче један од својих радова, због „философске природе“, уз реченицу да је за такав рад 100 година превише рано да би био објављен. Кантор је поново повређен, а на то је одговорио да је читав век, превише да чека.

Ипак, знао је да ће своје критичаре успети да ућутка, само уколико у потпуности докаже своје теорије. Кантор је био први који је успео да формулише оно што је касније постало познато као хипотеза континуума: не постоји скуп чија је кардиналност већа него код скупа природних и мања него код скупа реалних бројева (тј. кардиналност реалних је тачно Алеф-један, а не мање или једнако Алеф-један). Кантор је веровао да је хипотеза континуума истинита и био му је потребан њен доказ. У тај доказ је уложио невероватно велики напор. Временом се понашао све чудније, био је све изолованији, било је очигледно да га болест мења. Дешавало се да мисли да је доказао теорију једног дана, а потом би следећег дана доказао супротно, али би потом брзо проналазио грешку. Напади на њега, што научни, што лични, настављени су, па се поново десило да је његов рад повучен из штампе, у тренутку када је достигао ниво доказа. У том периоду, пожелео је да престане да предаје математику и уместо тога се бави филозофијом.

На конгресу математичара у Цириху, коначно је добио признања неких математичара, нпр. Хурвица (Adolf Hurwitz) или Жака Адамара (Jacques Salomon Hadamard). На конгресу је срео и Дедекинда, са којим је обновио пријатељство. Међутим, до тог конгреса, Кантор је већ открио прве парадоксе теорије скупова. Георг се у наредне 2 године борио са њима, покушавао да дође до решења уз помоћ Хилберта и Дедекинда, али га је психичка болест приморала да престане са писањем, 1899.-е.

Кантор је и поред свих проблема, још један значајно допринео математици. Постао је председник Немачког удружења математичара 1890.-е, упркос противљењу Кронекера и на првом састанку, представио његов

Историја бесконачности у математици – опасно знање

чувену дијагоналну теорему. Међутим, он никада није поново достигао висок ниво својих изузетних радова 1874-1884.

Кад год је Кантор падао у периоде депресије, тако се удаљавао од математике и прилазио филозофији. Додатне тешкоће за његово стање су биле смрт његове мајке, 1896.-е, као и његовог млађег брата, 1899.-е. Убрзо је престао са предавањем, а само неколико месеци касније, умро му је најмлађи син. Наредни период је провео, борећи се са болешћу, повремено је био смештан и у санаторијум. Периодично би се вратио предавању, али би убрзо поново клонуо.

По повратку из болнице, 1905.-е, написао је рад религијске тематике, питао се шта се догађа када умremo, зашто смо овде, зашто смо рођени? Кантор је 1911.-е био један од почасних страних гостију, на прослави 500 година универзитета Сент Ендрјуз у Шкотској. Кантор се надао да ће упознати Бертанда Расела, који се у својој "Principia Mathematica" више пута позивао на Канторов рад, али до тог сусрета ипак није дошло. Следеће године тај универзитет је Кантору доделио почасни докторат, али, због болести, Кантор није могао лично да прими признање.

Георг Кантор, пензионисао се 1913.-е и живео сиромашно и усамљено. Умро је 1918.-е, а последњих годину дана је провео у санаторијуму.

ЛУДВИГ БОЛЦМАН



Лудвиг Болцман (Ludwig Eduard Boltzmann, 1844 – 1906) је био Аустријски физичар познат по својим доприносима статистичкој механици и статистичкој термодинамици. Био је први научник који се залагао за атомску теорему, у време када је то било готово незамисливо, па је и он, као Кантор, имао велики број противника.

Рођен је у Бечу, тада престоници Аустро-Угарске царевине. Имао је приватног учитеља, па је на тај начин стекао основно образовање. Средњу школу је похађао у Линцу. Већ у својој петнаестој години је остао без оца.

Студирао је физику у Бечу, почев од 1863.-е и за само 4 године постао предавач. После доктората радио је две године као асистент Јожефа Стефана, који га је упознао са Максвеловим (James Clerk Maxwell, 1831. - 1879.) радом.

Као што су Канторове идеје биле револуционарне у математици, тако је и Болцман имао револуционарне идеје у физици, па је и подједнако оспораван. Његове идеје су уздрмале темеље света који је желео потпуну извесност, сигурност, савршену логичност, на ширем пољу од математике и физике. Може се рећи да су и он и Кантор размишљали много испред свог времена.

Болцман је успоставио везу између природе ентропије и вероватноће стања атома у систему. У то време, класична физика је почивала на идејама да је све одређено божјим законима, да је све предвидиво, да све има своје место, да ће једног дана људи постићи потпуно знање, да ће умети да реше све проблеме, итд... Али, иако би таква предвидост могла да буде пожељна из животних разлога, свет термодинамике једноставно не функционише тако. Његов рад је показао зашто не постоји ниједан у потпуности савршен систем, зашто мора увек да постоји неки "неред", а то је био потпуно револуционаран поглед на "време" у физици. Време се креће искључиво напред, идеја ентропије му не дозвољава да иде у назад, па не постоје реверзибилни процеси. Такође, ентропија се повећава са временом. Дакле, што је време ближе бесконачности, то је и ентропија.

С'обзиром на то, није ни чудо што су му се сви супротстављали, посебно ако се те идеје примене не само на физику, већ на живот уопште. Остали научници су посматрали ентропију као "квар", а са било каквим кваром, ништа не траје заувек.

Много замерки је Болцману стигло на рачун његовог виђења другог закона термодинамике или „закона нереди“. Користећи нека Максвелова учења, Болцман је извео експеримент са молекулама гаса који су се сударали као билијарске кугле у кутији и установио да је случај у којима ће групе молекула имати исту брзину и смер - најмање вероватан и да је са протеклим временом такав случај све мање вероватан. Као последица тога, наметнуо се закључак да стање неуређености има највећу вероватноћу, а стање

термодинамичке уређености (када се честице крећу у истом смеру и истом брзином – бесконачно невероватно).

Из овога је и проистекла његова формула која даје нову формулацију ентропије и гласи:

$$S = k \ln w$$

где је k -Болцманова константа а w -термодинамичка вероватноћа..

Микростање система нпр. неког гаса би била “замрзнута” слика где би видели за дати тренутак положај и брзину сваког молекула.

Из овога следи закључак да је ентропија мера хаоса система и да систем препуштен сам себи тежи стању највећег хаоса што је још једна дефиниција другог закона термодинамике.

Болцман је желео да покаже да правила у нашем свету нису дата од стране Бога и у потпуности савршеног, одређеног, бескрајног Универзума, већ да све почива на нечему што се заснива на шансама, вероватноћи - случајног сударања атома. Болцман је тврдио да се цео Универзум састоји од бесконачног броја малих честица и да ће се, једног дана, после бесконачно много кретања, све оне вратити у почетни положај, баш као и шпил поређаних карата, који ће, ако га промешамо огроман броја пута, по закону вероватноће, сигурно у једном тренутку доћи у почетно стање. Тиме се супротстављао, у то време, опште прихваћеној идеји, па су многи научници, много познатији и утицајнији, посветили много времена како би се супротставили његовом раду. Људи су до тада били навикнути да је све сигурно и извесно. Његова генијалност се баш и налази баш у томе, што је успео да размишља ван дотадашњих оквира, да прихвати вероватноћу и несигурност. Тако је могао да почне да схвата невероватне природне појаве као што су ватра, вода, живот... Међутим, самим тим што његово решење почива на вероватноћи, оно нарушава савршену извесност, па тада, нико није желео да га чује.

Због сталних критика и свог снажног уверења, Болцман је живот посветио доказивању својих идеја. Није се слагао са многим колегама на Бечком универзитету, а посебно са Ернстом Махом (нем, Ernst Mach, 1838 - 1916), који је постао професор филозофије и историје наука 1895.-е. Под притиском, он одлази на универзитет у Лајпцигу 1900.-е, на позив Вилхелма

Оствалда (Friedrich Wilhelm Ostwald). Пошто је Мах отишао у пензију, Болцман се враћа у Беч 1902.-е, а следеће године оснива друштво математичара Аустрије.

Он се у Бечу није бавио само предавањем физике, већ и филозофије. Иако су за његова предавања биле резервисане највеће дворане, била су изузетно посећена, па су људи често стајали на степеницама. Као последица великог успеха стигао је и позив на пријем у царску палату.

Ипак, његово здравствено стање је било све лошије, а његове промене расположења све чешће. Тако је, Лудвиг Болцман, 1906.-е, током одмора у Италији, одузео себи живот, обесивши се, током још једног наступа депресије.

За његовог живота, само су се Максвел из Шкотске и Гибс (Josiah Willard Gibbs, 1839 - 1903) из Сједињених Америчких држава, јавно слагали са његовом идејом о реалности атома и молекула, док су му противници били готово сви остали физичари. Само неколико година после његове смрти, Перин (фра, Jean Baptiste Perrin) је изучавајући колоидне растворе, потврдио вредности Авогадровог броја и Болцманове константе и уверио свет да мале честице заиста постоје.

Једначина $S = k \log_e W$ је записана на његовом надгробном споменику. Њу је први пут изнео као логаритамску везу између ентропије и вероватноће у својој кинетичкој теорији гасова. У њој k представља Болцманову константу која је једнака $k = 1.3806505(24) \times 10^{-23}$ J/K.

Међутим, математичари нове генерације су размишљали, како, када би успели да реше све проблеме и парадоксе, које су поразиле Кантора и Болцмана, математика би поново постала "савршена". Покушали су свим силама да поврате потпуну предвидивост у математику, написали три тома "Principia Mathematica"-е, али, иако је неко време деловало да ће те идеје бити одржаве, све је коначно разрешио - Курт Гедел.

КУРТ ГЕДЕЛ



Курт Гедел (нем, Kurt Friedrich Gödel) рођен је 1906.-е, у Брну, које је тада припадало Аустро-Угарској царевини. Био је аустријски математичар, логичар и филозоф. Његов утицај на научну и филозофску мисао 20.-ог века је непроцењив. Сматра се једним од највећих логичара свих времена.

Са 18 година, преселио се у Беч код свог брата, а до тог времена је већ савладао математику на универзитетском нивоу. Студирао је физику на Бечком универзитету, али је присуствовао и предавањима из математике и филозофије. У том периоду је прихватио концепт математичког реализма. Читао је дела Канта и учествовао у раду „Бечког круга“, друштва признатих бечких математичара. Ипак, пошто је похађао семинар Морица Шлика

(Moritz Schlick, 1882 - 1936) на коме је изучавао књигу Бертранда Расела (Bertrand Arthur William Russell, 1872 - 1970) „Увод у филозофију математике“, заинтересовао се за математичку логику. Касније је изјавио да је математичка логика наука изнад свих осталих и да садржи идеје и принципе на којима се темеље све друге науке.

Ипак, присуство на предавању Дејвида Хилберта (David Hilbert, 1862 - 1943) у Болоњи, о комплетности и конзистентности математичких система је практично одредило Геделов животни пут. Хилберт и Акерман (Wilhelm Friedrich Ackermann) су 1928.-е објавили књигу под именом „Принципи математичке логике“, као увод логици првог реда, у којој се појављује проблем комплетности, тј. да ли су аксиоме формалног система довољне како би само помоћу њих могли да добијемо сваки тачан израз који је тачан за сваки модел система.

Гедел је управо ту тему узео за свој докторат, а рад је успешно завршио 1929.-е године, када је имао само 23 године. Као вид признања, Бечка академија наука је објавила његов рад. Његова идеја је била, као и Хилбертова, да математици врати "савршенство". Као потпуно изненађење, за њега је дошло сазнање да је комплетност аритметике - неостварива.

Једног дана на састанку "Бечког круга", у познатом ресторану у престоници Аустрије, при самом крају састанка, у касно лето, 1931.-е, двојици колега је поменуо идеју "теорије некомплетности" на којој је радио и притом им рекао да је доказао да су сви системи математичке логике ограничени и да ће увек постојати ствари које, иако истините, неће бити доказиве. Без обзира на количину података - неће бити могуће доказати неке истините ствари. То би значило да је велики ренесансни сан - како ће једног дана математика и логика доћи до коначног нивоа, када ће људи моћи да имају апсолутно сво знање - немогућ. Међутим, то сазнање је било толико далеко од свега на чему су други научници радили, да једноставно нису могли да га схвате. Само дан после тога, не знајући за тај састанак, Хилберт је на свом великом предавању, аплаузима испраћен пошто је изјавио: "Ми морамо да знамо - ми ћемо знати!". Иронија је била да је Гедел већ доказао да постоје неке ствари које никада нећемо знати.

Дакле, 1931.-е, Гедел је, у Бечу, објавио своју теорему некомплетности, у којој је утврдио да за сваки израчунљиви систем аксиома који је довољно снажан да опише аритметику система природних бројева, важи:

1. Ако је систем конзистентан, онда не може бити комплетан.
2. Конзистентност аксиома не може бити доказана у самом систему.

Ова теорема је окончала дуготрајни рад великог броја математичара на проналажењу скупа аксиома који би били довољни за целу математику. Теорема некомплетности је такође сугерисала да сви математички проблеми нису решиви.

Наравно, научници су после доказа које је Гедел објавио, били незадовољни, неки од њих и љути, те једноставно нису могли да се помире са том чињеницом. Његове идеје, произашле директно из Канторовог рада, показале су да парадокси који су се при том раду појавили, неће бити разрешени, као и да ће се појавити нови.

Гедел, који се се придружио Хилберту са жељом да му помогне да разреши парадоксе, учинио је баш супротно. Међутим, то што је био у праву, није га учинило популарним. Као и Кантор и Болцман, Гедел је такође осетио лоше утицаје свог открића на здравље.

У Немачкој је 1933.-е на власт дошао Хитлер, па се у наредним годинама његов утицај ширио и у Аустрији, па и међу бечким математичарима. Један од Геделових колега је убијен од стране нациста, а он је од тада имао неколико напада параноје, па је неколико месеци је провео у санаторијуму.

Пошто се привремено опоравио, Гедел одлучује да отпутује у Америку. Тамо упознаје Алберта Ајнштајна, са којим постаје добар пријатељ. У том периоду је одржао неколико предавања на познатом универзитету у Принстону.

По повратку у Беч, Гедел је био у све лошијој здравственој ситуацији, а на улицама његовог града, могао је да види на делу демагогију једног од људи који су нудили неку врсту потпуне предвидивости и сигурности. Одузета му је претходна диплома, а сматран је и непријатељем, због пријатеља Јевреја, који су били чланови „Бечког круга“. Нацисти су вршили

свој терор на сваком кораку, па је и он сам нападнут од стране неколицине у свом граду. Одлучио је да се са женом одсели у Принстон, 1939.-е године. Да би избегли проблеме преласка Атлантика, путовали су до преко целе Европе и Азије, транс-сибирском железницом стигли до Тихог океана, а потом, из Јапана прелетели до Сан Франциска. По доласку у Америку, одмах је добио и запослење на универзитету.

Од тада, често је сарађивао са Ајнштајном, а у наредним годинама се све више бавио филозофијом и физиком.

Ипак, са временом, његови здравствени проблеми су се наставили. Од како је завршио теорију некомплетности, сву снагу је усмерио на доказ хипотезе континуума, великом нерешеном проблему математике тог времена, па је, баш као и Кантор, завршио је у санаторијуму. И данас се у музејима чувају његове свеске, у којима се свуда види савршена уредност, прецизност, логика..., у свим, осим у оној која се бави управо хипотезом континуума. Та свеска је препуна прецртаних израза.

Његова болест је узимала све више маха, изузетно се плашио смрти тровањем, па је прихватао да једе искључиво храну коју би припремила његова супруга. Када је његова жена смештена у болницу на шест месеци због болести, Курт Гедел је престао да се храни. У медицинском извештају као узрок његове смрти се наводи неухрањеност, проузрокована менталном болешћу (у тренутку када је преминуо имао је само 30 килограма).

АЛАН ТЈУРИНГ



Алан Тјуринг (енг, Alan Mathison Turing, 1912-1954), био је енглески математичар, логичар, криптоаналитичар и програмер. Значајно је утицао на развој рачунарства, формализујући концепт алгоритама и израчунавања креирајући Тјурингову машину. Она је касније је играла значајну улогу у развоју модерног рачунара. Познат је и по томе што је за време другог светског рата одиграо значајну улогу, пошто је успео да дешифрује поруке познате немачке машине „Енигма“.

Рођен је у Лондону, а још као дете је био принуђен да често буде без родитеља, јер су, због пословних обавеза, често путовали на релацији Енглеска – Индија. Међутим, то му није сметало да покаже потенцијал генија у најранијем добу. У основну школу кренуо је са 6 година, а пошто су многи његови наставници приметили велики потенцијал, са 14 година је уписао и

средњу школу у Шерборну („Sherborne school”), веома познату по раду са талентованим ученицима. На први дан његове средње школе, 1926.-е, у Енглеској је почео генерални штрајк, али је он толико желео да присуствује првим предавањима, да је бициклом, сам, прешао око 100 километара у једном смеру.

Студирао је математику на Кембриџу, а дипломирао је већ са 22 године.

Тјуринг је обратио пажњу на проблем решивости, који је 1928.-е представио Хилберт. Он је преформулисао Геделов закључак о границама доказивања и израчунљивости, заменивши његов, универзални, формални аритметички језик практичнијим, користећи Тјурингову машину. Његова жеља је била само да учини Геделову идеју још јаснијом и једноставнијом, јер је Геделово размишљање за већину људи било апстрактно. Како би то и учинио, искористио је компјутер, уређај који је тек почео да мења свет. Тјуринг је на теорију некомплетности гледао на следећи начин: компјутери су логичке машине, а по теорији, постоје проблеми који никада неће бити решени, то би значило да, када би компјутеру били задати одређени задаци, они никада не би били решени, тј. они никада не би стали.

Доказао је да је сваки математички проблем израчунљив, само уколико се може представити логаритмом. Али, оно што је још важније, потврдио је Геделов рад, доказавши да „Halting problem” (проблем заустављања), није решив. И, он је показао још и више, да је немогуће рећи унапред који су то проблеми. То је озбиљан проблем, јер онда не можемо знати да ли је неки проблем само веома компликован и можда постоји решење, или једноставно неки проблем никада у будућности не може бити решен.

Од тог момента, постигао је све саме успехе на научном пољу, а само један од њих је можда и пресудно утицао на исход другог светског рата, када је успешно дешифровао поруке немачке, машине „Енигма“.

Ипак, и његов живот има трагичан завршетак. Био је хомосексуалац, па је 1952.-е био оптужен за непристојно јавно понашање, сумњало се да је малтретирао малолетне дечаке, те је од тог тренутка његов третман драстично погоршан. Осуђен је, а он је, уместо казне затвора, изабрао хемијску кастрацију, хормонску терапију, која је требало да му снизи либидо.

Историја бесконачности у математици – опасно знање

Упркос томе, њему је забрањен приступ истраживачком центру у коме је постигао највеће успехе, те је био онемогућен да даље развија свој рад. Само две године касније, извршио је самоубиство, отровавши се цијанидом.

Британска влада је постхумно, 2009. године, донела одлуку о извињењу Алану Тјурингу, због осуде за хомосексуалност.

ЗАКЉУЧАК

У историји човечанства, мали број људи се истински ухватио у коштац са појмом бесконачности. Такав подухват је захтевао истинску одлучност и храброст, као и потпуну преданост. На неки начин, животи ових људи били су налик на херојско путовање славног витеза који креће у авантуру, који на путу ка свом циљу мора да савлада троглаву аждају. И баш као витезови округлог стола који су у потрази за Светим гралом дошли до зачаране шуме, нашли су се у ситуацији какву вероватно нису очекивали на почетку похода, тј. да уколико начине још један корак, њихов живот никада неће бити исти. Тежили су да дођу до сазнања о оној тачки у којој време и простор почињу, односно престају да важе. И када су дошли до ивице велике спознаје, више нису могли да се врате свом животу, проблем који су опсесивно желели да реше, све их је дубље увлачио, као црна рупа... Притом су само откривали нове проблеме, просторе, кодирана и нерешива поља...

Људи имају само 5 чула, ограничених у малом распону, тако да, иако је можда некада деловало да ће људи стићи до савршеног и потпуног знања, сада знамо да то једноставно није могуће. Они су желели да пређу до тада постављене границе, кренули су испред свог времена и постали свесни онога што је и данас, огромној већини људи, једноставно несхватљиво.

Вероватно највећи умови икада рођени на „трећем камену од Сунца“, тешко су поднели спознају да никада неће успети да реше све и да је то, заиста немогуће.

У мору задатака које живот непрестано поставља, жеља за разоткривањем бесконачног, донела је највише, повезала науку са сваком сфером живота, доказавши да наши животи, у овој релативној бесконачности, заслужују пуну пажњу и присутност у сваком моменту.

ЛИТЕРАТУРА

1. „The History of infinity”, Donnald Allen, Department of Mathematics, Texas A&M University
2. “A History of Mathematics”, Florian Cajori, MacMillan and co. New York, 1894.
3. “Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite”, Joseph Dauben, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1979.
4. Cantor’s *Grundlagen* and the Paradoxes of Set theory, W.W. Tait,
5. J.Hintikka: *The philosophy of mathematics*, Oxford University Press, London 1969.
6. Stefan Barker: *The philosophy of mathemtics*, 1973.

7. The History of Mathematics: An Introduction, 6th Edition,
Burton, McGraw – Hill
8. www.wikipedia.org