Математички факултет

Универзитет у Београду

Ланци Маркова са коначно много стања

Студент: Мина Фимић 1068/2011

Ментор: др. Јован Вукмировић

Садржај

Увод

У пракси су веома чести процеси чије се понашање не може тачно предвидети, али се може рећи нешто о вероватноћама њихових исхода. Конкретно, могуће је посматрати неку карактеристику физичког система која је по својој природи случајна, у току неког одређеног временског периода. Као модел за таква посматрања се користе случајни процеси.

Постоје различите врсте процеса у природи, у смислу правилности које се могу уочити у њиховом току. Многе појаве и процеси поседују извесну инерцију, и један од адекватнијих модела за такве процесе би био онај чији закон расподеле зависи од вредности процеса у садашњем моменту, а не зависи од тога које су вредности процеса биле у прошлости. Једну класу таквих процеса први је изучавао руски математичар А.А. Марков (1856-1922), и по њему су они и добили назив.

Занимљивост је да је А.А.Марков дошао на идеју Марковљевих процеса тако што је проучавао смењивање самогласника и сугласника у Пушкиновој поеми Оњегин.

Процеси Маркова имају велику примену у разним наукама. Користе се нпр. за моделирање процеса у биологији, за предвиђање раста неке популације, затим у генетици за моделирање преношења гена кроз генерације. Имају примену и у медицини,нпр. за проучавање дејства терапије на болеснике, исто тако и за предвиђање ширења тешких болести ради ефикасније терапије. Поред овога срећу се и у економији, телекомуникацијама, социологији итд.

Тема овог рада је једна врста Марковских процеса, тзв. ланци Маркова.

Први део рада обухвата основне појмове и описе карактеристичних типова случајних процеса. Следи уопштени део о Марковским процесима, где су описане врсте ових процеса према типу параметарског скупа и скупа стања. Након тога се у наредним поглављима детаљније описују својства три карактеристична типа ланаца Маркова: апсорбујућег, регуларног и ергодичног.

У случајевима када ланац има велики скуп стања могуће је поједноставити анализу тако што се од великог ланца формира мањи, са мањим бројем стања. Услови који треба да буду испуњени да би то било могуће и својства тог новог ланца су описани у делу Комбиновање стања. Описан је и обрнути поступак, формирање великог ланца од малог, изведеног у циљу добијања додатних информација.

На крају је део са примерима и применама, где је између осталог описан класичан пример ланаца Маркова-случајно лутање. Поред тога је описано моделирање једне реалне ситуације, тзв. отворени модел Леонтифа. Последњи део у примерима обухвата симулације неких ланаца.

Уводни појмови и теореме

У овом делу су описани појмови и теореме који ће бити коришћени у раду.

Ојлерова сума

Низ $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ је сумабилан у смислу Ојлерове суме уколико важи

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n}{i}k^{n-i}(1-k)^i s_i = S$$

где је $0 < k < 1$.

Цезаро-сумабилни редови

За низ $\{s_n\}$ се каже да је Цезаро-сумабилан, са сумом $S \in R$ ако средње вредности његових парцијалних сума теже ка S, тј.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = S$$

Борелови скупови

Нека је Ω скуп исхода случајног експеримента. Нека је $\mathcal{A}$ фамилија подскупова скупа Ω.За фамилију $\mathcal{A}$ ћемо рећи да је σ-алгебра догађаја ако задовољава следећа својства:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $\mathrm{A} \in \mathcal{A}\ \ \overline{\mathrm{A}} \in \mathcal{A}$
3. $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots . \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Борелова σ-алгебра $\mathcal{B}$ је минимална σ-алгебра која садржи $\mathcal{K}$, где је $\mathcal{K} = \{(a,b], a < b, a, b \in R\}$. Елементи скупа $\mathcal{B}$ се називају Борелови скупови.

Релације

Нека је R релација између два елемента неког скупа U. Обележаваће се са aRb, да је a у релацији R са b.

Релација може имати својство:

1. рефлексивности-ако xRx, $\forall x \in U$
2. симетричности-уколико из xRy следи $yRx, \forall x, y \in U$
3. транзитивности-ако из xRy и yRz следи xRz, $\forall x, y, z \in U$.

Релација која задовољава сва три својства се назива релација еквиваленције. Релација еквиваленције формира једну партицију скупа и сваки елемент те партиције се назива класа еквиваленције.

За релацију која задовољава прво и треће својство кажемо да је релација слабог уређења.

Ако је Т релација слабог уређења, онда је $xTy \land yTx$ релација еквиваленције одређена њоме. Уколико је релација еквиваленције коју одређује Т- релација идентитета $(x = y)$ онда се за Т каже да је релација парцијалног уређења.

Елемент $a \in U$ се назива минимални елемент ако из aTx следи xTa. Ако је минимални елемент јединствен назива се минимум.

Једна од примена релација поретка је у мрежама комуникације. Нека су r елемената повезана комплексном мрежом. Сваки елемент може да пренесе поруку неком подскупу елемената. Ово се назива директни контакт. Порука може бити послата даље и тада је то индиректни контакт. Претпоставља се да елемент не може да комуницира директно сам са собом. Нека aTb изражава својство да a може да контактира са b или да $a = b$. Т ће тада бити релација слабог поретка. Она ће одређивати релацију еквиваленције $xTy \land yTx$, која се чита „x и y могу комуницирати један са другим, или $x = y$". Два елемента ће бити у истој класи еквиваленције ако могу да комуницирају,тј. ако сваки од њих може контактирати овог другог.

Индукована релација парцијалног уређења Т* има следеће значење: релација uT^*v важи ако сви елементи класе u могу контактирати све елементе класе v, а при том не важи обрнуто осим ако $u = v$. Специјално u је максимални елемент парцијално уређеног скупа ако његови елементи не могу бити контактирани од стране елемената из других класа. Слично u је минимални елемент ако његови чланови не могу контактирати чланове из других класа. У наставку ће се видети да је ергодични скуп у ствари минимални елемент парцијално уређеног скупа.

Следи доказ теореме која ће бити потребна за доказивање фундаменталне теореме регуларних ланаца.

*Теорема 1.* Нека је P матрица прелаза димензија $r \times r$, која не садржи елементе једнаке нули. Обележимо са ε најмањи елемент матрице P. Нека је k произвољни колона вектор са r елемената, чији је максимални елемент M_0 а минимални m_0, и нека су M_1 i m_1 максимални и минимални елемент вектора Px. Тада важи да је $M_1 \leq M_0, m_1 \geq m_0$ и

$$M_1 - m_1 \leq (1 - 2\varepsilon)(M_0 - m_0).$$

Доказ. Обележимо са x' вектор који добијамо из x замењујући све његове компоненте, сем најмање m_0, са M_0. Тада важи да је $x \leq x'$. Свака компонента вектора Px' је облика

$$a \cdot m_0 + (1 - a) \cdot M_0 = M_0 - a \cdot (M_0 - m_0)$$

где је $a \geq ε$. Дакле, свака компонента је мања или једнака $M_0 - ε \cdot (M_0 - m_0)$. Пошто важи да $x \leq x'$, следи

$$M_1 \leq M_0 - ε \cdot (M_0 - m_0). \quad (1)$$

Када се примени овај резултат на вектор $-x$, добија се

$$-m_1 \leq -m_0 - ε \cdot (-m_0 + M_0). \quad (2)$$

Сабирајући (1) и (2) добија се

$$M_1 - m_1 \leq M_0 - m_0 - 2ε(M_0 - m_0) =$$

$$(1 - 2ε)(M_0 - m_0).$$

<u>*Теорема 2.*</u> Нека је f_1, f_2 ... низ функција такав да за неку константу c

$$M[(f_n - c)^2] \to 0$$

кад $n \to \infty$, онда

$$M[f_n] \to c$$

и за свако $\varepsilon > 0$

$$\Pr[|f_n - c| > \varepsilon] \to 0$$

кад $n \to \infty$.

<u>*Теорема 3.*</u> Ако A^n тежи ка О кад $n \to \infty$, тада $(I - A)$ има инверз и важи

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

<u>*Ознаке*</u>

1. $Pr_i[p]$- вероватноћа догађаја p ако је процес кренуо из стања s_i
2. $E_i[f]$- средња вредност функције f
3. $Var_i[f]$-дисперзија функције f
4. $R = \{r_{ij}\}$- матрица са елементима r_{ij}
5. $\rho = \{r_j\}$- редни вектор са компонентама r_j
6. $\gamma = \{c_i\}$- вектор колона са компонентама c_i
7. ξ- колона вектор са свим елементима једнаким 1
8. *η*- редни вектор са свим елементима једнаким 1
9. *J*- матрица чији су сви елементи једнаки 1
10. *I*-јединична матрица
11. *O*- матрица чији су сви елементи једнаки 0

12. $d_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$
13. A_{sq}- матрица чији су елементи квадрати елемената матрице *A*
14. A_{dg}- матрица која се добија из матрице *A* када се сви елементи ван дијагонале изједначе са 0

1. Основе теорије случајних процеса

Случајни процес или случајна функција $\{X(t), t \in T\}$ је фамилија реалних случајних величина дефинисаних на истом простору вероватноћа (Ω, A, P). За свако $t \in T$ простор вредности је R, те је $(R.B)$ фазни простор сваке случајне величине $X(t)$. Ово се записује

$$X(t): (\Omega, A) \to (R, B)$$

T се назива параметарски или индексни скуп.

То значи да је случајни процес једна фамилија случајних величина које зависе од параметра t и све су дефинисане на истом простору вероватноћа. За свако фиксирано $t \in T$ је $X(t)$ једна одређена случајна величина, тј. једна A-мерљива функција.

Параметар t може бити реалан, комплексан или неког општијег типа, нпр. n-димензионалан. Осим тога, он може бити дискретан или непрекидан. Скуп T свих вредности параметра се назива и област дефинисаности процеса.

Параметар T може имати различите интерпретације али се најчешће посматра као време, тј . посматра се понашање процеса током времена. У односу на врсту параметарског скупа T, разликују се две основне класе случајних процеса:

1. Ако је T низ, онда је $\{X(t), t \in T\}$ случајни низ или случајни процес са дискретним параметром. Специјално, ако је T коначан низ, тада је $\{X(t), t \in T\}$ случајни вектор.
2. Ако је T интервал, онда је $\{X(t), t \in T\}$ случајни процес са непрекидним параметром.

Нека је фиксирано n временских тренутака $t_1, \dots t_n$. Сваком од тих временских тренутака одговара по једна случајна величина. Тако добијамо n случајних величина $X(t_1), \dots, X(t_n)$, које можемо посматрати као координате n-димензионалног случајног вектора $(X(t_1), \dots, X(t_n))$. То је један n-димензионални засек случајног процеса X. Расподела n-димензионалног засека одређена је n-димензионалном функцијом расподеле

$$F_n(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n) = P\{(X(t_1), \dots, X(t_n)) \leq (x_1, \dots, x_n)\} = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$$

Процеси чији је простор вредности подскуп неког коначног скупа се називају коначни случајни процеси.

1.1 Неке класе случајних процеса

Класа 1. Случајни процеси са независним вредностима су, у извесном смислу, уопштења независних случајних величина.

Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је процес са независним вредностима ако су случајне величине $X(t_1), \dots, X(t_n)$ за свако $n \in N$ и $(t_1, \dots, t_n) \in T^n$ независне Тада, значи

$$F_n(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n) = F_1(t_1; x_1) \dots F_1(t_n; x_n)$$

То значи да се код ових процеса све n-димензионалне расподеле изучавају преко једнодимензионалних.

Ако се параметар t мења непрекидно, онда често са становишта примена, није природно посматрати процесе са независним вредностима. На пример, није природно сматрати да за било која два веома блиска t_1 и t_2 су $X(t_1)$ и $X(t_2)$ независне случајне величине. Зато се посматрају само случајни процеси са независним вредностима при дискретном параметру $t = 1,2, \dots$, тј. $X_0 = X(0), X_1 = X(1), \dots X_n = X(n), \dots$

Овако дефинисаним процесима су блиски процеси са некорелисаним и процеси са ортогоналним вредностима. Процес $\{X(t), t \in T\}$ у општем случају са комплексним вредностима, је процес са некорелисаним вредностима ако су за свако $t \neq s$ случајне величине $X(t)$ и $X(s)$ некорелисане

$$Cov\big(X(t), X(s)\big) = E\Big\{[X(t) - EX(t)]\big[\overline{X(s) - EX(s)}\big]\Big\} = 0$$

односно

$$E\big[X(t)\overline{X(s)}\big] = EX(t)\overline{EX(s)}$$

Процес $\{X(t), t \in T\}$ у општем случају такође комплексан, је процес са ортогоналним вредностима ако су за свако $t \neq s$ случајне величине $X(t)$ и $X(s)$ ортогоналне, што се задаје условом

$$E\big[X(t)\overline{X(s)}\big] = 0$$

Класа2. Процеси са независним приращајима су процеси $\{X(t), t \geq t_0\}$, где су случајне величине

$$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

независне за сваки избор $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$.

За познавање процеса $\{X(t), t \in T\}$ са независним приращајима довољно је знати функције расподеле случајних величина $X(t)$ и $X(t) - X(s)$, тј. довољно је знати функције

$$F_1(t; x) = P[X(t) \leq x]$$

$$G(t;s;x) = P[X(t) - X(s) \leq x]$$

Из овога се може закључити да процеси са независним прираштајима спадају у процесе код којих је познавање дводимензионалних расподела довољно за познавање случајног процеса.

Класа3. Процеси са коначним моментима другог реда или L^2-процеси су комплексни процеси

$$X(t) = \xi(t) + i\eta(t), t \in T$$

код којих су координатни процеси ξ и η реални процеси и други момент

$$E|X(t)|^2 = E\left[X(t)\overline{X(t)}\right] = E\xi^2(t) + E\eta^2(t)$$

је коначан за свако $t \in T$.

Средња вредност L^2-процеса је комплексна функција

$$EX(t) = m_X(t) = E\xi(t) + iE\eta(t)$$

Она је коначна за свако $t \in T$.

Корелациона функција

$$K_X(t,s) = E[X(t) - m_X(t)]\left[\overline{X(s) - m_X(s)}\right] = EX(t)\overline{X(s)} - m_X(t)\overline{m_X(s)}$$

и дисперзија

$$D_X(t) = K_X(t,t) = E|X(t) - m_X(t)|^2 = E|X(t)|^2 - |m_X(t)|^2$$

су такође коначне функције.

Класа4. Процеси са ортогоналним прираштајима су комплексни случајни процеси код којих се, уместо услова $E|X(t)|^2 < \infty$ који се узима код L^2-процеса, узима мало другачији услов

$$E|X(t) - X(s)|^2 < \infty, \qquad t,s \in T$$

и код којих су прираштаји на међусобно дисјунктним интервалима ортогоналне случајне величине. Дакле, за све $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ је

$$E[X(t_4) - X(t_3)]\left[\overline{X(t_2) - X(t_1)}\right] = 0$$

У случају реалних процеса услов се своди на обичну некорелисаност прираштаја.

Класа 5. Ову класу чине стационарни случајни процеси. У њој разликујемо две подкласе процеса: строго стационарне и слабо стационарне процесе. У оба случаја ћемо сматрати да је T скуп свих реалних бројева или скуп свих целих бројева, зависно од тога да ли се ради о непрекидним или дискретним процесима.

Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је строго стационаран ако су све његове коначнодимензионалне расподеле инваријантне у односу на транслацију времена, тј. ако за сваки природан број n и за све изборе $t_1, \dots, t_n \in T$, расподела n случајних променљивих $X(t_1 + h), \dots, X(t_n + h)$ не зависи од h. То се може изразити на следећи начин:

$$F_n(t_1 + h, \dots, t_n + h; x_1, \dots, x_n) = F_n(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n)$$

Ако строго стационаран процес има средњу вредност , она је константна:

$$EX(t) = EX(t + h) = m$$

Ако строго стационаран процес има коначне моменте другог реда, онда ће његова корелациона функција бити функција разлике аргумената

$$K(t, s) = E[X(t) - m]\left[\overline{X(s) - m}\right]$$

$$= E[X(t - s) - m]\left[\overline{X(s - s) - m}\right]$$

$$= E[X(t - s) - m][X(0) - m] = B(t - s)$$

Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је слабо стационаран ако су сви његови моменти другог реда коначни, средња вредност је константна и корелациона функција је функција разлике аргумената

$$E|X(t)|^2 < \infty, EX(t) = m, K(t, s) = B(t - s).$$

Класа 6. Реалан случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је гаусовски случајни процес ако свако његово n-димензионално сечење $(X(t_1), \dots, X(t_n)$, $t_1, \dots, t_1 \in T$ је гаусовска случајна величина.

Код гаусовског случајног процеса $\{X(t), t \in T\}$ свака случајна величина $X(t)$ је гаусовска случајна величина. Али то није и довољан услов.

Нека је $\{X_n\}$ низ гаусовских случајних величина и нека $X_n \to X, n \to \infty$ у средњеквадратном. Тада за средње вредности и дисперзије важи

$$\mu_n = EX_n \to EX = \mu$$

$$\sigma_n^2 = E(X_n - \mu_n)^2 \to E(X - \mu)^2 = \sigma^2$$

а како $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ следи да и густина

$$g_{X_n}(x) = \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{(x - \mu_n)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$$

тежи ка густини нормалне расподеле

$$g_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

То значи да гранична вредност у средњеквадратном низу гаусовских случајних величина је гаусовска случајна величина. Дакле, ако је $\{X(t), t \in T\}$ гаусовски случајни процес, онда не само да су коначне линеарне комбинације $Y = a_1 X(t_1) + \cdots a_n X(t_n)$ гаусовске величине, већ су такве и њихове средњеквадратне граничне вредности. Према томе, линеарне операције над гаусовским процесима дају гаусовске процесе.

Класа 7. Ову класу процеса чине Марковски процеси. Они ће бити разматрани у наставку.

2. **Процеси Маркова**

2.1 Класификација процеса Маркова

Нека је $\{X(t), t \in T\}$ реалан случајни процес, тј. нека свака случајна променљива $X(t)$ има вредност из неког скупа S из R. За елементе скупа S рећи ћемо да су стања, а за S ћемо рећи да је скуп стања. Разликоваће се четири врсте процеса:

1. Т-дискретан скуп, S-дискретан скуп
2. Т-дискретан скуп, S-непрекидан скуп
3. Т-непрекидан скуп, S-дискретан скуп
4. Т-непрекидан скуп, S непрекидан скуп

Случај1. Нека је $T \in \{0,1,2, \dots\}$ и S је коначан или пребројив скуп из R. Имамо дакле низ $X_0, X_1, X_2, \dots$ случајних променљивих, где свака од њих може имати вредности из скупа S. Без губљења општости можемо сматрати да је $S = \{1,2,3, \dots\}$

За низ случајних величина $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$ кажемо да је ланац Маркова са дискретним скупом стања ако за $\forall n \in N$ и сва стања $s_0, s_1, s_2, \dots$ из S важи

$$P\{X_{n+1} = s_{n+1} | X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n\} = P\{X_{n+1} = s_{n+1} | X_n = s_n\}$$

кад год су те условне вероватноће дефинисане тј. кад год је

$$P\{X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n\} > 0$$

Ако X_n интерпретирамо као стање физичког система у моменту $t = n$, онда ланац Маркова описује еволуцију физичког система током времена. При томе се за $X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_{n-1} = s_{n-1}$ из (1) каже да је прошлост, за $X_n = s_n$ се каже да је садашњост, а за $X_{n+1} = s_{n+1}$ се каже да је будућност физичког система. Слободније речено, услов (1) значи да је понашање система у будућности потпуно (у смислу вероватноћа) одређено његовом садашњошћу а не зависи од прошлости.

Овај случај ће бити тема даљег рада.

Случај2. Нека је Т дискретан скуп, на пример $T = \{0,1,2, \dots\}$, а S је интервал са R или неки други непребројив скуп. Ако важи једнакост условних вероватноћа

$$P\{X_{n+1} \in B_{n+1} | X_0 \in B_0, X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n\} = P\{X_{n+1} \in B_{n+1} | X_n \in B_n\}$$

за све Борелове скупове $B_0, B_1, \dots, B_n, B_{n+1}$ из R за које је

$$P\{X_0 \in B_0, X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n\} > 0$$

тада кажемо да је $X_0, X_1, X_2, \dots$ ланац Маркова са непрекидним скупом стања.

Случај3. Нека је Т непрекидан подксуп скупа R, на пример $T = [0, \infty)$ и нека су случајне промењљиве $X(t)$ дискретне, на пример, са скупом стања је $S = \{1,2,3, \dots\}$. Посматра се низ временских тренутака $t_0, t_1, \dots t_n, t_{n+1}$ таквих да је испуњено $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$. Нека је даље

$$P\{X(t_{n+1}) = s_{n+1} | X(t_0) = s_0, X(t_1) = s_1 \dots, X(t_n) = s_n\} = P\{X(t_{n+1}) = s_{n+1} | X(t_n) = s_n\}$$

задовољено за свако n за које је

$$P\{X(t_0) = s_0, X(t_1) = s_1 \dots, X(t_n) = s_n\} > 0$$

Тада се каже да је $\{X(t), t \geq 0\}$ процес Маркова са дискретним скупом стања.

Случај4. Нека је Т интервал из R, на пример $T = [0, \infty)$. и нека је скуп стања неки непрекидан подскуп скупа R. Ако за $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ и Борелове скупове $B_0, B_1, \dots, B_n, B_{n+1}$ са реалне праве важи

$$P\{X(t_{n+1}) \in B_{n+1} | X(t_0) \in B_0, X(t_1) \in B_1, \dots, X(t_n) \in B_n\} = P\{X(t_{n+1}) \in B_{n+1} | X(t_n) \in B_n\}$$

онда кажемо да је $\{X(t), t \geq 0\}$ процес Маркова са непрекидним скупом стања. Некада се назива и дифузиони процес.

2.2 Уопштено о ланцима Маркова

У претходном делу је дата уопштена дефиниција Марковљевог процеса. Овде ће бити дата још једна дефиниција, за коначне ланце Маркова.

Марковљеви ланци са коначно много стања су дискретни случајни процеси чији скупови стања садрже коначан број елемената и који задовољавају својство да за било који исказ p чија вредност зависи само од исхода пре n -тог експеримента важи

$$Pr\left[X_n = s_j \middle| (X_{n-1} = s_i) \land p\right] = Pr\left[X_n = s_j \middle| X_{n-1} = s_i\right]$$

Овај услов ће се називати Марковљево својство.

Вероватноћа прелаза у n-том кораку, из стања i у стање j, се дефинише као

$$p_{ij}(n) = Pr\left[X_n = s_j \middle| X_{n-1} = s_i\right]$$

Хомогени ланац Маркова је онај ланац који задовољава својство да вероватноће прелаза $p_{ij}(n)$ не зависе од n. У овом случају се обележавају са p_{ij}. У даљем тексту ће се говорити о хомогеним ланцима Маркова.

Матрица чији су елементи вероватноће прелаза назива се матрица прелаза.

Почетни вектор вероватноће и матрица прелаза потпуно одређују Марковљев ланац. Дакле, за дати почетни вектор π_0 и дату матрицу прелаза P, постоји тачно један ланац Маркова генерисан овим параметрима.

У наставку приче ћемо углавном разматрати случајеве где је матрица прелаза P фиксна, а почетни вектор π променљив. Самим тим ће вероватносна мера могућих исхода зависити управо од избора вектора π.

Конкретно, ако је p било који исказ из скупа исхода или X произвољна функција чији је домен скуп исхода, вредности $Pr[p], E[X]$ i $Var[X]$ ће зависити од π и ту зависност ћемо обележавати са $Pr_{\pi}[p],\ E_{\pi}[X]$ i $Var_{\pi}[X]$. У специјалном случају, када је i-та компонента вектора π једнака 1, ову зависност ћемо обележавати са $Pr_{\mathrm{i}}[p],\ E_{\mathrm{i}}[X]$ i $Var_{\mathrm{i}}[X]$.

Марковљево својство се може исказати и на другачији начин.

Нека је p исказ чија вредност зависи само од исхода после n-тог експеримента, а q исказ чија вредност зависи само од исхода пре n-тог експеримента. Тада

$$Pr\left[p \wedge q | X_n = s_j\right] = Pr\left[p | X_n = s_j\right] Pr\left[q | X_n = s_j\right]$$

Суштина овог услова је да, када нам је позната садашњост, прошлост и будућност су независна једна од друге. Ова дефиниција која укључује симетричност нам указује на то да би Марков процес посматран у обрнутом реду поново био Марков процес.

<u>*Теорема 2.2.1*</u> Посматрамо Марковљев процес и нека је p било који исказ чија вредност зависи само од исхода после n-тог експеримента. Тада

$$Pr\left[X_n = s_j \middle| (X_{n+1} = s_i) \wedge p\right] = Pr\left[X_n = s_j \middle| X_{n+1} = s_i\right]$$

Пошто је било који Марковљев процес посматран у обрнутом реду поново Марковљев процес, може се претпоставити да је то случај и са Марковљев ланцима. Међутим, ово не важи у општем случају. Важило би када би обрнуте вероватноће прелаза $p_{ij}^*(n) = \ Pr\left[f_n = s_j \middle| f_{n+1} = s_i\right]$ биле независне од n. Њих можемо изразити као

$$p_{ij}^*(n) = \frac{Pr[X_n = s_i \wedge X_{n+1} = s_i]}{Pr[X_{n+1} = s_i]}$$

$$= \frac{Pr\left[X_{n+1} = s_i | X_n = s_j\right] Pr\left[X_n = s_j\right]}{Pr[X_{n+1} = s_i]}$$

$$= \frac{p_{ji} Pr\left[X_n = s_j\right]}{Pr[X_{n+1} = s_i]}$$

Ове вероватноће прелаза би биле независне од n, ако би вероватноћа догађаја да се процес нађе у одређеном стању у тренутку n била независна од n. Ово генерално гледано није случај. На пример, ако је процес стартовао у стању s_1 са вероватноћом 1, онда је вероватноћа да ће остати и даље у том стању једнака p_{11}. Што значи да уопштено

$$Pr[X_0 = s_1] \neq Pr[X_1 = s_1].$$

2.3 Класификација стања и ланаца

Желимо да класификујемо стања ланца Маркова према томе да ли је могућ прелаз из датог стања у неко друго задато стање.

Скуп стања можемо поделити на класе еквиваленције. Два стања се налазе у истој класи еквиваленције ако „комуницирају", тј. ако је могућ прелаз из једног у друго стање и обрнуто.

Минимални елемент парцијално уређеног скупа класи еквиваленције се назива ергодични скуп. Остали елементи се називају прелазни скупови. Елементи прелазног скупа се називају прелазна стања, док се елементи ергодичног скупа називају ергодична стања.

Из чињенице да сваки коначни парцијално уређен скуп садржи најмањи елемент следи да сваки ланац Маркова садржи бар један ергодични скуп.

За прелазне скупове важи да ако процес напусти овакав скуп више се никад не враћа у исти. За ергодичне скупове важи да ако процес уђе у овакав скуп више га неће напустити. Специјално, ако ергодични скуп садржи само један елемент, онда се добија случај у коме процес када уђе у то једно стање више не излази из њега. Такво стање се назива апсорбујуће.

Теорема 2.3.1 Стање s_i је апсорбујуће ако и само ако је $p_{ii=1}$.

Период стања i, $d(i)$, је највећи заједнички делилац оних n за које важи $p_{ii}^{(n)} > 0$. Уколико је $d(i) > 1$ стање је периодично.

Теорема 2.3.2 За проивољни ланац Маркова, сва стања из једне класе еквиваленције имају исти период.

Доказ. Нека су i и j два стања из исте класе еквиваленције. Тада $i \leftrightarrow j$ и постоји r такво да $p_{ij}^{(r)} > 0$ и s такво да $p_{ji}^{(s)} > 0$ Пошто је потребно $r + s$ корака да процес дође из i у j а затим да се поново врати у i, $r + s$ мора бити дељиво са $d(i)$. Нека је t неки природан број такав да $p_{jj}^{(t)} > 0$. Пошто постоји начин да процес врати у стање i после $r + t + s$ корака, следи да је $r + t + s$ дељиво са $d(i)$, што значи да је и t дељиво са $d(i)$. Пошто је ово тачно за свако t за које је $p_{jj}^{(t)} > 0$, следи да је $d(j)$ дељиво са $d(i)$. Ако обрнемо улоге i и j, добија се да $d(i)$ је дељиво са $d(j)$, што значи $d(i) = d(j)$.

Ту заједничку вредност ћемо обележавати са d.

Свака класа еквиваленције се може поделити на цикличне класе. Ако је период класе $d = 1$ онда постоји само једна циклична класа и за класу еквиваленције се каже да је регуларна, а уколико је $d > 1$ онда постоји више цикличних класа, а за класу еквиваленције кажемо да је циклична.

У првом случају, када је класа еквиваленције регуларна, процес се може, након неког времена, наћи у било ком стању те класе, независно од тога које је било почетно стање процеса. Тада ће сви довољно велики степени матрице P бити позитивни.

У случају када је класа еквиваленције циклична, сваки степен матрице P ће садржати елементе једнаке нули.

Из класификације стања се изводи класификација ланаца. Основна подела ланаца се врши на основу тога да ли ланац садржи прелазни скуп.

Прво ћемо разматрати ланце који не садрже прелазни скуп. Такви ланци се састоје од једног или више ергодичних скупова. Уколико се састоје од више ергодичних скупова, међу тим скуповима не постоји међусобна интеракција и самим тим се могу посматрати одвојено. Због тога ћемо даље, без губитка генерализације, посматрати случајеве где се ланац састоји од једног ергодичног скупа. Такви ланци се називају ергодични ланци.

Ове ланце можемо класификовати према природи ергодичног скупа.

- Ланци чији је ергодичан скуп регуларан се називају регуларни ланци Маркова. Главно својство овог ланца је да се након неког времена може наћи у било ком стању, без обзира на почетно стање.
- Ланци чији је ергодичан скуп цикличан су циклични ланци Маркова. Овакви ланци су периодични са периодом $d > 1$ и њихова стања су подељена у d цикличних скупова.

Друга група ланаца које разматрамо су они ланци који садрже прелазне скупове. Ови ланци поред прелазних садрже и ергодичне скупове и, због својства да ланац са вероватноћом 1 улази у ергодични скуп, ове ланце класификујемо према њиховим ергодичним скуповима.

- Ако се сви ергодични скупови састоје од по једног елемента имамо случај апсорбујућих ланаца.
- Друга категорија обухвата ланце чији су сви ергодични скупови регуларни, и нису сви састављени од само једног елемента.
- Трећа група су они ланци чији су ергодични скупови циклични.
- Последња категорија обухвата ланце који садрже и регуларне и цикличне ергодичне скупове.

У даљем раду ће бити разматрана основна својства три типа ланца: апсорбујућег, регуларног и ергодичног. Регуларни и ергодични ланци „покривају“ понашање процеса након што исти уђе у ергодични скуп, док апсорбујући ланци описују понашање процеса пре него што уђе у неки ергодични скуп.

3. Апсорбујући ланци Маркова

3.1 Дефиниција и основна својства

Апсорбујући ланци Маркова су ланци код којих се сваки ергодични скуп састоји од тачно једног стања. То стање, обележићемо га са s_i, се назива апсорбујуће и за њега важи $p_{ii} = 1$.

<u>*Теорема 3.1.1*</u> У произвољном коначном ланцу Маркова, независно од тога које је почетно стање, вероватноћа да ће се процес наћи у ергодичном стању тежи јединици, кад $n \to \infty$.

Доказ. Када процес уђе у неко ергодично стање никада не напушта његову класу еквиваленције, што значи да ће се од тог момента налазити увек у неком ергодичном стању.

Претпоставимо сада да процес креће из неког прелазног стања. Класа тог стања није минимална што значи да постоји класа "испод" ње. Ово значи да је могуће да процес уђе у неки ергодични скуп.

Претпоставимо да је могуће прећи из прелазног у ергодично стање у не више од n корака. Тада постоји позитиван број p такав да је вероватноћа уласка у ергодично стање, после највише n корака, не мања од p. Тада је вероватноћа догађаја да процес после n корака не уђе у ергодично стање мања од $(1-p)$. Вероватноћа да процес не уђе у ергодично стање после kn корака је $\leq (1-p)^k$, и ова вероватноћа тежи нули када $k \to \infty$.

Последица ове теореме је својство које ће бити потребно у даљем доказивању. Оно каже да постоје бројеви $b > 0, 0 < c < 1$, такви да $p_{ij}^{(n)} \leq bc^n$ за било која прелазна стања s_i, s_j.

За даље проучавање апсорбујућих ланаца Маркова уводимо канонску форму матрице прелаза P. Канонску форму добијамо када матрицу прелаза "преуредимо" тако да се раздвоје прелазна и ергодична стања.

Претпоставимо да имамо s прелазних стања и $(r-s)$ ергодичних стања. Канонска форма има облик

$$P = \begin{pmatrix} S & O \\ R & Q \end{pmatrix}$$

где

- под-матрица S димензија $(r-s) \times (r-s)$је матрица прелаза између стања која су ергодична
- под-матрица O, димензија$(r-s) \times s$ је нула-матрица зато што подразумева прелаз из ергодичних у прелазна стања.
- под-матрица R димензија $s \times (r-s)$је матрица прелаза из прелазних у ергодична стања

- под-матрица Q, димензија $s \times s$, је матрица која садржи вероватноће прелаза искључиво међу прелазним стањима.

Код апсорбујућих ланаца важи да $S = I$ где је I јединична матрица одговарајућих димензија. Дакле канонска форма матрице прелаза код апсорбујућих ланаца је

$$P = \begin{pmatrix} I & O \\ R & Q \end{pmatrix}$$

Степени ове матрице такође имају јединичну матрицу на месту суб-матрице S у канонској форми. Ово осликава чињеницу да процес једном када уђе у апсорбујуће стање, никада не излази из њега.

3.2 Фундаментална матрица

<u>*Теорема 3.2.1*</u> За произвољни апсорбујући ланац Маркова, матрица $I - Q$ има инверз и важи

$$(I - Q)^{-1} = I + Q + Q^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k$$

За апсорбујуће ланце, фундаменталну матрицу дефинишемо са $N = (I - Q)^{-1}$.

У циљу извођења даљих резултата, уводимо нове функције.

- n_j-број пута у којима се процес нашао у стању s_j.
- u_j^k-функција која има вредност 1, уколико се процес у свом k-том кораку нашао у стању s_j, и 0 у супротном.

Обележимо са T скуп прелазних стања.

<u>*Теорема3.2.2*</u> $\{E_i[n_j]\} = N$, где $s_i, s_j \in T$.

Доказ. Да бисмо показали тврђење користимо својство $n_j = \sum_{k=0}^{\infty} u_j^k$.

$$\{E_i[n_j]\} = \left\{E_i\left[\sum_{k=0}^{\infty} u_j^k\right]\right\} = \left\{\sum_{k=0}^{\infty} E_i[u_j^k]\right\}$$

$$= \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(1 - p_{ij}^{(k)}\right) \cdot 0 + p_{ij}^{(k)} \cdot 1\right)\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{p_{ij}^{(k)}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k = N$$

Ова теорема показује да је очекивани број пута да се процес нађе у датом прелазном стању коначан.

3.3 Примене фундаменталне матрице

На почетку ћемо дефинисати матрице које ће нам бити потребне у даљем тексту.

- $N_2 = N(2N_{dg} - I) - N_{sq}$ - $s \times s$
- $B = NR$ - $s \times (r - s)$
- $\tau = N\xi$ - колона вектор са s компоненти
- $\tau_2 = (2N - I)\tau - \tau_{sq}$ - колона вектор са s компоненти

Теорема 3.3.1 $\{Var_i[n_j]\} = N_2$, где $s_i, s_j \in T$.

Доказ. Познато је да $Var_i[n_j] = E_i[n_j^2] - E_i[n_j]^2$. Пошто из претходног дела имамо шта је $E_i[n_j]^2$ преостаје да се види како можемо израчунати $M_i[n_j^2]$.

Прво треба показати да је $E_i[n_j^2]$ коначно, а затим да је $\{E_i[n_j^2]\} = N(2N_{dg} - I)$.

1. $E_i[n_j^2]$ је коначно.

$$E_i[n_j^2] = E_i\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_j^k\right)^2\right] = E_i\left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} u_j^k u_j^l\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} E_i[u_j^k u_j^l]$$

$E_i[u_j^k u_j^l]$ је вероватноћа да се процес нађе у стању s_j и у k-том и у l-том кораку, почевши од стања $s_{i.}$ Ако ставимо да је $m = min(k,l), d = |k - l|$ онда је ово вероватноћа да се процес нађе у стању s_j у m-том кораку, и да се после d корака поново врати у њега. Дакле $E_i[u_j^k u_j^l] = p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(d)}$,

$$E_i[n_j^2] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} p_{ij}^{(m)} p_{jj}^{(d)} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} (bc^m)(bc^d) = b^2 \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} c^n = b^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, c^n$$

где је $n = max(k,l)$. Ово је коначно.

2. $\{E_i[n_j^2]\} = N(2N_{dg} - I)$.

Да би израчунали очекивања разматрамо где процес може прећи у једном кораку, ако му је стартно стање $s_{i.}$ Може прећи у стање s_k са вероватноћом p_{ik}, и уколико је то стање апсорбујуће, процес никада више неће ући у стање s_j и једини допринос је из почетног стања, d_{ij}. Ако је ново стање прелазно,

$$\{E_i[n_j^2]\} = \left\{\sum_{s_k\in\tilde{T}} p_{ik} d_{ij}^2 + \sum_{s_k\in T} p_{ik} E_k\left[\left(n_j + d_{ij}\right)^2\right]\right\}$$

$$= \left\{\sum_{s_k\in\tilde{T}} p_{ik}\left(E_k[n_j^2] + 2E_k[n_j]d_{ij}\right) + d_{ij}\right\}$$

$$= Q\{E_i[n_j^2]\} + 2(QN)_{dg} + I$$

Дакле

$$\{E_i[n_j^2]\} = (I-Q)^{-1}\left(2(QN)_{dg} + I\right) = N\left(2(N-I)_{dg} + I\right) = N\left(2N_{dg} - I\right)$$

Уводимо функцију t које представља колико је корака (укључујући почетно стање) процес провео у свим прелазним стањима ланца. Уколико процес креће из неког ергодичног стања, онда је $t = 0$, а уколико креће из прелазног стања онда t представља број корака које процес начини пре него што уђе у ергодичан скуп. Код апсорбујућих ланаца, ово је време до апсорбције.

Теорема 3.3.2 $\{E_i[t]\} = \tau$ и $\{Var_i[t]\} = \tau_2$ где $s_i \in T$.

Доказ. Лако се види да $t = \sum_{s_j\in T} n_j$.

Дакле

$$\{E_i[t]\} = \left\{\sum_{s_j\in T} E_i[n_j]\right\} = N\xi$$

За дисперзију имамо

$$\{E_i[t^2]\} = \left\{\sum_{s_k\in\tilde{T}} p_{ik}\cdot 1 + \sum_{s_k\in T} p_{ik} E_k[(t+1)^2]\right\}$$

$$= \left\{\sum_{s_k\in T} p_{ik}(E_k[t^2] + 2E_k[t]) + 1\right\}$$

$$= Q\{E_i[t^2]\} + 2Q\tau + \xi$$

Одавде следи

$$\{E_i[t^2]\} = (I-Q)^{-1}(2Q\tau + \xi) = 2NQ\tau + N\xi = 2(N-I)\tau + \tau = (2N-I)\tau$$

што на крају даје

$$\{Var_i[t]\} = \{E_i[t^2] - E_i[t]^2\} = (2N - I)\tau - \tau_{sq}$$

Последица 3.3.1 Нека је π почетни вектор вероватноће за апсорбујући ланац, и нека се вектор π' састоји од последњих s компоненти вектора π (π' садржи почетне вероватноће за прелазна стања). Тада

$$\{E_\pi[n_j]\} = \pi' N$$

$$\{Var_\pi[n_j]\} = \pi' N(2N_{dg} - I) - (\pi' N)_{sq}$$

$$\{E_\pi[t]\} = \pi' \tau$$

$$\{Var_\pi[t]\} = \pi'(2N - I)\tau - (\pi'\tau)_{sq}$$

Доказ. Ово је директна последица својства да за произвољну функцију X, важи $E_\pi[X] = \pi E_i[X]$ Пошто су очекиване вредности 0, уколико је почетно стање апсорбујуће, уместо вектора π се ставља вектор π'.

*Теорема 3.3.3* Ако је b_{ij} вероватноћа да процес који је кренуо из стања s_i доспе у апсорбујуће стање s_j, онда

$$\{b_{ij}\} = B = NR \quad s_i \in T, s_j \in \tilde{T}$$

Доказ. Када крене из стања s_i процес може доспети у стање s_j у једном или више корака. Вероватноћа да пређе у једном кораку је p_{ij}. Ако ово није случај, процес може доспети у неко друго апсорбујуће стање (након чега је немогуће да стигне у s_j) или може достићи неко друго прелазно стање s_k. У другом случају постоји вероватноћа b_{kj} да процес заврши у траженом стању. Дакле

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_{s_k \in T} p_{ik} b_{kj}$$

што се може написати у матричној форми

$$B = R + QB$$

На крају

$$B = (I - Q)^{-1} R = NR$$

4. Регуларни ланци Маркова

4.1 Дефиниција и основна својства

За ланац Маркова се каже да је регуларан ако не садржи прелазне скупове и ако се састоји од једног ергодичног скупа са тачно једном цикличном класом.
Матрицу прелаза регуларног ланца Маркова ћемо називати регуларна матрица прелаза.

Теорема 4.1.1 Матрица прелаза је регуларна ако и само ако постоји n такво да матрица P^n нема елементе једнаке нули.

Теорема 4.1.2 ***Фундаментална теорема за регуларне ланце Маркова***. Ако је P регуларна матрица прелаза онда важи:

i. Степени P^n теже матрици вероватноће A.
ii. Сваки ред матрице A је исти вектор вероватноће $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, тј. $A = \xi\alpha$.
iii. Елементи вектора α су позитивни.

Доказ. Прво ћемо претпоставити да матрица P не садржи нуле. Нека је ε минимални елемент матрице P. Нека је ρ_j колона вектор чија је j-та компонента једнака 1 а остале једнаке нули. Нека су M_n и m_n максимална и минимална компонента вектора $P^n\rho_j$. Пошто важи

$$P^n\rho_j = P \cdot P^{n-1}\rho_j$$

из претходне теореме имамо да $\mathrm{M}_1 \geq \mathrm{M}_2 \geq \mathrm{M}_3 \geq \cdots, m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \cdots$ и

$$M_n - m_n \leq (1 - 2\varepsilon)(M_n - 1 - m_n - 1)$$

за $n \geq 1$. Ако обележимо $d_n = M_n - m_n$, следи

$$d_n \leq (1 - 2\varepsilon)^n \cdot d_0 = (1 - 2\varepsilon)^n.$$

Дакле, када $n \to \infty$ имамо да $d_n \to 0$, M_n и m_n конвергирају истој вредности, и одатле $P^n\rho_j$ тежи вектору чије су све компоненте исте.

Обележимо са a_j вредност којој конвергирају M_n и m_n. Очигледно је да $\forall n$ важи $m_n \leq a_j \leq M_n$. Специјално, пошто је $m_1 > 0$ и $M_1 < 1$ имамо да је $0 < a_j < 1$. $P^n\rho_j$ је j-та колона матрице P^n. Дакле, j-та колона од P^n тежи вектору чије су све компоненте исте и једнаке a_j. То даље значи да матрица P^n тежи матрици A чији су сви редови једнаки вектору $\alpha = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$. Пошто су редне суме матрице P^n једнаке 1, исто мора да важи и за граничну матрицу. Овим је завршен доказ за случај где матрица има све елементе позитивне.

Сада ћемо размотрити случај где се за матрицу P претпоставља само да је регуларна. Нека је N нека вредност за коју P^N нема елемената једнаких нули. Нека је ε' најмањи елемент матрице P^N. Примењујући први део доказа на матрицу P^N добијамо

$$d_{kN} \leq (1 - 2\varepsilon')k \tag{3}$$

Дакле, низ d_n, који је нерастући, садржи подниз који тежи нули. Одатле следи да d_nтежи нули и остатак доказа је исти као у случају када P има све позитивне елементе.

Последица 4.1.1 Нека је P регуларна матрица прелаза. Нека је $a_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$. Тада постоје константе b i r, 0< r <1, такве да

$$p_{ij}^{(n)} = a_j + o_{ij}^{(n)}$$

где $\left|o_{ij}^{(n)}\right| \leq br^n$.

Доказ. Знамо да важи $\left|o_{ij}^{(n)}\right| \leq d_n$. Нека је N вредност за коју матрица P^N има све позитивне компоненте. Нека је ε минимални елемент матрице P. Одаберимо r i b тако да важи

$$r = (1 - 2\varepsilon)^{1/N} \text{ i } b = \frac{1}{1-2\varepsilon} = r^{-N}.$$

Ако је $n = kN$, онда из (3) следи да $d_n \leq r^n$. Ако је $n = kN + n_1$, где је $0 \leq n_1 \leq N$, онда из тога да је d_n нерастући низ, добијамо $d_n \leq r^{n-n_1} \leq r^n r^{-N} = br^n$. Граница коју смо овде поставили за $o_{ij}^{(n)}$ је врло погодна за доказивање теорема, али је врло „уска“ као процена за степен конвергенције вредности $p_{ij}^{(n)}$.

<u>*Теорема 4.1.3*</u> Нека је P регуларна матрица прелаза и дефинишимо A i α као у фундаменталној теореми. Тада:

i. За произвољни вектор вероватноће π, $\pi \cdot P^n \to \alpha$ кад $n \to \infty$.
ii. Вектор α је јединствени вектор вероватноће за који важи $\alpha P = \alpha$.
iii. $PA=AP=A$.

Доказ.

i. Пошто је π вектор вероватноће, важи $\pi\xi = 1$. Даље, из својства $\pi \cdot P^n \to \pi \cdot A, n \to \infty$ следи да $\pi \cdot P^n \to \pi \cdot A, n \to \infty$. При том важи $\pi \cdot A = \pi\xi\alpha = \alpha$, што на крају даје $\pi \cdot P^n \to \alpha$. Овиме је доказ првог дела теореме завршен.
ii. Очигледно је да важи $\alpha P = \alpha$. Треба још показати да је α јединствено. Нека је β неки други вектор који задовољава једнакост $\beta P = \beta$. Тада из (1) следи да $\beta P^n \to \alpha$. Пошто важи $\beta P = \beta$ и $\beta P^n = \beta$, следи да је $\alpha = \beta$.

iii. Знамо да степени матрице P конвергирају ка A, што значи да се и $P^{n+1} = P^n \cdot P$ приближава матрици A. Али се исто тако приближава и матрици AP, што значи да је AP=A. Слично се показује и да PA=A. Тиме је доказан последњи део теореме.

<u>*Теорема 4.1.4*</u> Нека је P регуларна матрица прелаза и $\rho = \{r_i\}$ вектор колона такав да важи $P\rho = \rho$. Тада важи $\rho = c \cdot \xi$ за неку константу c.

Доказ. Пошто $P\rho = \rho$, онда важи и $P^2\rho = \rho$ а даље и уопштено $P^n\rho = \rho$. ово даље даје да је и $A\rho = \rho$. Важи дакле $r_i = \alpha\rho$. Одавде закључујемо да све компоненте вектора ρ имају исту вредност, тј. $\rho = c \cdot \xi$ за неку константу c.

4.2 Закон великих бројева за регуларне ланце Маркова

Као што смо видели на почетку овог поглавља, код регуларних ланаца Маркова постоји тзв. гранична вероватноћа, a_j, да процес буде у стању s_j независно од тога које је било почетно стање процеса.

У циљу лакшег доказивања исказа увешћемо нове помоћне функције. Са $u_j^{(n)}$ ћемо обележити функцију која има вредност 1 уколико се процес у свом n-том кораку нађе у стању s_j, и вредност 0 иначе. Уводимо и функцију $y_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} u_j^{(k)}$, чија вредност показује колико се пута процес нашао у стању s_j у првих n корака (не рачунајући почетну позицију). Функција $v_j^{(n)} = y_j^{(n)}/n$ нам даје удео броја пута у којима се процес нашао у стању s_j , у првих n корака.

<u>*Теорема 4.2.1*</u> (Закон великих бројева). Посматрамо регуларни ланац Маркова са граничним вектором $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_r)$. За произвољни вектор π,

$$E_\pi\left[v_j^{(n)}\right] \to a_j$$

и за свако ε>0 важи

$$Pr_\pi\left[\left|v_j^{(n)} - a_j\right| > \varepsilon\right] \to 0$$

кад $n \to \infty$.

Доказ. Према Теореми 2 довољно је доказати да

$$E_\pi\left[\left(v_j^{(n)} - a_j\right)^2\right] \to 0, n \to \infty$$

Да би доказали ово, довољно је доказати да за свако i важи $E_i\left[\left(v_j^{(n)} - a_j\right)^2\right] \to 0$.

$$E_i\left[\left(v_j^{(n)}-a_j\right)^2\right]=E_i\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{u_j^{(k)}}{n}\right)-a_j\right)^2\right]=\frac{1}{n^2}E_i\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\left(u_j^{(k)}-a_j\right)\right)^2\right]$$

Обележимо $e_{k,l}=E_i\left[\left(u_j^{(k)}-a_j\right)\left(u_j^{(l)}-a_j\right)\right]$. Тиме се циљ доказа своди на то да покажемо да

$$\frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}e_{k,l}\to 0\;, n\to\infty \qquad (1)$$

Множећи заграде у изразу за $e_{k,l}$ добијамо

$$e_{k,l}=E_i\left[u_j^{(k)}u_j^{(l)}\right]-a_jE_i\left[u_j^{(k)}\right]-a_jE_i\left[u_j^{(l)}\right]+a_j^2$$

Нека је $m=min(k,l)$ і $d=|k-l|$. Тада

$$e_{k,l}=p_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(d)}-a_jp_{ij}^{(k)}-a_jp_{ij}^{(l)}+a_j^2$$

Из Последице 4.1.1 следи

$$e_{k,l}=a_j\left(o_{ij}^{(m)}+o_{jj}^{(d)}-o_{ij}^{(k)}-o_{ij}^{(l)}\right)+o_{ij}^{(m)}o_{jj}^{(d)}$$

где $\left|o_{ij}^{(n)}\right|\le br^n$ са $0<r<1$. Дакле за одговарајућу константу с,

$$\left|e_{k,l}\right|\le c\left(r^m+r^d+r^k+r^l\right)$$

Свака вредност за m,k,l се појављује $\le 2n$ пута у суми (1). Дакле, користећи (2) добија се

$$\frac{1}{n^2}\sum_{l=}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|e_{k,l}\right|\le\frac{4c}{n^2}\cdot\frac{2n}{1-r}=\frac{8c}{n(1-r)}$$

Десна страна ове једнакости тежи нули ,кад n тежи бесконачности, што онда важи и за леву страну. Тиме је доказ завршен.

4.3 Фундаментална матрица за регуларне ланце Маркова

<u>*Теорема 4.3.1*</u> Нека је P матрица прелаза за регуларни ланац Маркова и A гранична матрица. Тада матрица $Z=\left(I-(P-A)\right)^{-1}$ постоји и важи

$$Z=I+\sum_{n=1}^{\infty}(P^n-A) \qquad (3)$$

Доказ. Доказаћемо да важи $(P-A)^n=P^n-A$. Пошто $P^n-A\to 0$, ова теорема ће следити из Теореме 3 из уводног дела. Имамо да $A^2=\xi\alpha\xi\alpha=\xi\alpha=A$ а одатле $A^k=A$ и

$$(P-A)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} P^i A^{n-i} = P^n + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i} P^i A = P^n - A$$

Матрица $Z = \left(I - (P-A)\right)^{-1}$ се назива фундаментална матрица за Марковљев ланац одређен регуларном матрицом P.

Теорема 4.3.2 Нека је Z фундаментална матрица за регуларни ланац Маркова са матрицом прелаза P, граничним вектором α и граничном матрицом A. Тада важи

i. $PZ = ZP$
ii. $Z\xi = \xi$
iii. $\alpha Z = \alpha$
iv. $I - Z = A - PZ.$

Доказ. Све ставке ове теореме следе из облика (3) матрице Z.

i. Први део теореме следи из својства да P комутира са свим члановима бесконачног низа.
ii. Овај део теореме тврди да су редне суме код матрице Z једнаке 1. И то се види из репрезентације (3), јер су редне суме матрице I једнаке 1, док су редне суме матрица $P^n - A$ једнаке 0.
iii. Пошто је $\alpha I = \alpha$ и $\alpha(P^n - A) = 0$ следи тврђење.
iv. Да би доказали овај део теореме, облик (3) матрице Z ћемо помножити са $(I - P)$. На тај начин се добија

$$(I-P)Z = (I-P) + (P-A) = I - A$$

Нека је $\bar{y}_j^{(n)}$ број корака које је процес провео у стању s_j у првих n корака, рачунајући почетну позицију.

Теорема 4.3.3 За било који регуларни ланац Маркова и произвољни почетни вектор π важи

$$\left\{E_\pi \left[\bar{y}_j^{(n)}\right]\right\} - n\alpha \to \pi(Z - A) = \pi Z - \alpha.$$

Доказ. За произвољно i

$$E_i \left[\bar{y}_j^{(n)}\right] = \sum_{k=0}^{n-1} E_i \left[u_j^{(k)}\right] = \sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)}$$

Одавде следи

$$\left\{E_i \left[\bar{y}_j^{(n)}\right] - na_j\right\} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(P^k - A\right) \to Z - A.$$

На крају добијамо

$$\pi \left\{E_i \left[\bar{y}_j^{(n)}\right] - na_j\right\} \to \pi(Z - A) = \pi Z - A.$$

Последица 4.3.1 За било које две почетне расподеле π и π' важи

$$E_\pi\left[\bar{y}_j^{(n)}\right] - E_{\pi'}\left[\bar{y}_j^{(n)}\right] \to (\pi - \pi')Z.$$

Уколико одаберемо неко посебно стање, нпр. i онда претходна теорема тврди да

$$E_i\left[\bar{y}_j^{(n)}\right] - na_j \to z_{ij} - a_j$$

Види се да за велико n очекивано време које процес проводи у стању s_j, ако је почетно стање s_i, се разликује од na_j за приближно $z_{ij} - a_j$. Закон великих бројева за регуларне ланце каже да ово очекивано време тежи a_j независно од почетног стања. Елементи матрице $(Z - A)$ су у суштини величине које апроксимативно зависе од почетне позиције.

Помоћу ове добијене последице се могу поредити очекивања за два различита почетна стања, тј.

$$E_i\left[\bar{y}_j^{(n)}\right] - E_k\left[\bar{y}_j^{(n)}\right] \to z_{ij} - z_{kj}$$

Последица 4.3.2 Нека је $c = \sum z_{jj}$. Тада

$$\sum\left(E_j\left[\bar{y}_j^{(n)}\right] - E_\pi\left[\bar{y}_j^{(n)}\right]\right) \to c - 1\,,\ \ n \to \infty$$

независно од π.

Доказ. Из Последице 4.3.1 имамо да важи

$$E_j\left[\bar{y}_j^{(n)}\right] - E_\pi\left[\bar{y}_j^{(n)}\right] \to z_{jj} - (\pi Z)_j$$

а одавде $\sum z_{jj} - \pi Z\xi = c - 1$.

Ова последица има следеће значење. За било које π важи $E_j\left[\bar{y}_j^{(n)}\right] \geq E_\pi\left[\bar{y}_j^{(n)}\right]$. Дакле $E_j\left[\bar{y}_j^{(n)}\right]$ даје највећу могућу очекивану вредност броја пута да се процес нашао у стању s_j. Последица указује на то да се сума по свим стањима, одступања од овог максимума, приближава граници која је независна од избора π.

4.4 Прво пролазно време

У овом делу ћемо се бавити дужином времена које је потребно да процес први пут дође из стања s_i у стање s_j.

За регуларни ланац Маркова прво пролазно време је функција f_k чија је вредност једнака броју корака потребних да процес дође у стање s_k, први пут након почетне позиције.

Теорема 4.4.1 За произвољно i, $E_i[f_k]$ је коначна вредност.

Доказ. Претпоставимо прво да је $i \neq k$. Од почетног ланца можемо направити нови ланац Маркова, где ћемо ставити да стање s_k буде апсорбујуће. Резултујући ланац је апсорбујући ланац Маркова са једним апсорбујућим стањем, s_k. Средње време преласка из стања s_i у s_k у почетном ланцу је једнако средњем времену до апсорбције у новом ланцу. Средње време до апсорбције је коначно, што смо видели у претходном поглављу. Одавде следи тврђење.

Уколико је $i = k$ онда

$$E_i[f_i] = p_{ii} + \sum_{k \neq i} p_{ik} E_k\,[f_i]$$

што, према првом делу доказа има коначну вредност.

Матрица средњих времена првог пролаза, коју ћемо обележавати са E, је матрица чије су вредности $e_{ij} = E_i[f_j]$.

У наставку ћемо размотрити нека својства матрице E.

Теорема 4.4.2 Матрица E задовољава једнакост

$$E = P\left(E - E_{dg}\right) + J. \qquad (1)$$

Доказ. $E_i[f_j]$ се добија рачунајући средње вредности условних очекивања, када нам је дат исход првог експеримента. Дакле

$$E_i[f_j] = \sum_{k \neq j} p_{ik}\left(E_k[f_j] + 1\right) + p_{ij}$$

$$= \sum_{k \neq j} p_{ik}\, E_k[f_j] + 1$$

$$= \sum_{k} p_{ik}\, E_k[f_j] - p_{ij} E_j[f_j] + 1$$

Тј.

$$e_{ij} = \sum_{k} p_{ik} e_{kj} - p_{ij} e_{jj} + 1$$

чиме је доказана теорема.

Теорема 4.4.3 Нека је $\alpha = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ гранични вектор вероватноће за P. Тада $e_{ii} = 1/a_i$.

Доказ. Множећи једначину (1) са α добијамо

$$\alpha E = \alpha P\left(E - E_{dg}\right) + \alpha J = \alpha\left(E - E_{dg}\right) + \alpha J$$

Одавде следи да $\alpha E_{dg} = \alpha J = \eta$, што значи да је $\alpha_i e_{ii} = 1, \forall i$ или $e_{ii} = 1/a_i$.

<u>Теорема 4.4.4</u> Једначина (1) има јединствено решење.

Доказ. Претпоставимо да једначина има два решења, E і E'. Тада из претходне теореме следи $\alpha E_{dg} = \alpha E'_{dg} = \eta$, што значи да је $E_{dg} = E'_{dg}$. Одавде добијамо

$$E - E' = P(E - E').$$

Ово значи да је свака колона матрице $E - E'$ фиксни вектор колона за P. Из Теореме 4.1.4 следи да је свака колона константни вектор. Пошто $E - E'$ има нуле на дијагонали, сви вектори морају бити 0-вектори, што значи да је $E = E'$.

<u>Теорема 4.4.5</u>. Матрица E средњих времена првог пролаза је дата са

$$E = \left(I - Z + JZ_{dg}\right)D \qquad (2)$$

где је D дијагонална матрица чији су елементи на дијагонали једнаки $d_{ii} = 1/a_i$.

Доказ. Према Теоремама 4.4.1 и 4.4.4 довољно је да покажемо да E дефинисано једнакошћу (2) задовољава једнакост (1).

Ако је $E = \left(I - Z + JZ_{dg}\right)D$ онда

$$E - D = \left(-Z + JZ_{dg}\right)D$$

и

$$P(E - D) = \left(-PZ + JZ_{dg}\right)D = E + (-I + Z - PZ)D$$

Из Теореме 4.3.2, ово је једнако

$$P(E - D) = E - AD = E - J$$

Према (2), $D = E_{dg}$ што значи да $E = P\left(E - E_{dg}\right) + J$.

<u>Теорема 4.4.6</u>. За регуларни ланац Маркова важи

$$\alpha E = \left\{E_\alpha\left[f_j\right]\right\} = \eta Z_{dg} D = \left\{z_{jj}/a_j\right\}$$

Доказ. Множећи обе стране једнакости (2) са α добијамо

$$\alpha E = \alpha\left(I - Z + JZ_{dg}\right)D = \left(\alpha - \alpha + \eta Z_{dg}\right)D = \eta Z_{dg} D$$

<u>Теорема 4.4.7</u>. Нека је $c = \sum_i z_{ii}$. Тада је $E\alpha^T = c$.

Доказ. $E\alpha^T = (I - Z + JZ_{dg})D\alpha^T = (I - Z + JZ_{dg})\xi = \xi(\eta Z_{dg}\xi) = c\xi$.

<u>Теорема 4.4.8</u>. За било која два почетна вектора вероватноће π и π' важи

$$\{E_\pi[f_j] - E_{\pi'}[f_j]\} = (\pi - \pi')(I - Z)D$$

Доказ. $\{E_\pi[f_j] - E_{\pi'}[f_j]\} = \pi E - \pi' E = (\pi - \pi')(I - Z + JZ_{dg})D = (\pi - \pi')(I - Z)D$.

Може се показати да је ланац Маркова у потпуности одређен вредностима m_{ij}, за $i \neq j$. Ове вредности ће бити не-нула елементи матрице $\bar{E} = E - D$. Матрица $\bar{E}$ ће имати $n(n-1)$ не-нула елемената, што је довољно за одређење ланца. Пошто матрица P захтева n^2 вредности, $\bar{E}$ представља минимум информација потребних за дефинисање ланца.

<u>Теорема 4.4.9</u>. За произвољни регуларни ланац Маркова важи

i. Матрица $\bar{E}$ има инверз.
ii. $\alpha = (c-1)(\bar{E}^{-1}\xi)^T$
iii. $P = I + (D - J)\bar{E}^{-1}$

Доказ. Из једнакости (1) имамо

$$\bar{E} + D = P\bar{E} + J$$

тј.

$$(P - I)\bar{E} = D - J \tag{3}$$

Претпоставимо да матрица $\bar{E}$ нема инверз. Тада би постојао не-нула вектор γ такав да важи $\bar{E}\gamma = 0$.

Дакле, из (3) следи

$$(D - J)\gamma = (P - I)\bar{E}\gamma = 0$$

$$D\gamma = J\gamma$$

$$\gamma = D^{-1}J\gamma = D^{-1}\xi\eta\gamma = (\eta\gamma)\alpha^T$$

где је $l = \eta\gamma$ број. Пошто је $\gamma \neq 0, l \neq 0$

$$\alpha^T = \frac{1}{l}\gamma$$

$$\bar{E}\alpha^T = \frac{1}{l}\bar{E}\gamma = 0$$

што је контрадикција са чињеницом да $\bar{E}\alpha^T > 0$. Следи да $\bar{E}$ има инверз.

У доказу другог дела теореме се користи Теорема 4.4.6 и својство да $D\alpha^T = \xi$.

$$(\bar{E} + D)\alpha^T = c\xi$$

$$\bar{E}\alpha^T = (c-1)\xi$$

$$\alpha^T = (c-1)\bar{E}^{-1}\xi$$

$$\alpha = (c-1)(\bar{E}^{-1}\xi)^T$$

Трећи део теореме је директна последица из (3).

4.5 Дисперзија времена првог прелаза

У овој секцији функција f_j ће имати исту дефиницију као у претходној. Према општој формули за дисперзију важи да је $Var_i[f_j] = E_i[f_j^2] - E_i[f_j]^2$. У претходној секцији смо се бавили средњом вредношћу, $E_i[f_j]$, а у овој ћемо видети како се рачуна $E_i[f_j^2]$. Обележаваћемо $W = \{E_i[f_j^2]\}$.

<u>*Теорема 4.5.1.*</u> Матрица W задовољава једнакост

$$W = P[W - W_{dg}] - 2P[Z - JZ_{dg}]D + J \tag{1}$$

Доказ. Користећи условна очекивања имамо

$$E_i[f_j^2] = \sum_{k \neq j} p_{ik}\, E_k\left[(f_j + 1)^2\right] + p_{ij} = \sum_{k \neq j} p_{ik}\, E_k[f_j^2] + 2\sum_{k \neq j} p_{ik}\, E_k[f_j] + 1$$

или другачије

$$W = P[W - W_{dg}] + 2P[E - E_{dg}] + J \tag{2}$$

Из Теореме 4.4.5 видимо да важи

$$E - E_{dg} = (-Z + JZ_{dg})D$$

Замењујући ово у једнакост (2) добијамо тврђење.

<u>*Теорема 4.5.2.*</u> Вредности за $E_i[f_i^2]$ су дате са

$$W_{dg} = D(2Z_{dg}D - I) \tag{3}$$

Доказ. Множећи обе стране једнакости са α и користећи својство да важи $\alpha P = \alpha$ добијамо

$$\alpha W = \alpha[W - W_{dg}] - 2\alpha[Z - JZ_{dg}]D + \eta$$

Пошто важи $\alpha Z = \alpha$ i $\alpha D = \alpha J = \eta$ следи да

$$\alpha W_{dg} = -\eta + 2\eta Z_{dg} D$$

што нам даље даје

$$\alpha_i \omega_{ii} = -1 + 2\, z_{ii}/a_i$$

или

$$\omega_{ii} = -\frac{1}{a_i} + \frac{2z_{ii}}{a_i^2}$$

Када преведемо ово у матричну форму добијамо (3).

Теорема 4.5.3. Јединствено решење једначине (1) је

$$W = E\left(2Z_{dg}D - I\right) + 2\left(ZE - J(ZE)_{dg}\right)$$

4.6 Гранична коваријанса

Нека су f и g две функције дефинисане помоћу скупа стања регуларног ланца. Нека је $f(s_i) = f_i$ і $g(s_i) = g_i$. Нека су $f^{(n)}$ і $g^{(n)}$ вредности ових функција у n-том кораку.

Циљ нам је да нађемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Cov_\pi \left[\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}, \sum_{k=1}^{n} g^{(k)}\right]$$

Видећемо да ова граница постоји и да је независна од π.

Теорема 4.6.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Cov_\pi \left[\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}, \sum_{k=1}^{n} g^{(k)}\right] = \sum_{i,j=1}^{r} f_i c_{ij} g_j$$

где је $c_{ij} = \alpha_i z_{ij} + \alpha_j z_{ji} - \alpha_i d_{ij} - \alpha_i a_j$.

Доказ. Претпоставићемо да је лимес независан од π и доказати теорему за случај π=α.

$$E_\alpha \left[\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}\right] = n \sum_{i=1}^{r} a_i f_i$$

и

$$E_\alpha \left[\sum_{k=1}^{n} g^{(k)}\right] = n \sum_{j=1}^{r} a_j g_j$$

Дакле,

$$\frac{1}{n}Cov_{\alpha}\left[\sum_{k=1}^{n} f^{(k)},\sum_{l=1}^{n} g^{(l)}\right]=\frac{1}{n}M_{\alpha}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}-n\sum_{i=1}^{r} a_i f_i\right)\left(\sum_{l=1}^{n} g^{(l)}-n\sum_{j=1}^{r} a_j g_j\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n}M_{\alpha}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} f^{(k)}g^{(l)}-n\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}\sum_{j=1}^{r} a_j g_j-n\sum_{l=1}^{n} g^{(l)}\sum_{i=1}^{r} a_i f_i+n^2\sum_{i,j=1}^{r} a_i a_j f_i g_j\right]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{r}\Big(Pr_{\alpha}\left[u_i^{(k)}=1\wedge u_j^{(l)}=1\right]f_i g_j-Pr_{\alpha}\left[u_i^{(k)}=1\right]f_i a_j g_j-Pr_{\alpha}\left[u_j^{(l)}=1\right]g_j a_i f_i$$
$$+a_i a_j f_i g_j\Big)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k,l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{r}\left(Pr_{\alpha}\left[u_i^{(k)}=1\wedge u_j^{(l)}=1\right]f_i g_j-a_i a_j f_i g_j\right) \qquad (1)$$

Даље

$$Pr_{\alpha}\left[u_i^{(k)}=1\wedge u_j^{(l)}=1\right]=\begin{cases} a_i p_{ij}^{(l-k)} & ako\ je\ k<l \\ a_j p_{ji}^{(k-l)} & ako\ je\ k>l \\ a_i d_{ij} & ako\ je\ k=l \end{cases} \qquad (2)$$

Дакле, из (1) и (2) добијамо

$$\frac{1}{n}Cov_{\alpha}\left[\sum_{k=1}^{n} f^{(k)},\sum_{l=1}^{n} g^{(l)}\right]$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{r} a_i f_i g_j\sum_{k<l} p_{ij}^{(l-k)}\,a_j+\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{r} a_j f_i g_j\sum_{k>l} p_{ji}^{(k-l)}\,a_i+\sum_{i,j=1}^{r}\left(a_i d_{ij}-a_i a_j\right)f_i g_j$$

Сумирајући све изразе са истим $d=|l-k|$ добијамо,

$$\frac{1}{n}Cov_{\alpha}\left[\sum_{k=1}^{n} f^{(k)},\sum_{l=1}^{n} g^{(l)}\right] \qquad (3)$$
$$=\sum_{i,j=1}^{r} a_i f_i g_j\sum_{d=1}^{n-1}\frac{n-d}{n}\left(p_{ij}^{(d)}-a_j\right)+\sum_{i,j=1}^{r} a_j f_i g_j\sum_{d=1}^{n-1}\frac{n-d}{n}\left(p_{ji}^{(d)}-a_i\right)+\sum_{i,j=1}^{r}\left(a_i d_{ij}-a_i a_j\right)f_i g_j$$

Пошто $Z=\sum_{d=0}^{\infty}(P-A)^d$ конвергира, онда је и Цезаро-сумабилан, тј.

$$Z = \lim_{n\to\infty} \sum_{d=0}^{n-1} \frac{n-d}{n} (P-A)^d$$

Дакле

$$Z - I = \lim_{n\to\infty} \sum_{d=1}^{n-1} \frac{n-d}{n} \left(P^d - A\right)$$

$$z_{ij} - d_{ij} = \lim_{n\to\infty} \sum_{d=1}^{n-1} \frac{n-d}{n} \left(p_{ij}^{(d)} - a_j\right)$$

Тада из (3)

$$\lim_{n\to\infty} Cov_{\alpha}\left[\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}, \sum_{l=1}^{n} g^{(l)}\right] = \sum_{i,j=1}^{r} \left[a_i f_i g_j \left(z_{ij} - d_{ij}\right) - a_j f_i g_j \left(z_{ji} - d_{ij}\right) + \left(a_i d_{ij} - a_i a_j\right) f_i g_j\right]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{r} f_i \left(a_i z_{ij} + a_j z_{ji} - a_i d_{ij} - a_i a_j\right) g_j$$

Овиме је доказ завршен.

Следи последица ове теореме, за случај када су f и g исте функције.

Последица 4.6.1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Var_{\pi}\left[\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}\right] = \sum_{i,j=1}^{r} f_i c_{ij} f_j$$

5. Ергодични ланци Маркова

5.1 Дефиниција и основна својства

У овом поглављу ћемо уопштити резултате до којих смо дошли у претходном. Ергодични ланац Маркова је ланац Маркова који се састоји од тачно једног ергодичног скупа. Ергодични ланац може бити регуларан или циклични. Циклични ланац се састоји од d цикличних класа, па регуларни ланац Маркова можемо посматрати као специјалан случај ергодичног ланца где је $d = 1$. Резултати до којих ћемо овде доћи ће бити уопштење резултата из претходног поглавља у смислу да када у њима заменимо $d = 1$, добијамо резултате из претходног поглавља.

Својство ергодичног ланца да се састоји из једног ергодичног скупа у суштини значи да је могућ прелаз из једног стања у било које друго стање ланца. Међутим, када је $d > 1$ прелаз је могућ само за посебне n-вредности. То значи да ниједан степен матрице P није позитиван, већ различити степени матрице имају нуле на различитим местима. Одавде закључујемо да P^n не конвергира. Ово је најбитнија разлика између цикличних и регуларних ланаца.

Иако није могућа конвергенција P^n, постоји слабији услов који задовољавају степени матрице прелаза ергодичног ланца.

Теорема 5.1.1 За произвољни ергодични ланац, низ који формирају степени матрице P, P^n, је Ојлер-сумабилан ка граничној матрици A, при чему је ова матрица облика A = ξα, где је α позитивни вектор вероватноће.

Доказ. Размотримо матрицу $(kI + (1-k)P)$, за неко $0 < k < 1$. Ова матрица је такође матрица прелаза. Пошто има позитивне елементе на истим местима на којима их има матрица P, и ова матрица представља ергодични ланац. И пошто су све вредности на дијагонали позитивне, могући је повратак у једном кораку у било које стање. Ово значи да је $d = 1$, тј нови ланац је регуларан.

У претходном поглављу показано је да $(kI + (1-k)P)^n$ тежи матрици $A = \xi\alpha$, где је α позитивни вектор вероватноће. Дакле

$$A = \lim_{n\to\infty}(kI + (1-k)P)^n$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} k^{n-i}(1-k)^i P^i \qquad (1)$$

Одавде видимо да је низ P^n Ојлер-сумабилан ка A.

Теорема 5.1.2 Нека је P ергодична матрица прелаза. A и α су дефинисани као у претходној теореми. Тада

1. За произвољни вектор вероватноће π, низ πP^n је Ојлер-сумабилан до α.
2. Вектор α је јединствени фиксирани вектор вероватноће за P.
3. $PA = AP = A$.

Доказ.

1. Ако помножимо једнакост (1) са π добијамо да је Ојлерова сума низа πP^n једнака πA = πξα = α, чиме је овај део теореме доказан.
2. Пошто смо α добили из граничне матрице низа $(kI + (1-k)P)^n$, за матрицу $(kI + (1-k)P)$, α је јединствени фиксирани вектор вероватноће. Из чињенице да важи $\pi(kI + (1-k)P) = \pi$, следи да $\pi(1-k)P = \pi(1-k)$ и из тога да је $k \neq 1$ на крају имамо да је $\pi P = \pi$. Ово значи да матрица $(kI + (1-k)P)$ и матрица P имају исте фиксне векторе.
3. Последњи део теореме следи из чињенице да $P\xi = \xi$ za bilo koju matricu prelaza i da je $\alpha P = \alpha$.

Оно што се може приметити из претходне теореме је да α и A имају иста својства као у регуларним ланцима, с тим што је услов конвергенције овде замењен сумабилношћу.

Теорема 5.1.3 Ако је P ергодична матрица прелаза, онда матрица $Z = \left(I - (P - A)\right)^{-1}$ постоји и важи

1. $PZ = ZP$
2. $Z\xi = \xi$
3. $\alpha Z = \alpha$
4. $(I - P)Z = I - A.$

Доказ. Из прве теореме следи да је низ P^n Ојлер-сумабилан до A, док из друге се види да важи $(P - A)^n = P^n - A$. Комбинацијом ова два својства добија се да је низ $(P - A)^n$ Ојлер-сумабилан до 0. Ово значи да инверз Z постоји и штавише, низ

$$I + \sum_{i=1}^{\infty}\left(P^i - A\right) \qquad (2)$$

је Ојлер-сумабилан до Z.

Други и трећи део теореме следе из чињенице да $I\xi = \xi$ и множећи $P^i - A$ са ξ са десне стране или са α са леве, добија се 0. Четврти део теореме се показује када се помножи (2) са $(I - P)$.

Теорема 5.1.4 Нека је P ергодична матрица прелаза. Тада

1. Низ P^n је Цезаро-сумабилан ка A.
2. Низ $I + \sum_{i=1}^{\infty}\left(P^i - A\right)$ је Цезаро-сумабилан ка Z.

Доказ. Ако би било $n = kd$ онда би се после n корака од стања s_i нашли у неком стању које припада истој цикличној класи као s_i. И за довољно велико k, могли би се наћи у било ком стању те цикличне класе. На основу овога, P^d се може посматрати као матрица прелаза за Марков ланац који садржи d дисјунктних ергодичних скупова, од чега ниједан није цикличан. Следи да P^{kd} тежи ка граничној матрици A_0 чији је елемент ij једнак нули у случају када s_i и s_j нису у истој цикличној класи а остале ij вредности су једнаке скалираним вредностима оних компоненти вектора α које припадају цикличној класи.

Ако је $0 \leq l < d$ онда P^{kd+l} тежи ка $P^l A_0$ када $k \to \infty$. То значи да низ P^n има d конвергентних поднизова па је Цезаро-сумабилан до средње вредности лимеса ових поднизова. Пошто два начина сумирања не могу дати различити резултат, следи

$$A = \frac{1}{d} \sum_{l=0}^{d-1} P^l A_0$$

па је P Цезаро-сумабилан ка A. Директна последица овога је да, самим тим што је $(P^i - \mathrm{A})$ Цезаро-сумабилан до 0, важи и други део теореме.

Последица 5.1.1

$$I + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n} \left(P^i - A\right) = \mathrm{Z}$$

Видели смо да се нека од основних својства матрице Z могу генерализовати на ниво ергодичних ланаца, и пошто се d не појављује експлицитно можемо рећи да за ергодичне ланце важе многи резултати до којих смо дошли у претходном поглављу. Специјално, ово важи за резултате који се тичу матрице средњег времена првог пролаза, E. Исто тако важе и резултати који се тичу граничне дисперзије и коваријансе, јер је у доказу теореме довољан услов била сумабилност бесконачног низа за Z.

5.2 Обрнути ланци Маркова

У уопштеном уводу су споменути ланци Маркова посматрани у обрнутом реду, и речено је да је Марковски процес посматран у обрнутом реду такође Марковски процес, са вероватноћама прелаза

$$p_{ij}(n) = \frac{Pr_\pi\left[X_{n-1} = s_j\right] Pr_\pi\left[X_n = s_i | X_{n-1} = s_j\right]}{Pr_\pi[X_n = s_i]}$$

где је X_n n-ти исход функције. Ово не важи уопштено за ланце Маркова. Важи у случају када $Pr_\pi\left[X_n = s_j\right]$ не зависи од n, тј. када процес крене из равнотеже. Тада је $Pr_\alpha[X_n = s_i] = a_i, \forall n$ и $p_{ij}(n)$ постаје

$$\hat{p}_{ij} = p_{ij}(n) = \frac{a_j p_{ji}}{a_i}$$

Дефиниција. Нека је P матрица вероватноћа прелаза за ергодични ланац Маркова. Нека је α фиксни вектор вероватноће за P. Тада, реверзни ланац за P је ланац Маркова са матрицом вероватноћа прелаза датим са

$$\hat{P} = \{\hat{p}_{ij}\} = \left\{\frac{a_j p_{ji}}{a_i}\right\} = \mathrm{D}P^T D^{-1}$$

Да би оправдали горњу дефиницију потребно је показати да је P матрица прелаза. По Теореми 5.1.2 све вредности a_i су позитивне, па је $\hat{p}_{ij}$ дефинисана и не-негативна.

$$\hat{P}\xi = \mathrm{D}P^T D^{-1}\xi = \mathrm{D}P^T \alpha^T = \mathrm{D}(\alpha P)^T = D\alpha^T = \xi$$

Ово значи да је $\hat{P}$ матрица прелаза.

Дефиниција. Ланац Маркова је реверзибилан ако $P = \hat{P}$.

<u>*Теорема 5.2.1*</u> Ланац Маркова је реверзибилан ако и само ако је $D^{-1}P$ симетрична матрица.

Доказ. $\hat{P} = \mathrm{D}P^T D^{-1}$. Дакле $P = \hat{P}$ ако и само ако је

$$D^{-1}P = P^T D^{-1} = (D^{-1}P)^T$$

тј. ако је $D^{-1}P$ симетрична матрица.

Реверзибилан ланац Маркова ће изгледати исто у равнотежном положају, гледано унапред и уназад.

Други начин за описивање реверзибилности је следећи. Процес је реверзибилан ако, гледано у равнотежном положају, за произвољна стања s_i и s_j, вероватноћа прелаза из s_i у s_j је једнака вероватноћи прелаза из s_j у s_i.Тј. за свако n, s_i, s_j

$$Pr_\alpha[X_n = s_i \wedge X_{n+1} = s_j] = Pr_\alpha[X_n = s_j \wedge X_{n+1} = s_i]$$

Последња једнакост ће бити тачна ако $a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$ или ако $p_{ij} = \frac{a_j p_{ji}}{a_i}$.Тј., ако је $p_{ij} = \hat{p}_{ij}, \forall i, j$.

Очигледно је да било који периодични ланац са периодом већим од 2 није реверзибилан. Разлог томе је што стање које је достижно у следећем кораку из тренутног стања не може бити резултат претходног корака.

<u>*Теорема 5.2.2*</u> Фиксни вектори вероватноће матрица P и $\hat{P}$ су једнаки.

Доказ. Нека је $\alpha P = \alpha$. Тада

$$\alpha\hat{P} = \alpha D P^T D^{-1} = \eta P^T D^{-1} = (P\xi)^T D^{-1} = \eta D^{-1} = \alpha$$

<u>*Теорема 5.2.3*</u> $\hat{Z} = DZ^T D^{-1}$

Доказ. $\hat{Z} = \left(I - \hat{P} + \hat{A}\right)^{-1}$

Из форме матрице A је јасно да је $A = DA^T D^{-1}$. Из претходне теореме се види да $\hat{A} = A$. Дакле

$$\hat{Z} = (I - DP^T D^{-1} + DA^T D^{-1})^{-1} = D(I - P^T + A^T)^{-1} D^{-1} = DZ^T D^{-1}$$

<u>*Теорема 5.2.4*</u> Било која величина чија вредност зависи само од Z_{dg}и A је код обрнутог процеса иста као код оригиналног.

Примене претходне теореме се огледају у налажењу средње вредности и очекивања првог времена прелаза.

<u>*Теорема 5.2.5*</u> Важи једнакост $C = \hat{C}$.

Доказ.

$$\begin{aligned}\hat{c}_{ij} &= a_i \hat{z}_{ij} + a_j \hat{z}_{ji} - a_i d_{ij} - a_i a_j = a_i \frac{a_j z_{ji}}{a_i} + a_j \frac{a_i z_{ij}}{a_j} - a_i d_{ij} - a_i a_j \\ &= a_j z_{ji} + a_i z_{ij} - a_i d_{ij} - a_i a_j = c_{ij}\end{aligned}$$

Из овога се закључује да сви резултати који зависе само од матрице коваријације су исти за реверзне процесе.

<u>*Теорема 5.2.6*</u> $\hat{E} - E = (ZD) - (ZD)^T$

Доказ. $\hat{E} - E = \left(I - \hat{Z} + JZ_{dg}\right)D - \left(I - Z + JZ_{dg}\right)D = (Z - \hat{Z})D$

Теорема тада следи из 5.2.3.

<u>*Теорема 5.2.7*</u> $\widehat{W} - W = \left((ZD) - (ZD)^T\right)\left(2Z_{dg}D - 3I\right) + 2(Z^2 D - (Z^2 D)T)$

Доказ. Важи $\widehat{W} - W = \left(\hat{E} - E\right)\left(2Z_{dg}D - I\right) + 2\left(\hat{Z}\hat{E} - ZE\right) - 2J\left(\hat{Z}\hat{E} - ZE\right)_{dg}$ (1)

и $\hat{E} - E = (ZD) - (ZD)^T$ (2)

Пошто $\hat{Z}\hat{E} = \left(\hat{Z} - \hat{Z}^2 + JZ_{dg}\right)D$ и $ZE = \left(Z - Z^2 + JZ_{dg}\right)D$ следи да

$\hat{Z}\hat{E} - ZE = \left(\hat{Z} - Z\right)D + \left(Z^2 - \hat{Z}^2\right)D = (ZD)^T - (ZD) + (Z^2 D) - (Z^2 D)^T$ (3)

Пошто је ово разлика матрице и њеног транспонованог облика, има нуле на дијагонали, тј.

$$\left(\hat{Z}\hat{E} - ZE\right)_{dg} = 0 \qquad (4)$$

Комбинацијом израза (1),(2),(3) и (4) долази се до тврђења.

6. **Комбиновање стања**

6.1 Спојивост ланаца

Нека је дат ланац Маркова са r стања, чија је матрица прелаза P и почетни вектор π. Нека је $A = \{A_1, A_2, \dots A_r\}$ партиција скупа свих стања. Формирамо нови процес на следећи начин.

Исход j-тог експеримента у новом ланцу је скуп A_k који садржи исход j-тог корака у првобитном ланцу. Дефинишемо вероватноће на следећи начин:

1. На нултом нивоу $Pr_\pi[X_0 \in A_i]$
2. На првом нивоу $Pr_\pi\left[X_1 \in A_j | X_0 \in A_i\right]$
3. Уопштено на n-том нивоу додељујемо $Pr_\pi\left[X_n \in A_t | X_{n-1} \in A_s \dots \wedge X_1 \in A_j \wedge X_0 \in A_i\right]$

На овај начин, процес са великим бројем стања се може редуковати на процес са мањим бројем стања. Овакве процесе називамо сједињени процеси.

Употребљавају се у случајевима када су довољни „грубљи” резултати.

Потребно је одредити да ли за овај нови тип процеса можемо користити резултате везане за ланце Маркова.

За ланац Маркова ћемо рећи да је спојив у односу на партицију $A = \{A_1, A_2, \dots A_r\}$ ако за сваки почетни вектор π, сједињени процес дефинисан са 1. и 3. је ланац Маркова, и ако вероватноће прелаза не зависе од избора π.

Обележимо са $p_{iA_j} = \sum_{k \in A_j} p_{ik}$. Тада p_{iA_j} представља вероватноћу прелаза у једном кораку код првобитног ланца Маркова, из стања s_i у скуп A_j .

<u>*Теорема 6.1.1*</u> Неопходан и довољан услов да ланац Маркова буде спојив у односу на партицију $A = \{A_1, A_2, \dots A_r\}$ је да за сваки пар скупова A_i и A_j, p_{kA_j} има исту вредност за свако s_k из A_i. Ове заједничке вредности $\{\hat{p}_{ij}\}$ формирају матрицу прелаза за сједињени ланац.

Доказ. Да би ланац био спојив неопходно је да $Pr_\pi\left[X_1 \in A_j | X_0 \in A_i\right]$ буде иста за свако π за које је дефинисана. И специјално, мора бити иста и за π које има 1 као своју k-ту компоненту. Обележимо ту заједничку вредност са $\hat{p}_{ij}$.

Дакле, из претходног важи $p_{kA_j} = Pr_k\left[X_1 \in A_j\right] = \hat{p}_{ij}$ за свако s_k из A_i. На овај начин је показано да је услов неопходан.

За доказивање довољности услова, неопходно је показати да, када је услов задовољен, вероватноћа 3. зависи само од A_s и A_t. Вероватноћа 3. може бити написана у форми $Pr_{\pi'}[X_1 \in A_t]$ где је π’ вектор који има не-нула компоненте само за стања из скупа A_s. Ова вероватноћа зависи од π и од првих n исхода. Међутим, ако је $Pr_k[X_1 \in A_t] = \hat{p}_{st}$ за свако $s_k \in A_s$, онда је јасно да важи $Pr_{\pi'}[X_1 \in A_t] = \hat{p}_{st}$.

Дакле, вероватноћа 3. зависи само од A_s и A_t.

Претпоставимо сада да имамо ланац Маркова који је спојив у односу на партицију $A = \{A_1, A_2, \ldots A_s\}$. Нека првобитни ланац има r а сједињени s стања. Нека је U- $s \times r$ матрица чији је i-ти ред вектор вероватноћа који има једнаке вредности за сва стања из скупа A_i и нуле за преостала стања.

Даље, нека је V- $r \times s$ матрица чија је j-та колона вектор чије су компоненте које одговарају стањима из A_j једнаке 1, а иначе 0.

Тада је матрица прелаза сједињеног ланца дата са

$$\hat{P} = UPV$$

Приметимо да су редови матрице PV који одговарају елементима истог партитивног скупа, међусобно једнаки. Ово ће уопштено важити за ланце који испуњавају услов спојивости. Матрица U једноставно елиминише дупликате редова, и њен избор је јединствен. У суштини све што је потребно је да i-ти ред буде вектор вероватноће који има не-нула компоненте само за стања из скупа A_i. Бира се, због једноставности, вектор са једнаким компонентама за ова стања. Такође ће се сматрати да су стања распоређена тако да она из скупа A_1 иду прва, из скупа A_2 друга и тако даље.

<u>*Теорема 6.1.2*</u> Нека је P матрица прелаза ланца који је спојив у односу на партицију A. Нека су U и V матрице дефинисане као у претходном делу. Тада је

$$VUPV = PV \qquad (1)$$

Доказ. Матрица VU има форму

$$VU = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 \end{pmatrix}$$

где су W_1, W_2, W_3 матрице вероватноћа. Услов (3) каже да су колоне матрице PV фиксни вектори од VU.

Пошто је ланац спојив, вероватноћа преласка из стања које припада скупу A_i, у скуп A_j је иста за сва стања из A_i. Ово значи да су све колоне матрице PV које одговарају A_j исте. Што значи да формирају фиксни вектор за W_j .

<u>*Теорема 6.1.3*</u> Нека су P, A, U и V дефинисани као у претходној теореми. Тада је услов (1) еквивалентан услову спојивости.

Доказ. Показано је у претходном делу да (1) подразумева спојивост, тј. да из услова спојивости следи тврђење. Обрнуто, претпоставимо да важи (1). Тада су колоне матрице PV фиксни вектори за VU. Пошто је свака матрица W_j у суштини матрица прелаза ергодичног ланца, њени фиксни вектори имају облик $c\xi$. Дакле, све компоненте колоне матрице PV која одговара једном скупу A_j морају бити исте. Што даље значи да је ланац спојив.

Из (1) се може уочити да важи

$$\hat{P}^2 = UPVUPV = UP^2V$$

и уопштено

$$\hat{P}^n = UP^nV$$

Претпоставимо сада да је P матрица прелаза апосрбујућег ланца. Даље разматрање ће бити ограничено на случај када се спајају само стања истог типа, тј. сваки скуп ће садржати само апсорбујућа или само не-апсорбујућа стања.

Стандардна форма матрице апсорбујућег ланца је

$$P = \begin{pmatrix} I & O \\ R & Q \end{pmatrix}$$

Матрица U се може написати у облику

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & O \\ O & U_2 \end{pmatrix}$$

где се елементи U_1 односе на апсорбујућа а елементи U_2 на не-апсорбујућа стања.

Слично, матрица V се може приказати у форми

$$V = \begin{pmatrix} V_1 & O \\ O & V_2 \end{pmatrix}$$

Тада услов спојивости $VUPV = PV$ се другачије може записати помоћу нових матрица као скуп услова

$$V_1U_1V_1 = V_1 \qquad (4a)$$

$$V_2U_2RV_1 = RV_1 \quad (4b)$$

$$V_2U_2QV_2 = QV_2 \quad (4c)$$

Пошто је $U_1V_1 = I$ први услов је аутоматски задовољен.

Стандардна форма матрице прелаза $\hat{P}$ је добијена из

$$\hat{P} = UPV$$

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} U_1 & O \\ O & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ R & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & O \\ O & V_2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} I & O \\ U_2 R V_1 & U_2 Q V_2 \end{pmatrix}$$

Одавде се види да

$$\hat{R} = U_2 R V_1$$

$$\hat{Q} = U_2 Q V_2$$

Из услова (4с) се добија

$$\hat{Q}^2 = U_2 Q V_2 U_2 Q V_2 = U_2 Q^2 V_2$$

Уопштено

$$\hat{Q}^n = U_2 Q^n V_2$$

Из репрезентације фундаменталне матрице N преко бесконачних низова

$$\hat{N} = I + Q + Q^2 + \cdots = U_2 I V_2 + U_2 Q V_2 + \cdots = U_2 (I + Q + Q^2 + \cdots) V_2$$

$$\hat{N} = U_2 N V_2$$

Из овога даље следи

$$\hat{\tau} = U_2 N V_2 \xi$$

$$\hat{\tau} = U_2 N \xi$$

$$\hat{\tau} = U_2 \tau$$

и

$$\hat{B} = \hat{N} \hat{R} = U_2 N V_2 U_2 R V_1$$

$$\hat{B} = U_2 N R V_1$$

$$\hat{B} = U_2 B V_1$$

Види се да се све три величине N, τ и B за спојив ланац лако изводе из одговарајућих величина оригиналног ланца.

Битна последица резултата $\hat{\tau} = U_2 \tau$ је следећа. Нека је A_i произвољни скуп не-апсорбујућих стања, и s_k стање из тог скупа. За i–ти ред се може одабрати вектор вероватноће чији је елемент који одговара стању s_k једнак 1. Ово онда значи да је $t_i = t_k$ за све s_k из A_i што доводи до закључка да, када је ланац спојив, средње време до апсорбције мора бити исто за сва почетна стања из A_i.

6.2 Слаба спојивост

Код класичног услова спојивости у односу на партицију A, посматрали смо да ли је резултујући ланац Марковљев ланац, независно од тога који је почетни вектор. Поред овога могуће је посматрати случајеве када бар један почетни вектор доводи до формирања ланца Маркова. У оваквим случајевима се каже да је ланац слабо спојив у односу на партицију A.

У наставку ће се разматрати само регуларни ланци.

За дати почетни вектор π, да би одредили да ли је процес Марковљев ланац потребно је посматрати вероватноће дате у облику

$$Pr_\pi\left[X_{n+1} \in A_t | X_n \in A_s \wedge \ldots \wedge X_1 \in A_j \wedge X_0 \in A_i\right] \qquad (1)$$

За задато π, процес ће бити ланац Маркова ако ове вероватноће не зависе од исхода пре n-тог.

Потребно је пронаћи услове при којима познавање прошлости не утиче на вероватноћу (1). Прво ћемо видети на које начине утиче.

Из информације (1) се може видети да је првобитни ланац после n корака у стању које припада скупу A_s, при чему није познато које је то стање. Обзиром да није познато које је стање достигнуто, оно што се може израчунати су вероватноће да процес буде у сваком стању из скупа A_s. За произвољни вектор вероватноће β, са β^{j} се обележава вектор који се добија када се све компоненте које не одговарају стањима из скупа A_j изједначе са нулом, а остале ставе пропорционално онима из β. Рећи ћемо да је β^{j} рестрикција β на A_j.

Размотримо сада информацију дату са (1). Чињеница да $X_0 \in A_i$ може бити интерпретирана као промена почетног вектора у π^i. Даље, $X_1 \in A_j$ се може интерпретирати као промена овог вектора у $\left(\pi^i P\right)^j$.

Процедура се наставља док се не узму у обзир све информације из (1) На крају се добија један сет вероватноћа које одговарају стањима скупа A_s.

Помоћу ових вероватноћа се може лако израчунати вероватноћа прелаза у следећем кораку у скуп A_t.

Међутим, вероватноће које проналазимо на овај начин се могу прилично разликовати, зависно од информација које имамо. На пример, информација којом располажемо може да доведе до тога да вероватноћа догађаја да процес буде у стању из којег је сигуран прелаз у скуп A_t буде велика. Са друге стране, другачија прошлост процеса може да доведе до мале вероватноће овог догађаја.

Због тога је потребно размотрити случајеве у којима се прошлост може занемарити. На пример, то је могуће када је вероватноћа прелаза из стања скупа A_s у скуп A_t иста за сва стања из A_s. Тада вероватноће да процес буде у стању из A_s не утичу на предвиђања о следећем кораку сједињеног процеса.

Други случај када се прошлост може занемарити је када се на крају, независно од претходне информације, добија исти скуп вероватноћа за свако стање из A_s.

Као што је претходно описано, информација дата са (1) се може представити помоћу рестрикције вектора вероватноће на A_s. Овај вектор је добијен из почетног вектора π низом трансформација, на следећи начин

$$\pi_1 = \pi^i$$

$$\pi_2 = (\pi_1 P)^j$$

$$\pi_3 = (\pi_2 P)^k \qquad (2)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\pi_m = (\pi_{m-1} P)^s$$

Обележићемо са Y_s све векторе добијене из коначних низова $A_i, A_j, \dots, A_s$ који се завршавају са A_s.

Теорема 6.2.1 Сједињени ланац је ланац Маркова за почетни вектор π ако и само ако је за свако s и t вероватноћа $Pr_\beta[X_1 \in A_t]$ иста $\forall \beta \in Y_s$.Ова заједничка вредност је вероватноћа прелаза у сједињеном ланцу, из скупа A_s у скуп A_t .

Доказ. Вероватноћа (1) се може представити у форми $Pr_\beta[X_1 \in A_t]$ за одговарајуће $\beta \in Y_s$. Да би направили конструкцију (2) користимо првих n исхода. Према хипотези ова вероватноћа зависи само од s и t. Дакле, сједињени ланац је Марковљев ланац.

Обрнуто, претпоставимо да је сједињени ланац Марковљев ланац за иницијални вектор π. Нека је β неки вектор из Y_s. Тада је β добијен из неког низа, нпр. дужине n, $A_i, A_j, \dots, A_s$. Претпоставићемо да су чланови овог низа исходи коришћени за израчунавање вероватноће (1). Тада је ова вероватноћа $Pr_\beta[X_1 \in A_t]$ и према Марковљевом својству не сме зависити од исхода пре A_t . Што даље значи да има исту вредност $\forall \beta \in Y_s$.

Оно што се може закључити из претходног је да неки почетни вектори доводе до ланца Маркова, док са осталима то није случај. Вектор који засигурно доводи до ланца Маркова је фиксни вектор α.

Теорема 6.2.2 Нека је регуларни ланац Маркова слабо спојив у односу на партицију $A = \{A_1, A_2, \dots, A_s\}$ Тада почетни вектор α доводи до сједињеног процеса који ће бити ланац Маркова. Вероватноће прелаза ће бити

$$\hat{p}_{ij} = Pr_{\alpha^i}[X_1 \in A_j]$$

И сваки други вектор који доводи до ланца Маркова ће довести до истих вероватноћа прелаза.

Доказ. Пошто је ланац слабо спојив, постоји неки почетни вектор π који доводи до ланца Маркова. Нека је његова матрица прелаза $\{\hat{p}_{ij}\}$, где је

$$Pr_{\pi}[X_n \in A_j | X_{n-1} \in A_i \land X_{n-2} \in A_k] = \hat{p}_{ij}$$

за све скупове за које је ова вероватноћа дефинисана. Овај израз се може записати и другачије

$$P_{\pi P^{n-2}}[X_2 \in A_j | X_1 \in A_i \land X_0 \in A_k]$$

Када $n \to \infty$ добија се

$$Pr_{\alpha}[X_2 \in A_j | X_1 \in A_i \land X_0 \in A_k] = \hat{p}_{ij}$$

Овиме је показано да вероватноћа у облику (1), где је α почетни вектор, не зависи од прошлости пре последњег исхода за случај када је $n = 1$. У уопштеном случају је слична ситуација. Закључак је да, када је α почетни вектор, резултујући сједињени ланац је Марковљев ланац. У току доказа је показано да за почетни вектор π, $\hat{p}_{ij}$ је иста као и када је почетни вектор α, што значи да је иста за било који почетни вектор који резултира ланцом Маркова.

Према претходној теореми, ако тестирамо слабу спојивост можемо претпоставити да је процес кренуо почетним вектором α. У овом случају матрица прелаза $\hat{P}$ може бити написана у форми

$$\hat{P} = UPV$$

где је матрица V иста као раније, док матрица U има вектор α^i на месту i-тог реда. Када се ради о спојивости постоји већа слобода у одабиру U, док код слабе спојивости то није случај.

У наставку ће бити размотрени услови под којима се може очекивати слаба спојивост.

Ако је сједињени ланац Марковљев ланац, $\hat{P}^2$ се може израчунати на два начина. Рачунајући директно из првобитног ланца добија се $\hat{P}^2 = UP^2V$. Квадрирањем $\hat{P}$ добија се $\hat{P}^2 = UPVUPV$. Дакле, потребно је да важи

$$UPVUPV = UP^2V$$

или

$$VUPV = PV \qquad (3)$$

Ово је услов спојивости изражен преко нове матрице U.

Услов је неопходан и довољан за спојивост и самим тим довољан за слабу спојивост. Други услов који би био довољан је

$$UPVU = UP \qquad (4)$$

Овај услов указује на то да су редови матрице UP фиксни вектори за VU.

Матрица VU има облик

$$VU = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 \\ 0 & 0 & W_3 \end{pmatrix}$$

где је W_j матрица прелаза чији су сви редови једнаки α^j.

Својство да је i-ти ред матрице UP фиксни вектор матрице VU значи да је рестрикција овог вектора на A_j у ствари фиксни вектор за W_j. А ово даље значи да компоненте овог вектора морају бити пропорционалне са α^j. Дакле,

$$\left(\alpha^i P\right)^j = \alpha^j \qquad (5)$$

што значи да ако кренемо из α, скуп Y_i добијен помоћу конструкције (2) садржи $\forall i$ један елемент α^i. Обрнуто, ако такав скуп има само један елемент, онда је (5) задовољено, а самим тим и (4).

Својство да Y_i има само један елемент за свако i значи да, у тренутку када је последњи исход A_i, познавање претходних исхода не утиче на расподелу вероватноћа сваког стања из A_i. Ово значи да је (4) неопходан и довољан услов да прошлост пре последњег експеримента не даје нове информације, и при том је довољан услов за слабу спојивост.

6.3 Проширење ланаца Маркова

У претходном одељку тема је била спојивост ланаца која је омогућавала да „велики” ланац сведемо на мањи ланац, ради лакше анализе.

У овом делу ће бити показано да је могуће ићи у супротном правцу, тј. да се од „малог“ ланца формира тзв. проширени ланац, који даје детаљније информације о процесу који се разматра.

Посматра се ланац Маркова са стањима $s_1, s_2, \dots, s_r$. Проширени ланац се формира на следећи начин. Стање у новом ланцу је пар стања $\left(s_i, s_j\right)$ из оригиналног ланца, за које важи $p_{ij} > 0$. Ова нова стања ће бити обележена са $s_{(ij)}$.

Претпоставићемо да се у оригиналном ланцу прелази, из стања s_i у стање s_j, и из s_j у s_k дешавају у два узастопна корака. У проширеном ланцу ће ово бити један корак, из стања $s_{(ij)}$ у $s_{(jk)}$. Са оваквом претпоставком, прелаз из $s_{(ij)}$ у $s_{(kl)}$ је могућ једино ако је $j = k$.

Вероватноће прелаза су дате са

$$p_{(ij)(jl)} = p_{jl}$$

$$p_{(ij)(kl)} = 0, j \neq k$$

или

$$p_{(ij)(kl)} = p_{jl} d_{jk}$$

Може се уочити да је $p^{(n)}_{(ij)(kl)} = p^{(n-1)}_{jk} p_{kl} > 0$ ако и само ако $p^{(n-1)}_{jk} > 0$. Дакле, ако је оригинални ланац ергодичан, такав ће бити и проширени. Такође ако оригинални ланац има период d исти случај ће бити са проширеним.

Стање $s_{(ij)}$ у проширеном ланцу је апсорбујуће ако је $i = j$ и ако је стање s_j апсорбујуће у оригиналном ланцу.

Претпоставимо сада да је оригинални ланац апсорбујући. Нека је $s_{(ij)}$ не-апсорбујуће стање у проширеном процесу. Пошто је оригинални ланац апсорбујући, мора постојати апсорбујуће стање s_k такво да је могућ прелаз из s_j у s_k у проширеном процесу. Одавде следи да је проширени ланац такође апсорбујући.

Из проширеног ланца је могуће вратити се у оригинални ланац спајањем стања. У циљу овога се формира партиција стања из проширеног ланца $A = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$, где је A_i скуп свих стања облика $s_{(ki)}$. Услов спојивости је онда да $p_{(ki)A_j}$ не зависи од k, а ово је испуњено због Марковљевог својства оригиналног ланца. Добијени сједињени процес је тада исти са оригиналним ланцем.

Потребно је упоредити основне величине проширеног ланца са одговарајућим величинама оригиналног ланца. Биће разматран случај регуларних ланаца.

<u>*Теорема 6.3.1*</u> Нека је $\alpha = \{a_i\}$ фиксни вектор за регуларни ланац са матрицом прелаза P. Нека је $\hat{a} = \{a_{(ij)}\}$ фиксни вектор за проширени ланац. Тада је

$$a_{(ij)} = a_i p_{ij}$$

Доказ. Очигледно је да је $a_i p_{ij}$ позитивно. Такође

$$\sum_{(i,j)} a_{(ij)} = \sum_{i,j} a_i p_{ij} = \sum_j a_j = 1$$

Дакле, једино што треба показати је да је $\hat{a} = \{a_i p_{ij}\}$ фиксни вектор за матрицу прелаза проширеног процеса.

$$\sum_{(i,j)} a_{(ij)}\, p_{(ij)(kl)} = \sum_{i,j} a_i p_{ij} p_{jl} d_{jk} = \sum_j a_j p_{jl} d_{jk} = a_k p_{kl} = a_{(kl)}$$

<u>*Теорема 6.3.2*</u> Фундаментална матрица за проширени ланац је

$$\hat{Z} = \{z_{(ij)(kl)}\} = \{d_{(ij)(kl)} + (z_{jk} - a_k)p_{kl}\}$$

Доказ.

$$z_{(ij)(kl)} = d_{(ij)(kl)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(p_{(ij)(kl)}^{(n)} - a_{(kl)}\right) = d_{(ij)(kl)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(p_{(jk)(kl)}^{(n)} - a_k p_{kl}\right)$$
$$= d_{(ij)(kl)} + p_{kl}\sum_{n=0}^{\infty}\left(p_{jk}^{(n)} - a_k\right) = d_{(ij)(kl)} + p_{kl}(z_{jk} - a_k)$$

<u>Теорема 6.3.3</u> Средње време првог прелаза код проширеног процеса је

$$e_{(ij)(kl)} = \frac{1}{a_k p_{kl}} - \frac{(z_{jk} - z_{lk})}{a_k}$$

Доказ.

$$e_{(ij)(kl)} = \left(d_{(ij)(kl)} - z_{(ij)(kl)} + z_{(kl)(kl)}\right)\frac{1}{a_{(kl)}}$$
$$= \left[d_{(ij)(kl)} - p_{kl}(z_{jk} - a_k) - d_{(ij)(kl)} + p_{kl}(z_{lk} - a_k) + 1\right]\frac{1}{a_k p_{kl}}$$
$$= \left[1 - p_{kl}(z_{jk} - z_{lk})\right]\frac{1}{a_k p_{kl}} = \frac{1}{a_k p_{kl}} - \frac{(z_{jk} - z_{lk})}{a_k}$$

Као што се очекивало, $e_{(ij)(kl)}$ не зависи од i.

<u>Теорема 6.3.4</u> Гранична коваријанса код проширених ланаца је дата са

$$c_{(ij)(kl)} = a_i p_{ij} p_{kl} z_{jk} + a_k p_{kl} p_{ij} z_{ii} + a_k p_{kl} d_{(ij)(kl)} - 3a_i p_{ij} a_k p_{kl}$$

7. Примери и примене Марковских ланаца

Пример1. Транзиција молекула течности

У свакој од 3 посуде се налази литар течности. Течност из прве посуде ће се обележавати са a, друге са b и треће са c. Врши се следећа операција. Течност из прве посуде се преспе у другу посуду, затим се један литар хомогеног раствора из друге посуде преспе у трећу и на крају литар раствора из треће се преспе у другу посуду. Вероватноћа да је неки молекул течности из друге посуде некон операције прешао у трећу једнака је $\frac{1}{4}$, јер се у трећој посуди налази $\frac{1}{4}$ литра течности b.

Ако операцију пресипања поновимо још једном, ново стање у посудама је следеће:

$$\frac{5a}{16}+\frac{5b}{16}+\frac{6c}{16}, \qquad \frac{6a}{16}+\frac{6b}{16}+\frac{4c}{16}, \qquad \frac{5a}{16}+\frac{5b}{16}+\frac{6c}{16}$$

Циљ је одредити вероватноћу да после n оваквих операција неки молекул течности из i-те посуде пређе у j-ту.

Матрица вероватноћа преласка је

$$P=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ако је $B=[a\ b\ c]$ онда је

$$BP=\left[\frac{a}{4}+\frac{b}{4}+\frac{c}{2} \quad \frac{a}{2}+\frac{b}{2} \quad \frac{a}{4}+\frac{b}{4}+\frac{c}{2}\right]$$

$$BP^2=\left[\frac{5a}{16}+\frac{5b}{16}+\frac{6c}{16} \quad \frac{6a}{16}+\frac{6b}{16}+\frac{4c}{16} \quad \frac{5a}{16}+\frac{5b}{16}+\frac{6c}{16}\right].$$

Потребно је наћи матрицу P^n. Ради лакшег израчунавања матрица се приказује у облику $P=\frac{1}{4}C$, где је $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.Важи једнакост $P^n=\frac{1}{4^n}C^n$. Пошто је

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda$$

на основу Кронекер-Капелијеве теореме важи једнакост $C^3=5C^2-4C$, па је

$$C^4 = CC^3 = C(5C^2 - 4C) = 5C^3 - 4C^2 = 5(5C^2 - 4C) - 4C^2 = 21C^2 - 20C$$

и уопште $C^n = \gamma_n C^2 + \delta_n C$, где треба одредити γ_n и δ_n.

Из једнакости $C^{n+1} = C^n C$ следи

$$\gamma_{n+1} C^2 + \delta_{n+1} C = (\gamma_n C^2 + \delta_n C)C = \gamma_n(5C^2 - 4C) + \delta_n C^2$$

$$\gamma_{n+1} = 5\gamma_n + \delta_n$$

$$\delta_{n+1} = -4\gamma_n \quad (n \in N)$$

$$\gamma_{n+1} = 5\gamma_n - 4\gamma_{n-1}$$

Једначина $\lambda^2 = 5\lambda - 4$ има решења $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$, па је $\gamma_n = C_1 1^n + C_2 4^n, \forall n \in N$ ако важи за $n = 1$ и $n = 2$, тј.

$$\gamma_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{12} 4^n$$

$$\delta_n = \frac{4}{3} - \frac{4^n}{12}$$

$$C^n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} + \frac{4^n}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

На пример,

$$p_{12}^{(n)} = \tfrac{1}{3 \cdot 4^n} \cdot 2 + \tfrac{1}{3} = p_{22}^{(n)},$$

$$p_{32}^{(n)} = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \cdot (-4) + \frac{1}{3},$$

$$\lim_{n \to \infty} p_{i2}^{(n)} = \frac{1}{3} = p_2^*$$

И уопштено

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j^* = \frac{1}{3}$$

Може се уочити да гранична вредност не зависи од i. Закључак је да је ланац ергодичан, са стационарним вероватноћама

$$(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Пример2. Случајно лутање

Једнодимензионално случајно лутање је ланац Маркова чији је скуп стања коначан или бесконачан подскуп целих бројева. У једном кораку, процес из стања i може прећи „унапред“ у стање $i+1$, може се вратити „уназад“ у стање $i-1$ или може остати у стању у ком јесте.

У општем случају матрица прелаза има облик

$$P = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & \cdots & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \end{pmatrix}$$

где је $p_i > 0, q_i > 0, r_i \geq 0$ и $p_i + q_i + r_i = 1$, $i = 1,2, \ldots.,$ $p_0 \geq 0, r_0 \geq 0, p_0 + r_0 = 1$

Другачије записано, ове вероватноће се могу представити

$$Pr\{X_{n+1} = i+1 | X_n = i\} = p_i$$

$$Pr\{X_{n+1} = i-1 | X_n = i\} = q_i$$

$$Pr\{X_{n+1} = i | X_n = i\} = r_i$$

У наставку ћемо размотрити случај када је $r_i = 0, p_i = p$, и $q_i = q, \forall i$ тј. случај када је лутање хомогени ланац Маркова.

Вероватноће прелаза су тада дакле

$$p_{ij} = \begin{cases} p & j = i+1 \\ q & j = i-1 \\ 0 & j \notin \{i+1, i-1\} \end{cases}$$

Почетна расподела вероватноћа по стањима је дата са $p_0^{(0)} = 1, p_i^{(0)} = 0, i \neq 0$. Вероватноћа прелаза $p_{ij}{}^{(n)}$ из тачке i у тачку j у n корака се одређује на следећи начин. Нека је честица при кретању из i до j направила x корака у позитивном смеру и y у негативном. Тада је $x + y = n$ и $x - y = j - i$, одакле се добија да је

$$x = \frac{n+j-i}{2}, \quad y = \frac{n-j+i}{2}$$

Дакле, број $n + j - i$ мора бити паран. За $p_{ij}{}^{(n)}$ се добија $p_{ij}{}^{(n)} = 0$ ако је $n + j - i$ непаран број и

$$p_{ij}{}^{(n)} = \binom{n}{(n+j-i)/2} p^{(n+j-i)/2} q^{(n-j+i)/2}$$

ако је n паран број.

Специјално за вероватноћу повратка у тачку i после 2n корака добија се

$$p_{ii}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n$$

Користећи Стирлингову формулу $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ при $n \to \infty$, добија се да при $n \to \infty$ важи

$$p_{ii}^{(2n)} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} p^n q^n \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)^2} p^n q^n = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

Ако је $p = \frac{1}{2}$, онда важи $p_{ii}^{(2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ па је $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(2n)} = \infty$, а стање i је повратно. Дакле, сва стања су повратна. Ако је $p \neq \frac{1}{2}$ онда је $4pq < 1$ па је је $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(2n)} < \infty$, а сва стања су пролазна.

Одредимо још вероватноћу v_{ij} догађаја да ће честица полазећи из тачке i стићи у тачку j, где је $i < j$. Очигледно је да важи $v_{ij} = v_{01}^{j-i}$. За вероватноћу v_{01} на основу потпуне вероватноће се добија

$$v_{01} = p + q v_{01}^2$$

што се може записати и следећи начин

$$v_{01} = p + qp^2 + 2q^2p^3 + \cdots$$

$$v_{01}(p) = p + \alpha_1 qp^2 + \alpha_2 q^2 p^3 + \cdots$$

$$= p + \alpha_1(1-p)p^2 + \alpha_2(1-p)^2p^3 + \cdots$$

где су α_1, α_2... константе.

Тада се овај израз може представити помоћу функције $h_m(p) = (1-p)^m p^{m+1}$, за $m = 1,2, \ldots$

Функција $h_m(x) = (1-x)^m x^{m+1}$ је строго растућа за $x \in [0, \frac{1}{2}]$ јер

$$h'_m(x) = -m(1-x)^{m-1}x^{m+1} + (m+1)(1-x)^m x^m = (1-x)^{m-1}x^m\big(-mx + (m+1)(1-x)\big) =$$

$$(1-x)^{m-1}x^m(-2mx + m + 1) > 0, x \in [0, \frac{1}{2}]$$

Одавде следи да је и $v_{01}(p)$ строго растућа на $[0, \frac{1}{2}]$, па је $v_{01}(p) < 1$ за $p < 1/2$.

За $p = 1/2$ мора бити $v_{01}(p) = 1$ јер су оба решења квадратне једначине једнака 1.

Одавде следи да је $v_{01} = 1$ или $v_{01} = {}^{p}/_{q}$. Очигледно је да $v_{01} = 0$ за $p = 0$ и $v_{01} = 1$ за $p = 1$. Може се показати да је v_{01} непрекидна функција аргумента p, па зато важи $v_{01} = {}^{p}/_{q}$ за $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$. Према томе, за $i < j$ се добија

$$v_{ij} = \begin{cases} [p/q]^{j-i} & 0 \leq p \leq 1/2 \\ 1 & 1/2 \leq p \leq 1 \end{cases}$$

Аналогно за $i > j$ се добија

$$v_{ij} = \begin{cases} 1 & 0 \leq p \leq 1/2 \\ [p/q]^{i-j} & 1/2 \leq p \leq 1 \end{cases}$$

Пример3. Отворени модел Леонтифа

У овом моделу се разматра тржиште у ком постоји r фабрика и у циљу упрошћења претпоставља се да свака фабрика производи једну врсту робе. Такође, претпоставља се да су пратећи елементи производње, типа земљиште, дрво, минерали итд., бесплатни тј. да не улазе у цену завршног производа.

Фабрике су међусобно повезане у смислу да свака од њих мора да купи одређену количину производа неке друге, да би реализовала сопствену производњу.

Дефинисаћемо технолошке коефицијенте на следећи начин: q_{ij} је количина производа фабрике j коју мора купити фабрика i да би произвела робу у вредности од 1$. Нека је Q матрица са елементима q_{ij}.

Према дефиницији, ови коефицијенти су ненегативни. Примећује се да је за фиксирано i, сума коефицијената q_{ij} у ствари укупна вредност робе потребне фабрици i да произведе своју робу у вредности од 1$.

Да би i-та фабрика била профитабилна или барем на нули, сума коефицијената мора бити мања или једнака од 1. Уколико важи строга неједнакост рећи ћемо да је фабрика профитабилна, а уколико важи једнакост рећи ћемо да је без профита. Сматра се да свака фабрика спада у једну од ове две групе, тј. да нема непрофитабилних фабрика.

Ове услове можемо записати

$$Q \geq 0 \tag{1}$$

$$Q\xi \leq \xi \tag{2}$$

Након што смо дефинисали робу потребну за производњу (сировине) сада дефинишемо производе i-те фабрике. Нека је x_i новчана вредност производа i-те фабрике и нека је $\pi = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ редни вектор ових вредности. Пошто је i-тој фабрици потребно $x_i q_{ij}$ производа j-те фабрике, вектор вредности сировина које су потребне фабрикама је πQ.

j-та компонента вектора πQ даје укупну вредност робе коју j-та фабрика треба да произведе да би задовољила потражњу других фабрика за њеним производима. Претпоставимо да тржиште складишти за потрошњу c_i производа i-те фабрике. Нека је $\gamma = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ вектор потрошње. Очекује се да

$$\gamma \geq 0 \tag{3}$$

Захтев да производња целог тржишта буде таква да задовољи и индустријске и потрошачке потребе се записује

$$\pi = \pi Q + \gamma \tag{4}$$

или

$$\pi(I - Q) = \gamma \tag{5}$$

Потребно је наћи ненегативна решења ове једначине.

Пошто вектор γ може бити произвољан може се приметити да су једначине (5) нехомогене и да ће имати решење ако и само ако матрица $(I - Q)$ има инверз. Штавише, решења једначине (5) ће бити ненегативна $\forall\gamma$ ако и само ако $(I - Q)^{-1}$ има све компоненте ненегативне.

Циљ је дакле наћи неопходне и довољне услове да $(I - Q)^{-1}$ буде ненегативна.

Овај проблем ће бити решен тако што ће се моделу придружити ланац Маркова. Ланац Маркова ће имати следећа својства:

1. Скуп стања чине r процеса модела плус додато једно апсорбујуће стање s_0 које ће се називати банкарско стање.
2. Матрица прелаза је дефинисана на следећи начин

$$p_{00} = 1$$

$$p_{0j} = 0, j > 0$$

$$p_{ij} = q_{ij}, i, j > 0$$

$$p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{r} q_{ij}\,, i > 0$$

Интуитивна интерпретација овога је следећа. Када фабрика добије долар она га потроши купујући p_{ij} од фабрике j. Остатак од долара (сума p_{i0}) је профит који се ставља у банку. Својство да је банкарско стање апсорбујуће значи да банка добија новац али га не троши.

Ако матрица Q задовољава (1) и (2), онда ће постојати ненегативна решења једначине (5), $\forall r \geq 0$, ако и само ако је придружени ланац Маркова апсорбујући, са једним апсорбујућим стањем s_0.

Када је s_0 једино апсорбујуће стање за апсорбујући ланац, онда $(I-Q)^{-1} = N$ постоји и ненегативна је, одакле следи да је $\pi = \gamma N$ тражено решење. У супротном би $(I-Q)^{-1}$ имала све елементе бесконачне, тј. не би постојала.

Следи економска интерпретација резултата. Види се да је могуће из сваког стања достићи банкарско стање. При том једино профитабилна фабрика директно достиже ово стање, фабрика без профита га достиже преко профитабилне. Што значи да је свака фабрика или профитабилна, или зависи од профитабилне.

Размотримо сада случај када нема профитабилне фабрике. Ово значи да све што заради производњом она потроши за набавку сировина, тј. не може да заради више од онога што јој је неопходно за рад. То се може показати на следећи начин. Када не би било профитабилне фабрике, онда би све редне суме матрице Q биле једнаке 1, тј. $Q\xi = \xi$. Ако помножимо са десне стране једнакост (4) са ξ, добија се

$$\pi\xi = \pi Q\xi + \gamma\xi$$

што значи да је $\gamma\xi = 0$.Ово указује да је спољашња потрошња производа једнака 0.

Сада ћемо видети шта се дешава у уопштеном случају када наш услов није задовољен, тј. када придружени ланац Маркова није апсорбујући ланац са једним апсорбујућим стањем. Тада постоји ергодичан скуп (различит од s_0) фабрика које нису профитабилне и које не зависе од фабрика ван тог скупа. Подматрица $\bar{Q}$ ових фабрика тада задовољава својство $\bar{Q}\xi = \xi$, што значи да цело тржиште не може да задовољи потребе за производима ових фабрика. Исто тако фабрике које користе као сировине производе фабрика овог скупа неће моћи да спроведу сопствену производњу. Уколико би елиминисали из скупа све фабрике без профита и оне које зависе од њих добили би скуп фабрика који може да испуни било коју спољну потражњу.

У терминима стања ово значи да произвољно ергодично стање (различито од s_0) и било које стање из ког је ово ергодично стање достижно, не могу да испуне спољашње захтеве.

Фабрике које нису у стању да испуне спољашње захтеве су бескорисни сегмент економије и самим тим могу бити избрисане, што ће водити томе да $(I-Q)^{-1}$постоји.

Питање које се даље поставља је: Ако потрошач купи од фабрике i робу у вредности од 1$ који део тог новца добију остале фабрике? Прво се мора израчунати колики су укупни захтеви сваке од фабрика. Пошто је γ вектор чија је i-та компонента једнака 1, а остале 0, $\pi = \gamma N$ је у ствари i-ти ред матрице N.

n_{ij} је количина сировина коју фабрика j мора произвести да би фабрика i произвела своју робу у вредности од 1\$. Пошто је профит фабрике j $-p_{j0}$, када фабрика i добије 1\$, профит фабрике j биће $n_{ij}p_{j0}$.

Сума свих профита је $\sum_j n_{ij}p_{j0} = b_{i0} = 1$(пошто је s_0 једино апсорбујуће стање). Ово показује да долар који дају потрошачи за робу на крају завршава као зарада профитабилних индустрија.

Повезано питање је следеће: ако фабрика i прими поруџбину у вредности од 1\$, колика је укупна потребна активност да би се та поруџбина испунила. Индустрија j ће морати да произведе n_{ij} јединица своје робе. Сума свих количина потребне робе је t_i, i-та компонента од τ. За наруџбину γ укупна производња износи $\gamma N\xi = \gamma\tau$.

Размотрићемо један конкретан пример. Нека су технолошки коефицијенти 6 фабрика дати матрицом

$$Q = \begin{pmatrix} {}^1/_2 & 0 & {}^1/_4 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1/_4 & {}^1/_4 & {}^1/_4 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1/_2 & 0 & {}^1/_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^1/_4 & {}^3/_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1/_4 & 0 & {}^1/_4 & 0 & {}^1/_4 \end{pmatrix}$$

онда

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1/_4 & {}^1/_2 & 0 & {}^1/_4 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1/_4 & {}^1/_4 & {}^1/_4 & {}^1/_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1/_2 & 0 & {}^1/_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^1/_4 & {}^3/_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ {}^1/_4 & 0 & {}^1/_4 & 0 & {}^1/_4 & 0 & {}^1/_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{matrix}$$

Из прве колоне се види да су s_1, s_2и s_6 профитабилне фабрике. Скуп $\{s_4, s_5\}$ је ергодичан скуп фабрика које немају профит и које не зависе од профитабилних фабрика. Фабрика s_6 је профитабилна али зависи од елемената ергодичног скупа. Дакле, s_4, s_5 и s_6 су бескорисне и самим тим могу бити искључене. Фабрика s_3 је без профита али није бескорисна. Када се искључе поменуте фабрике матрица изгледа

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Па је

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ \frac{8}{3} & \frac{4}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

На пример, једна наруџбина фабрици s_2 ће довести до производње у вредности од 6 долара, $\frac{8}{3}$ од s_1, $\frac{4}{3}$ од s_2, 2 од s_3. На овој једној наруџбини вредној 1\$, профит s_1 је $\frac{2}{3}$, профит s_2 је $\frac{1}{3}$, док s_3 нема профит.

Ако ставимо да спољашња потражња буде $\gamma = (1,3,2)$, онда ће бити потребно да различите фабрике произведу $\gamma N = (20,4,16)$ јединица. Укупна производња ће тада вредети $\gamma\tau = 40\$$.

Од почетног ланца Маркова се може направити сједињени, са партицијом $\{\{s_0\},\{s_1,s_2\},\{s_3\}\}$. Тада за сједињени процес важи

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \widehat{N} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \hat{\tau} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

За $\hat{\gamma} = (4,2)$, $\hat{\gamma}\widehat{N} = (24,16)$ $\hat{\gamma}\hat{\tau} = 40$.

Пример 4. Симулација одређених врста ланаца

У овом делу ћемо емпиријски проверити нека тврђења која су дата у претходном делу. Конкретно, симулацијом у програмском језику R ћемо видети трајекторије карактеристичних врста ланаца. Такође ће се видети како изгледају степени регуларне матрице прелаза са повећањем n, што ће бити експериментална потврда фундаменталне теореме за регуларне ланце. На сличан начин ће се проверити и закон великих бројева за регуларне ланце, као и очекивано време до апсорпције код апсорбујућих ланаца.

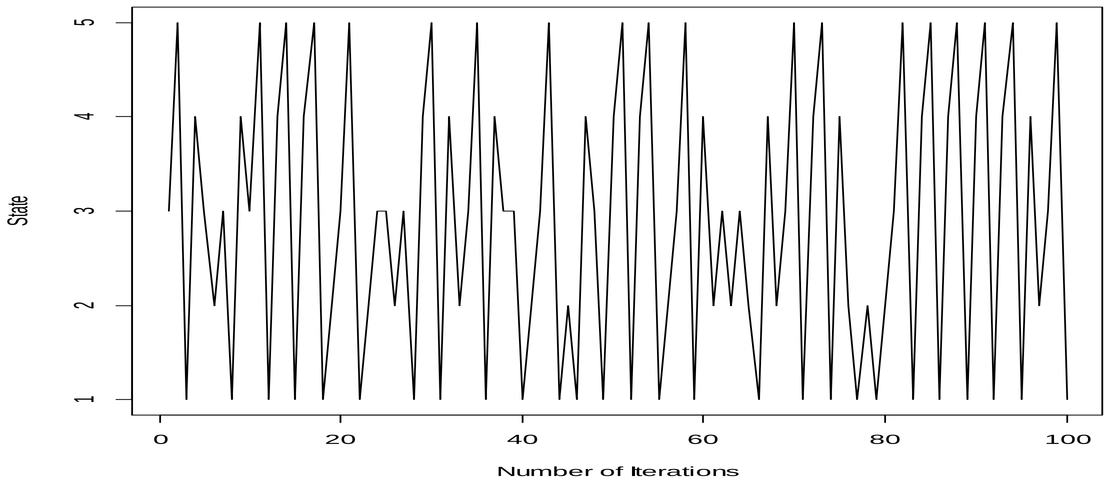
Матрице ће углавном бити приказиване табеларно, ради боље прегледности.

Нака је дата је регуларна матрица прелаза:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	0	0.25	0	0.75	0
s_2	0.33	0	0.67	0	0
s_3	0.29	0.14	0.14	0.14	0.29
s_4	0	0.30	0.20	0	0.50
s_5	1.00	0	0	0	0

Позивамо функцију у R-у за одређени почетни вектор:

```
tmat = matrix(c(0,1/4,0,3/4,0,
                1/3,0,2/3,0,0,
                2/7,1/7,1/7,1/7,2/7,
                0,3/10,1/5,0,1/2,
                1,0,0,0,0), ncol=5, byrow=TRUE);
io = matrix(c(1/4,1/3,5/12,0,0), ncol=5, byrow=TRUE);
DTMC(tmat, io, 100, trace=TRUE)
```



Ово је трајекторија једног регуларног ланца. Може се приметити да нема неког одређеног обрасца у кретању и да процес током времена пролази кроз сва стања.

Од тога каква је регуларна матрица прелаза ће зависити колико ће које стање бити „посећено“.

Следи провера фундаменталне теореме за регуларне ланце. Посматрамо различите степене дате регуларне матрице прелаза.

3. степен

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	0.54	0.07	0.20	0.11	0.09
s_2	0.28	0.16	0.20	0.16	0.20
s_3	0.20	0.18	0.16	0.30	0.16
s_4	0.13	0.21	0.06	0.53	0.08
s_5	0.08	0.23	0.32	0.00	0.38

8. степен

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	0.24	0.17	0.20	0.19	0.19
s_2	0.26	0.17	0.17	0.24	0.17
s_3	0.28	0.16	0.18	0.23	0.16
s_4	0.32	0.14	0.18	0.20	0.15
s_5	0.23	0.17	0.15	0.30	0.14

20. степен

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	0.27	0.16	0.18	0.23	0.17
s_2	0.27	0.16	0.18	0.23	0.16
s_3	0.27	0.16	0.18	0.23	0.16
s_4	0.27	0.16	0.18	0.23	0.16
s_5	0.27	0.16	0.18	0.23	0.16

Може се приметити да се степени матрице са повећањем n приближавају граничној матрици и да већ за 20. степен видимо приближне вредности вектора α. Види се да важи својство да су сви елементи вектора α позитивни, као и да је сума свих елемената овог вектора једнака 1.

Користећи аутпут претходне функције можемо видети колико је корака процес провео у сваком стању и на тај начин потврдити закон великих бројева за регуларне ланце.

Овај пут се ланац посматра на 200 корака.

	N=200	N=200	N=200	Очекивани број
s_1	54	53	56	54
s_2	34	31	30	32
s_3	38	35	32	36
s_4	40	46	50	46
s_5	34	35	32	32

Примећује се да су експериментални резултати блиски теоријским. Има одређених одступања, али ово је очекивано обзиром да се теоријске вредности односе на много веће вредности за n.

Потребно је проверити да ли се мењају ови резултати уколико променимо почетни вектор.

```
tmat = matrix(c(0,1/4,0,3/4,0,
                1/3,0,2/3,0,0,
                2/7,1/7,1/7,1/7,2/7,
                0,3/10,1/5,0,1/2,
                1,0,0,0,0), ncol=5, byrow=TRUE);
io = matrix(c(1/8,2/3,1/24,1/12,1/12), ncol=5, byrow=TRUE);

DTMC(tmat, io, 200, trace=TRUE)
```

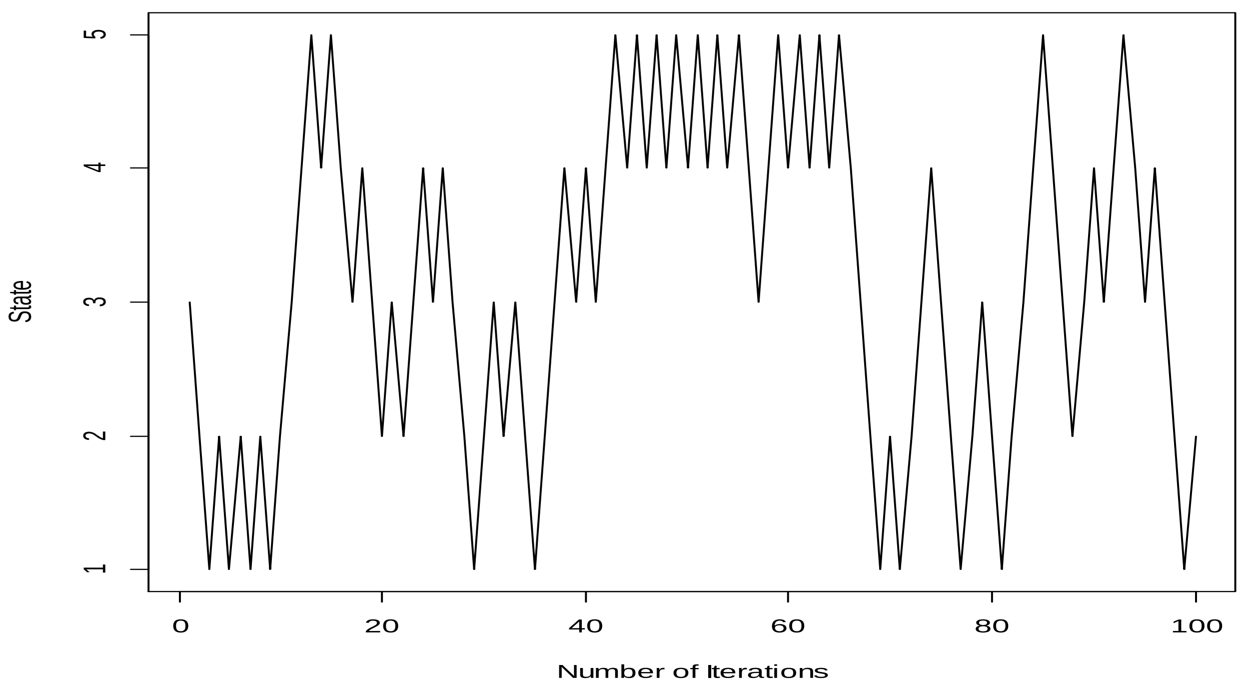
	N=200	N=200	N=200	Очекивани број
s_1	55	57	52	54
s_2	29	34	39	32
s_3	37	29	40	36
s_4	44	45	39	46
s_5	35	35	30	32

Примећује се да промена почетног вектора вероватноћа не утиче на резултате.

Следи приказ једног цикличног ланца, где ће се видети како изгледа трајекторија једног таквог ланца. Видећемо и како се понашају степени матрице, са повећањем n.

```
tmat = matrix(c(0,1,0,0,0,
                1/2,0,1/2,0,0,
                0,1/2,0,1/2,0,
                0,0,1/2,0,1/2,
                0,0,0,1,0), ncol=5, byrow=TRUE);
io = matrix(c(1/4,1/3,5/12,0,0), ncol=5, byrow=TRUE);

DTMC(tmat, io, 100, trace=TRUE)
```



У кретању овог ланца се за разлику од регуларног ланца могу уочити извесне правилности. Види се да није могућ прелаз у било ком тренутку у било које стање, што негде потврђује тврђење да сваки степен матрице прелаза цикличног ланца садржи нуле и да самим тим низ који образују степени матрице не конвергира.

Да би утврдили то, степенујемо матрицу прелаза цикличног ланца.

3. степен

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	0	0.75	0	0.25	0
s_2	0.38	0	0.50	0	0.13
s_3	0	0.50	0	0.50	0
s_4	0.13	0	0.50	0	0.38
s_5	0	0.25	0	0.75	0

8.степен

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	0.28	0	0.50	0	0.22
s_2	0	0.53	0	0.47	0
s_3	0.25	0	0.50	0	0.25
s_4	0	0.47	0	0.53	0
s_5	0.22	0	0.50	0	0.28

12.степен

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	0.26	0	0.5	0	0.24
s_2	0	0.51	0	0.49	0
s_3	0.25	0	0.5	0	0.25
s_4	0	0.49	0	0.51	0
s_5	0.24	0	0.5	0	0.26

15.степен

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	0	0.50	0	0.50	0
s_2	0.25	0	0.50	0	0.25
s_3	0	0.50	0	0.50	0
s_4	0.25	0	0.50	0	0.25
s_5	0	0.50	0	0.50	0

Види се да сваки степен матрице садржи нуле, и то за парне и за непарне степене на различитим местима. То значи да су неки прелази могући само у „парним“ корацима, док су други могући само у „непарним“ корацима.

Закључује се да низ степена матрице не конвергира.

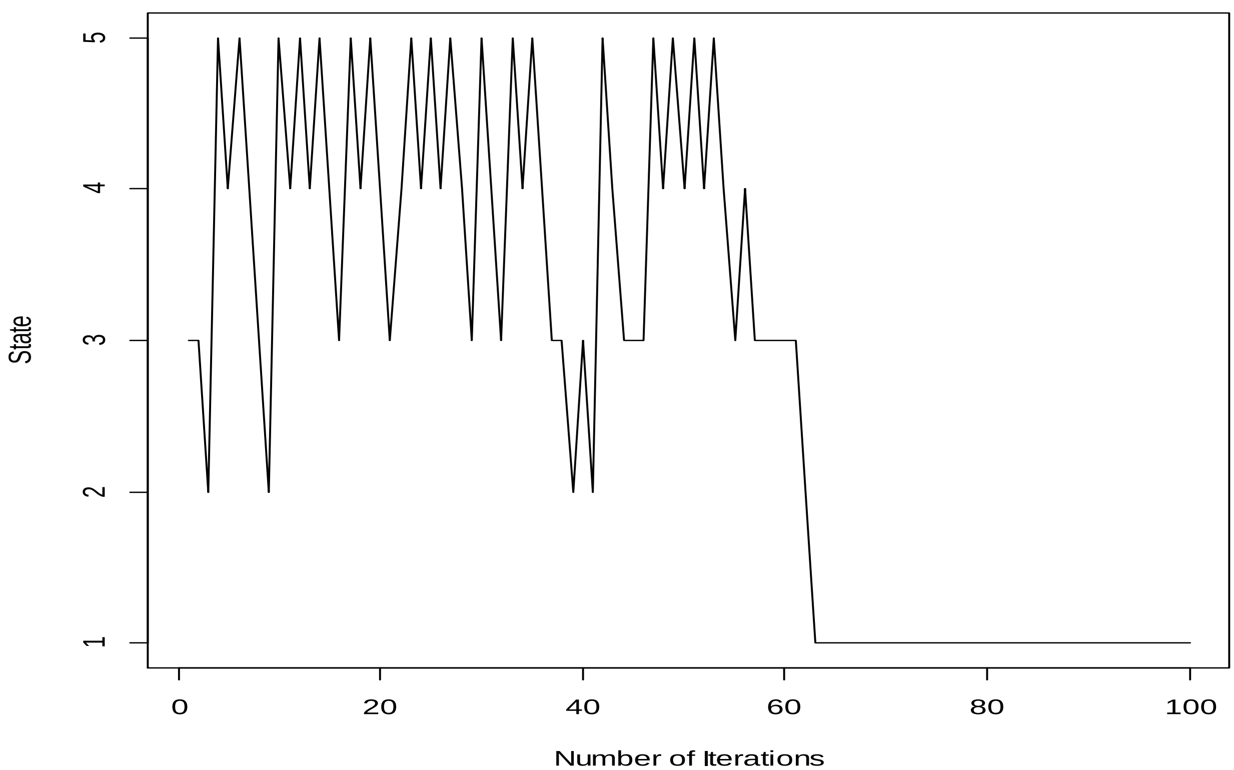
На крају ћемо видети какви су експериментални резултати за просечно време до апсорпције код апсорбујућих ланаца.

Посматрамо ланац са следећом матрицом прелаза:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
s_1	1	0	0	0	0
s_2	0.11	0	0.33	0	0.56
s_3	0	0.17	0.5	0.2	0.13
s_4	0	0	0.5	0	0.5
s_5	0	0	0	1	0

Као што се може видети апсорбујуће стање је стање s_1.

Једна од могућих трајекторија овог ланца изгледа



У овој симулацији процес је достигао апсорбујуће стање у 63. кораку.

У циљу проналажења средњег времена до апсорпције треба наћи фундаменталну матрицу за овај ланац. На основу једнакости $N = (I - Q)^{-1}$ добија се да је

$$N = \begin{pmatrix} 9.1 & 47.6 & 41.6 & 32.1 \\ 9.1 & 53.5 & 45.5 & 34.8 \\ 9.1 & 53.5 & 45.5 & 35.8 \\ 9.1 & 53.5 & 47.5 & 36.8 \end{pmatrix}$$

Средње време до апсорпције је тада вектор

$$N\xi = \begin{pmatrix} 130.4 \\ 142.8 \\ 145.8 \\ 146.8 \end{pmatrix}$$

где се вредности у вектору односе на случајеве када ланац крене из другог, трећег, четвртог и петог стања, редом.

У R-у се користи функција која враћа прво време прелаза, где ће циљано стање бити апсорбујуће стање, па ће прво време прелаза бити управо време до апсорпције.

```
tmat = matrix(c(1,0,0,0,0,
                1/9,0,3/9,0,5/9,
                0,1/6,1/2,1/5,2/15,
                0,0,1/2,0,1/2,
                0,0,0,1,0), ncol=5, byrow=TRUE);
io = matrix(c(0,0,0,0,1), ncol=5, byrow=TRUE);
FPTime(1, 100, tmat, io, 1000)
```

Први аргумент у функцији представља циљано стање, други аргумент је број симулација, док је последњи аргумент број корака сваког ланца. Почетни вектор ће се мењати, да би добили средње вредности за свако могуће почетно стање (сем апсорбујућег).

Добијају се следећи резултати:

Почетно стање	Средња вредност	Средња вредност	Очекивана вредност
$\boldsymbol{s_2}$	122.59	117.08	130.4
$\boldsymbol{s_3}$	134.45	140.2	142.8
$\boldsymbol{s_4}$	147.48	164.07	145.8
$\boldsymbol{s_5}$	122.96	150.34	146.8

Добијени резултати јесу у одређеној мери блиски теоријским очекивањима. Види се да је највеће одступање у првој симулацији било у случају када је почетно стање било s_5, док је у другој симулацији највеће одступање било када је процес кренуо из стања s_4.

Пошто су мале разлике између теоријских очекивања, потребно би било много више симулација да би се експериментално добиле одговарајуће вредности и омогућила детаљнија упоредивост резултата.

Литература

[1] J. Kemeny, L. Snell, *Finite Markov Chains*, D. Van Nostrand Company, New Jersey, 1960.

[2] Ј. Малишић, *Случајни процеси*, Грађевинска књига, Београд, 1989.

[3] П. Младеновић, *Вероватноћа и статистика,* Математички факултет, Београд, 2008.

[4] S. Karlin, H. M. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1975.

[5] J.T.Baldwin, *On Markov Processes in Elementary Mathematics Courses*, American Mathematical Monthly, 1989.

[6] http://www.rle.mit.edu/rgallager/documents/6.262-4vaw.pdf

[7] https://www.math.ucdavis.edu/~gravner/MAT135B/materials/ch13.pdf

[8] http://www.columbia.edu/~ks20/stochastic-I/stochastic-I-MCII.pdf