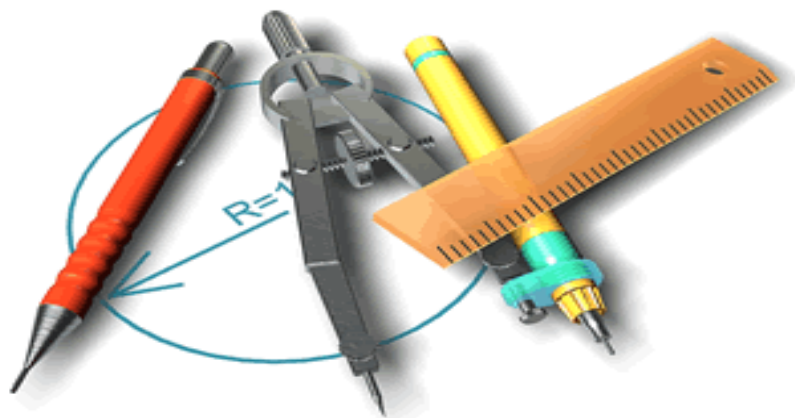


Математички факултет

Универзитет у Београду

Мастер рад



Тема:

*„Komparativna analiza nastave matematike у Србији и
далеко-источним Азијским земљама заснована на **Timss**
истраживањима”*

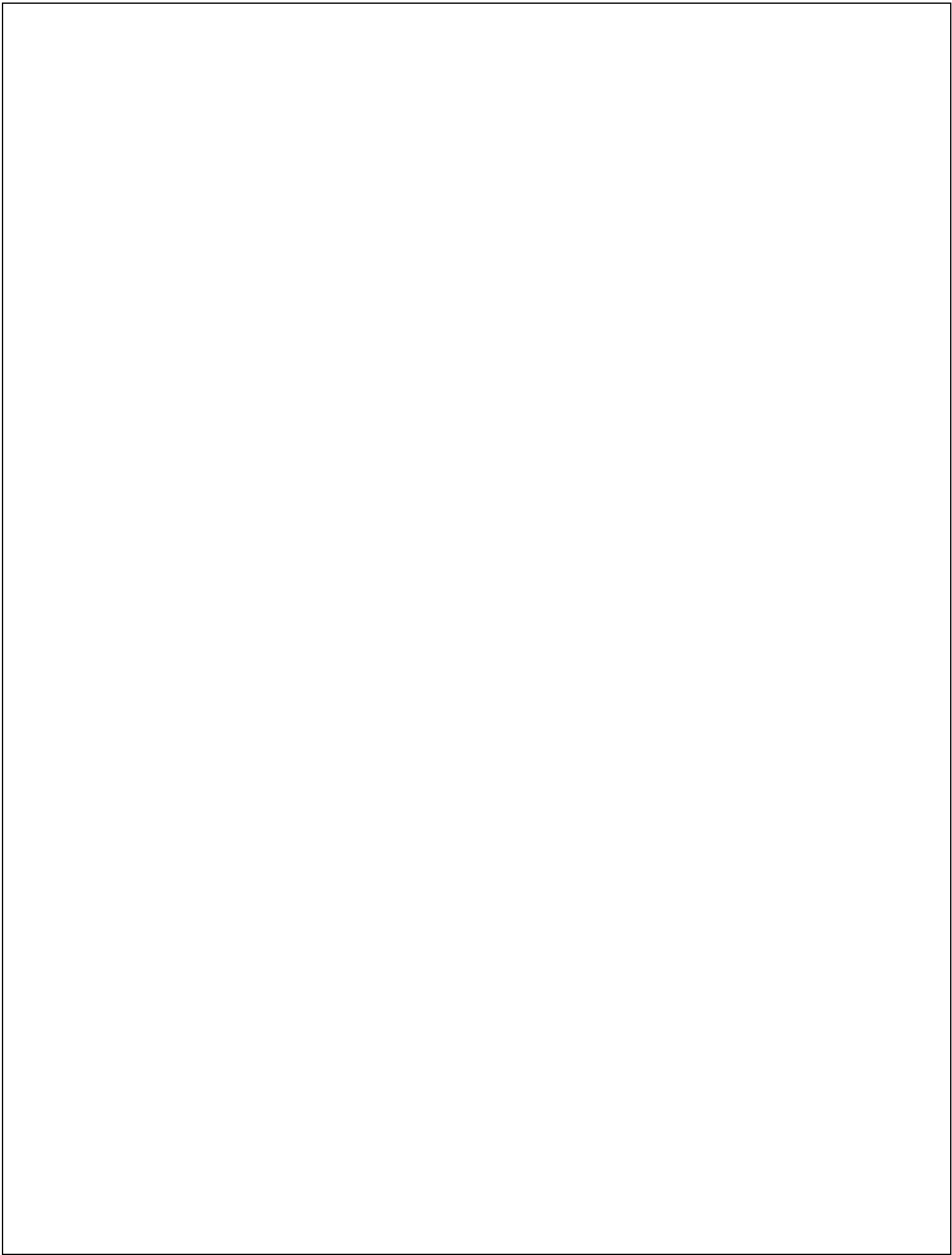
Студент : Драган Ђурђевић

Број индекса : ml 1076/2011

Смер : професор математике и рачунарства

Ментор : Милан Божић

У Београду 2013



Садржај :

1. УВОД	1
2. МЕЂУНАРОДНО ИСТРАЖИВАЊЕ УЧЕНИЧКИХ ПОСТИГНУЋА У МАТЕМАТИЦИ И ПРИРОДНИМ НАУКАМА (TIMSS)	3
3. УЗОРАК ПРОБНОГ И ГЛАВНОГ ИСТРАЖИВАЊА У СРБИЈИ	4
4. TIMSS КУРИКУЛУМ	4
5. ДОМЕНИ САДРЖАЈА И КОГНИТИВНИ ДОМЕНИ	5
6. ИНСТРУМЕНТИ ИСТРАЖИВАЊА	8
7. TIMSS 2003 У СРБИЈИ	9
8. TIMSS 2007 У СРБИЈИ	13
9. КАРАКТЕРИСТИКЕ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ У ИСТОЧНОЈ АЗИЈИ TIMSS ИСТРАЖИВАЊЕ ИЗ 1999	15
10. ИСТРАЖИВАЊЕ	24
11. ИНТЕРАКТИВНИ ЧАС	28
12. МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА У СРБИЈИ И СВЕТУ	36
12.1. СРБИЈА НА МЕЂУНАРОДНИМ МАТЕМАТИЧКИМ ТАКМИЧЕЊИМА	37
12.2. СЈЕДИЊЕНЕ ДРЖАВЕ	39
12.3. ЈАПАН	44
12.4. КИНА	49
13. ЗАКЉУЧАК.....	52
14. ЛИТЕРАТУРА	54

УВОД

Дете од најранијих дана учи и своја искуства претаче у своје сазнање о свету. Свако ново искуство утиче на тај систем сазнања и регрупише га. Тако да се може рећи да дете од рођења развија математичке појмове и своје мишљење. Постоје разна истраживања о развоју мишљења, којима се баве социолози, педагози, психолози и остале струке научничког мишљења су се експанзирала у току 20. И 21. Века. Разлика која се постиже у ТИММС тестовима указује на значај утицаја средине и услова које ученика окружују.

Савремено гледање на развој почетних математичких појмова предшколске деце произилази из општег гледања на дете. Дете је личност у развоју која најбоље уче интегрисано, а не изоловано, када уче путем асоцијација а не путем понављања штурих чињеница. Хуманистичко схватање дететове природе утиче на промене у начину схватања његовог физичког и духовног развоја. Изузетно је битна рана стимулација ученика у предшколском периоду. Разлика између Србије и далекоисточних земаља у квалитету наставе и постигнутим резултатима ученика на такмичењима је последица занемаривања стимулације дивергентног размишљања током предшколског и школског периода.

Најбољи начин потпомагања развоју јесте праћење промена и прихватање премисе да је дете индивидуа која се развија сопственим темпом, треба имати у виду када наставник планира час и уколико организује квиз путем мултимедијалне игрице треба да обрати пажњу на разлику у нивоима развоја међу ученицима истог узраста.

У дететовој природи је да истражује и да само открива законицисти и принципе који владају у природи јер је дете први чинилац свога развоја. На наставнику је да кроз васпитно-образовни рад направи подстицајно окружење и социјалну средину. Као што се друштво као социјална група временом мења тако се мењају и деца као социјална бића. Како се мења средина у којој појединац одраста тако се мењају и потребе и захтеви самог друштва.

Ученик који је одрастао у информатичкој ери ближе разуме појам дигиталних медија и више су интегрисани у његовом животу него у животу наставника. На наставнику је да премости генерацијски јаз и створи у школи атмосферу и простор какво дете налази у родитељском дому. У примереном окружењу ученика стимулишемо за дивергентно и иновативно понашање. У далекоисточним земљама ученици имају боље технолошке услове, учионице су савременије и боље опремљене.

Дете стиче свест о себи и свету на различите начине. Велики део стварања дететове сазнајне сфере се налази у генетском наслеђу али такође велики део има и утицај средине тј. Окружења у коме се дете развија. Интегрисати ИКТ у наставу математике је одличан начин да се ученик припреми за оно што га очекује у старијем узрасту. Такође самоактивност детета подстиче интелектуални развој које се развија на специфичан начин. Предшколски период је период који је обележен једном значајном и свакодневном активношћу- игром. То је период у коме дете има одлично памћење , изузетно развијену имагинацију, интензиван сензомоторни и иконики развој.

Познајући ове карактеристике развоја и учења наставник пред собом има палету могућности које може да изабере за развијање математичких појмова код школске деце. Приликом употребе ИКТа- ова полазишта усмеравају наставнике у избору услова, креирању средине, избору метода, облика и начина рада као и садржаја почетних математичких појмова код деце школског узраста.

Ученик не учи само тако што је изложено подучавању, већ тако што и само изграђује своје знање. Уколико наставник жели да приближи неки појам ученицима већу ефикасност у изграђивању свести о том појму ће добити уколико одлучи да не пусти само филм о томе (што је на жалост пракса у нашој земљи) већ и да припреми презентацију у облику квиза, или интерактивну едукативну игру или неку другу активност у коме ће ученици уместо пасивног гледања активно учествовати тражећи одговоре, предвиђајући, и проверавати своје претпоставке и на тај начин опет интегрисати те чињенице у свој систем знања и реконструисати их. ИКТ и мултимедија не треба само да представљају супституцију за телевизију.

Савремена педагошка наука се мало бави интеграцијом информатичког образовања у наставу математике . Може се рећи да се информатичко образовање разликује од других васпитно-образовних процеса јер захтева специфично и интерактивно спајање личности и рачунара.

Процес информатичког образовања деце зависи од информатичког образовања наставника. Недовољна стручност, мањак знања подстичу стагнацију информатичког образовања. Такође, мишљење наставника да се не треба прилагођавати савременим захтевима друштва резултира тиме да виде и стичу само недостатке и ограничења које рачунар има. Ситуације које воде разумевању математичких појмова су оне у којима дете учи решавањем проблема а не репродуковању информација и тачних одговора.

Жан Пијаже наводи да уместо да користе логику да би добила одређену информацију , ученици граде логику од одређене информације. На томе треба и да се базира приступ наставника приликом коришћења ИКТ-а у активностима на часовима математике..

МЕЂУНАРОДНО ИСТРАЖИВАЊЕ УЧЕНИЧКИХ ПОСТИГНУЋА У МАТЕМАТИЦИ И ПРИРОДНИМ НАУКАМА (TIMSS)

Истраживање TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) представља међународно истраживање образовних постигнућа ученика основне школе у области математике и природних наука. Истраживање TIMSS осмислило је и реализује Међународно удружење за евалуацију образовних постигнућа (International Association for the Evaluation of Educational Achievement – IEA), чије је седиште у Амстердаму, у Холандији, заједно са Међународним центром за TIMSS и PIRLS истраживања при Бостонском колеџу (TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College). Послове у вези са структурирањем узорака у земљама учесницама, прикупљањем и обрадом података, обављају Центар за обраду података (IEA Data Processing Center), са седиштем у Хамбургу, у Немачкој, као и Канадска национална агенција за статистику (Statistics Canada), са седиштем у Отави, која се бави, пре свега, пословима у вези са структурирањем узорака истраживања за земље учеснице. Истраживање се реализује сваке четири године у IV и VIII разреду. До сада су реализовани циклуси 1995, 1999. и 2003. Године. Србија је први пут учествовала у овом истраживању 2003. Године. Код нас је у циклусу 2003 и 2007 истраживање спроведено на узорку ученика VIII разреда.

Кључна интенција TIMSS истраживања састоји се у томе што омогућава сагледавање сложеног односа између постигнућа ученика у контексту курикулума, школских и породичних услова, у односу на ставове ученика, поређење постигнућа између појединих земаља, као и праћење промена у постигнућу популације ученика одређене земље која је била учесник у више циклуса истраживања. За дубље и потпуније разумевање резултата ученичког постигнућа од великог значаја је проучавање и дубље разумевање контекста у којем ученици уче, односно различитих услова који представљају саставни део тих контекста у школи и породици. То је и пут откривања могућности унапређења наставе и учења математике и природних наука у основној школи. Занимљива су поређења и анализе између земаља – учесница, на основу којих, такође, може да се дође до корисних резултата. У том смислу, постоје веома различите могућности поређења, почев од избора земаља са којима се врши поређење, као и када је у питању садржај поређења.

УЗОРАК ПРОБНОГ И ГЛАВНОГ ИСТРАЖИВАЊА У СРБИЈИ

У складу са прецизно одређеним методолошким нормама у вези са популацијом и формирањем узорка, дефинисаних у оквиру концепције TIMSS истраживања, формиран је узорак истраживања за Србију. У TIMSS терминологији, националну циљну популацију у случају Србије сачињавају све основне школе, док су национално дефинисану циљну популацију представљале све основне школе, изузев основних школа које су биле у режиму искључења, а то су: основне школе са Косова и Метохије, основне школе које гравитирају овом региону, екстремно мале основне школе и специјалне основне школе. У складу са TIMSS критеријумима, скицирана је ефективна циљна популација за Србију, која представља 1.100 матичних школа и око 350 школа-издвојених одељења.

TIMSS КУРИКУЛУМ

Модел TIMSS курикулума подразумева три аспекта: предвиђени курикулум (intended curriculum), примењени курикулум (implemented curriculum) и постигнути курикулум (attained curriculum). У оваквој подели курикулума може се говорити заправо о једном курикулуму са специфичним својствима на три различита нивоа, конципираном на принципу вертикалног стратификовања. У складу са овим моделом курикулума, у оквиру TIMSS истраживања предвиђа се и реализује тест постигнућа из области математике и природних наука. Такође, примењују се и упитници за националног координатора истраживања, за директоре школа, наставнике математике и природних наука и ученике, који обезбеђују широк спектар информација о сва три нивоа курикулума. У упитницима постоје питања која се непосредно односе на структуру и садржаје предвиђеног курикулума за математику и природне науке, едукацију, искуства и ставове наставника, непосредну реализацију садржаја математике и природних наука, коришћене наставне методе, организацију наставе у учионици и искуства и ставове ученика. На тај начин се долази до утемељења ова три аспекта, односно нивоа курикулума. Овде се мора нагласити да није оправдано поистоветити појам "курикулум" са појмом "наставни план и програм", с обзиром

на чињеницу да се под курикулумом подразумева шири спектар различитих садржаја и активности које превазилазе оквир наставног програма и наставе.

ДОМЕНИ САДРЖАЈА И КОГНИТИВНИ ДОМЕНИ

Саставни део концепције TIMSS истраживања у теоријском и методолошком смислу представља прецизну разраду структуре, дефинисање, објашњење и појмовно разграничење домена садржаја и когнитивних домена у области математике и природних наука. У давању одговора на питања у вези са нивоом и природом постигнућа ученика полази се од концепције и организације когнитивних домена и домена садржаја, као и димензија у оквиру ових домена, који чине основну структуру испитивања постигнућа ученика четвртог и осмог разреда и који представљају темељ концепције TIMSS истраживања.

У области математике, као и у области природних наука, когнитивни домени организовани су и дефинисани у поретку који подразумева пораст нивоа комплексности сваког следећег у низу дефинисаног домена. Тако, на пример, у оквиру природних наука пораст комплексности домена креће се од знања чињеница, као почетног нивоа, преко разумевања појмова, па до анализе и резонувања, као најкомплекснијег домена у оквиру природних наука. Ако су код ученика развијене когнитивне способности и вештине карактеристичне за један од два комплекснија когнитивна домена, подразумева се да су развијене и способности карактеристичне за нижи по комплексности когнитивни домен. На сличан начин организоване су и димензије у оквиру когнитивних домена, које представљају одређене когнитивне способности и вештине карактеристичне за припадајући домен. На пример, у оквиру математичког когнитивног домена именованог као коришћење појмова, способности формулисање и уочавање разлика дефинишу се на тај начин да су оне по својој структури комплексније у односу на способности класификовања и представљања, које им у развојном смислу претходе. Уочљиво је да су когнитивни домени и димензије у оквиру њих организовани у вертикално-кумулативном поретку. За разлику од когнитивних домена, домени садржаја математике и природних наука организовани су у хоризонтално-линеарном поретку, који подразумева равномеран обухват свих

предвиђених садржаја који чине основу испитивања нивоа постигнућа ученика у области математике и природних наука.

Као домени садржаја, у области математике дефинисани су (1) број, (2) алгебра, (3) мерење, (4) геометрија и (5) подаци, а као когнитивни домени (1) знање чињеница, (2) примена знања и (3) резонување. У области природних наука заступљено је испитивање постигнућа у области биологије, хемије, физике и географије, а као домени садржаја дефинисани су сами наставни предмети, и то (1) наука о животу (биологија), (2) хемија, (3) физика, (4) наука о земљи (географија) и (5) наука о животној средини (екологија), док су као когнитивни домени дефинисани (1) знање чињеница, (2) примена знања и (3) резонување.

Математички когнитивни домен именован као знање чињеница односи се на скуп способности и вештина које омогућавају поседовање одређених математичких знања, полазећи од чињенице да лакоћа у коришћењу математике или резонувању у оквиру одређених математичких ситуација зависи примарно од математичког знања. У оквиру овог математичког домена утврђују се способности и вештине које су неопходне за поседовање и функционалну употребу математичког чињеничног знања и знања поступака, и то: присећање, препознавање, из рачунавање, извођење прорачуна, мерење и класификација/ређање. Когнитивни домен именован као примена знања односи се на утврђивање способности и вештина које омогућавају ученицима да остваре везу између елемената знања, да ти елементи не би остали међусобно изоловани. Полазиште за њихово дефинисање представља интенција да се математика у школи подучава на тај начин да се код ученика развију различите могућности њене примене и, у том смислу, примена математике у решавању проблемских математичких ситуација представља један од примарних начина ефикасног коришћења математичког знања. Према TIMSS теоријској основи дефинисања домена, решавање проблема треба да представља централни циљ, а често и средство подучавања математике у школи. Основне способности и вештине које се дефинишу у оквиру овог домена су: селектовање, представљање, моделовање, примена и решавање рутинских проблема (последња димензија је у оквиру TIMSS 2003 циклуса представљала посебан математички когнитивни домен). Когнитивни домен резонување укључује постојање капацитета за логичко и систематично мишљење. Он укључује интуитивно и индуктивно резонување засновано на обрасцима и правилима која се користе да би се стигло до решења нерутинских

проблема, односно оних проблема са чијом природом ученици вероватно нису упознати. У оквиру њега дефинишу се следеће когнитивне способности и вештине: анализирање, генерализација, синтетизовање/интегрисање, оправдавање решења објашњењима и решавање нерутинских проблема.

Когнитивни домен у оквиру наука именован као знање чињеница односи се на сазнајну базу ученика о релевантним научним чињеницама, информацијама, средствима и поступцима. Основне способности и вештине ученика у оквиру овог домена одређене су као присећање/препознавање, дефинисање, описивање примерима и употреба средстава и поступака. Когнитивни домен именован као примена знања, сачињавају когнитивне способности и вештине ученика које се односе на примену знања и разумевање у непосредним ситуацијама. У овој области дефинисане су следеће когнитивне способности и вештине: упоређивање/противстављање/класификација, коришћење модела, повезивање, интерпретација информација, проналажење решења и објашњавање. Когнитивни домен именован као резонување подразумева когнитивне способности и вештине које се збивају у процесима у вези са решавањем проблема и научним резонувањем, које се очекују од ученика да буду демонстриране у комплекснијим задацима који се односе на природне науке. У таквим задацима од ученика се захтева анализа и интерпретација проблема, интегрисање и синтеза одређеног броја чинилаца или референтних појмова из математике и природних наука, претпостављање и предвиђање, осмишљавање истраживања и њихових поступака, анализа и интерпретација података, извлачење закључака, генерализација, вредновање и повезивање решења проблема и њиховог објашњења. Когнитивне способности и вештине дефинисане у оквиру овог когнитивног домена представљене су редоследом следећих група: анализа/решавање проблема, интегрисање/синтетисање, претпостављање/предвиђање, осмишљавање/планирање, извођење закључака, генерализација, вредновање и оправдавање решења објашњењима. Поред тога, у оквиру процењивања способности и вештина у области науке, посебну област представља научно испитивање, које се не истражује као посебни когнитивни домен у оквиру наука, већ испитиване способности и вештине припадају другим когнитивним доменима, и то: формулисање питања и хипотеза, осмишљавање истраживања, приказивање података, анализа и интерпретација података и извођење закључака и развијање објашњења.

ИНСТРУМЕНТИ ИСТРАЖИВАЊА

Концепцијом истраживања предвиђено је да се у земљама-учесницама изведу испитивања знања ученика помоћу тестова, а остали подаци прикупе помоћу упитника за ученике, предметне наставнике и директоре школа и да се у ове сврхе употребе методолошки уједначени инструменти у свим земљама. Инструменти су конструисани на основу претходног прикупљања предлога и постизања консензуса међународних експерата за образовање, математику, природне науке и мерење.

У тесту постигнућа заступљени су задаци вишеструког избора и задаци са конструкцијом одговора (задаци отвореног типа), и ову категорију сачињавају задаци са сложенијим одговором и задаци са кратким одговором. У односу на комплексност задатка, они се оцењују са 1 и 0, односно са 2, 1 и 0 поена. У TIMSS статистичким процедурама узима се у обзир и чињеница да одређени делови теста, обично завршни делови теста или они који су њима близу, не буду испуњени од стране одређеног броја ученика, вероватно из разлога недовољног времена или замора који је наступио када су дошли на ред ти делови теста постигнућа.

Основна улога упитника о контекстуалним условима састоји се у прикупљању обиља информација неопходних за дубље и потпуније разумевање резултата постигнућа ученика у области математике и природних наука. Упитницима се прикупљају информације у следећим контекстуалним областима: (1) курикулум, (2) школе, (3) наставници и њихова едукација, (4) карактеристике активности у учионици и (5) ученици. Посебно се ставља нагласак на циљеве образовно-васпитног система и на начине како је тај систем организован за постизање и одржавање тих циљева, на образовно-васпитне ресурсе и начине како су школе организоване за унапређење наставе и учења, на карактеристике наставе и на начине на које се посвећује пажња образовању наставника, на наставне теме које чине садржај наставе и садржај активности који се одвија у учионици, породичне услове ученика и потпору коју имају с те стране, као и на њихове ставове које имају о школи, настави и учењу.

Студија TIMSS има вишеструки значај с обзиром на чињеницу да омогућава сагледавање сложеног односа између постигнућа ученика и контекста курикулума, школских и породичних услова, у односу на ставове ученика. Такође, од значаја је и поређење постигнућа између појединих земаља, као и праћење промена у постигнућу популације ученика одређене земље која је била учесник у више циклуса истраживања. Резултати истраживања TIMSS могу непосредно допринети унапређењу садржаја наставних програма математике и предмета природних наука, у циљу повећања ефикасности основношколске наставе. У томе се састоји и

једна од најзначајнијих улога реализације овог истраживања, које по свему поприма размере светског пројекта у области истраживања постигнућа ученика. У Србији је први пут 2003. Године спроведено међународно истраживање о постигнућима ученика из математике и природних наука (TIMSS – Trends in International Mathematics and Science Study). Истраживање TIMSS се реализује на сваке четири године, тако да су ученици из Србије 2007.године по други пут учествовали у овом међународном истраживању.

TIMSS 2003 У СРБИЈИ

Пројекат TIMSS 2003 (Међународни проучавању образовних постигнућа у математици и природним наукама – Trends in International Mathematics and Science Study) је међународна компаративна студија која је реализована у мају 2003. Године у 49 земље света. Код нас је истраживање реализовано први пут у циклусу TIMSS 2003 и то у осмом разреду. Из нашег окружења у пројекту су учествовале: Македонија, Словенија, Бугарска, Грчка, Мађарска, Румунија и Италија. Од већих земаља света учествовале су: Америка, Аустралија, Канада, Руска федерација, Јапан , Јужна Кореја и друге. Институт за педагошка истраживања из Београда је био центар који јеспровео TIMSS 2003 истраживање уз сагласност Министарства просвете и спорта Републике Србије. Учешћем у овом пројекту сарадници Института за педагошка истраживања су добили могућност свеобухватног сагледавања успешности наставе математике и предмета природних наука у нашим школама и могућност поређења квалитета нашег образовног система са другим земљама. Ово је од посебног значаја за реализацију реформе у основној и средњој школи јер се кроз задатке испитују различите врсте знања: познавање чињеница, разумевање појмова, решавање проблема. Испитивање је реализовано у две фазе: пробно испитивање (2002) са циљем да се дође до коначних верзија мерних инструмената, и главно испитивање (2003) са адаптираним инструментима и на репрезентативним узорцима у свим земљама. Пробно TIMSS истраживање је реализовано у јуну 2002. Године на узорку од 4 одељења 7. Разреда из Београда и околине, Главно испитивање реализовано је у мају 2003. Године. Узорак је био репрезентативан за ученике 8. Разреда у Србији без Косова. Чинило га је 4296 ученика из 149 основних школа. Школе су изабране случајним избором, према међународним стандардима, имајући у виду величину школе и регион (Централна Србија, Београд и Војводина) и тип насеља (град, приградско насеље, село). Из сваке школе такође случајним избором селектовано је једно или два одељења ученика осмих разреда.

У погледу образовног нивоа родитеља 20% ученика имало је бар једног од родитеља са завршеним факултетом, 68% са завршеном средњом школом, 9% са трогодишњом средњом школом или незавршаном средњом школом и 1% ученика чији су родитељи имали само основну школу или ниже. У испитивању су учествовали и наставници који су ученицима из узорка предавали математику и предмете природних наука (њих 750) и 149 директора школа чији су ученици били испитивани. За реализацију главног истраживања коришћени су следећи инструменти: свеске са блоковима задатака из математике и природних наука, упитници за ученике, упитници за наставнике и упитници за директоре. Предвиђено је 12 свезака са различитим комбинацијама задатака из математике и природних наука, а исту свеску са задацима добијао је сваки 12. Ученик у одељењу.

ПОСТИГНУТИ РЕЗУЛТАТИ

Математика

У погледу успеха из математике ученици осмих разреда из Србије били су мало, али статистички значајно, изнад међународног просека, односно налазе се на 24. Месту од 49 земаља учесница. Од земаља из региона ученици из Србије у математици били су успешнији, али не значајно, у односу на ученике из Бугарске и Румуније, значајно бољи од Македоније, нешто слабији (не значајно) од ученика из Словеније (21. Место, али у просеку годину дана млађи од наших), и далеко слабији од ученика из Мађарске (9. Место). Од европских земаља учесница у истраживању ученици су остварили статистички значајно бољи успех само од ученика из Норвешке (који су били у просеку годину дана млађи од наших), из Молдавије и са Кипра а од ваневропских земаља – од афричких, блискоисточних и земаља Латинске Америке. Све остале европске земље, осим поменутих, као и земље са америчког и аустралијског континента и земље далеког истока показале су успешније резултате.

У оквиру испитиваних области знања из математике наши ученици су остварили најбољи резултат на задацима из алгебре, а најслабији у коришћењу статистичких података. Девојнице из Србије су биле статистички значајно успешније у математици од дечака (480 : 473 поена). Ова разлика је била већа од просечне разлике међу половима у целом узорку, где су девојнице биле мало, али не значајно успешније. Девојнице у Србији су показале статистички значајно бољи резултат од дечака у алгебри (496 : 480 поена) и у геометрији (475:467). На нивоу свих земаља девојнице су имале значајно боље постигнуће у алгебри од дечака.

Природне науке

Успех ученика осмих разреда из Србије на задацима из Србије на задацима који су мерили знања из природних наука, у целини гледано био је нешто слабији од међународног просека. Наши ученици су заузели 28. Место од 49 земаља које су учествовале у студији. Када се посматрају знања из различитих области и садржаја природних наука, ученици из Србије показали су успех не значајно различит од међународног просека у физици и хемији, и географији (науци о Земљи), али статистички значајно лошији од међународног просека у науци о живим бићима.

Општи закључак

У истраживању TIMSS 2003, знања ученика на крају основног школовања у Србији, упоређена са резултатима њихових вршњака из 45 земаља које су учествовале у истраживању, могу се оценити на следећи начин: резултати из математике су изнад међународног просека (24. ранг-477 поена, а просек је 467 поена), док су резултати из природних наука нешто испод просека (28. Ранг- 468 поена, просек 474 поена). Важно је напоменути да ранг једне земље одређују квантитативни подаци, али и на то да учешће у међународним испитивањима носи ризик да се наставни планови и програми усаглашавају са захтевима предстојећих тестирања, а да ови пак могу бити у складу са вредностима и циљевима образовања једне земље или групе земаља.

Наглашавамо да циљ овог истраживања није да се покаже успех појединца или школе, већ функционисање образовног система једне земље у поређењу са образовним системима других земаља као и правци промена. Приликом тумачења постигнућа наших ученика не смеју се занемарити изузетни лоши друштвени и материјални услови у којима су последње генерације живе и школовале се. Што се тиче промена које треба вршити у нашим школама и наставним програмима, оне свакако треба да иду у правцу осамостаљивања ученика да стичу функционална знања, односно да примењују своја теоријска знања за решавање практичних проблема. Добијени подаци не изненађују превише, будући да се слични налази континуирано добијају у нашим истраживањима. Детаљнија анализа резултата истраживања TIMSS 2003 приказана је у монографији . Сарадници Института (Д. Јањетовић и Д.Малинић) су припремили рад за учешће на првој конференцији посвећеној TIMSS-у (The first IEA International Research Conference 2004). Конференција је одржана од 11-13 маја.

ИСТРАЖИВАЧКИ ТИМ:

1. др Слободанка Милановић-Наход, руководилац, Институт за педагошка истраживања
2. мр Драган Јањетовић, заменик, Институт за педагошка истраживања
3. Душица Малинић, контролор квалитета спровођења истраживања у школама
4. мр Николета Милошевић, Институт за педагошка истраживања
5. др Драгица Шишовић, Природно-математички факултет, (хемија)
6. мр Никола Шишовић, Природно-математички факултет (физика)
7. др Ђорђе Кадиевић, Институт за педагошка истраживања (математика)
8. Петар Бркић, контролор квалитета спровођења истраживања у школама
9. Преводиоци са енглеског, по потреби
10. Бранислав Мијатовић, (форматизовање инструмената)
11. Истраживачи на терену
12. Студенти (унос података)

TIMSS 2007 У СРБИЈИ

Истраживање Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS 2007 је међународна компаративна студија је реализована у периоду од 2005. До 2009.

Године у више од 60 земаља у свету, са циљем да се утврде нивои знања ученика из математике и природних наука, да се испита повезаност постигнућа ученика са контекстом наставног плана и програма, услова наставе и учења, институционалне организације и контекстом породичних услова. TIMSS 2007 је четврто испитивање у континуитету од 12 година. Прво испитивање спроведено је 1995, затим 1999. И 2003. године.

Крајем фебруара месеца 2006. Године, потписан је Уговор о реализацији пројекта истраживања TIMSS 2007 у Србији између Министарства просвете и спорта, као инансијера пројекта, и Института за педагошка истраживања и Завода за вредновање квалитета образовања и васпитања, као реализатора. На тај начин, озваничено је учешће Србије у овом међународном истраживачком пројекту.

Прикупљање података на терену изведено је у две фазе: пробно испитивање, 2006. Године, са циљем да се дође до коначних верзија мерних инструмената, и главно испитивање, 2007. Године, са адаптираним инструментима и на репрезентативним узорцима у свим земљама. Узорак истраживања радили су Статистика Канаде и Центар за обраду података у Хамбургу, на основу базе података о ученицима осмог разреда основних школа у Србији. То је први ниво формирања узорка. У тој фази је изабрано 34 школе у Србији, а укупно 65 одељења ученика осмог разреда. Други ниво разраде узорка представљао је избор једног, одосно два одељења у свакој од предвиђених школа (на основу броја одељења који се унапред одреди од стране Статистике Канада и Центра за обраду података у Хамбургу). Ова фаза рада на узорку изводила се уз помоћ предвиђеног софтвера Win W3S, на основу претходно формиране базе података ученика осмог разреда у узорком одабраним школа.

Узорак пробног истраживања TIMSS 2007 у Србији представљало је укупно 34 основне школе у Србији, распоређених у оквиру дефинисаних региона, на основу стратификованог кластер модела, и то: Београд, Централна Србија и Војводина. Узорак представља око 1.400 ученика осмог разреда основне школе. Узорком је обухваћено укупно 34 директора школа, око 45 наставника математике, 40 наставника биологије, 40 наставника физике, 40 наставника хемије и 40 наставника географије.

Узорак главног истраживања TIMSS 2007 у Србији представљало је укупно 150 школа у Србији, такође распоређених у оквиру стратификованог кластер

модела узорка, по истим регионима као у пробном истраживању. Узорак је чинило око 4.500 ученика осмог разреда основне школе. Узорком је обухваћено укупно 150 директора школа и 860 наставника, и то приближно: 180 наставника математике, 170 наставника биологије, 170 наставника физике, 170 наставника хемије и 170 наставника географије.

Тест постигнућа, који је обухватао задатке за математику и природне науке, структуриран је за пробно истраживање у 7 а за главно истраживање у 14 свезака, тако да сваки 8. ученик на пробном, односно сваки 15. ученик на главном истраживању ради тест са истим садржајем. Тест свеске за пробно истраживање сачињавају само нови задаци, док су у тест свескама за главно истраживање пола нових задатака и пола задатака из претходних циклуса истраживања (то су такозвани тренд ајтеми). У свакој од ових свезака распоређени су, по одређеном правилном редоследу, блокови задатака за математику и блокови и за природне науке, односно свака свеска садржи просечно око 80 задатака. Предвиђено време израде теста постигнућа у осмом разреду је 90 минута.

У складу са захтевима координатора пројекта (IEA) резултати главног испитивања TIMSS 2007 у свим земљама могу бити објављени тек након 9. Децембра 2008. Године. Резултати истраживања и технички извештај доступни су јавности на сајту: http://timssandpirls.bc.edu/TIMSS2007/intl_reports.html Сарадници Института за педагошка истраживања припремају монографију са резултатима истраживања TIMSS 2007.

ИСТРАЖИВАЧКИ ТИМ :

1. Др Радован Антонијевић, Институт за педагошка истраживања, национални координатор истраживања;
2. Гордана Чапрић, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, заменик националног координатора истраживања;
3. Мр Срђан Вербић, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, координатор за природне науке;
4. Оливера Тодоровић, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања, координатор за математику;
5. Др Драгица Шишовић, Хемијски факултет, Београд;
6. Др Емина Копас-Вукашиновић, Институт за педагошка истраживања;
7. Др Емилија Лазаревић, Институт за педагошка истраживања;
8. Мр Миља Вујачић, Институт за педагошка истраживања;
9. Мр Бранка Павловић, Институт за педагошка истраживања;

КАРАКТЕРИСТИКЕ НАСТАВЕ МАТЕМАТИКЕ У ИСТОЧНОЈ АЗИЈИ

ТИМСС ИСТРАЖИВАЊЕ ИЗ 1999

Карактеристике учионице за математику базиране су на државама Хонгконгу и Јапану, и садрже анализу Тимсс видео студија из 1999. Подаци показују да иако студенти источноазијских земаља не причају пуно у учионици, они бивају изложени утицају више наставних садржаја. Математички проблем на којима раде, постављени су углавном коришћењем математичког језика, и поређени су са решењима студената из других земаља. Према мишљењу стручњака у Хонг Конгу (Јапан није учествовао у истраживању) лекције садрже више напредних садржаја и кохерентније су. Математичке презентације су развијеније, а студенти су више укључени у наставу. Квалитет наставе на истоку Азије процењен је на високом нивоу. Анализе показују да квалитет наставе и учења зависе од окружења у којима се ученици налазе. Учионице у азијским земљама су врло практичне и у складу са традицијом и вредностима друштва.

Кратак опис Тимсс видео студија

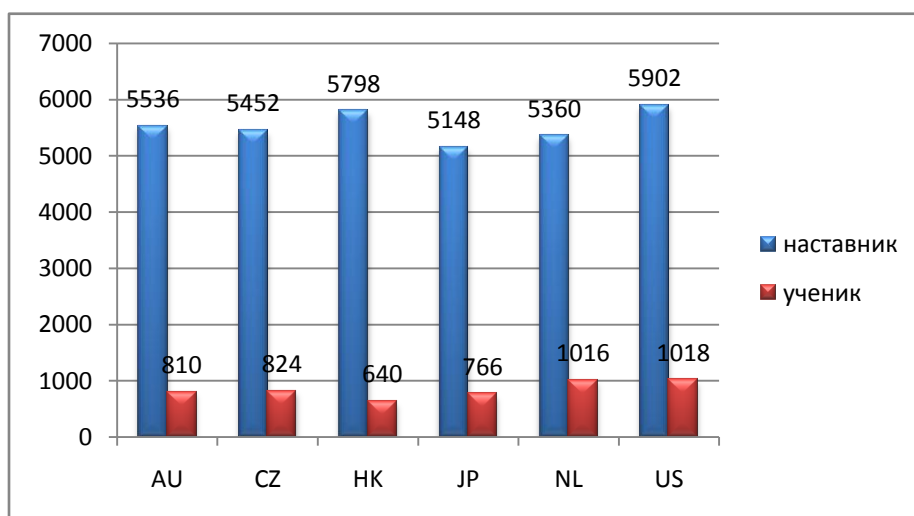
Тимсс видео студија из 1999. Године користи национални узорак вероватноћа, 3 од 100 лекција осмог разреда, а резултати се могу узети као репрезентни узорак наставе у тој земљи. Због високих трошкова који су укључени у видео снимак, снима се само једна лекција по наставнику. Сходно томе, интерпретацију података треба ограничити на национални ниво описа и поређења неких лекција, а не на комплетан асортиман наставе, праксе и динамику која се може појавити у јединицама које се протежу преко дана или недеље. Сврха ових студија је да се заокружи укупан утисак о настави математике у одређеним земљама, као и процена наставника у одржавању наставе. У различитим земљама у осмом разреду обухваћени су различити садржаји, јер није било могуће да изаберу исту тему због видео снимка. Уместо тога, лекције су семпловане током школске године како би се осигурало све обухватно покривање садржаја који учи осми разред у свакој земљи. Видео камере су постављене по учионицама, једна која снима наставника, и једна која снима разред као целину. 638 лекција из математике су снимљене у распону од 50 часова у Јапану, а 140 у Швајцарској (просечан број снимања лекције за једну земљу је 92). Кодерски међународни тим из земаља учесница развоја, развио је скуп од 45 кодова и применио их на видео податке као што је описано у извештају

пројекта (Хилберт 2003). Поред тога један број анализа вишег квалитета, укључујући и оне које су експрес панела, познате као *Математика квалитетне групне анализе*, коју чине математичари едукатори на пост-секундарном нивоу. Група прегледа насумично одабран подскуп од 120 часова (по 20 из сваке земље осим Јапана) на основу детаљно писаних описа лекција.

Резултати анализе Тимс 1999 видео истраживања биће представљени у два дела. Прво, резултати квантитивне анализе кодираних података, карактеристичан за учioniце две источноазијске земље (Хонг Конга и Јапана). Репрезентативни резултати анализе *Математичке квалитетне групе* биће пријављени као допуна резултата добијених анализом кодова.

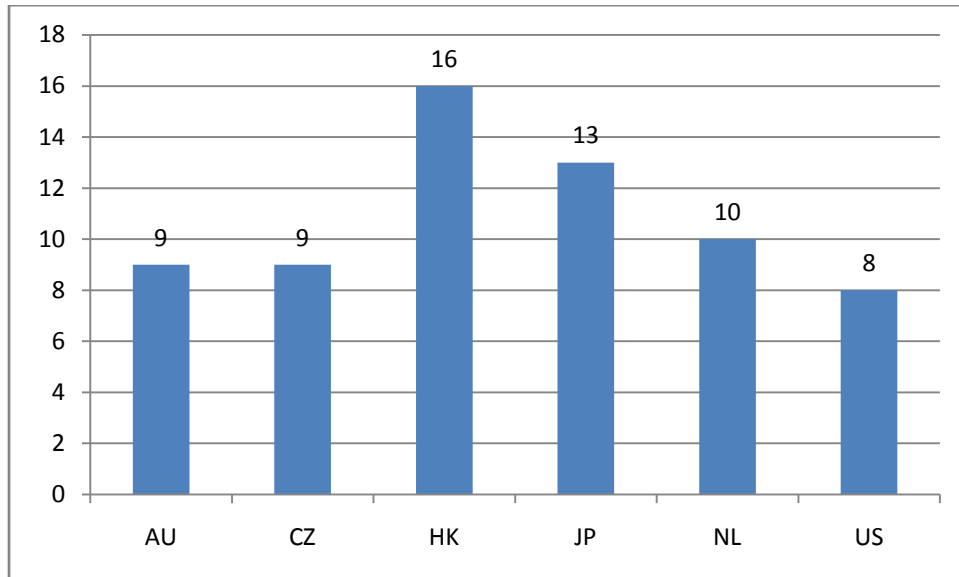
1. Доминација наставниковог говора

Стереотип у источноазијским учионоцама је, да наставник доминира током предавања. Међутим резултати овог истраживања показују да наставник не доминира само у источноазијским земљама. У свим земљама које су учествовале у истраживања, наставник је доста vise причао током наставе од својих ученика. Занимљиво је да се веома разликују Јапан и Хонг Конг у учествовању наставника у настави и колочини говора који употребљују. Наставник у Хонг Конгу доста говори током наставе и доста је доминантан (САД је друга на листи), док наставник у Јапану говори најмањи број речи. Слика 1 показује да наставник у Хонг Конгу говори у просеку 5800 речи по лекцији, док јапански наставник говори 5148 речи по лекцији, просечан број речи је 5533. Са друге стране студенти у Хонг Конгу и Јапану су најмање причљиви (640 речи по лекцији у Хонг Конгу, а 760 у Јапану), просек је 845 речи у свим земљама.

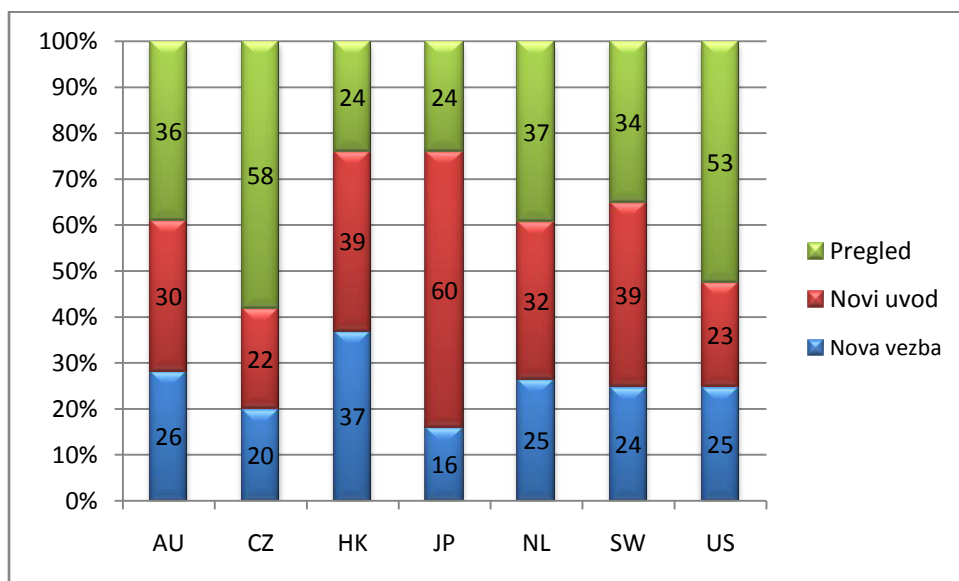


Слика1. Просечан број речи наставника и ученика по лекцији

Слика источно Азијских учионоца постаје јаснија када погледамо просечан број речи изговорених од стране ученика са којима говори наставник током часа (слика 2) Можемо видети да је вербална доминација источно Азијских наставника евидентна. За сваку реч коју студент изговори, наставник у Хон-Конгу изговори 16 речи, у Јапану 13 речи, минимални однос је у САД 1:8, а просечно 1:11.



Слика 2. Просечан број речи наставника сваком од студената



Слика 3. Просечно време посвећено свакој лекцији

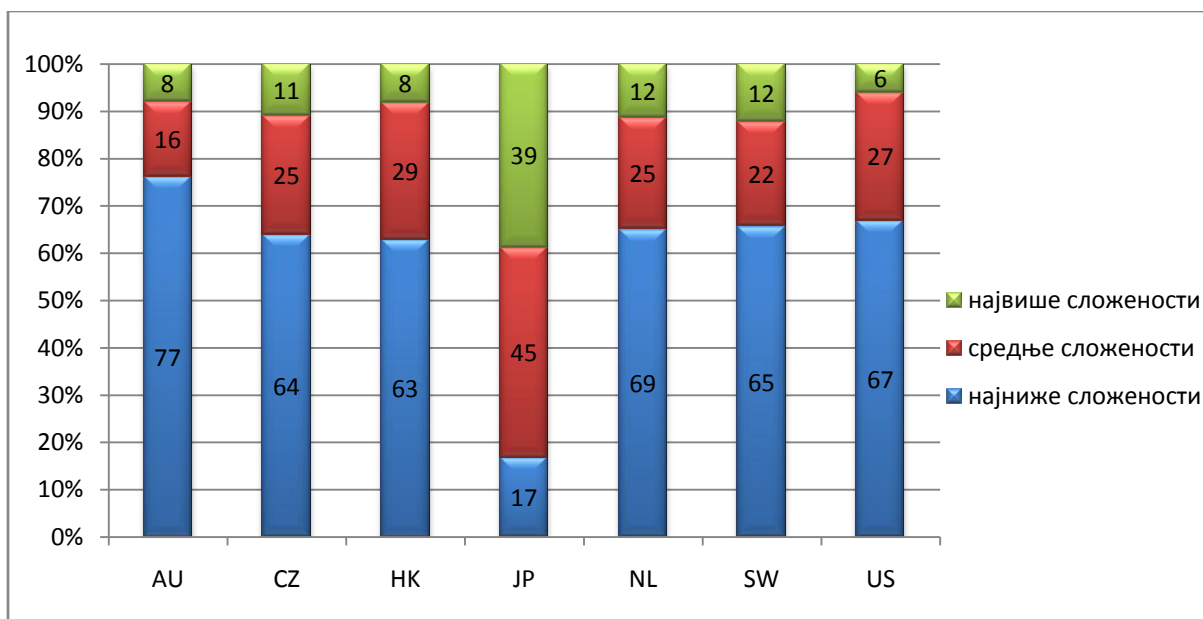
2. Више могућности да се уче нови садржаји

Тимсс видео студија истраживања из 1999 је класификовала сврхе делова лекција који су за разматрање, а које не, увођењем нових садржаја, И вежбањем нових садржаја. Просечно време посвећено свакој од три лекције, приказано је на слици 3. Из те слике видимо да је чак 75% времена на часу у источноазијским земљама посвећено обрађивању новог садржаја. То је знатно више времена посвећено тој сврси у односу на друге земље учеснице истраживања (Швајцарска 63%, Чешка 42%). Можемо закључити да ученици у источноазијским земљама науче више него њихови вршњаци у другим земљама.

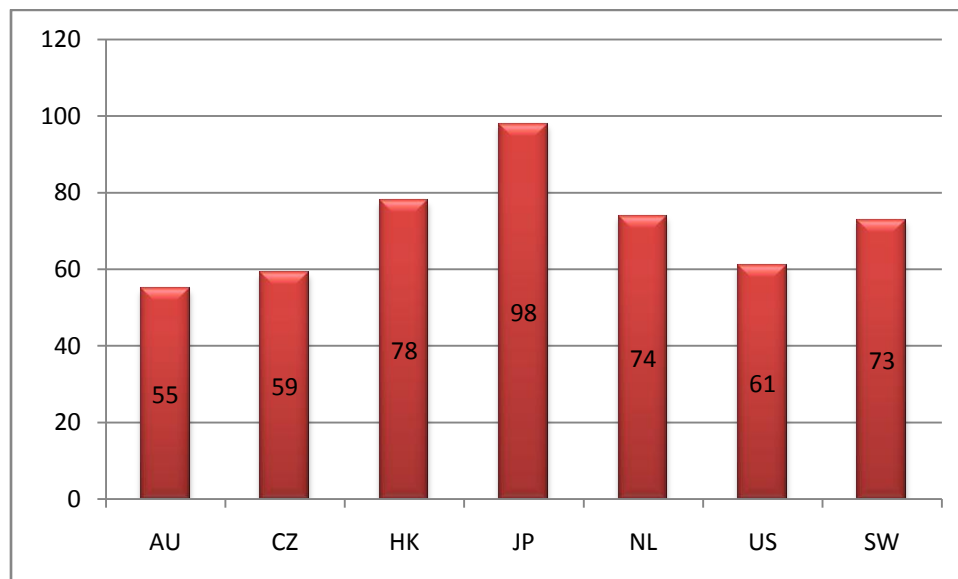
3. Сложенији проблеми

Утврђено је да је време учења у свих седам земаља одређено временом које студент проводи у решавању математичких проблема. Процедурална сложеност је дефинисана у Тимсс видео студији истраживања из 1999. Као број корака који су потребни да би се решио проблем користећи метод заједничког решења. Слика 4 приказује просечан проценат проблема на различитим нивоима процедуралне комплексности. Са слике 4 можемо приметити да су јапански студенти радили много сложеније проблеме него они из других земаља. Проблем студената у Хонг Конгу је што они не раде много сложеније проблеме него они из других земаља. Проценат ниске сложености проблема у Хонг Конгу није толико мали као у другим земљама, осим Јапана. Следеће мерење које се примењује у разматрању комплексности проблема је мерење времена које студент проводи решавајући проблем. На слици 5 се види просечан проценат проблема на којима су радили више од 45 секунди. Са обе слике можемо закључити да генерално студент источноазијских земаља имају веће могућности за решавање сложенијих проблема за шта им је потребно више времена.

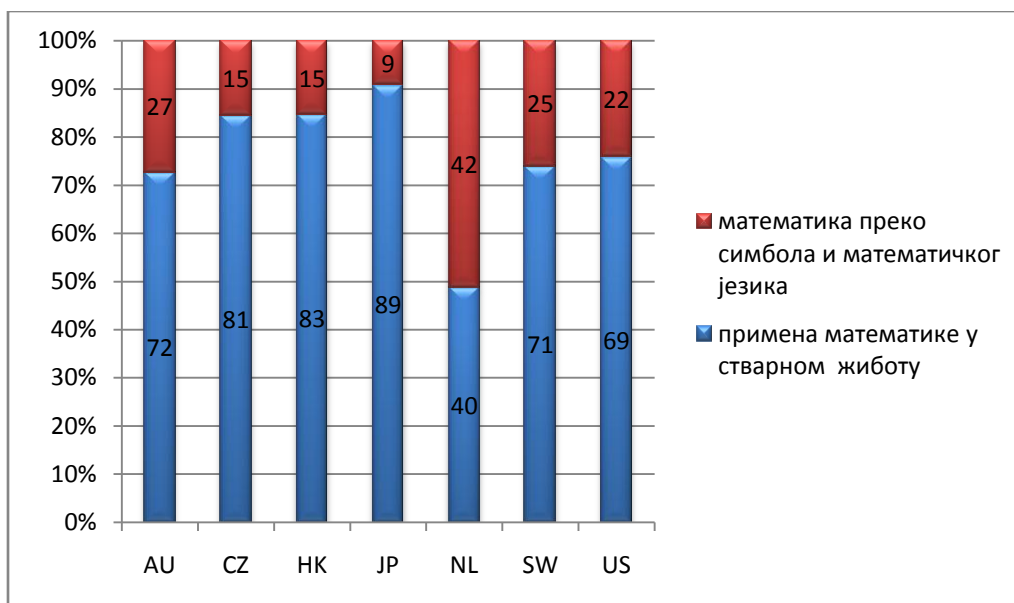
Различити наставници имају различите ставове у вези тога да ли се математички проблем требају презентовати строго математичким језиком и симболима или се требају представити у контексту реалног живота. И то се може одразити на њихова различита филозофска схватања о суштини учења математике и преношења знања. Карактеристика наставника у источноазијским земљама је да се већина изражава строго математичким језиком и симболима не уводећи много примера из живота. По томе је настава слична као у Чешкој Републици али различита од холандске наставе.



Слика 4. Просечан проценат о проблемима по часу на сваком нивоу процедуралне наставе



Слика 5. Просечан проценат проблема по часу ако су трајали дуже од 45 секунди

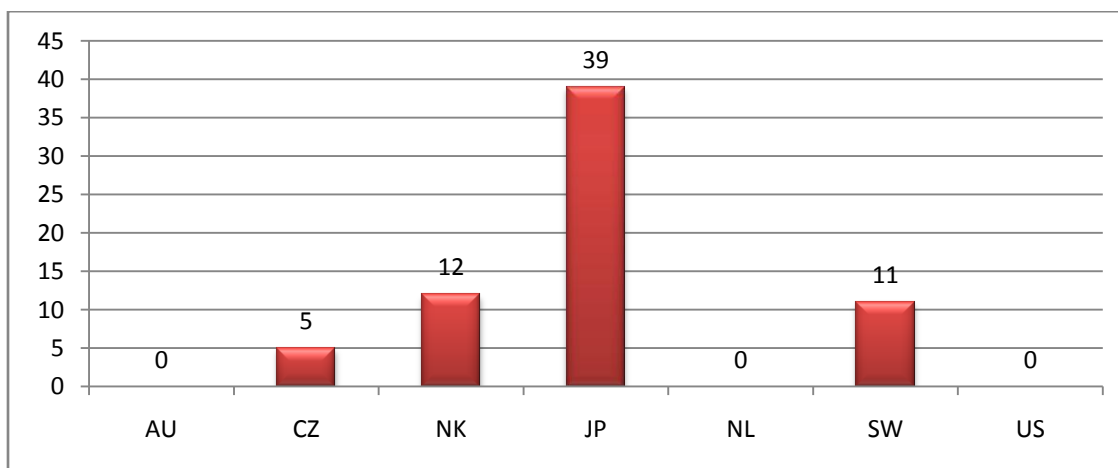


Слика 6. Просечан проценат проблема по часу

4. Докази у математици

Доказ је увек био карактеристика математике, мада је употреба доказа у школи на часу математике, био предмет расправе дуги низ година. Стога ће бити од интереса да се види колико докази учествују у настави математике у разним земљама учесницама истраживања.

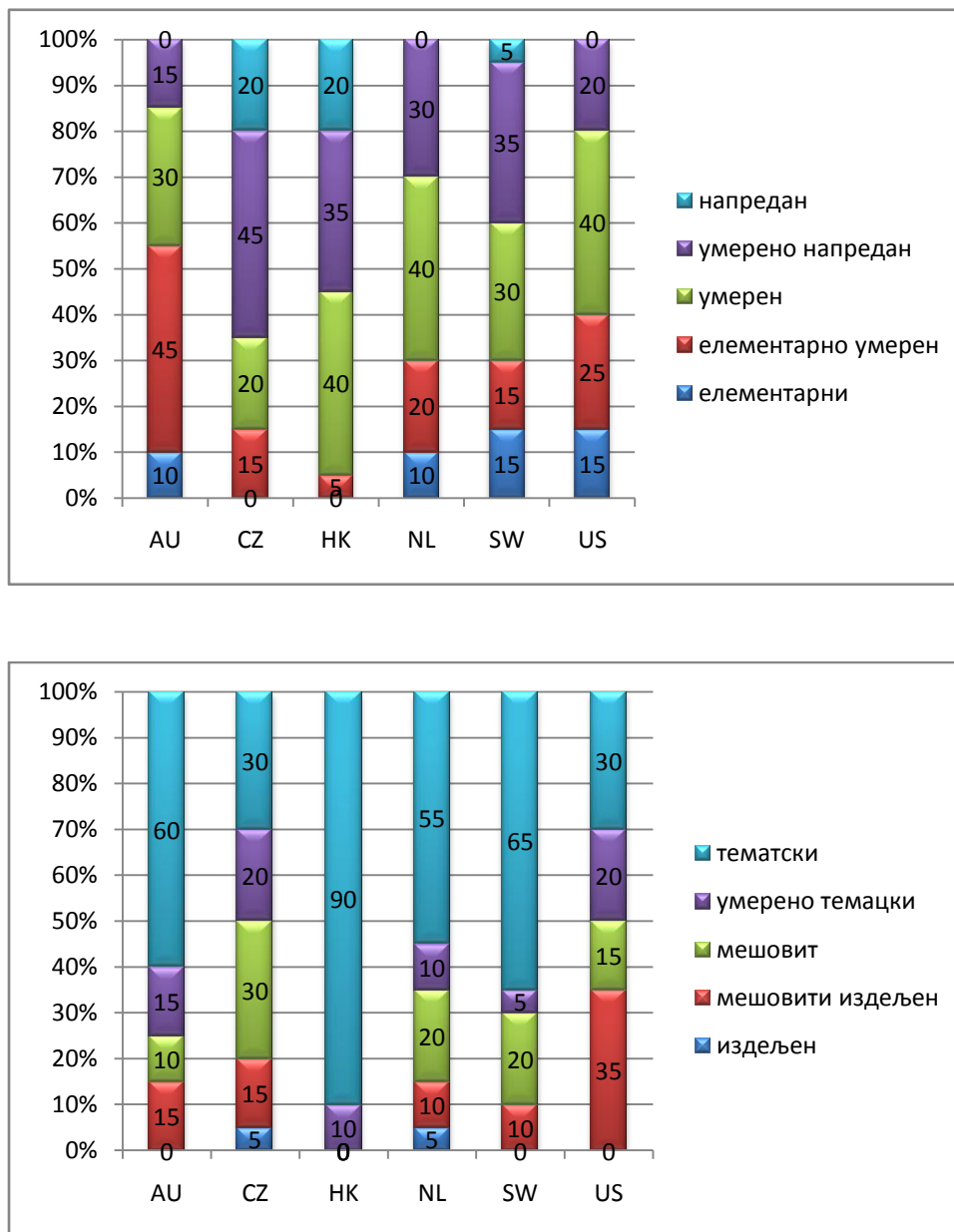
Слика 7 показује да проблеми које решавају источноазијски ученици укључују више доказа, него њихови вршњаци у другим земљама. Нагласак на доказивању посебно је означен у Јапану, док се у Хонг Конгу и Швајцарској више ради на практичним стварима.



Слика 7. Проценат лекција које садрже бар један доказ

5. Више напредних садржаја

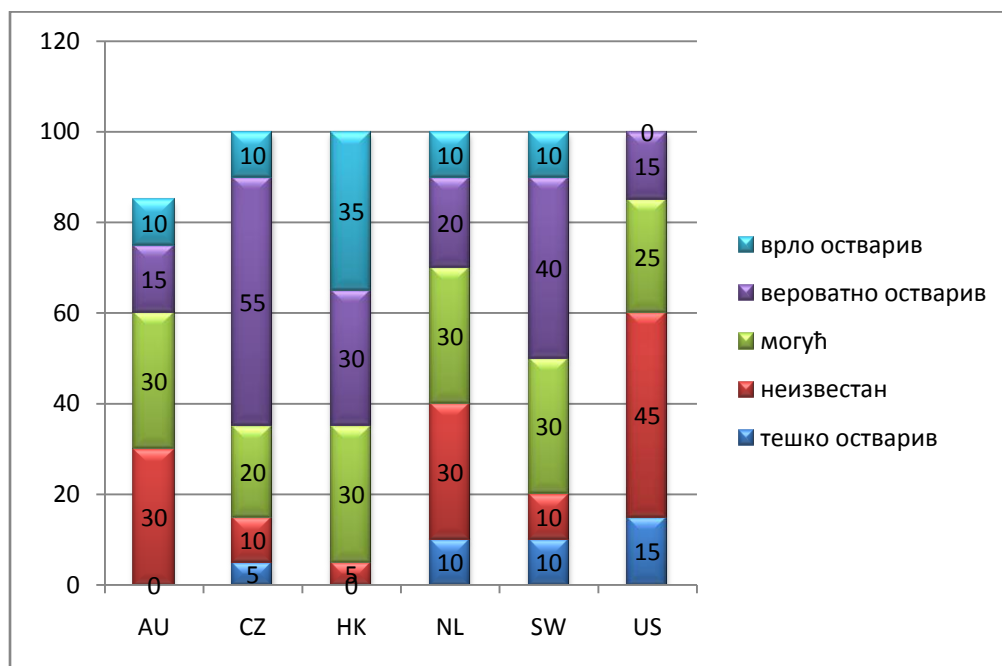
Прегледане су математичке лекције из квалификованог узорка, које садржи лекције од елементарног до напредног нивоа. Резултати су показали да ученици у Хонг Конгу више раде на лекцијама напредног нивоа од ученика осталих земаља. Слика 8 то илуструје :



Слика8. Проценат часова у подузорку оцењеном на сваком нивоу кохерентности

Не само да су у Хонг Конгу лекције оцењене кохерентијим, већ и начин презентовања је на вишем нивоу. Презентација је дефинисана од стране панела као степен одржавања лекције математичким говором или применом на реални живот. Резултати панела представљени су на слици 9. Може се видети да су три четвртине лекција у Хонг Конгу оцењене као потпуно развијене, што је три пута више него у Холандији.

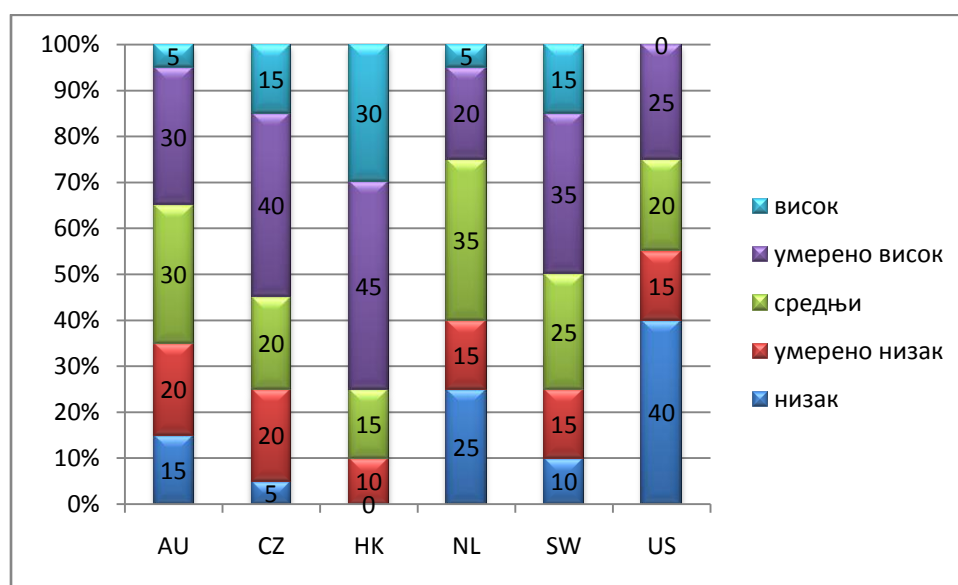
Као што је већ напоменуто да нису гледани сви снимци, већ је узет узорак, тако да није у потпуности могуће да се оцени који су ученици конкретно учествовали у настави, а који нису. Оцену о томе је дао међународни тим, и то је најбољи опис колико су ученици учествовали у настави. Ученички ангажман није био дефинисан као вероватноћа да ће ученик учествовати у смислен математички ток лекције. Рејтинг „врло вероватно“ указује да су ученици радили на неколико проблема током лекције користећи математички језик или симболе, за решавање тог проблема. Наставник разговором подстиче ученике да буду што више креативнији, а затим о решењима јавно дискутује са целим разредом. На слици 9. Видимо да ученици у Хонг Конгу више учествују у настави него ученици у другим земљама



Слика 9. Проценат по часу у под узорку оцењен на свим нивоима ученичког ангажовања

6. Општи квалитат

Коначно оцена о општем квалитету наставе, тј могућности да настава приближи ученику схватање математике, и математичких појмова. Слика 10. Показује да је 30% лекција одржане у Хонг Конгу оцењено као високо квалитетне, што је доста више од других земаља. На пример, у Аустралији и Холандији тај проценат је око 5%, док у САД ниједна лекција није оцењена високим квалитетом.



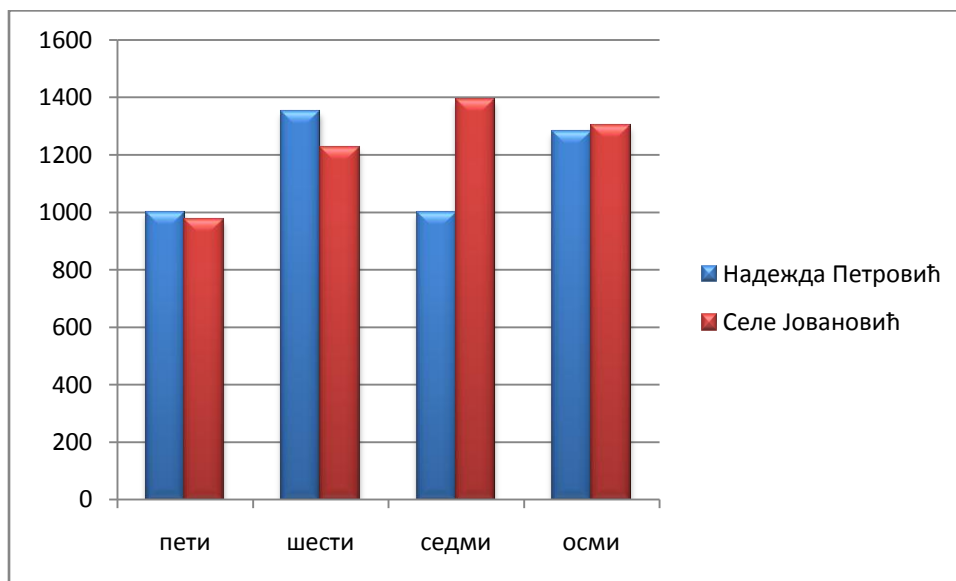
Слика 10. Часови оцењени високим нивом квалитета

ИСТРАЖИВАЊЕ

Кратак опис истраживања

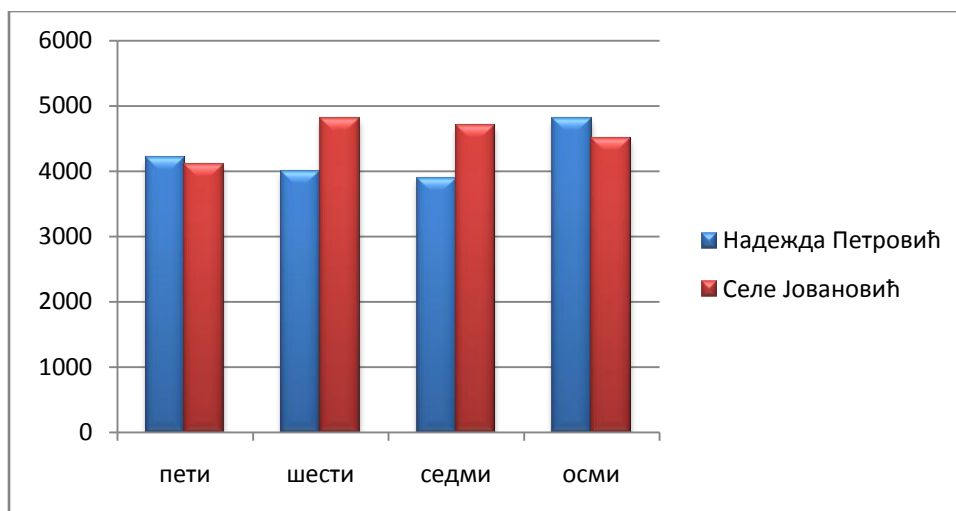
У складу са статистикама које смо проучавали у одређеним Европским и Азијским земљама, урадио сам истраживање у две основне школе у којима сам радио праксу, ОШ “Селе Јовановић” у Шапцу и ОШ “Надежда Петровић” на Новом Београду. Ради се о двонедељном истраживању засновано на праћењу рада ученика свих одељења од петог до осмог разреда

Прво истраживање односи се на број речи изговорених у току једног часа. Први график осликава просечан број укупних речи изговорених од стране ученика за време једног часа. Закључак до кога смо дошли испитујући сва одељења у ове две горе поменуте основне школе.



Слика 11. Укупан број речи у току часа од стране ученика

Други график осликава просечан број речи наставника изговорених у току једног наставног часа до кога смо дошли на горе поменут начин.



Слика 12. Укупан број речи од стране наставника

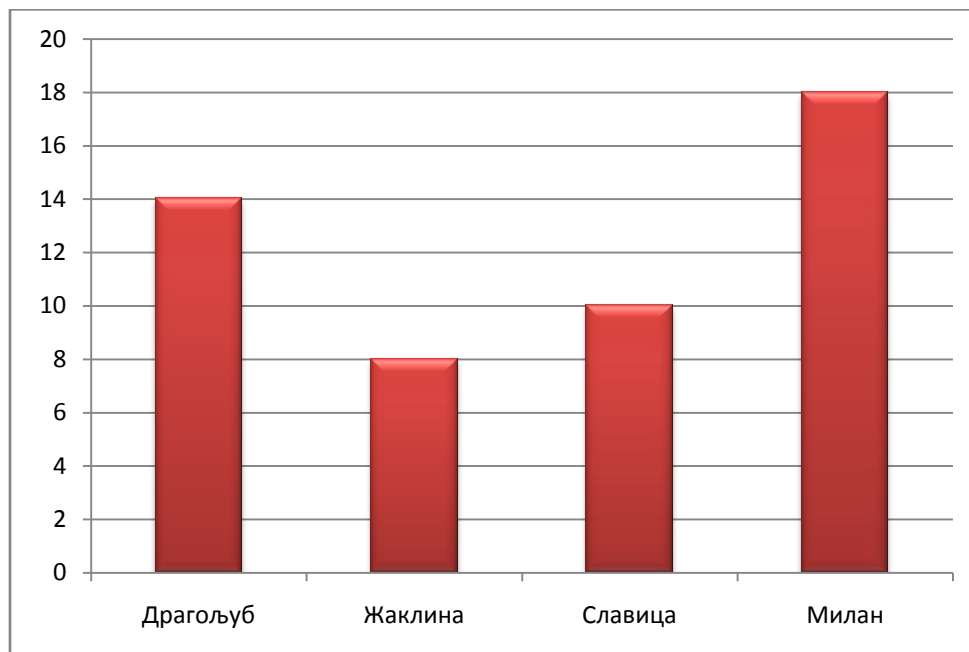
Можемо закључити да је наш наставник “непричљив” у односу на наставника Кине, Јапана I САД, чији је број просечних речи у току цаса близу 6000. Такође примећујемо да је број изговорених речи ученика код нас приближан броју изговорених речи ученика развијених земаља Западне Европе, али мањи у одноцу на “брло причљиве” уенике САД-а. Вербална доминација наставника најистакнутија је у Хон Конгу, где је однос изговорених речи наставнка и ученика један према осам (1:8), док је код нас тај однос један према пет (1:5).

На следећем графику видимо просечан број речи упућен од стране наставника појединачном ученику. За ову статистику посматрали смо рад четири наставника, по два из сваке школе.



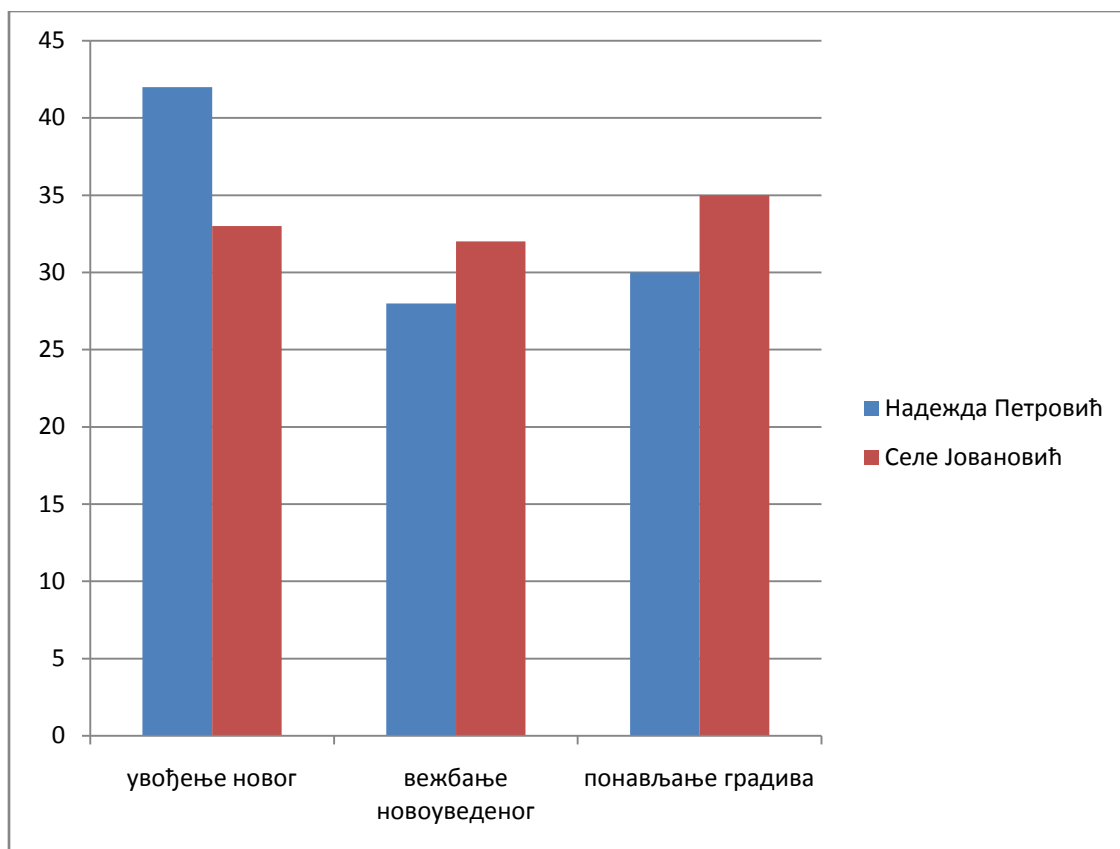
Слика 13. Број речи упућен појединцима

Следећа статистика односи се на заступљеност доказа градиву, проучавали смо план рада сваког од горе поменутих наставника и увидели да је проценат лекција које садрже бар један доказ врло мали. Употреба доказа у школама је дуго била предмет расправе и ако је доказ основна карактеристика математике. Примећујемо да наставници у Хон Конгу користе доказ у чак 39 процената лекције. Уопште у Источној Азији више се користе докази него у осталим школама. У САД докази се врло мало помињу, а код нас, као што примерћујемо, варира од наставника до наставника. Заниљиво је поменути да су сви од наставника које смо испитивали ученицима извели по један доказ Питагорине теореме.



Слика 14. Заступљеност доказа у градиву

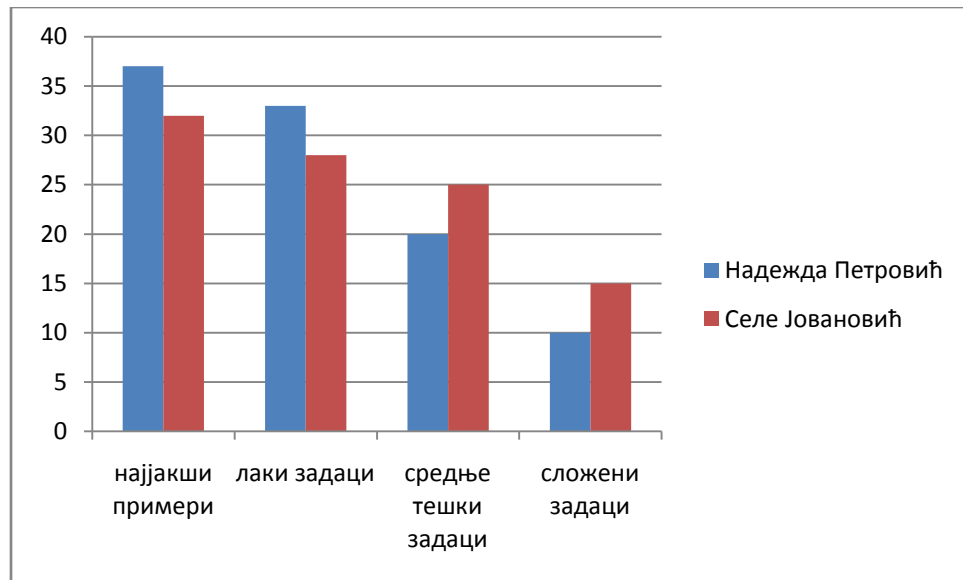
Следећу статистику смо такође добили проучавајући планове рада наставника. Овде смо упоређивали ове две основне школе, скала представља проценат градива посвећен обрађивању новог градива, тј. обрађивању старог.



Слика 15. Посвећеност новом/старом градиву

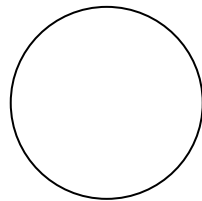
У следеће две статистике упоређујемо школе по процентима колико су заступљени сложени задаци у градиву, проучавали смо на основу планова рада горе поменутих наставника.

Из већ познатих истраживања можемо закључити да су Јапански ученици радили много сложеније него они ученици из других земаља, док проценат ниске сложености проблема у Хон Конгу није толико мали као у другим земљама, осим Јапана. Код нас је сложеност проблема прилично ниска у односу на развијене земље.



Слика 16. Заступљеност сложених задатака

Интерактивни час



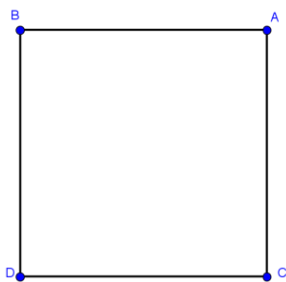
- Име и презиме: Драган Ђурђијевић
- Школа: Ћирило и Методије
- Ментор: Гордана Поповић
- Школска година: 2011/2012
- Час по реду: 103
- Наставна јединица: Сложене фигуре
- Тип часа: Обрада

Белешке са часа:

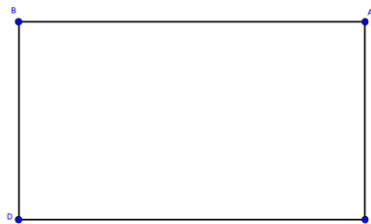
➤ Увод:

У уводном делу обновили смо основне ствари везане за просте фигуре, тј. Нацртали смо на табли следеће фигуре: квадрат, правоугаоник, једнакостранични троугао и круг. Ђаци који су се добровољно јављали и излазили на таблу да напишу формуле за њихову површину и обим.

1. квадрат и правоугаоник

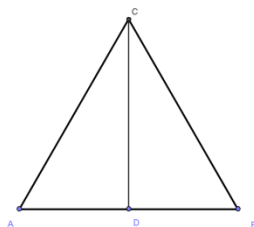


површина: $P = a^2$
обим: $O = 4a$

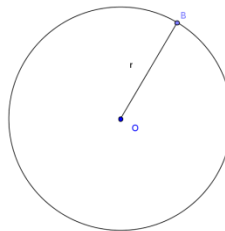


површина: $P = ab$
обим: $O = 2a + 2b$

2. Једнакостраничан троугао и круг



Површина: $P = \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{3}}{4}$
Обим: $O = 3a$



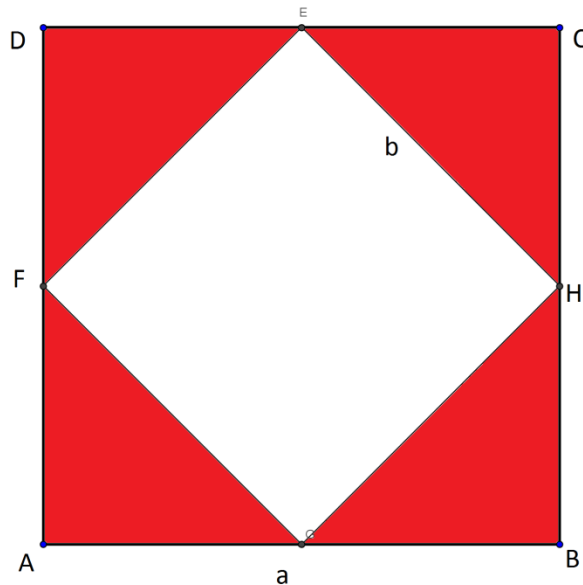
површина: $P = r^2 \pi$
обим: $O = 2r \pi$

➤ Главни део:

Сложена фигура је комбинација неких од основних фигура. Објасни ли смо појам сложене фигуре. Сада прелазимо на израду задатака. Почињемо са најпростијим примерима и идемо ка све сложенијим

Задатак 1.

Дат је квадрат странице **a** и у њему уписан квадрат странице **b**. Потребно је израчунати површину осенченог дела фигуре ?



Решење:

Површина квадрата1 је:

$$P_{k1} = a^2 ,$$

Површина квадрата2 је:

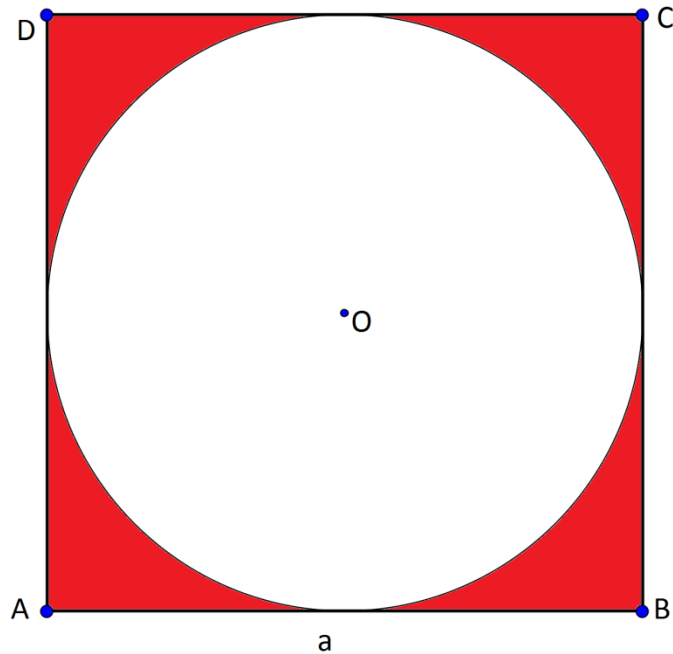
$$P_{k2} = b^2$$

Површина осенченог дела фигуре је разлика површина ова два квадрата:

$$P_{\Phi} = P_{k1} - P_{k2} \qquad P_{\Phi} = a^2 - b^2$$

Задатак 2.

Дат је квадрат странице **a**, и у њему уписан круг. Израчунати површину осенченог дела фигуре



Решење:

Површина квадрата је:

$$P_k = a^2$$

Полупречник круга је пола странице **a**, тј

$$r = a / 2$$

$$P_o = r^2 \pi$$

Површина осенченог дела фигуре је разлика површине квадрата и круга:

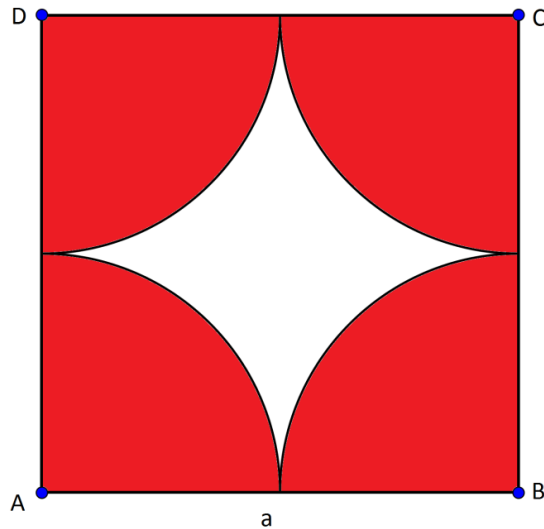
$$P_{\phi} = P_k - P_o = a^2 - r^2 \pi$$

$$P_{\phi} = a^2 - a^2/4 \pi = a^2 (1 - \pi/4)$$

$$\mathbf{P_{\phi} = a^2 (1 - \pi/4)}$$

Задатак 3.

Дат је квадрат странице **a**. Тачке E, F, M, J су на половини странице **a**. Израчунати површину осенченог дела фигуре.



Решење:

$$P_k = a^2$$

Површина осенченог дела фигуре је разлика површине квадрата и круга чији је полупречник **$r = a/2$**

$$P_o = r^2 \pi$$

$$P_\phi = P_k - P_o = a^2 - r^2 \pi = a^2 - a^2/4 \pi = a^2(1 + \pi/4)$$

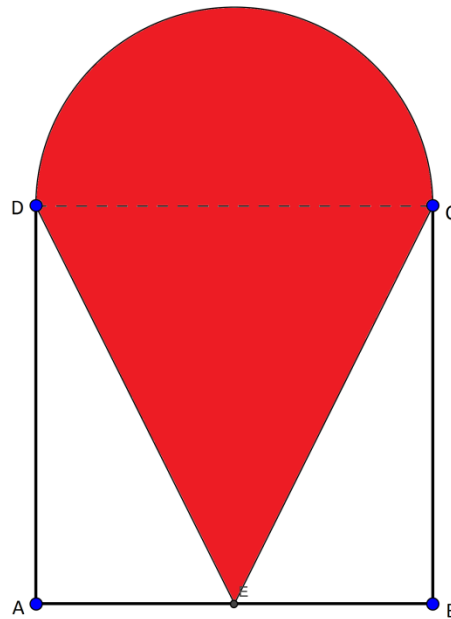
$$\mathbf{P_\phi = a^2(1 + \pi/4)}$$

Коментар:

Примећујемо да је површина осенченог дела фигуре у задатку 2. и 3. Иста, а фигуре су потпуно другачије

Задатак 4.

У квадрат странице a уписан је троугао, а изнад странице $a = CD$ је описан полукруг. Израчунати површину освенченог дела фигуре.



Решење:

Основица и висина троугла ABC је страница квадрата a , из тога следи да је

$P_T = a^2/2$. Полупречник полукруга описаног изнад странице CD је

$$r = a/2 \quad \text{па је,} \quad P_O = r^2 \pi$$

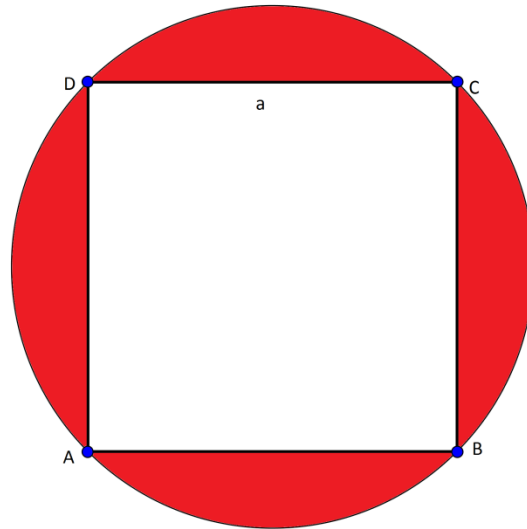
Површина освенченог дела фигуре је збир површине троугла и полукруга

$$P_\Phi = P_T + P_O = a^2/2 + r^2 \pi = a^2/2 + a^2/4 \pi = a^2/2 (1 + \pi/4)$$

$$P_\Phi = a^2/2 (1 + \pi/4)$$

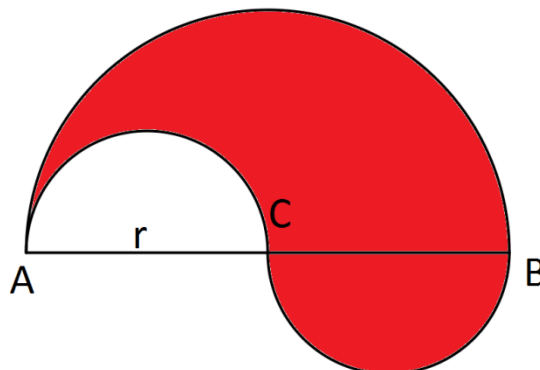
Домаћи 1.

Око квадрата странице a је описан круг. Израчунати површину осенченог дела фигуре.



Домаћи 2.

Израчунати површину осенченог дела фигуре ако је дато $r = AC$



➤ Закључак:

На данашњем часу рађена је нова лекција Сложене Фигуре, која обједињује предходне теме из геометрије, уводи неке нове ствари и повезује их. Ученици су се добро снашли с новим градивом и показали су завидно знање из познавања геометрије. Група ученика се истакла на самом почетку часа, јављајући се на свако питање професора и непрестаним добацивањем са места. Дисциплина је била коректна и примерена једном часу математике, тако да се створила једна добра радна атмосфера, у којој су се ученици међусобно допуњавали, а професор све то контролисао.

После уводног обнављања градива, наступили су нови појмови и задаци, на којима су ученици требали да примене већ стекнуто знање и логичким закључивањем да их реше. На табли са кредама у боји су били исцртане фигуре у облику срца, сладоледа, сузе, итд.. како би ученицима било што занимљивије и забавније за решавање. Све то није било пуно тешко, бар се стекао тај утисак, јер су ученици без већих проблема савладали сваки нови задатак. Могло се чути пуно занимљивих идеја и одговора, тако да је мени као будућем професору било уживање гледати све то. Малу мрљу на овај час ставила је девојчица која је све време добацивала са места и задиркивала другаре из разреда, а када је професор извео на таблу, није знала да уради задатак.

За крај ученици добијају домаћи задатак, који требају самостално да ураде и покажу на следећем часу

Како год, 45 минута је прошло брзо. Час је био јако занимљив и могло се видети како изгледа добар однос професора и ученика, као и начин на који треба држати час. Све у свему једно лепо искуство

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА У СРБИЈИ И СВЕТУ

Прво званично математичко такмичење у Србији (о незваничним нису нађени никакви подаци) одржано је 1956. Године. Наредних неколико година систем такмичења се завршавао републичким такмичењима унутар тадашње Југославије. Прво савезно такмичење из математике у Југославији је одржано 1960. У Београду и од тада се одржавало сваке године, са јединим изузетком 1999. Када је рат са НАТО-м покварио такмичарску сезону. На првим савезним такмичењима су учествовали само ученици старијих разреда; други разред се укључује 1970, а први 1974. Године. После распада старе Југославије 1991. Читав систем је опстао са мањим променама у СР Југославији, односно Србији и Црној Гори, у којој је савезно такмичење наставило да се одржава као државно. Почев од 2007. Године савезно и изборно такмичење су замењени јединственим дводневним такмичењем, Српском математичком олимпијадом (СМО). Од 1998. Године задаци на прва три нивоа такмичења (дакле, изузев СМО) се деле на две категорије: А – за ученике математичких школа и одељења, и Б – за остале.

Систем такмичења

Данас се сезона математичких такмичења у Србији састоји од четири круга:

а) Општинско такмичење. Обично се одржава почетком фебруара. Ради се 5 задатака за 3 сата. Задаци се деле по разредима (први, други, трећи, четврти) и категоријама (А и Б). За пролаз у следећи круг је најчешће довољно 50-60 поена.

Б) Регионално такмичење. Одржава се крајем фебруара. Ради се 5 задатака за 3 сата. Задаци се деле по разредима и категоријама. Број такмичара који пролазе на државно такмичење ограничен је регионалним квотама, али је и овде 50-60 поена обично довољно.

В) Државно (републичко) такмичење. Одржава се у другој половини марта у одабраном месту у земљи. Учествује 350-360 такмичара. Ради се 4 задатка за 4 сата. Задаци се деле по разредима и категоријама.

Г) Српска математичка олимпијада. Одржава се током два дана средином априла у одабраном месту. Учесници се одређују на основу резултата државног такмичења: 26 најбољих из А категорије (3 из првог, 5 из другог, 8 из трећег и 10 из четвртог разреда), 3 из Б категорије (1 из трећег и 2 из четвртог разреда), као и чланови олимпијске екипе претходне године који нису већ укључени. Сви ученици раде исте задатке.

Избор екипе за међународна такмичења

Србија, раније унутар Југославије и СЦГ, учествује на ММО (Међународна математичка олимпијада) од 1963. И на БМО (Балканска математичка олимпијада) од 1987. Екипа за ова два међународна такмичења се од 2007. Одређује директно на основу резултата СМО.

Екипа је раније бира на основу савезног или додатног изборног такмичења (популарно названог *мала олимпијада*) дан после савезног. Ипак, било је неколико одступања од овог правила. Тако је 1999-е, када није било савезног, екипа одабрана на основу изборног такмичења (услед посебних околности); 2002-е године одржано је ново, додатно изборно такмичење након БМО, и резултати ова два такмичења су дала екипу за олимпијаду. Године 2005. Је после БМО одржано дводневно изборно такмичење за олимпијаду. Чланови ранијих олимпијских екипа били су већином ученици старијих разреда, мада су и ученици другог разреда добијали прилику ако би се добро показали на (често тежем) савезном такмичењу.

Ученици старијих разреда основне школе учествују на ЈБМО (Јуниорска балканска математичка олимпијада) од оснивања 1997-е, а екипа се данас одређује на основу резултата СМО за основне школе.

Србија на међународним математичким такмичењима

Ученици из Србије традиционално учествују на следећа три међународна математичка такмичења:

- Међународној математичкој олимпијади (ММО) од 1963
- Балканској математичкој олимпијади (БМО) од 1987, и
- Јуниорској балканској математичкој олимпијади (ЈБМО) од оснивања 1997.

Србија је на међународним такмичењима до 1991. Учествовала у саставу СФР Југославије, од 1992. До 2005. У заједници са Црном Гором (мада су, са

једним изузетком на ЈБМО, сви такмичари били из Србије), а од 2006. Самостално. Након укључења, једина пропуштена међународна такмичења била су ММО 1993. и 1994. и БМО 1999. Што се самих резултата тиче, они су на завидном нивоу. Навешћемо неке од задатака са последње олимпијаде:

Задатак 1. У троуглу ABC тачка J је центар споља приписане кружнице наспрам темена A. Ова кружница додирује страницу BC у M, а продужетке страница AB и AC у K и L, тим редом. Праве LM и BJ се секу у F, а праве KM и CJ се секу у G. Нека је S пресечна тачка правих AF и BC, а нека је T пресечна тачка правих AG и BC. Доказати да је M средиште дужи ST.

Решење: Како је права KM нормална на праву BJ, имамо да је МК паралелно бисектриси $\angle ABC$. Одатле следи да је $\angle BMK = \frac{1}{2} \angle ABC$, и $\angle FMB = \frac{1}{2} \angle ACB$. Означимо са X пресек правих KM и FJ. Из троугла FXM следи:

$$\angle XFM = 90^\circ - \angle FMB - \angle BMK = \frac{1}{2} \angle BAC$$

Тачке K и M су међусобно симетричне у односу на праву FJ и како је $\angle KFJ = \angle JFM = \frac{1}{2} \angle BAC = \angle KAJ$, онда тачке K, J, A и F припадају истом кругу, одакле следи да је $\angle JFA = \angle JKA = 90^\circ$ и $KM \parallel AS$. Четвороугао SKMA је трапезоид и из $\angle SMK = \angle AKM$ следи да је $SM = AK$. Слично, добијамо да је $AL = MT$. Како је већ дато $AK = AL$ (тангенте из A на круг), закључујемо да је $SM = TM$, а то је требало доказати.

Од 1992. Године до сада, такмичари из Србије су на међународној математичкој олимпијади освојили 7 златних, 33 сребрне и 46 бронзаних медаља. Ваља истаћи да је учешће на ММО само по себи велики успех, чак и ако наступ буде неуспешан. На последњој одржаној олимпијади, 2012. Године у Аргентини, Србија је заузела екипно 15 место од 100 земаља учесница, са 1 златном, 2 сребрне и 1 бронзаном медаљом. Последњих година, ученици из Србије су позивани на нека од румунских међународних припремних такмичења. Међу њима, најамбициозније делује такмичење *Romanian Master of Mathematics* (RMMC) на које су, осим Србије, позивани и тимови из већих земаља.

СЈЕДИЊЕНЕ ДРЖАВЕ: У САД-у постоји велики број математичких такмичења која се могу разврстати по узрасту ученика. Навешћемо листу неколико најпознатијих и најзначајнијих, а на неке од њих ћемо посебно обратити пажњу.

Најпознатија математичка такмичења у основним и средњим школама у Америци:

- ABACUS Интернационални математички изазов (разреди 3-8)
- Континентална Математичка Лига (разреди 2-9)
- Математичко такмичење „Кенгур“ (разреди 2-12)
- Математичка Лига (разреди 4-12)
- Математичка Олимпијада основних и срењдњих школа (разреди 4-6 и 7-8)
- MathFax (разреди 3-12)
- MathWizz (разреди K-12)
- SBU Математичко такмичење (разреди 3-8)
- SIGMA (разреди 6-9)
- Америчко математичко такмичење AMT 8, AMT 10, AMT 12
- Math Kangaroo

Једно од најпознатијих такмичења је америчко математичко такмичење (**American Mathematics Competitions (AMT)**), и то су средњошколска математичка такмичења која одређују тим Сједињених америчких Држава који ће учествовати на међународној математичкој олимпијади. Овај тим чини шест средњошколаца који на олимпијади постижу добре резултате. Тим који је учествовао на олимпијади 1994. Године је једини тим који је имао савршене резултате, односно свих шест чланова тима је имало максималне оцене и освојило златне медаље, па су овај тим амерички медији прозвали тимом снова.

Такмичење је основано 1950. Године и до 2000. Године, ово такмичење је имало назив: „Америчко средњошколско математичко тестирање (АСМТ)“. Постоје 3 различита нивоа овог такмичења:

- AMT 8 је такмичење за све ученике 8. Или нижег степена,
- AMT 10 је такмичење за све ученике 10. Или нижег степена,
- AMT 12 је такмичење за све ученике 12. Или нижег степена.

Ученици који постигну добре резултате на AMT 10 или AMT 12 тесту позивају се да учествују на америчком математичком испиту (АМИ). Ученици који прођу добро на АМИ испиту се затим позивају на математичку олимпијаду Сједињених Америчких Држава (USAMO). Ученици који најбоље ураде тест на USAMO (обично око 30 ученика) су позвани да иду на летњи програм математичке олимпијаде (MOSP), а шест најбољих ученика од њих се одабира (кроз низ испита) и они чине математички тим Сједињених Држава.

Постоје одређене награде за ученике који ураде добро AMT тестове. За савршен скор из, ученик може добити као награду књигу или плакету. Списак бодовања ученика је доступан свим факултетима, институцијама и програмима који желе да привуку ученике који су изузетни математичари, а најбољи чак могу добити позивницу за учествовање на летњем програму за средње школе под називом *Math Path* (математички пут). Ученици са најбољим резултатима из сваке школе се увек награђују специјалном значком (орденом) која се лако може закачити на одећу.

Важнији универзитети, попут MIT (Институт технологије у Масачусетсу) примају нове студенте распитујући се за резултате њихових AMT тестова. С обзиром да AMT тестирање представља дубљи ниво математике него SAT, он може помоћи да се идентификују студенти који су спремни на ригорозније основне програме. Многи врхунски студенти умеју да цене увећане потешкоће и придају огроман значај AMT испитивању, па често и похађају курсеве за припрему и решавање тих проблема, EPGY (образовни програм за надарену децу) или друге специјализоване наставне институције. Студенти чак пишу своје „лажне“ AMT тестове да би победили једни друге, или их поставе на интернету, где било ко може покушати да их реши.

Правила и начин бодовања:

АМТ 8 садржи 25 питања са понуђеним одговорима и максимално време за његово решавање је 40 минута. Ни за један проблем није потребан калкулатор, тако да је његова употреба забрањена од 2008. Године. Ово такмичење се углавном спроводи у месецу новембру сваке године од како постоји.

АМТ 8 се бодује на основу тачно урађених задатака, тј. Не постоји казна или негативни поени за погрешно урађен задатак и свако питање има једнаку вредност. Ово није стандардизован тест, односно ниједна школа га не употребљава, изузев неких школа које желе да подстакну ученике да развијају своје математичке способности. Ученици који ураде све тачно на овом тесту (25/25) добијају диплому, а њихова слика се објављује на АМТ сајту.

Навешћемо као пример пар задатака из АМТ 8 теста из 2011 године где се може видети на који начин ученик мора да размишља и шта се од ученика тражи (оригиналност, елаборација, осетљивост на проблеме,...).

Задатак 1. Ако су w, x, y, z цели бројеви и ако је $2^w \cdot 3^x \cdot 5^y \cdot 7^z = 588$, чему је једнак израз: $2w + 3x + 5y + 7z$?

Решење: Како факторизацијом броја 588 добијамо да је $588 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$, то имамо да је $w = 2, x = 1, y = 0, z = 2$, па је наше решење: $2w + 3x + 5y + 7z = 21$.

Задатак 2. Колико цифара садржи производ бројева 4^5 и 5^{10} ?

Решење: $4^5 \cdot 5^{10} = (2^2)^5 \cdot 5^{10} = 2^{10} \cdot 5^{10} = 10^{10}$, па је резултат 10 000 000 000, односно, наше решење садржи укупно 11 цифара.

Задатак 3. Нека је А површина троугла чије су странице дужине 25, 25 и 30 цм, а В површина троугла чије су странице дужине 25, 25 и 40 цм. Како се односе А и В?

Решење: Имамо 2 једнакокрака троугла, па ако код првог троугла повучемо нормалу на страницу дужине 30 цм, добићемо два подударна правоугла троугла. Из Питагорине теореме имамо: $25^2 - 15^2 = x^2$, па је висина $x = 20$ цм. Дакле, први троугао се састоји од 2 троугла чије су странице дужина 15, 20 и 25 цм. Ако исто урадимо са другим троуглом, видећемо да се и он састоји од 2 троугла страница 15, 20 и 25 цм, па су површине једнаке, односно $A=B$.

АМТ 10 и **АМТ 12** имају по 25 питања, а сваки је потребно урадити у 75 минута. До 2007, употреба калкулатора је била дозвољена, али од тада, као и у АМТ 8, није било потребе. Високе оцене на АМТ 10 или 12 могу да квалификују учесника на амерички позивни математички испит (АИМЕ). На АМТ 10 је обично потребан скор од најмање 120 поена, на АМТ 12, скор од најмање 100 поена, што према досадашњој статистици одговара око 5% најбољих ученика који полажу АМТ 12 тест и 2,5% врхунских ученика који полажу АМТ 10 тест.

Сваки испит се бодује на основу броја питања на које је ученик одговорио тачно и броја питања која је оставио непопуњена. Ученик добија 6 поена за свако питање на које је тачно одговорио, 1.5 поена за свако непопуњено питање, и ниједан поен за нетачно урађена питања. Максимални могући резултат је $6 \cdot 25 = 150$ бодова. У 2006. Години, АМТ-12 је имао укупно 17 савршених резултата, док је АМТ 10 имао 89.

Ови испити се полажу првог уторка у месецу фебруару, а други 15 дана након првог, тако да ученици могу полагати оба испита. Ако ученик изабере да ради оба испита, највећи скор ће му бити рачунат за квалификације на АМИ тест. Током времена број поена по урађеном задатку је варирао између 5 и 6, а број поена по неуррађеном, тј. Бланко задатку од 1,5 до 2,5 поена. До 1999. Године било је чак 30 задатака који су се радили 90 минута, али је то касније модификовано и тест данас садржи 25 задатака.

Што се тиче заступљености задатака по областима из математике, према званичним подацима из табеле учесталости задатака закључујемо да су најзаступљеније области геометрија, алгебра и операције са бројевима.

Табела 1. Учесталост задатака по областима на АМТ-у

Алгебра	Релације	Вероватно- ћа	Геометрија	Мерења	Операције са бројевима	Решавање проблема	Укупно
6,8125	0,125	2,1875	8,1875	0,6875	5,25	1,75	25

Примери неких задатака из 2012:

Задатак 1. Производ два броја је 9. Реципрочна вредност једног броја је 4 пута већа од реципрочне вредности другог броја. Чему је једнак збир ових бројева?

Решење: Задатак ћемо решити постављањем две једначине са две непознате. Задато је $x \cdot y = 9$, и $\frac{1}{x} = 4 \cdot \frac{1}{y}$, одакле следи $y = 4 \cdot x$. Када ово убацимо у прву једначину, добијамо: $4 \cdot x^2 = 9$, одакле следи да је $x = \frac{2}{3}$, па је $y = 6$, и коначно збир је: $x + y = \frac{20}{3}$.

Задатак 2. Сума првих m природних непарних бројева је за 212 већа од суме првих n парних природних бројева. Колики је збир свих могућих решења за n ?

Решење: Сума првих m непарних бројева је дата са m^2 , а сума првих n парних бројева је дата формулом $n(n+1)$, па тако долазимо до почетне једначине: $m^2 = 212 + n^2 + n$, па ако направимо квадратну једначину по n добијамо: $n^2 + n + (212 - m^2) = 0$. Дискриминанта овог система једнака је $1 - 4 \cdot (212 - m^2) = 4 \cdot m^2 - 847$, па како мора бити ненегативан број и потпун квадрат, следи да је $x^2 = 4 \cdot m^2 - 847$, односно ако распишемо као разлику квадрата: $(2m - x)(2m + x) = 847 = 7 \cdot 11^2$, па имамо могуће случајеве: $847 \cdot 1$, $7 \cdot 121$, $11 \cdot 77$. Како је $(2m + x) - (2m - x) = 2x$, имамо да је разлика у овим случајевима 846, 114 и 66, односно x може узимати вредности 423, 57 или 33. Како је $2n = -1 + x$, видимо да n може узимати вредности 211, 28 или 16, па је њихов збир једнак 255.

ЈАПАН: Јапан има национални наставни план и програм који прате све основне и средње школе. Министарство просвете се налази на челу свих школа, и оно представља орган управе који је надлежан за школску едукацију. Ово министарство надзире и финансира локалне одборе едукације. Они такође припремају и дистрибуирају стандардне наставне планове и програме које сви уџбеници прате.

Школска година почиње 1. Априла и завршава 31. Марта следеће године. Већина основних и средњих школа годишње ради 35 недеља или 190 дана. Ученици који похађају државне школе иду у школу од понедељка до петка и две до три суботе месечно. У основној школи, ученици имају часове 6 сати дневно од понедељка до петка, док средњошколци похађају 7 сати дневно, с тим што сви ученици имају суботом четири часа додатне наставе где добијају инструкције о предметима који их интресује. Број ученика у учионицама се креће од 29 у основним школама до 34 у средњим школама. Сви наставници у Јапану морају имати бечелор диплому четворогодишњег факултета, са потврдом о полагању неколико курсева из образовних теорија и педагогије.

Јапански образовни систем се заснива на идеји да сва деца имају потенцијал да уче, а самим тим и наставни план и програм свих предмета је практично исти за све ученике кроз средње школе. Према томе, ни основна ни средња школа не издваја ученике по способностима и нивоу знања. Ученици који имају тешкоће могу ангажовати приватне менторе и присуствовати курсевима из предмета који их интресује. Јапански ученици имају веома снажну посвећеност и напорно раде, док велику улогу има и породица, као и школски систем који им уливају снажну етику и радну дисциплину.

Најпознатија установа у којој ученици свих узраста, поред математике, могу стећи знање и из других наука је свакако *Универзитет Кинки*, смештен у трећем по величини граду у Јапану, Осаки. Овај универзитет обухвата више различитих делова, од обданишта преко основне и средње школе па све до факултета.

Јапанци такође учествују и на *Азијско-Пацифичкој математичкој Олимпијади* (АПМО), која постоји од 1989. Године, а у њеном саставу се поред Јапана налази САД, Кина, Кореа, Аргентина, Азербејџан, Тринидад и Тобаго,

Филипини, Уругвај, Аустралија, Обала Слоноваче и многе друге земље. Циљеви АПМО-а су:

- откривање, подстицање и преиспитивање математички даровитих ученика у свим земљама Азије и Пацифика,

- неговање пријатељских међународних односа и сарадње између ученика и наставника у азијско-пацифичкој регији,

- стварање прилика за размену информација и школским садржајима у пацифичком региону

- охрабрење и подршка математичке олимпијаде, у смислу повезаности са математичким активностима, не само у АПМО земљама учесницама, већ и у другим земљама Пацифика.

АПМО такмичење се састоји од једног четворочасовног теста који се састоји од 5 питања различите тежине и сваки од њих носи максимално 7 поена. Такмичари се не уписују формално на универзитет и морају имати мање од 20 година да би радили тест, у периоду до 1. Јула године у којој се ради тест.

Сваке године, АПМО се одржава у поподневним сатима другог понедељка у марту за чланове земаља из Северне и Јужне Америке, и ујутро другог уторка у марту за земље учесница са западног Пацифика и Азије. Урађени тестови се прикупљају од такмичара чувају се у тајности све док их званичници АПМО-а, тј. Земља координатор (у 2012-ој то је био Јапан), не прегледају и не истакну резултате на свом сајту. Поред тога, на сваком испитном папиру се налази писмено упутство, која упозорава ученике да не разговарају и не објављују резултате тестова на интернету до тог датума док се не објаве службени резултати тестова.

За утврђивање границе, односно укупног броја поена или укупног броја освојених златних, сребрних или бронзаних медаља, након чега се добија нека од награда, користе се следеће смернице:

(а) Максималан, односно укупан број награда зависи од броја АПМО такмичара и ако има n такмичара, онда је укупан број медаља једнак целом делу $\left[\frac{n+1}{2} \right]$;

(б) Постигнути резултати, односно укупан број поена је:

- за златну медаљу $\geq m + \sigma$,

- за сребрну медаљу $\geq m + \frac{1}{3} \sigma$, и

- за бронзану медаљу $\geq m - \frac{1}{3} \sigma$;

где m представља укупан број АПМО поена, а σ стандардну девијацију свих АПМО резултата.

Свака земља појединачно може освојити сертификат као награду ако има један од следећег броја освојених медаља:

(а) Златна медаља = 1,

(б) Златне + сребрне медаље = 3, и

(в) Златне + сребрне + бронзане медаље = 7.

Награда *Honourable Mention* се додељује сваком такмичару који није добио медаљу, али чији резултати задовољавају одређене критеријуме (варира од године до године и зависи од стварног ширења бодова), нпр. Такмичар који је добио максималан број поена – 7, на најмање једно питање, или је добио 5 или 6 поена за најмање два питања и слично.

Председник одбора АПМО-а је одговоран за организовање дневног реда и других ствари потребних за одржавање годишњег састанка комисије АПМО-а. Председавајући мора да обезбеди да земље сениори и асистенти координатори буду познати минимум 2 године унапред. Земље сениори и асистенти координатори су одговорни за:

а) предлагање (до четири) додатна питања, решења и начина решавања за АПМО тест, ако је то потребно;

б) постављање питања, припрема решења и шема за означавање АПМО теста;

в) слање папира за такмичење земљи асистенту координатору, два резервна питања, решења и начина решавања, до 14. Октобра сваке године;

г) слање енглеске верзије АПМО задатака, решења и начина решавања одговарајућим особи за контакт (углавном је то заступник или члан комисије) у свакој од земаља учесница најкасније до 14. Јануара следеће године;

е) координирање и рангирање резултата теста и слање резултата свим земљама учесницама у најкраћем могућем року, тј. У априлу или почетком маја сваке године;

ђ) слање авионом довољног броја награда, медаља и сертификата свакој од земаља учесница.

На последњој олимпијади, репрезентација Јапана заузела је екипно 5. Место, иза репрезентација Кореје, Сједињених Држава, Тајланда и Русије, са освојеном 1 златном, 2 сребрне и 4 бронзане медаље. Навешћемо један од тежих задатака са последње олимпијаде и његово решење:

Задатак 1: Нека је n природан број већи од 1. Доказати да је за реалне бројеве $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ задовољена једнакост $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 = n$ ако је задовољено:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}$$

Решење: Приметимо прво, да ако је $i \neq j$ онда је задовољено:

$$a_i \cdot a_j \leq \frac{a_i^2 + a_j^2}{2}, \text{ па имамо:}$$

$$n - a_i \cdot a_j \geq n - \frac{a_i^2 + a_j^2}{2} \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} > 0.$$

Ако узмемо да је $b_i = |a_i|$ ($i = 1, \dots, n$) онда важи: $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2 = n$, и

$\frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{1}{n - b_i b_j}$, одакле видимо да је довољно доказати ово за ненегативне

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, па ћемо даље подразумевати да су $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ненегативни. Ако помножимо обе стране једнакости са n , добијамо следећу једнакост:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{n}{n - a_i a_j} \leq \frac{n^2}{2} \text{ и како је } \frac{n}{n - a_i a_j} = 1 + \frac{a_i a_j}{n - a_i a_j}, \text{ убацимо ово у суму и}$$

искористимо да је збир првих n бројева једнак $\frac{n(n-1)}{2}$, па долазимо да

$$\text{једнакости: } \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}$$

за коју ћемо показати да је тачна. Ако је $a_j^2 = n$, онда мора бити $a_j = 0$, за све $i \neq j$, и једнакост је тривијална. Зато сада претпоставимо да је $a_j^2 < n$.

Претпоставићемо од сада да је $i \neq j$. Како је $0 < a_i a_j < \left(\frac{a_i + a_j}{2}\right)^2 \leq \frac{a_i^2 + a_j^2}{2}$, важи:

$$(*) \quad \frac{a_i a_j}{n - a_i a_j} \leq \frac{a_i a_j}{n - \frac{a_i^2 + a_j^2}{2}} \leq \frac{\left(\frac{a_i + a_j}{2}\right)^2}{n - \frac{a_i^2 + a_j^2}{2}} = \frac{1}{2} \frac{(a_i + a_j)^2}{(n - a_i)^2 + (n - a_j)^2}.$$

Сада, пошто је $n - a_i^2 > 0$ и $n - a_j^2 > 0$, применом Коши – Шварцове неједнакости добијамо:

$$(**) \quad \left(\frac{a_i^2}{n - a_i^2} + \frac{a_j^2}{n - a_j^2} \right) ((n - a_i)^2 + (n - a_j)^2) \geq (a_i + a_j)^2$$

одакле произилази:

$$\frac{(a_i + a_j)^2}{(n - a_i)^2 + (n - a_j)^2} \leq \left(\frac{a_i^2}{n - a_i^2} + \frac{a_j^2}{n - a_j^2} \right)$$

Комбиновањем (*) и (**) добијамо:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i a_j}{n - a_i a_j} \leq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{a_i^2}{n - a_i^2} + \frac{a_j^2}{n - a_j^2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{a_j^2}{n - a_i^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{n - a_i^2}{n - a_i^2} = \frac{n}{2}.$$

КИНА: У Кини, која се сматра једном од развијенијих земаља што се тиче математичког стваралачког мишљења, постоји велики број математичких такмичења, док Кинези такође велику значај придају и међународним математичким такмичењима где остварују сјајне резултате. Први пут Кина послала тим на Међународну математичку олимпијаду 1985. Године. То је била 26. По реду олимпијада и тада су Кину представљала два ученика. Од 1986. Па надаље, Кина је увек слала математички тим од 6 ученика, изузев 1998. Године, када је олимпијада одржана на Тајвану.

До данас, Кина је земља са највише златних медаља у екипном такмичењу, има их чак 124, иако је учесница овог такмичења тек од 1985. Године. Иза ње су Сједињене Државе са 96 и Совјетски Савез са 80 златних одличја. Велика већина кинеских ученика је освајала златну медаљу. Рецепт за овакве успехе Кинеског тима лежи, са једне стране, у напорном раду ученика и њиховој истрајности да успеју, и са друге стране, у напору наставника у школама и обуци коју спроводе национални тренери. Такође је резултат образовног система у Кини, а посебан нагласак је на обуци основних вештина у научном образовању. На последњој, 53. По реду математичкој олимпијади која је одржана у јулу ове године у Аргентини, тим Кине је заузео друго место, иза тима Јужне Кореје, са свих 6 златних медаља.

Нека од најважнијих и најпознатијих такмичења у Кини су:

- КМО (кинеска математичка олимпијада)
- КОМТМ (кинеско основно математичко такмичење у моделирању)
- КОЕМТ (кинеско основно електронско-математичко такмичење у моделирању)
- ЗКМО (Западно – кинеска математичка олимпијада)
- КЖМО (кинеска женска математичка олимпијада)
- ЈИМО (Јужно – источна кинеска математичка олимпијада)
- СКМО (Северно – кинеска математичка олимпијада)
- Национална високо – школска математичка лига
- КЈМО (кинеска јуниорска математичка олимпијада)

Кинеско математичко такмичење (КМТ) се организује у октобру сваке године. Комисија кинеског математичког друштва и локална математичка комисија су одговорни за смишљање задатака и тестова. Тест који се ради садржи 6 задатака

са понуђеним одговорима на заокруживање, 6 бланко задатка где такмичари исписују крајњи резултат и 3 задатка у којима се оцењује поступак израде, као и тачност решења. Максималан број поена који ученик може освојити ако уради све тачно је 150, а ту је и додатни тест сачињен од 3 питања који носи максималних 50 поена. Ученици који најбоље ураде тест на кинеском математичком такмичењу, као и овај додатни екстра тест, добијају одговарајућа признања и могу се директно уписати на универзитет. Ученици који су солидно урадили овај тест добијају позивницу за учествовање на кинеској математичкој олимпијади (КМО) следеће године. Дакле, за кинеске средњошколце, кинеска математичка олимпијада представља први корак ка међународној математичкој олимпијади (ММО).

Математичка олимпијада у Кини (КМО) је установљена 1985. Године, и на почетку је била позната као „зимски камп“. Олимпијада је организована у ИМО формату и одржава се крајем јануара или почетком фебруара. Ипак, математичка такмичења у Кини имају много дужу традицију. Разна такмичења, као што је математичка олимпијада у Пекингу први пут су се одржала од пре неких 60 година.

Зимски камп је временом обухватао све већи број националних средњих школа и успео је да подигне математику на виши ниво, и самим тим је досегао ниво математичке олимпијаде, тако да је 1985. Године, на иницијативу четири велика кинеска универзитета: Универзитета у Пекингу, Нанкаи Универзитета, Фудан Универзитета и Великог кинеског Универзитета за науку и технологију, кинеска математичко друштво донело одлуку да се ово такмичење одржава сваке године у јануару. Ово такмичење траје 5 дана, први дан је свечано отварање, други и трећи дан ученици раде тестове, четврти дан комисија прегледа и објављује резултате, а петог дана је свечано затварање уз доделу диплома и награда најбољим ученицима.

Тестови су на КМО-у по тежини слични тестовима који се раде на међународној олимпијади. Оба дана се раде 2 теста која имају по 3 задатка, дневно се ради максимално четири и по сата, а сваки задатак носи по 21 поен, тако да ученици могу максимално освојити 126 поена. 1991. Године, назив „зимски камп“ је званично промењен у „кинеска математичка олимпијада“. Она ће временом постати једно од најважнијих средњошколских такмичења у Кини.

Ево једног задатка са овог такмичења са више понуђених одговора, од којих је само један исправан:

Задатак 1. Ако реални бројеви x и y задовољавају $(x+5)^2 + (y-12)^2 = 14^2$, онда је минимум функције $x^2 + y^2$ једнак:

- а) 2 б) 1 в) $\sqrt{3}$ г) $\sqrt{2}$

Решење: Уведимо смене $x+5=14\cos\theta$ и $y-12=14\sin\theta$ за $\theta \in [0, 2\pi)$ па добијамо:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (14\cos\theta - 5)^2 + (14\sin\theta + 12)^2 = \\14^2 + 5^2 + 12^2 - 140\cos\theta + 336\sin\theta &= \\365 + 28(12\sin\theta - 5\cos\theta) &= \\365 + 28 \cdot 13\sin(\theta - \varphi) &= \\365 + 364\sin(\theta - \varphi),\end{aligned}$$

где је $\operatorname{tg}\varphi = \frac{5}{12}$.

Како $x^2 + y^2$ има минималну вредност 1, када је $\theta = \frac{3\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$, следи да је

$x = \frac{5}{13}$ и $y = -\frac{12}{13}$, па је тачан одговор под б).

Женска математичка олимпијада у Кини (КЖМО) је ако по ничему другом, свакако позната по том што је јединствена. То је средњошколско математичко такмичење на којем учествују само средњошколке. Такмичење је првобитно имало статус регионалног такмичења за женске екипе средњошколаца из Кине и других азијских земаља источне Азије (укључујући и Русију). Пре неколико година Кина је проширила конкуренцију овог такмичења на ученике из целог света, укључујући САД, Канаду, Јужну Африку, Аустралију и друге. Последња олимпијада је одржана Олимпијада одржана је у периоду од 28. Јула до 3. Августа у граду Шенжен.

ЗАКЉУЧАК:

Имајући у виду да је образовање данас на високој цени и нивоу, посебну пажњу треба обратити на методику, квалификације и компетенције наставника за посао као и на најновија истраживања из области педагогије и психологије како би васпитно-образовни рад обављао своју функцију.

Посматрајући разлике у резултатима које су ученици постизали на такмичењима у Србији и ван ње, можемо доћи до следећих уочених правилности: наставници који су више пажње посвећивали објашњавању и детаљнијом анализи питања ученика имали су боље резултате у односу на наставнике који нису обраћали пажњу на објашњавање практичне примене.

Личност наставника има велики утицај на емоционалну климу а самим тим на мотивацију ученика. Компетенције наставника су у директној пропорционалној размери са постигнућима на такмичењима. Функција такмичења и тестова јесте да покаже разлику између постигнућа ученика у одређеној области а затим је ред на стручњаке да уоче уроке који су довели до те појаве ради побољшања васпитно-образовног рада. Наставник треба да настави са континуираним усавршавањем и стручним образовањем и после завршеног факултета. Не само да се откривају нови закони, правилности и теорије у математици већ се откривају и нови начини преношења градива.

Математика је један од наставних предмета који има своју специфичну методологију и методику, као и садржај. Комплексна тема има за последицу различите варијације објашњавања тема градива. Посматрајући наставнике и ученике из САД-а, Јапана, Кореје и осталих земаља и њихове резултате можемо доћи до закључка да је утицај друштвених у културних разлика мерљив.

Један од значајних услова за савладавање градива јесте амбијент у којем се одвијају часови. Учионице треба да буду модерно опремљене, чисте, добро осветљене, адекватно велике сразмерно броју ученика. Математички инструменти треба да су доступни сваком ученику. Употреба информационих технологија може олакшати рад наставнику, утицати на ергономију рада и смањити рудантност информација. Веома важна је потреба за фидбеком тј. повратном информацијом. Двосмерна комуникација и демократски тип наставника утичу на повећање разумевања нових садржаја а самим тим омогућавају ефикаснију организацију

часа. Временски интервал од 45 минута у зависности од теме и типа часа је довољан за представљање садржаја али нагласак треба да буде на буђењу природне радозналости ученика и рушење ригидних образаца понашања: наставник прича, ученик слуша.

Припрема часа је једна од најважнијих елемената у организацији васпитно-образовног рада. Наставник треба да иде у корак са нивоом ученика и да не прелази преко области које нису јасно разумели јер математика је наука код које сваки део је повезан са другим.

Србија је једина држава која има Математичку гимназију коју могу да похађају и ученици седмих и осмих разреда који су показали одличне резултате из области природних наука. Одлични резултати које постижу ученици те школе не само на Математичким олимпијадама већ и на другим врстама тестова указују да усмерен и добро организован рад једна од кључних ствари које ученицима помажу у бољем разумевању математике.

Образовна постигнућа ученика у доменима математичке писмености на тестовима показују не у којој су мери ученици овладали наставним планом и програмом већ показују да ли су она овладала знањима која им помажу да се сналазе у животу и да ли су савладали тзв. научну писменост. прво истраживање о ефектима основног школовања, које је урадио Институт за психологију 1989. године и које је 2003. године било поновљено за потребе Уницефове студије, показало је да је наш образовни систем неефикасан и да наши ученици имају репродуктивно и нефункционално знање.

ТИММС истраживања, ПИСА тестови, Олимпијаде и друга математичка такмичења имају за улогу да открију квалитет образовања преко ових индикатора. Резултати служе као основ развоја образовања и земље међу својим стратешким циљевима постављају бољи резултат на тестовима и такмичењима.

На ТИММС истраживањима најбоља постигнућа из математике имали су ученици земаља источне и југоистичне Азије и то из Сингапура, Јужне Кореје, Хонг Конга, тајвана и Јапана. Истраживање је показало да економска ситуација, школски услови, недостатак компјутера и немају превелик утицај на наше ученике што указује на кључну ствар- однос на релацији наставник-ученик. На овај начин се добијају подаци о наставном програму, квалитету наставе и карактеру наставника.

ЛИТЕРАТУРА :

- [1] А. Адлер, *Индивидуална психологија*, Просвета, Београд
- [2] В. Андриловић, М. Чудина, *Психологија учења и наставе*, Школска књига, Загреб
- [3] В. Банђур, *Идентификовање способности учења математике*, Београд
- [4] И. Бизумић, *Како открити обдареног ученика*, Сремска Митровица
- [5] И. Крутецки, *Психологија математичке способности*, Београд
- [6] М. Марјановић, Часопис: *The teaching of mathematics*, Друштво математичара Србије
- [8] John de Francis, *Mathematical competitions in China*
- [9] Група аутора, TIMSS 2003, Института за педагошка истраживања
- [10] Koon Shing Leung, Часопис: *Some Characteristics Of East Asian Mathematics Classrooms Based on Data from the TIMSS 1999 Video Study*
- [11] В. Јанковић, В. Мићић, *IX & XIX International Mathematical Olympiads*, Београд
- [12] J. Baterrson, *Competition Math for Middle School*

Линкови:

- www.iea.nl
- www.timss.bc.edu
- www.isc.bc.edu