Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Master rad

Principi matematičke indukcije i rekurzije u nastavi

Matematike i računarstva

Mentor: dr. Nebojša Ikodinović

Kandidat: Ivanka Jovanović

Beograd, 2013.

SADRŽAJ

Uvod

Cilj ovog rada je da ukaže na delikatnost obrade nastavne teme Matematička indukcija u srednjoj školi. Opisani su načini na koje je moguće prevazići neke nedostatke tradicionalnog pristupa. Predložena je obrada metodom problemske nastave i opis funkcionisanja na samom času. Ovakva nastava bi terbalo da otvori učenicima mnoge mogućnosti.

-U glavi jedan opisana je istorija i nastanak matematičke indukcije.

-U glavi dva opisan je način ostvarivanja nastave matematike u trećem razredu srednje škole pri obrađivanju teme matematičke indukcije i rekurzije.

-U glavi tri opisana je problemska nastava, motivi učenja kroz problemsku nastavu i uloga nastavnika u obarazovnom procesu.

-U glavi četiri opisane su ideje i mogućnosti njene primene i način kako možemo unaprediti nastavu matematike korišćenjem problemske nastave u našem slučaju prilikom obrade tema matematičke indukcije i rekurzije.

Na samom kraju izveden je zaključak i navedena literatura koja je korišćena pri izradi ovog master rada.

1. Matematička indukcija

1.1. Istorija matematičke indukcije

Kao i mnogi drugi koncepti i metodi matematike, metod matematičke indukcije nije otkriće određene osobe i fiksnog datuma. Metod matematičke indukcije je nastajao u radovima niza matematičara.

Prema istoričarima matematike koreni matematičke indukcije nalaze se u staroj Grčkoj. Najraniji tragovi matematičke indukcije implicitno su sadržani u Euklidovim dokazima na primer u dokazu da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva (300. p.n.e.).

Teorema 20 (knjiga IX Euklidovih *Elemenata). Prostih brojeva ima beskonačno mnogo.*

Euklid dokazuje (prema [2]) uzimajući za proste brojeve A, B, C i pokazuje da je ABC+1 novi prost broj G. Zaključak dokaza je:
"Dobili smo proste brojeve A, B, C, G što je više od predpostavljenih."

Euklidu je nedostajao algebarski jezik neophodan za uopšteniji indukcijski korak, a umesto toga ga je predstavljao u konkretnom slučaju.

Prva eksplicitna formulacija javlja se kod Paskala. On je u svojoj knjizi (1654. god.) upotrebio metod kompletne indukcije u vezi sa aritmetičkim trouglom, koji nosi njegovo ime, i njegovim primenama.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Veliki doprinos u nastajanju matematičke indukcije dali su i arapski matematičari. Implicitni dokaz indukcijom za aritmetičke nizove uveo je al-Karaji (oko 1000. god.), a nastavio je al-Samaw'al koji je koristio za specijalne slučajeve binomne teoreme i svojstva Paskalovog trougla. Khayyam (1048–1131) je napisao značajnu *Studiju o rešavanju algebarskih problema* (1070. god.). On je posebno izveo opšti metod za rešavanje kubnih jednačina, a i nekih viših stepena. U *Studiji* on je pisao o trougaonom nizu i binomnim koeficijentima poznatim kao Paskalov trougao.,

Takođe značajan doprinos su dali i indijski matematičari. Bhaskara (1114–1185. god.) je izveo ciklični metod za rešavanje neodređene kvadratne jednačine oblika $ax^2 + bx + \mathrm{c} = \mathrm{y}$ u kome se javlja matematička indukcija.

Prema Bojeru (prema [2]) naznake metoda matematičke indukcije mogu se naći u radu F. Mavrolikosa (1494-1575) u knjizi I njegove *Aritmetike* iz 1545. godine.
Navešćemo neke sadržaje iz ove knjige pre svega jer se pojedine teoreme mogu iskoristiti i danas u nastavi matematike, kao primeri i zadaci prilikom obrade Matematičke indukcije. Mavrolikos u svojoj knjizi počinje definicijama različitih vrsta brojeva kao što su:

- Parni brojevi;
- Neparni brojevi;
- Trougaoni brojevi;
  n-ti (po veličini) trougaoni broj je zbir prirodnih brojeva od 1 do n (uključujući i 1 i n);
- Kvadratni brojevi;
- Numeri parte altera longories (N.P.A.L.);
  N-ti (po veličini) N.P.A.L. broj je proizvod $n(n-1)$;
- itd.

Mavrolikos je ove brojeve razvrstao u sledećoj tabeli.

Prirodni	Parni	Neparni	Trougaoni	Kvadratni	N. P. A. L.
1	0	1	1	1	0
2	2	3	3	4	2
3	4	5	6	9	6
4	6	7	10	16	12
5	8	9	15	25	20
6	10	11	21	36	30
7	12	13	28	49	42
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	P_n	N_n	T_n	K_n	L_n

Nakon ovih definicija slede teoreme u vezi sa uvedenim vrstama brojeva.

Teorema IV Neparni brojevi se dobijaju iz jedinice uzastopnim dodavanjem broja 2.
n-ti neparan broj +2= sledeći neparan broj $N_n + 2 = N_{n+1}$

Teorema VIII $2T_n = L_{n+1}$

Teorema X $L_n + n = K_n$

Teorema XI $T_n + T_{n-1} = K_n$

Teorema XIII $K_n + N_{n+1} = K_{n+1}$

Teorema XV $N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_n = K_n$

Navodimo Mavrlolikosov dokaz teoreme XV.

Prema predhodnom tvrđenju [XIII K_n+N_{n+1}=K_{n+1}], prvi kvadratni broj (1), koji je ujedno i prvi neparan broj, dodat drugom neparnom broju jednak je drugom kvadratnom broju;
A drugi kvadratni broj (4) sabran sa trećim neparnim brojem daje treći kvadratni broj(9);
A treći kvadratni broj (9) sabran sa četvrtim neparnim brojem (7) daje četvrti kvadratni broj (16); i tako neograničenom primenom Teoreme XIII dokazujemo da je tačno tvrđenje. ■

Izloženi dokaz jasno ukazuje na začetak metode matematičke indukcije u obliku u kome je i danas koristimo.

Sve do 17. veka nije pronađena zadovoljavajuća formulacija metode, kada se javila u radu Pjera de Fermaa (1601-1665) i Bleza Paskala (1623-1662).

Ferma je koristio svoju verziju matematičke indukcije, poznatiju kao "metod spusta", u dokazu čuvene poslednje teoreme. Teorema koju je Ferma dokazao može se formulisati na sledeći način:

Teorema. Ne postoje celobrojna rešenja jednačine $x^2 + y^2 = z^2$ za koje je $\frac{1}{2}xy$ kvadrat.

Ferma pretpostavlja suprotno od onoga što želi da dokaže kao hipotezu. On pretpostavlja da takva rešenja postoje. Izostavljajući veći deo dokaza on glasi:

''Dakle, ako postoje dva kvadrata takva da su njihovi zbir i razlika takođe kvadrati, takođe će postojati druga dva kvadrata koji će imati istu osobinu, ali će imati manju sumu. Po istom principu nalazimo sumu opet manju od predhodne i nastavljamo do beskonačnosti nalazeći kvadrate celih brojeva sve manje i manje koji imaju istu osobinu. To je međutim nemoguće, jer ne postoji beskonačan niz brojeva manjih nego bilo koji ceo broj koji zamislimo.''

Fermaova strategija je bila da dokaže postojanje beskonačno opadajućeg niza kvadrata brojeva iz negiranja teoreme. Pošto strogo opadajući niz prirodnih brojeva ne postoji, Ferma je pokazao da negiranje teoreme dovodi do kontradikcije i time je teorema tačna. Fermaov metod poznat kao metod spusta je obrnuti oblik matematičke indukcije, jer on podrazumeva spust, a ne uspon prirodnih brojeva. Glavna odlika ove metode je da je pretpostavka da neprazan skup prirodnih brojeva sadrži najmanji element i to je ono što ga čini ekvivalentnim sa matematičkom indukcijom. Za godinu Fermaovog dokaza procenjuje se 1630. godina, ali nije bio objavljen pre 1670. godine, pet godina posle njegove smrti. Nakon Fermaa, matematička indukcija je ponekad bila poznata kao Fermaova indukcija, mada je zahvaljujući Paskalu dobijena prva zadovoljavajuća formulacija, tj. moderna forma matematičke indukcije. Ona se pojavljuje u kratkoj knjizi koju je Paskal objavio 1654. god. o aritmetičkim trouglovima koji nose njegovo ime. Paskal je bio upoznat sa radom Mavrolikosa i njegovom aritmetikom. On je u nekoliko navrata koristio metod kompletne indukcije u vezi sa svojim aritmetičkim trouglom i njegovim primenama.

1

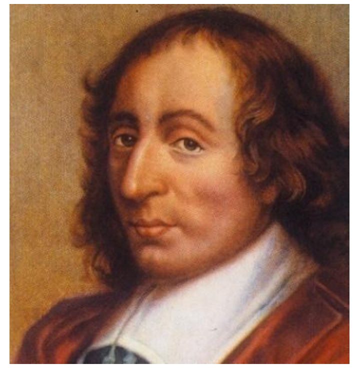
1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1



$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Jedan od interesantnih primera gde je Paskal upotrebio metod kompletne indukcije je Paskalov trougao koji predstavlja beskonačan niz prirodnih brojeva, koji je u obliku piramidalne šeme. Svaki broj u jednom redu predstavlja zbir brojeva koji su iznad njega. Krajnji brojevi šeme su uvek jedinice. Ovi brojevi posmatrani po vrstama ponašaju se kao binomni koeficijenti. Naziv je dobio po matematičaru Blezu Paskalu.

Navešćemo teoremu i dokaz jedne osobine brojeva u Paskalovom trouglu.

Teorema. $\binom{n}{k} : \binom{n}{k+1} = \frac{k+1}{n-k}$

Paskalov dokaz.

Prvi deo.
Za n=2 jedine dve mogućnosti za k i k+1 su redom 1 i 2.

$$\binom{2}{1} : \binom{2}{2} = \frac{2}{1}$$

Drugi deo. Pretpostavimo da teorema važi za $n = q$ tj. da važi

A) $\binom{q}{k} : \binom{q}{k+1} = \frac{k+1}{q-k}$ za sve k<q.

Dokažimo da je

B) $\binom{q+1}{j} : \binom{q+1}{j+1} = \frac{j+1}{q+1-j}$ za sve pozitivne cele vrednosti j<q+1

B) se dobija iz A) kad se q zameni sa $q+1$ u prvom delu i kada umesto k koristimo drugo slovo zbog preglednosti kasnije. Dobro poznata relacija

C) $$\binom{N}{R} = \binom{N-1}{R-1} + \binom{N-1}{R}$$

je potrebna da bismo dokazali da B) sledi iz A).

Po relaciji C) leva strana relacije B) je ekvivalentna

$$\frac{\binom{q}{j-1}+\binom{q}{j}}{\binom{q}{j}+\binom{q}{j+1}} = \frac{\frac{\binom{q}{j-1}}{\binom{q}{j}}+1}{1+\frac{\binom{q}{j+1}}{\binom{q}{j}}}.$$

Primenjujući relaciju A) na razlomke $\frac{\binom{q}{j-1}}{\binom{q}{j}}$ i $\frac{\binom{q}{j+1}}{\binom{q}{j}}$ dobijamo

$$\frac{\frac{j}{q-j+1}+1}{1+\frac{q-j}{j+1}} = \frac{j+q}{q-j+1}$$

Što je i trebalo dokazati. ■

Posle Paskala i Fermaa matematička indukcija je postala standardni metod dokazivanja među matematičarima. Međutim ime *matematička indukcija* dugujemo De Morganu (1838. godina).

Krajem 19. veka došlo je do povećanja interesa za osnove matematike. Prva na redu je prirodno bila aritmetrika. Jedan od rezultata ovoga jeste strogo uvođenje skupa prirodnih brojeva zasnovano na funkciji neposredni sledbenik. Oko 1880. godine tri velika matematičara Ferge, Dedekind i Kantor nezavisno jedan od drugog su radili na tome. Dedekind je 1888. godine objavio spisak aksioma aritmetike među kojima se nalazi i matematička indukcija. Đuzepe Peano je usvojio Dedekindove aksiome i formirao ih u prvi formalni sistem aksioma za aritmetiku. Peanove aksiome za aritmetiku su objavljene 1889. godine i uključivale su aksiomu indukcije.

Bilo je potrebno preko dve hiljade godina da neizrečena pretpostavka premosti jaz u Euklidovom dokazu i da se razvije u potpuno eksplicitnu aksiomu indukcije koju je formulisao Peano svojom logičkom simbolikom.

1.2. Peanova aritmetika

Prirodni brojevi spadaju sigurno u najstarije matematičke pojmove. Iz potrebe za prebrojavanjem nastao je niz prirodnih brojeva: 1, 2, 3, ... kao osnovni skup za upoređivanje. Ipak, prva aksiomatika prirodnih borjeva potiče tek od Dedekinda i Peana s kraja 19. veka. Peanove aksiome glase:

P.1. 0 je prirodan broj,
P.2. Ako je x prirodan broj, onda je i x' prirodan broj,
P.3. Ako su x i y prirodni brojevi i $x' = y'$, onda $x = y$,
P.4. Za svaki prirodan broj x, $x' \neq 0$,
P.5. Neka je Φ bilo koje svojstvo takvo da 0 ima to svojstvo, i ako x ima svojstvo Φ onda x' ima svojstvo Φ. Tada svaki prirodan broj ima svojstvo Φ.

Aksioma P.5 naziva se *Aksiomom indukcije*. U toj aksiomi Φ može biti bilo koje svojstvo koje se odnosi na prirodne brojeve.

Reč rekurzija potiče od latinskih reči re = nazad + currere = izvršavati, tj. reči recurrere što znači vratiti se od, desiti se opet, u ponovljenim intervalima (reccurence = koji se vraća).
Termin rekurzija se postepeno javljao u radovima matematičara. Dedekind je u svom radu iz 1888. godine koristio termin *definisan indukcijom*, dok je Hilbert (1904. godine) upotrebio reč *recurrent(e)*, da bi kasnije upotrebio i samu reč *Recursion*.

Princip najmanjeg elementa za prirodne brojeve Svaki neprazan podskup skupa prirodnih brojeva ima najmanji element.

Ovo svojstvo posledica Peaonovih aksioma, Linearno uređen skup koji zadovoljava Princip najmanjeg elementa, tj. kod kojeg svaki neprazan podskup ima najmanji element, naziva se *dobro uređenim skupom*. Dakle, prirodno uređenje strukture prirodnih brojeva $(\mathbb{N}, \leq)$ je jedan primer dobro uređenog skupa.
Pomoću Aksiome indukcije mogu se definisati i uvoditi matematički objekti. Takve definicije u kojima se koristi Akisoma indukcije, nazivaju se *induktivnim* ili *rekurzivnim definicijama*. Sledeća teorema odnosi se upravo na tu vrstu definicija.

Teorema rekurzije. Neka su A i B neprazni skupovi, $\mathbb{N}$ skup prirodnih borojeva i $f : A \to B$, $g : \mathbb{N} \times A \times B \to B$. Tada postoji jednistvena funkcija $h : N \times A \to B$ tako da je :

(I)
$$h(0, x) = f(x), \qquad x \in A,$$
$$h(n', x) = g\big(n, x, h(n, x)\big), \qquad n \in \mathbb{N}, x \in A.$$

Dokaz.

(1) *Jedinstvenost funkcije h*. Pretpostavimo da h zadovoljava (I), i neka je $h_1 : \mathbb{N} \times A \to B$ tako da je $h_1(0, x) = f(x)$, $h_1(n', x) = g\big(n, x, h(n, x)\big), n \in \mathbb{N}, x \in A$. Indukcijom po n dokazujemo da je svaki $x \in \mathbb{N}, h(n, x) = h_1(n, x)$.

Slučaj $n = 0, h(0,x) = f(x) = h_1(0,x)$.

Pretpostavimo sada induktivnu hipotezu

(IH) $$h(n,x) = h_1(n,x)$$

Prema IH i definicijama funkcija h i h_1 sledi :

$h(n',x) = g\big(n,x,h(n,x)\big) = g(n,x,h_1(n,x)) = h_1(n,x)$.

Prema Aksiomi indukcije sledi $h = h_1$.

(2) $Egzistencija\ funkcije\ h$. Neformalni opis funkcije h je :

$$h = \bigcup_{x \in A} \Big\{(0,x,f(x)),\Big(1,x,g\big(0,x,f(x)\big)\Big),\Big(2,x,g\Big(1,x,g\big(0,x,f(x)\big)\Big)\Big),\ldots\Big\}$$

Navodimo i formalan dokaz egzistencije funkcije h. Za $S \subseteq \mathbb{N} \times A \times B$ reći ćemo da je (f,g)- skup ako su zadovoljeni sledeći uslovi :

1. Za svaki $x \in A$, $(0,x,f(x)) \in S$.
2. Za sve $n \in \mathbb{N}, x \in A, y \in B, (n,x,y) \in S \Rightarrow \big(n',x,g(n,x,y)\big) \in S$.
   Primetimo da važe sledeće činjenice :
3. $\mathbb{N} \times A \times B$ je $(f,g) -$ skup.
4. Presek (f,g)- skupova je (f,g)-skup:
   Zaista, neka je $S = \bigcap_i S_i$, gde su $S_i, i \in I, (f,g)$-skupovi. Tada je za sve $i \in I$, $(0.x.f(x)) \in S_i$, dakle $(0,x,f(x)) \in S$. Dalje, za proizvoljan $i \in I$ važi niz implikacija:

   $$(n,x,f(x)) \in S \Rightarrow (n,x,y) \in S \Rightarrow (n',x,g(n,x,y)) \in S_i$$

   Prema tome $(n',x,g(n,x,y)) \in S$.

5. Neka je $h = \bigcap\{S|S \text{ je } (f,g) - \text{skup}\}$ Tada :

   a. $h\ je\ (f,g)$ −skup.

   b. $h : \mathbb{N} \times A \to B$, tj. h je funkcija iz $\mathbb{N} \times A$ u B.

   c. h zadovoljava induktivne uslove (I).

Činjenica a je neposredna posledica tvrđenja 4. Što se tiče tvrđenja b, indukcijom po n dokazujemo da je $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in A\ \exists_1 y \in B\ (n,x,y) \in h$.

Slučaj $n = 0$. Kako $(0,x,f(x))$ pripada svakom (f,g)-skupu, to $(0,x,f(x)) \in h$.

Pretpostavimo da postoji $y \in B$ takav da $(0, x, y) \in h$ i $y \neq f(x)$. Neka je $h_1 = h \backslash \{(0, x, y)\}$. Nije teško videti da je h_1 takođe (f, g)-skup. Otuda prema definiciji skupa (funkcije) h sledi $h \subseteq h_1$, što je kontradikcija s obzirom da je $(0, x, y) \in h \backslash h_1$.

Pretpostavimo sada induktivnu hipotezu za fiksiran $n \in \mathbb{N}$:

(IH) $\forall x \exists_1 y (n, x, y) \in h$.

Prema (IH) za $x \in A$ postoji $y \in B$ tako da je $(n, x, y) \in h$, pa $(n', x, g(n, x, y)) \in h$, tj. postoji $z \in B$, $z = g(n, x, y)$, tako da je $(n', x, z) \in h$. Element z sa ovom osobinom je jedinstven. U suprotnom, neka je $u \in B$, $(n', x, u) \in h$ i $u \neq g(n, x, y)$. Dalje, neka je $h_2 = h \backslash \{(n', x, u)\}$. Lako je videti da je h_2 (f, g)-skup, odakle sledi $h \subseteq h_2$, što je kontradikcija uslovu $(n', x, u) \in h \backslash h_2$. Ovim smo dokazali $\forall x \exists_1 y (n', x, y) \in h$, pa prema Aksiomi indukcije h zadovoljava uslov b.

Najzad, razmotrimo tvrđenje c. Primetimo da je $(0, x, f(x)) \in h$, kako važi

$$(n, x, y) \in h \Rightarrow (n', x, g(n, x, y)) \in h$$

sledi: $y = h(n, x) \Rightarrow g(n, x, y) = h(n', x)$, tj. $h(n', x) = g\big(n, x, h(n, x)\big)$.

Prema predhodnom sledi dokaz Teoreme rekurzije. ■

Teorema. Neka je X proizvoljan skup, $f: X \to X$ funkcija i $a \in X$. Tada postoji jedinstvena funkcija g:$\mathbb{N} \to X$ takva da je

$$\begin{cases} g(0) = a \\ g\big(s(n)\big) = f\big(g(n)\big) \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$$

Aritmetička funkcija sabiranja $\boldsymbol{h(y, x) = x + y}$. Induktivna definicija ove funkcije glasi:

$$x + 0 = x, \qquad x + y' = (x + y)' .$$

Ovde je $f(x) = x$, $g(y, x, z) = z'$.

Polazeći od definicije operacije $+$ dokažimo da je, na primer,

(1) $$2 + 2 = 4$$

zaista, $2 + 2 = 2 + 1' = (2 + 1)' = ((2 + 0)')' = (2')' = 3' = 4$.

operaciju $+$ važe uobičajeni zakoni. Dokažimo, na primer, zakon komutacije

(2) $$x + y = y + x$$

Pre toga dokažimo indukcijom sledeća dva pomoćna tvrđenja:

(3) $$0 + x = x$$

Zaista, ako je $x = 0$, tada $0 + 0 = 0$ prema definiciji operacije $+$. Pretpostavimo induktivnu hipotezu (3) za fiksirano x. Tada $0 + x' = (0 + x)' = x'$, pa na osnovu Aksiome indukcije (3) važi za sve prirodne brojeve.

Dokažimo sada indukcijom po y :

(4) $$x + y' = x' + y$$

Kako je $x + 0' = (x + 0)' = x' = x' + 0$, (4) važi za $y = 0$. Dalje pretpostavimo (4) za fiksirano y kao induktivnu hipotezu. Tada, koristeći definiciju operacije $+$ imamo

$$x + (y')' = (x + y')' = (x' + y)' = x' + y',$$

pa prema Aksiomi indukcije (4) važi za sve prirodne brojeve.

Najzad, dokažimo (2) indukcijom po y. Prema (3) $x + 0 = x = 0 + x$, pa (2) važi za $y = 0$. Dalje, pretpostavimo (2) za fiksirano y. Tada koristeći operacije $+$, induktivnu hipotezu i (4), nalazimo :

$$x + y' = (x + y)' = (y + x)' = y + x' = y' + x,$$

pa na osnovu Aksiome indukcije tvrđenje važi za sve prirodne brojeve.

Na sličan način može se dokazati zakon asocijacije za operaciju $+$.

Aritmetička funkcija množenja $\boldsymbol{h(y,x) = x \cdot y}$. Induktivna definicija ove funkcije glasi:

$$x \cdot 0 = 0, \qquad x \cdot y' = x \cdot y + x.$$

U ovom slučaju, $f(x) = 0$ i $g(y,x,z) = z + x$. I u slučaju ove operacije mogu se dokazati uobičajeni algebarski zakoni, kao na primer zakon komutacije, zakon asocijacije kao i zakon distribucije za množenje prema sabiranju.

Aritmetička funkcija stepenovanja $\boldsymbol{h(y,x) = x^y}$. Induktivna definicaja ove funkcije glasi:

$$x^o = 1, \qquad x^{y+1} = x^y \cdot x.$$

U ovom slučaju, $f(x) = 1$ i $g(y,x,z) = z \cdot x$. I u slučaju operacije stepenovanja mogu se dokazati uobičajeni algebarski zakoni, kao na primer zakoni :

$$x^{(y+z)} = x^y \cdot x^z, \qquad x^{y \cdot z} = (x^y)^z.$$

1.3. Tipovi indukcije i rekurzije

Princip potpune indukcije Neka je $\Phi(n)$ bilo koje svojstvo prirodnih brojeva. Tada je

$$\forall n((\forall k < n)\Phi(k) \Rightarrow \Phi(n)) \Rightarrow \forall n \Phi(n)$$

posledica Peanovih aksioma.

Teorema potpune rekurzije Neka je A neprazan skup, $\mathcal{F}$ skup svih konačnih nizova domena A i neka je $G : \mathbb{N} \times \mathcal{F} \to A$. Tada postoji tačno jedan niz $H : \mathbb{N} \to A$ tako da važi

(PI) $$H(n) = G(n, H|n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Regresivna indukcija Tačnost tvrđenja Φ_n daokazuje se za svako $n \in \mathbb{N}$ na sledeći način :

a) Dokaže se da je Φ_n tačno za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n;
b) Dokaže se da iz tačnosti tvrđenja Φ_n uvek izlazi tačnost tvrđenja Φ_{n-1} .

Zašto je onda tvrđenje Φ_n tačno za svako $n \in \mathbb{N}$? Evo jednog objašnjenja. Neka je n_0 jedan fiksiran, ali proizvoljan prirodan broj. Pokažimo da iz a) i b) sledi da je Φ_{n_0} tačno. Zaista, kako je na osnovu a) tvrđenje Φ_n tačno *za* beskonačno mnogo prirodnih brojeva, postoje prirodni brojevi veći od n_0 za koje je Φ_n tačno. Neka je m najmanji takav prirodan broj, tj. neka je m najmanji prirodan broj veći od n_0 ali takav da je Φ_m tačno. Tada na osnovu b) zaključujemo da je Φ_{m-1} tačno, zatim da je Φ_{m-2} tačno itd., nastavljajući ovaj postupak sve dok ne dođemo do tvrđenja Φ_{n_0} , koje onda takođe mora biti tačno.

1.4. Odnos indukcije i dedukcije

U nauci postoje dva osnovna načina zaključivanja: dedukcija (lat. deduction-izvođenje) i indukcija (lat. induction-uvođenje). Deduktivni način razmišljanja bazira se na pronalaženju opštih rešenja pomoću kojih rešavamo pojedinačne probleme. Za razliku od dedukcije, indukcija je zaključivanje kojim se iz stavova koji se odnose na ograničen broj pojedinačnih slučajeva iste vrste izvodi jedan opšti stav, tj. stav koji se odnosi na sve slučajeve te vrste. Ovakav metod zaključivanja takođe se naziva i nepotpuna ili *empirijska indukcija*. Ovom metodom može se doći kako do tačnih tako i do netačnih zaključaka (ili do zaključaka koji su tačni samo za određen broj slučajeva). Uprkos tome, indukcija je izuzetno značajna u eksperimentalnim prirodnim naukama gde je dovela do mnogih značajnih saznanja. Nepotpuna indukcija u matematici pomaže da se otkrije neka činjenica, koju zatim treba i dokazati, npr. matematičkom indukcijom.

Značaj sinteze indukcija-dedukcija dobro je formulisao ruski matematičar A. J. Hinčin (1894-1959) čija misao glasi:

“Onaj koji praktikuje indukciju ne odevajući se u formalna pravila (tj. ne vršeći njenu sintezu sa deduktivnom formom), prestaje da bude matematičar; on se bavi empirijskim uopštavanjem bez ikakve veza sa matematičkom naukom. Obratno, vršeći dedukciju neoplođenu induktivnim sadržajem, matematičar prestaje da stvara zato što bez elementarne indukcije, tj. bez dobijanja opštih zaključaka na osnovu pojedinačnog materijala, nema i ne može biti naučnog stvaralaštva. Nauka počinje tamo gde po prvi put srećemo uopštenje.”

2. Matematička indukcija i rekurzija u školi

Sredinom XX veka matematička indukcija ulazi u srednjoškolske prpgrame širom sveta. Iako je metod od izuzetne važnosti za matematiku ovoj temi je dodeljen vrlo mali fond časova za obradu i utvrdjivanje. Način izlaganja je blizak tradicionalnom tipu nastave o kojem cemo kasnije diskutovati. Rezultat ovoga je slabo razumevanje suštine principa matematičke indukcije što kasnije kroz obrazovanje dovodi do ozbiljnih posledica.

Princip matematičke indukcije može se predstaviti učenicima u različitim oblicima. Najčešće se izražava jednostavno u vidu osobina prirodnih brojeva. Dodatne varijacije zavise od izbora prvog broja na osnovu kog baziramo indukciju. Često se koriste brojevi 0 i 1. Teorema koja se može dokazati kompletnom indukcijom podrazumeva iskaz o prirodnom broju, obično obeleženom sa n, koji treba da se dokaže kao istinit za sve vrednosti prirodnog broja.

Navešćemo oblike matematičke indukcije koji se najčešće koriste u školi.

2.1. Princip matematičke indukcije (PMI) u školi

Ako broj 1 ima osobinu Φ, i ako n ima osobinu Φ to povlači da $n + 1$ ima osobinu Φ, i tada svako n ima osbinu Φ.

U ovoj formulaciji promenljiva n se kreće preko skupa prirodnih brojeva (uzeto da počinje sa 1), a Φ je fiksna, ali i proizvoljna osobina prirodnih brojeva.

Princip može biti i kraće izražen: Ako $\Phi(1)$ i ako za svako n $\Phi(n)$ to povlači $\Phi(n+1)$, tada za svako $n, \Phi(n)$.

Ova oba oblika PMI su neformalno izražena, što je odgovarajuće za upoznavanje ucenika sa PMI. PMI se može izraziti više formalno, bilo kao aksiom ili kao pravilo zaključivanja.

Aksiomatski oblik PMI

$$\big[\Phi(1) \wedge \ \forall n[\Phi(n) \rightarrow \Phi(n+1)]\big] \rightarrow \forall n \Phi(n)$$

Forma pravilo zaključivanja PMI

$$\frac{\Phi(1) \quad \forall n[\Phi(n) \rightarrow \Phi(n+1)]}{\forall n \Phi(n)}$$

Pravilno korišćenje PMI ima sledeći oblik. Postoje četiri komponente:

(1) Iskaz teoreme koji treba da se dokaže: $\forall n\ \Phi(n)$
(2) Eksplicitno pozivanje na PMI, i dva pomoćna dokaza;
(3) Potvrđivanje $\Phi(1)$, činjenica da prvi ima potrebno svojstvo, poznat kao baza indukcije;
(4) Dokaz implikacije: $\forall n[\Phi(n) \to \Phi(n+1)]$,

poznatog kao indukcijski korak. Dokaz indukcijskog koraka se obično vrši na najjednostavniji mogući način, prvo usvajanjem pretpostavke $\Phi(n)$ poznate kao induktivna hipoteza. Ovo je praćeno izvođenjem $\Phi(n+1)$. Ovo dozvoljava tvrdnju $\Phi(n) \to \Phi(n+1)$i konačno $\forall n[\Phi(n) \to \Phi(n+1)]$, pod uslovom da se promenljiva n prvo slobodno javlja u induktivnoj hipotezi.

Da rezimiramo, ispravan dokaz matematičkom indukcijom se sastoji od:

(1) Iskaza teoreme $\forall n\ \Phi(n)$
(2) Pozivanje na PMI;
(3) Baza indukcije (dokaz $\Phi(1)$);
(4) Induktivni korak, obično sa izvođenjem $\Phi(n+1)$ iz induktive hipoteze $\Phi(n)$.

Ako nedostaju (3) ili (4), onda dokaz nije ispravan.

Prezentacija tipičnog dokaza pomoću PMI je sledeća:

Teorem. Dokazati $\forall n\ \Phi(n)$.

Dokaz pomoću matematičke indukcije.

Baza: dokaz $\Phi(1)$.

Induktivna hipoteza: pretpostavimo da $\Phi(n)$.

Induktivni korak : dokaz $\Phi(n+1)$ iz induktivne hipoteze.

Primena metoda matematičke indukcije u pokušaju dokazivanja nekog tvrđenja podrazumeva dokaz baze indukcije i induktivnog koraka, jer su to dva nezavisna tvrđenja, tj. nijedno ne proizilazi iz onog drugog. Ako nešto od ova dva uslova nije tačno, onda je i $(\forall n \in \mathbb{N})\Phi(n)$ netačno.

Ako se ne provere oba uslova, mogu nastati greške, npr. $\Phi(n)$: $n = n^2$ je tačno za $n=1$, ali ne važi ni za jedan drugi prirodan broj jer $\Phi(n) \Longrightarrow \Phi(n+1)$ očigledno nije tačna. Češća greška je da se ne dokaže baza, a dokaže se samo indukcijski korak, npr. $\Phi(n)$: $n = n+1$ očigledno ne važi za $n=1$ ali implikacija $\Phi(n) \Longrightarrow \Phi(n+1)$važi jer iz $n=n+1$ dodavanjem jedinice levoj i desnoj strani dobijamo $n+1=n+2$.

2.2. Rekurzija u školi

U matematici i računarstvu, rekurzija je metod u kojem se neki pojam, objekat ili funkcija definiše na osnovu jednog ili više baznih slučajeva i na osnovu pravila koja složene slučajeve svode na jednostavnije. Na primer, pojam predak može se definisati na sledeći način:

-Roditelj osobe je predak te osobe (bazni slučaj)

-Roditelj bilo kog pretka neke osobe je takode predak te osobe (rekurzivni korak)

Kaže se da je prethodna definicija rekurzivna (ili induktivna).

Izostanak bilo baznog koraka (koji obezbeduje „zaustavljanje" primene definicije) bilo rekurzivnog koraka čini definiciju nepotpunom.

Mnoge matematičke funkcije se mogu definisati rekurzivno:

- Faktorijel
- Fibonačijevi brojevi
- Određivanje NZD po euklidovom algoritmu (najveći zajednički delilac)

Rekurzija je tesno povezana sa matematičkom indukcijom. Dokaze pomoću matematičke indukcije čine dokazi baznog slučaja (na primer, za $n = 0$) i dokazi induktivnog koraka: pod pretpostavkom da tvrdenje važi za n dokazuje se da tvrdenje važi za $n + 1$. Rekurzivne definicije imaju sličan oblik.

-Bazni slučaj rekurzivne definicije je slučaj koji može biti rešen bez rekurzivnog poziva;

-U rekurzivnom koraku, za vrednost n, pretpostavljamo da je definicija raspoloživa za vrednost

$n - 1$.

Princip dokazivanja matematičkom indukcijom je u vezi sa induktivnom (rekurzivnom) definicijom skupa prirodnih brojeva - skup prirodnih brojeva je najmanji skup koji sadrži nulu i zatvoren je za operaciju sledbenika.

2.3. Tipičan školski primer

Nakon što im je prezentovana matematička indukcija slede primeri na kojima treba da se primeni. Jedan od prvih primera sa kojim se učenici susreću je:

Dokazati da je $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$*, za svaki prirodan broj* n*.* (1)

Ova jednakost je tačna za $n = 1$, jer je $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$.

Pretpostavljamo da je (1) tačno. Tada, dodajući obema stranama te jednakosti izraz $n + 1$, dobijamo :

$$1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{1}{2} n(n + 1) + (n + 1). \qquad (2)$$

Međutim, $\frac{1}{2} n(n + 1) + (n + 1) = (n + 1)\left(\frac{1}{2}\ n + 1\right) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$,

pa (2) postaje : $1 + 2 + \ldots + (n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$,

a to je tačno formula (1), gde je n zamenjeno sa $n + 1$. Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da je (1) tačno za svako $n \in \mathbb{N}$.

Ovde se javlja prva poteškoća. Zbunjuje ih sama činjenica da se predpostavlja ono što treba da se dokaže. Učenici će uraditi ovaj primer, naravno uz pomoć profesora i stećiće se utisak da je princip usvojen, ali nikako većina njih neće razumeti taj vrlo važan odnos baze, induktivnog koraka i hipoteze već će ga samo šablonski dalje primenjivati na ostale primere. Međutim javlja nam se još jedan problem: ne samo da nisu shvatili suštinu već su u stanju samo da primene princip matematičke indukcije kada znaju da se to od njih traži, a ne i da prepoznaju. Ne vodi se diskusija o temi i samim tim se ne dobija povratna informacija od učenika.

Ništa efikasniji način približavanja rekurzije đacima nije zastupljen ni na časovima računarstva. Na isti problem nailazimo. Učenici dobijaju gotove informacije i primenjuju ih na zadate probleme ne posmatrajući širu sliku rekurzivnog procesa i ne razmišljajući o toku rekurzivne funkcije i njegovim posledicama. Učenici veruju da funkcija poziva sama sebe, što dovodi do nepredvidivih tokova misli i skretanja sa pravog puta. Oni u glavnom ne shvataju da kad funkcija poziva sama sebe, ona se u stvari ponaša potpuno isto kao kad poziva drugu funkciju.Ako nisu u stanju da pravilno prate rekurziju, teško da mogu verovati da ona radi ispravno, a to uglavnom čine. Sve ovo se ne bi desilo da su samostalno rešavajući prvenstveno jednostavnije probleme došli do pojma rekurzije razumeli ga i tek nakon toga rešavali konkretne probleme pomoću rekurzije.

Naša tema svakako zaslužuje bolji i efikasniji pristup zbog svog značaja. Cilj ovog rada je da vam takav pritup i približimo.

Efikasniji pristup ovom problemu, takođe i približavanju matematičke indukcije učenicima bi bio pomoću sume prirodnih brojeva.

Primer. Krenimo redom i prvo se zapitajmo šta ustvari predstavlja $1 + 2 + \cdots + n$?

1=1,

1+2=3,

1+2+3=6,

1+2+3+4=10,

1+2+3+4+5=15.

Sa S_n obeležimo sumu prvih n prirodnih brojeva $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$.

Suma prvih n prirodnih brojeva posmatrana u obliku $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$ nije strogo definisana i ne može se jasno uočiti metod matematičke indukcije rešavajući problem dok je suma u ovom obliku. Ukoliko naš problem smo svedemo na niz prirodnih brojeva na sledeći način

$$\begin{cases} S_1 = 1 \\ S_{n+1} = S_n + (n+1) \end{cases}$$

dobijamo strogu definiciju sume prvih n prirodnih brojeva.

Gausovim metodom možemo dobiti sledeće:

$S_n = 1 + 2 + \cdots + n$

$S_n = n + n - 1 + \cdots 1$

$2S_n = n(n+1)$

tj. $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Pošto smo predhodno dali strogu definiciju sume prvih n prirodnih brojeva i S_n izrazili kao $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ostaje nam da pokažemo da $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ važi za svaki prirodan broj n.

Teorema. Dokazati da je $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Rešenje:

$S_1 = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ B.I.

$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ I.H.

Kada S_n zamenimo u $S_{n+1} = S_n + (n+1)$ dobija se

$S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ I.K.

i time je dokaz završen. ■

Kako saopštiti računaru $1 + 2 + \cdots + n$?

Ako se nadovežemo na predhodnu priču onda je mnogo jednostavnije računaru saopštiti sumu prvih n prirodnih brojeva u obliku

$$\begin{cases} S_1 = 1 \\ S_{n+1} = S_n + (n+1) \end{cases}$$

Primer. Na sličan način kao kod sume prvih n prirodnih brojeva dokazujemo da važi

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$

$0! = 1$

$(n+1)! = n! \cdot (n+1), 0 \geq 1$

$0! = 1$ u matematici je ovde početak, a u računarstvu se ovde završava.

Računaru faktorijel prvih n prirodnih brojeva možemo saopštiti na sledeći način

```
Procedure Factoriel(n)
        If n=0 then Factoriel(n)=1.
        If n>0 then
                Factoriel(n)=n*Faktoriel(n-1).
End
```

Mogućnst da se prevaziđu gore navedene poteškoće učenika u nastavi i da se sam pristup ovoj, a i ostalim temama osavremeni i poboljša leži u primeni problemske nastave.

3. Problemska nastava kao savremana nastavna metoda

3.1. Problemska nastava

Već nekoliko decenija predavanje u srednjoj školi je prvenstveno zasnovano na tradicionalnom pristupu sa svega nekoliko praktičnih časova. Nastavnik je na ovim časovima izvor informacija, dok učenici moraju da zapamte šta je nastavnik rekao. Tradicionalan pristup predavanja je bio da se „prenese“ novo znanje u učenikov um; učenici su smatrani praznim sudovima koji treba da se napune znanjem i koji su malo doprinosili procesu učenja. U proseku 80% usmenog izlaganja je vršeno od strane nastavnika, i ovo je jedan način kojim nastavnici kontrolišu dešavanja u razredu. Ovaj pristup je fokusiran na učenje činjenica i podstiče „učenje napamet“. Učenje na ovaj način ne motiviše učenike da traže više informacija, otkrivaju nove principe učenja, i nadgrađuju svoje znanje i primenjuju ono što su naučili.

Problemska nastava ima za cilj da istakne učenje sa učenikom u glavnoj ulozi i da podsitče razvoj učeničkog razmišljanja na višem nivou i da podstiče učeničke sposobnosti. To kasnije omogućava učenicima da funkcionišu kao deo tima i da uče saradjujući i deleći svoje novostečeno znanje. U problemskoj nastavi, učenici medjusobno saradjuju da bi rešili probleme, i to indetifikuje njihove potrebe u učenju i nalazi bitne informacije u vezi toga.

Jedna od ključnih osobina koja je istaknuta u organizaciji problemske nastave je samousmereno učenje. Prvi koraci u samousmerenom učenju su definisanje potreba u učenju i postavljanje ciljeva u učenju. Generalno, učenici obično precenjuju svoje znanje i podcenjuju praznine u svom znanju. Dakle, kad učenici prepoznaju ove praznine oni mogu reagovati koristeći jedan od sledećih pristupa :

1. Postavljati više pitanja u vezi ove oblasti, imajući za cilj da definišu ono što nisu znali,
2. Da ignorišu praznine u njihovom znanju i ograniče diskusiju na ono što znaju,
3. Postanu nervozni i zahtevaju da im nastavnik obezbedi odgovore na sva pitanja.

Problemska nastava predstavlja okruženje za učenje gde problemi vode učenje. Učenje počinje sa problemom koji treba da se reši, a problem je postavljen na taj način da učenici moraju da steknu nova znanja pre nego što reše problem. Umesto da traže jedan tačan odgovor, učenici tumače problem, sakupljaju potrebne informacije, nalaze moguća rešenja, procenjuju opcije i predstavljaju zaključke. Uspešna iskustva učenika u upravljanju sopstvenim znanjem im takođe pomaže da dobro rešavaju matematičke probleme. Problemska nastava je organizacija nastave matematike oko aktivnosti vezanih za rešavanje problema i pruža učenicima više mogućnosti da razmišljaju kritički, da predstave svoje kreativne ideje i komuniciraju matematički sa vršnjacima.

Pošto problemska nastava počinje sa problemom koji treba da se reši, učenici radeći u okruženju problemske nastave moraju postati vešti u rešavanju problema, kreativnog razmišljanja i kritičkog razmišljanja.

Efikasnost problemske nastave zavisi od karakteristika učenika i ponašanja u učionici kao i problema zadatka. Pristalice problemske nastave veruju da kada učenici razviju metode za konstruisanje sopstvenih postupaka, oni povezuju svoje konceptualno znanje sa svojim proceduralnim veštinama. Ograničenja tradicionalnog načina nastave matematike su povezana sa nastavom orijentisanom oko nastavnika i „gotovog" matematičkog znanja predstavljenog učenicima koji ne razumeju ideje (Shoenfeld, 1988). U ovim okolnostima, učenici će verovatno ponavljati (imitirati) procedure bez dubljeg konceptualnog razumevanja. Kada su neko matematičko znanje ili proceduralne veštine naučene pre nego što su učenici koncipirali njihovo značenje, veštine kreativnog razmišljanja učenika će verovatno biti prigušene predhodno dobijenim uputstvima.

Okruženje u problemskoj nastavi se razlikuje od tipičnog okruženja u učionici, koje ljudi generalno smatraju dobrim, gde su časovi dobro organizovani i učenici dobijaju visoke ocene na standardizovanim testovima. Medjutim, ova konvencionalna vrsta predavanja ne omogućava učenicima da valjano razviju matematičke veštine razmišljanja. Umesto sticanja dubokog razumevanja znanja matematike i prirode matematike, učenici u okruženju u konvencionalnim učionicama imaju tendenciju da uče neodgovarajuće i kontra produktivne konceptualizacije o prirodi matematike. Učenima je omogućeno samo da slede uputstva i da dobiju prave odgovore, ali im nije omogućeno da traže matematičko razumevanje. Shodno tome, nastava postaje fokusirana samo na dobijenje dobrih rezultata na testovima. istraživanja pokazuju da učenici obrazovani u tradicionalnom okruženju, zasnovanom na učenju sadržaja, pokazuju niži uspeh na standardizovanim testovima, kao i na testovima projekata koji se bave realnim situacijama, nego učenici koji uče kroz pristup problemske nastave.

Za razliku od konvencionalnih okruženja u učionici, u problemskoj nastavi učenici imaju priliku da razviju svoje sposobnosti da prilagode i primene metode da bi se uklopili u novim situacijama. U medjuvremenu učenici koji uče u tradicionalnom okruženju su preokupirani vežbanjima, pravilima, jednačinama koje treba naučiti, ali su ograničeni u suočvanju sa novim,nepoznatim problemima.

Nastava putem rešavanja problema počinje sa problemom. Učenici uče istraživanjem problemskih situacija. Problemi koji se koriste imaju tendenciju da budu otvoreni i omogućavaju više tačnih odgovora i više pristupa rešenju. Učenici imaju veoma aktivnu ulogu u njihovom učenju i istraživanju problemske situacije sa nastavnikovim smernicama, i u osmišljavanju sopstvenih strategija za rešavanje.

Medjutim, osnovno pitanje koje se nameće jeste: da li su učenici zaista u stanju da istražuju problemske situacije i osmišljavaju strategije za rešavanje problema? Studije pokazuju ne samo da su učenici u stanju da osmisle sopstvenu strategiju za rešavanje problema, nego one takodje pokazuju da je moguće koristiti osmišljene strategije učenika da se poboljša razumevanje matematike. Medjutim, postoje bar dva pitanja bez odgovora. Prvo pitanje se odnosi na osmišljene strategije učenika. U učionicama gde se koristi problemska nastava, učenici dobijaju prliku da koriste i diskutuju o alternativnim strategijama za rešavanje problema pre nego što budu naučeni nekoj odredjenoj strategiji. Pitanje je: kako da učenici prvenstveno nauče da koriste osmišljene strategije pre nego što dobiju bilo kakve instrukcije? Na koju vrstu iskustva i znanja učenik treba da se osloni da bi napravio razumnu strategiju? Kamii (1989) je tvrdio da „procedure koje učenici osmisle imaju korene duboko u njihovoj intuiciji i njihovom „ prirodnom" načinu razmišljanja".

Jasno je da treba da naučimo više o tome šta je učenički „prirodan“ način razmišljanja u matematici. Takodje, treba da utvrdimo da li je ovaj prirodan način razmišljanja zavisan od uzrasta. Drugo pitanje na koje nemamo odgovor je u vezi sa efikasnošću osmišljenih strategija učenika. Kada učenici razviju neefikasne strategije, kako im se može pomoći da razviju efikasnije strategije? Istraživanja su pokazala da su učenici u stanju da osmisle strategije ili matematičke procedure u problemskoj nastavi, ali takodje i da osmišljene strategije nisu nužno i efikasne. Jasno je da osmišljene strategije mogu poslužiti kao osnova za učeničko razumevanje matematičkih ideja i procedura, ali na osnovu njihovog nivoa razumevanja, učenici treba da se navode da razvijaju efikasne strategije. Sva ova i mnoga otvorena pitanja o kojima ce biti reči samo su dokaz koliko je ova tema nedovoljno istražena.

3.2. Uloga nastavnika u problemskoj nastavi

Osvrnimo se malo na takođe vrlo važne učesnike u problemskoj nastavi i njihovoj ulozi u problemskoj nastavi. U okviru okruženja problemske nastave, nastavnikove predavačke sposobnosti su više kritičke nego u tradicionalnom okruženju. Nastavnici imaju raznovrsne uloge u problemskoj nastavi. Nastavnici se spremaju za ove uloge između ostalog i kroz podučavanje i samorefleksiju. Ako tražimo od nastavnika samo da pohadjaju više kurseva to neće nužno poboljšati njihovo predavanje. Umesto toga nastavnicima trebaju mogućnosti da analiziraju matematičke ideje i da povezuju nastavne situacije. Dve nove uloge koje se traže od nastavnika na času baziranom na problemskoj nastavi uključuju odabir odgovarajućih zadataka i organizovanje toka časa (odabir odgovarajućih problema). Važno je da nastavnici u problemskoj nastavi razviju širok spektar pedagoških veština. Nastavnikovo sprovodjenje problemske nastave nije samo da obezbedi matematičko znanje učenicima, već i da zna kako da uključi učenike u proces rešavanja problema i primene znanja u novim situacijama. Nastavnici matematike se lakše snalaze u okruženju problemske nastave kada shvate izmenjenu ulogu nastavnika i razumeju okruženje problemske nastave kao priliku da olakšaju profesionalni razvoj . U sprovodjenju problemske nastave nastavnikove predavačke sposobnosti postaju od ključne važnosti i povećava se odgovornost. Pored sticanja znanja iz algoritama i savladavanja osnovnih znanja iz matematike, učenici u okruženju problemske nastave moraju da nauče različite matematičke procese i veštine u vezi sa komunikacijom, rezonovanjem, i predstavljanjem. Nastavnicima nisu potrebne samo specifične ideje kako da spreme svoje nove uloge već im trebaju i konkretni primeri da ih vode kroz praksu. Pripema nastavnika za njihove nove uloge u upravljanju problemskom nastavom predstavlja nove izazove i za početnike i za iskusne matematičare.

Učenici aktivno učestvuju u procesu sticanja znanja i shvataju smisao matematičkih pojmova pod sopstvenim uslovima. Drugim rečima, oni postaju aktivni učesnici u stvaranju znanja umesto pasivni prijemnici pravila i procedura. Dok učenje putem problemske nastave počinje sa problemom, samo problemi vredni pažnje daju učenicima priliku da učvrste i da prošire ono što znaju i da stimulišu svoje učenje. Stoga je jedna od uloga nastavnika da izabere takve probleme. Problemi upravljaju ne samo pažnjom učenika na odredjene aspekte sadržaja, već i na njihov način obrade. Bez obzira na kontekst, zadaci koji su vredni pažnje treba da budu intrigantni, sa odredjenim nivoom izazova koji podstiče istraživanje i vredan rad. Ali koji su to problemi vredni pažnje? Takav problem ne mora da bude komplikovan i u lepom obliku. Dokle god problem dovodi do cilja, a to je podsticanje učenika da uče matematiku sa razumevanjem, to je problem vredan pažnje.

3.3. Organizacija toka časa

Upotreba problema koji su vredni pažnje je važna ali ne i dovoljna karakteristika efektivne problemske nastave, zato što se može dogoditi da problem vredan pažnje ne bude upotrebljen na odgovarajući način. Dakle još jedna uloga nastavnika je da odluče kako da iskoriste probleme vredne pažnje u cilju maksimalnog učenja učenika.

Postoji niz faktora koji mogu uticati na implementaciju problema vrednih pažnje u učionici. Jedan od dominantnih faktora je vreme dodeljeno za rešavanje problema i razmatranje rešenja. U problemskoj nastavi, diskusija o problemu i njegovim alternativnim načinima rešavanja obično traje duže od rutinske demonstracije na času. U odeljenjima gde se primenjuje problemska nastava, nastavnici postavljaju više konceptualno orijentisana pitanja. U problemskoj nastavi uloga nastavnika u vodjenju toka časa je vrlo kompleksna aktivnost. Pored toga što moraju da posvete odgovarajuću količinu vremena na diskusije o problemima, nastavnik takodje mora da odluči koje aspekte teme treba da istakne, kako da organizuje rad učenika, koja pitanja da postavi da podstakne (izazove) one sa različitim nivoima znanja, kako da podrži učenike bez preuzimanja procesa razmišljanja umesto njih, što bi eliminisalao izazov. Drugim rečima veoma je važno da nastavnici obezbede dovoljno podrške za matematička istraživanja učenika, ali ne previše podrške da ne bi preuzeli proces razmišljanja umesto njih.

3.4. Odnos učenika prema problemskoj nastavi

Interesantno pitanje koje bi trebalo razmotriti je to kakvo mišljenje učenici imaju o problemskoj nastavi. Često se učenici drže uverenja da postoji samo jedan pravi način da se priđe problemu. Istraživanja pokazuju da mnogi učenici ne vide matematiku kao kreativnu aktivnost već kao skup pravila i procedura koje moraju da zapamte da bi ispratili jedini ispravan način da dođu do ispravnog odgovora. Mišljenje učenika o problemskoj nastavi može se otkriti kada se od njih zatraži da reše problem koristeći alternativne načine rešavanja. Neki učenici nisu zabrinuti što dobijaju različite odgovore na problem sa jedinstvenim odgovorom kada se od njih traži da reše problem koristeći drugačiji pristup. Sa druge strane ima i onih kod kojih ova situacija izaziva oprečnu reakciju.

U problemskoj nastavi učenje se odigrava tokom procesa rešavanja problema. Dok učenici rešavaju problem, mogu koristiti bilo koji pristup i izneti svoje ideje na način na koji žele. Okruženje za učenje u problemskoj nastavi omogućava učenicima da izlože različita rešenja njihovoj grupi, razredu i nauče matematiku kroz međusobne interakcije i istraživanje. Ovakve aktivnosti omogućavaju učenicima da razjasne svoje ideje i uzmu u obzir različite poglede na problem koji istražuju.

4. Primena problemske nastave na temu matematičke indukcije i rekurzije

Problemska nastava nam pruža mogućnost da poteškoćama koje učenici imaju priđemo na jedan nov način. U slučaju matematičke indukcije imamo mogućnost i slobodu da osmislimo metod pomoću kojeg ćemo je na najbolji mogući način približiti učenicima i omogućiti njeno bolje razumevanje.

Složićemo se da generalno uvek treba da nastojimo da usmeravamo napor na one aktivnosti koje idu u korist dubljeg razumevanja matematičkih pojmova kod učenika, a ne da se držimo formalnog prenosa pojmova.

Neophodno je promeniti tradicionalni pristup koji se koristi u školama koji ima dosta nedostataka. Pored toga sto se posvećuje malo vremena za učenje principa matematičke indukcije na solidnom nivou, većina tradicionalnih udžbenika ne pokriva dublje princip matematičke indukcije i zahteva od učenika da ga samo "slepo" prihvate u dokazivanju. Ovaj pristup kod učenika ne razvija istinsko razumevanje principa matematičke indukcije već ih usmerava da rade mehanički.

Novim ne-tradicionalnim nastavnim metodama imamo mogućnost da smanjimo probleme učenika koji se javljaju pri učenju principa matematičke indukcije. Vrlo je važno da pre svega metodom ističemo razumevanje principa matematičke indukcije. Naš prvenstveni cilj bi trebalo da bude da razjasnimo logičke aspekte principa matematičke indukcije.

Nameće nam se pitanje: Koje znanje učenik treba da poseduje da bi uradio dokaz pomoću matematičke indukcije? Ispravan dokaz pomoću matematičke indukcije ima dva pomoćna dokaza kao komponente, bazu indukcije i induktivni korak, pa učeniku treba sposobnost da uradi ove pomoćne dokaze. Osim toga on mora da zna da uključi ove dve komponente u induktivni dokaz, sa eksplicitnim pozivanjem PMI. Tako se, sposobnost da uradi dokaz rutinskog problema izraženog algebarski pomoću matematičke indukcije, može analizirati kroz sledeće tri veštine ponašanja:

(a) Sposobnost da se dokaže baza indukcije. Ovo se sastoji od sposobnosti da se proveri da li fiksne numeričke osobine važe za određene brojeve. Uzimajući u obzir stroge uslove, ovo zavisi od sposobnosti da izvrši zamenu u algebarskim izrazima sa jednom promenljivom.

(b) Sposobnost da dokaže induktivni korak. Ovo zavisi od sposobnosti da dokaže implikacijski iskaz tako što izvuče zaključak iz hipoteze. Uzimajući u obzir stroge uslove, ovo se sastoji od sposobnosti da izvodi zaključke iz algebarskih identiteta, što zavisi od sposobnosti da barata algebarskim izrazima i identitetima.

(c) Sposobnost da prikaže dokaz pomoću matematičke indukcije u ispravnom obliku. Ovo se manifestuje u sposobnosti da barata znanjem dokaza pomoću matematičke indukcije na neki način, bilo da je verbalno ili pismeno.

Predhodna analiza je veoma korisna u tome što otkriva sposobnosti koje su neophodne da se uradi ispravan dokaz pomocu indukcije (rutinskih algebarskih problema). Učenje koje prati ovu analizu ponašanja predstavlja značajno poboljšanje predavanja.

Navešćemo nekoliko primera pripreme za čas gde smo primenili problemsku nastavu.

Tok časa na kom želimo da primenimo problemsku nastavu trebao bi da prođe kroz sledeće faze:

- Uočavanje problema (formulacija)
- Razjašnjavanje problema(analiza problema)
- Postavljanje hipoteza i procenjivanje njihovih posledica
- Verifikacija hipoteza
- Analiza rezultata, izvođenje zaključaka, generalizacije
- Primena

Naš cilj je, kao što sam napomenula, da kroz rešavanje problema, kroz proces otkrivanja, učenici dođu do saznanja. Naš predlog je da im se na času prvo daju problemi čijim rešavanjem će doći do principa matematičke indukcije samostalno koristeći samo znanje iz predhodnih oblasti. To će biti upravo oni koji se rešavaju principom matematičke indukcije što naravno učenicima neće biti rečeno već će im se prepustiti da sami to prepoznaju i primene. Navešću neke primere problema koje bi terbalo predočiti učenicima prilikom obrade teme matematička indukcija.

Problem 1.

Porast populacije

Poznato je da se neke bakterije razmnožavaju prostom deobom – jedna bakterija deli se na dve nove. Pretpostavićemo da se to dešava na svakih sat vremena. Ispitajmo koliko će potomaka imati jedna bakterija kroz nekoliko sati. Pretpostavićemo da bakterije ne izumiru.

1) Koliko će bakterija biti posle pet sati ? A posle deset sati?
2) Neka je B_n broj bakterija nakon n sati; dakle,

   $B_0= 1, B_1= 2, B_2= 4, B_3= 8, B_4=16, ...$

   Oderediti vezu između B_{n+1} i B_n $\qquad$ $(B_{n+1} = 2B_n)$

3) Opisati opšti princip za određivanje broja bakterija u zavisnosti od proteklog vremena? Izraziti ga formulom.

U početku je lako izračunati broj bakterija za manji broj sati, međutim kada dođemo do neke veće cifre nema više smisla računati. Javlja se potreba da nađemo neku vezu imeđu članova ovog niza. Lako se uočava veza između dva susedna člana. Svaki sledeći član je dva puta veći od njemu predhodnog.

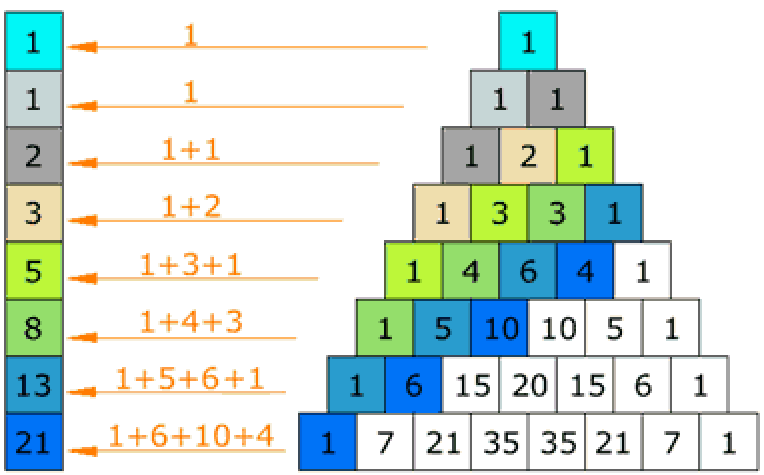
Problem 2.

Fibonačijev zadatak

Fibonači (1170-1250)

Već smo spomenuli čuveni Fibonačijev zadatak prilikom uvođenja teoreme rekurzije kao jedan od zanimljivih i značajnih primera.

Predpostavimo da se zečevi razmnožavaju na sledeći način. Par zečeva na kraju prvog meseca života se ne razmnožava, međutim na kraju drugog i svakog sledećeg meseca oni donose na svet novi par zečeva. Polazeći od novorođenog para postavlja se pitanje koliko će parova biti posle godinu dana. Naravno, i ovoga puta, pretpostavljamo da zečevi ne umiru.



1.Koliko će parova biti posle 6 meseci? ($F_6 = 8$)

2.Neka je F_n broj parova nakon n meseci, dakle $F_0 = 1$ $F_1 = 1$, $F_2 = 2$ $F_3 = 3$, $F_4 = 5$,...

Izraziti formulom i opisati opšti princip za određivanje broja parova zečeva.

Kao i kod bakterija i ovde prvih nekoliko meseci možemo lako izračunati, ali posle to gubi smisao i opet posežemo da nađemo vezu između članova niza kako bi lakše izračunali broj zečeva.

$(F_0 = 1 \ F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ , n \geq 1)$

3.Uporediti broj parova zečeva posle n meseci sa brojem parova bakterija posle n sati.

Ako je broj parova posle n sati $n \geq 1$ dobija se da je $b_n = 2^{n-1}, \ n \geq 1$.

N	F_n	b_n
1	1	1
2	2	2
3	3	4
4	5	8
5	8	16
6	13	32
7	21	64
8	33	128
9	54	256
10	88	512

Iz tabele se vidi da je

$F_n \leq b_n$ ako je

$1 \leq n \leq 10$

4. Dokazati da je nejednakost $F_n \leq b_n$ tačna za svaki prirodan broj $n \geq 1$?

Što je n veći postaje jasnije da je procena $F_n \leq 2^{n-1}$ jako gruba. Da li se brojevi $F_n, n \geq 1$

mogu bolje proceniti? Da li postoji broj Φ, takav da je $1 < \Phi < 2 \ i \ F_n \leq \Phi^n, n \ \geq 1$?

$$1 < \Phi$$

$$1 \leq \Phi^2$$

$$\Phi^{n+1} + \Phi^n \leq \Phi^{n+2}$$

$$\Phi^n(\Phi + 1) \ \leq \Phi^n \Phi^2$$

Fibonačijev zadatak je vrlo interesantan kako u matematici tako i u računarstvu. Na časovima računarastva treba istaći odnos matematičke indukcije i rekurzije time se nivo razumevanja podiže na jedan viši nivo, a i učenicima je mnogo lakše da sagledaju opšti princip.

Fibonačijev niz (0,1,1,2,3,5,8,13,...) može se definisati u vidu rekurzivne funkcije F :

- $F\ (0)\ =\ 0$ i $F\ (1)\ =\ 1$ (bazni slučaj)
- za n $>$ 1 važi: $F\ (n) = F\ (n-1)\ +\ F\ (n-2)$ (rekurzivni korak)

Funkcija za izračunavanje n-tog elementa Fibonačijevog niza može se definisati na sledeći način:

```
unsigned fib(unsigned n) {
  if(n == 0 || n == 1)
    return n;
  else
    return fib(n − 1) + fib(n − 2);
}
```

Fibonačijev niz $f\ = \{f_n | n \in \mathbb{N}\}$ definisan je rekurzivno na sledeći način

(1) $$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \qquad f_{n+2} = f_n + f_{n+1}\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

Ovaj čuveni niz uveo je 1902. godine Leonardo Pisano, poznatiji pod imenom Leonardo Fibonači. Naime u svojoj knjizi *Liber Abbaci* Fibonači je postavio problem ''Koliko će parova zečeva nastati od jednog para zečeva za godinu dana?'' Da bi rešio ovaj problem, Fibonači je pretpostavio da svaki par zečeva daje par potomaka različitog pola svakog meseca, da zečevi postaju fertilni posle mesec dana, i da zečevi nikad ne umiru (i naravno, niko ih ne jede). Tada će posle mesec dana biti dva para zečeva, posle dva meseca tri para; sledećeg meseca prvobitni par, zajedno sa parom rođenim prvog meseca, dobiće dva nova para, što daje ukupno pet pari zečeva, itd. Prema tome, rekurentne formule (1) daju ''matematički model'' razmnožavanja zečeva, uzimajuči da je f_{n+2} ukupan broj parova zečeva posle n meseci.

Generalni oblik rekurzije tipa Fibonači opisuje se sledećom teoremom.

Teorema Neka su A i B neprazni skupovi i $f_1, f_2 : A \to B$, i $G : \mathbb{N} \times A \times B \times B \to B$. Tada postoji jedinstvena funkcija $H : \mathbb{N} \times A \to B$ koja zadovoljava sledeće rekurzivne jednakosti

(1)
$$H(0, x) = f_1(x), \qquad H(1, x) = f_2(x),$$

$$H(y + 2, x) = G(y, x, H(y, x), H(y + 1, x)).$$

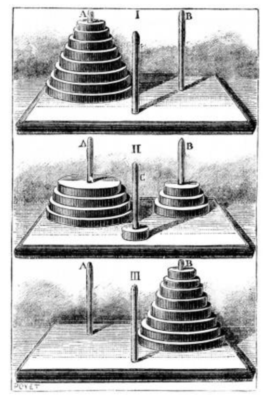
Još jedan lep primer na koji možemo primeniti i princip matematičke indukcije i rekurziju je problem Hanojskih kula.

Problem 3.

Kule Hanoja

Drevni mit kaže da postoje tri dijamantska štapa i da 64 zlatna prstena različitih veličina obrazuju kulu na jednom od njih pri čemu je najveći pri dnu, a preostali su poređani po veličini tako da je najmanji na vrhu. Cilj je da se svi prstenovi prebace na drugi štap po sledećim pravilima:

1. Diskovi se prebacuju jedan po jedan;
2. Veći disk se ne sme postaviti iznad manjeg



Sveštenici danonoćno, poštujući ova pravila, nastoje da ispune zadatak. Prema legendi, kada završe prebacivanje biće kraj sveta. Da li je moguće ispuniti zadatak?

• Ako posmatramo jednostavnije slučajeve kada je broj diskova (n)

manji od 64

• $n = 1$ (trivijalno), $n = 2, n = 3, n = 4, n = 5, \ldots$

• Ako znamo da prebacimo 10 diskova, kako ćemo prebaciti 11?

• Ako znamo da prebacimo n diskova, kako ćemo prebaciti $n + 1$?

• Koliki je najmanji broj poteza za prebacivanje n diskova?

• Dokazati da je $2^n - 1$ najmanji broj poteza za prebacivanje n diskova.

$P_1 = 1$

$P_n = 2P_{n-1} + 1, n > 1$

Zadatak:

$P_n = 2^n - 1, n \geq 1$?

Rešenje

BI $P_1 = 1 = 2^1 - 1$

IP $P_{n-1} = 2^{n-1} - 1$

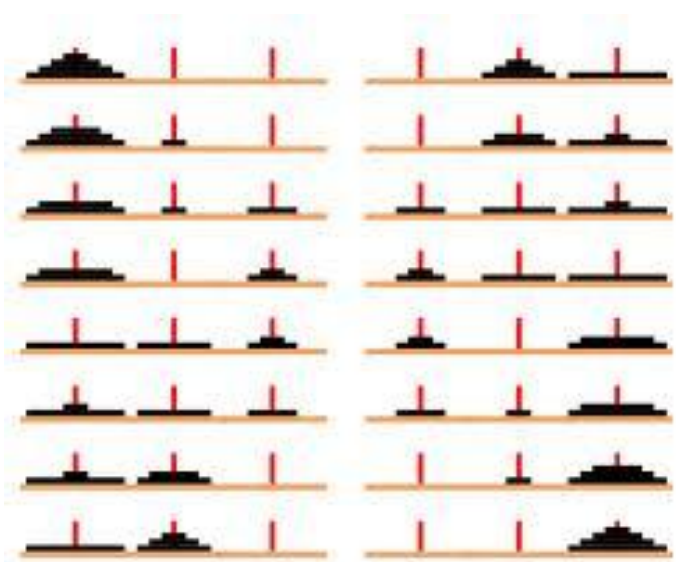
$P_n = 2P_{n-1} - 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$

Iterativno rešenje ovog problema je veoma kompleksno kao što smo malopre mogli da zaključimo, a rekurzivno prilično jednostavno: ukoliko je n = 0, nema diskova koji treba da se prebacuju; inače prebaci (rekurzivno) n − 1 diskova sa polaznog na pomoćni toranj (korišćenjem dolaznog tornja kao pomoćnog), prebaci najveći disk sa polaznog na dolazni toranj i, konačno, prebaci (rekurzivno) n−1 diskova sa pomoćnog na dolazni disk (korišćenjem polaznog tornja kao pomoćnog). U nastavku je implementacija ovog rešenja.

```
void tower(unsigned n, char start, char finish, char spare) {
 if (n > 0) {
    tower(n-1,start,spare,finish);
    printf("Prebaci disk sa kule %c na kulu %c\n",start,finish);
    tower(n-1,spare,finish,start);
 }
}
```

Poziv navedene funkcije tower (3,'A','C','B') daje sledeći izraz

Prebaci disk sa	kule A	na kulu C;
Prebaci disk sa	kule A	na kulu B;
Prebaci disk sa	kule C	na kulu B;
Prebaci disk sa	kule A	na kulu C;
Prebaci disk sa	kule B	na kulu A;
Prebaci disk sa	kule B	na kulu C;
Prebaci disk sa	kule A	na kulu C;



Problem 4.

Kula od karata

Za kulu od karata koja ima smao jedan sprat potrebne su dve karte, za kulu od dva sprata 7 karata, od tri sprata 15 karata itd.

a) Koliko je karata potrebno za kulu od 15 spratova?

b) Koliko je karata potrebno za kulu od 100 spratova?

c) Koliko je karata potrebno za kulu od n spratova?

Problem 5.

Kredit

Banka je klijentu dala 85 000 dinara sa godišnjom kamatom od 5%.

Koliko iznosi mesečna rata ako je ugovoreni period otplate:

a) godinu dana tj. 12 meseci

b) tri godine tj. 36 meseci

Problem 6.

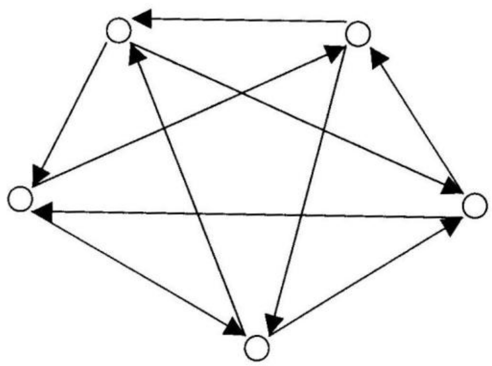
Autobuske linije

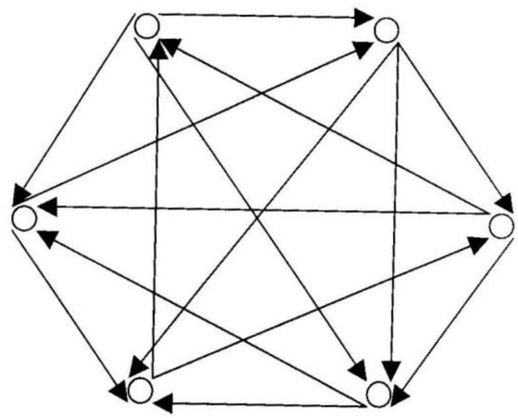
Dokazati da se svaka mreža od $n \geq 5$ gradova može povezati jednosmernim autobuskim linijama, takvim da se iz svakog grada može stići u svaki drugi sa najviše jednim presedanjem.

Dokažimo najpre tvrđenje za $n = 5$ i $n = 6$.

Za $n = 5$ gradove treba povezati kao na slici:

Za $n = 6$ šema je sledeća:





Pretpostavimo sada da za neko n postoji mreža autobuskih linija koje zadovoljavaju uslove zadatka. Uzmimo sada $n+2$ grada. Izdvojimo iz tog skupa bilo koja dva grada A i B. Preostalih n gradova možemo povezati na željeni način, po pretpostavci. Dodavši gradove A i B, mrežu jednosmernih linija dopunjujemo na sledeći način: Napravimo liniju od A ka B, zatim, jednosmerne linije od B do svakog od preostalih n gradova, i najzad linije do svakog od preostalih n gradova do A. Takva mreža zaista zadovoljava uslove zadatka jer: od A se može doći do B direktnom linijom, a u bilo koji od preostalih n gradova preko B; iz B se može stići u bilo koji grad direktnom linijom, osim u grad A, u koji se može stići preko bilo kog od preostalih n gradova; iz bilo kog grada iz skupa preostalih n gradova može se stići do A direktnom linijom, do B sa jednim presedanjem preko grada A, a oni po pretpostavci poseduju mrežu autobuskih linija po kojoj se iz svakog grada iz tog skupa može stići u bilo koji drugi sa najviše jednim presedanjem.

Zaključujemo da za bilo koji broj gradova $n \geq 5$ postoji tražena mreža jednosmernih autobuskih linija.

Nastavnik pred učenike prvenstveno iznosi problem bez ikakvih definicija. Nakon problema možemo iskoristiti metaforu „padanja domina“. Cilj metafore je da učenici „uhvate vezu“ između pada domina i procesa dokazivanja tvrđenja. Ovo je odlična metafora koja moze i slikovito prikazati sam princip matematičke indukcije.

Pomoću ove metafore može se napraviti paralela sa skupom prirodnih brojeva.

Domino efekat

• domine	• Prirodni brojevi
• Dobro poređane domine	• Dobro uređenje prirodnih brojeva
• Padanje domine	• Svojstvo prirodnog broja
• Efekat obaranja	• Induktivni korak
• Obaranje prve domine	• Baza indukcije

U Glavi 2. smo skrenuli pažnju na rešavanje problema matematičkom indukcijom svođenjem na niz prirodnih brojeva u cilju boljeg razumevanja i uočavanja veze između dva susedna člana niza. Prirodni ii njihova svojstva odličan su uvod za matematičku indukciju.

Korišćenje metafore kao nastavnog instrumenta može biti vrlo efikasno. Metaforom se zadržava pažnja učenika i to omogućava nastavniku da istakne ključne ideje na času. Zbog toga učenici imaju jasniju sliku dokaza. Nastavnik je u mogućnosti da ih navede da uvide da se ovaj način dokaza može primeniti svaki put kada je potrebno dokazati tvrđenje $P(n+1)$ polazeći od predhodnog tvrđenja $P(n)$. Kroz diskusiju učenici mogu zapaziti da je ceo dokaz tvrđenja zasnovan na beskonačnom nizu implikacija. U ovom nizu implikacija svaki preklapa sledeći, jer je $P(n)$ prvo teza implikacije, a onda hipoteza sledećeg. Ključni deo u diskusiji je onaj gde nastavnik navodi učenike da posmatranjem uvide da ovaj niz može biti „sažet“ u “$\forall n\, P(n) \rightarrow P(n+1)$”. Važno je učenicima skrenuti pažnju da implikacija važi i kada dve komponente nisu tačne, da bi razumeli da se dokazom $P(n) \rightarrow P(n+1)$ ne garantuje tačnost $P(x)$ za svako x. Na ovaj način učenici su postupno došli do saznanja da dokazujući "$P(n) \to P(n+1)\ \forall n$" znači dokazati da $P(n)$ važi za svako n", SAMO AKO je prvo tvrđenje u nizu, $P(1)$, tačno.

Nakon ovih primera, rešavanja raznovrsnih problema i dolaženja do važnih zaključaka vezanih za matematičku indukciju i rekurziju možemo izvući zaključak i definisati princip matematičke indukcije i princip rekurzije.

Princip rekurzije	***Princip indukcije***
Metod definisanja funkcija oblika f: $\mathbb{N} \to X$, tj. Niza elemenata skupa X: $f_1, f_2, f_3, f_4,.., f_n, f_{n+1},..$	Metod dokazivanja tvrđenja oblika $\forall n \in \mathbb{N}\ I$ (n), tj. niza tvrđenja $I(0), I(1), I(2), I(3), \ldots, I(n), I(n+1), \ldots$
f_0 je definisano $f_0 = x$, gde je x neki fiksirani element iz X	$I(0)$ je tačno
Za svaki prirodan broj n, član f_{n+1} je definisan u zavisnosti od f_n, tj. data je takozvana rekurentna formula oblika f_{n+1}=F(f_n), $n \geq 0$	Za svaki prirodan broj n, iz tačnosti iskaza $I(n)$ sledi da je tačan iskaz $I(n+1)$, tj. tačna je implikacija $I(n) \Rightarrow I(n+1)$
Primer Dat je niz brojeva a_o=3, a_{n+1}= 3+a_n, $n \geq 0$ Odrediti a_3 i a_4.	Primer a) Dokazati da za svaki prirodan broj n, $3 \mid a_n$. b) Dokazati da za svaki prirodan broj n, a_n=3$(n+1)$.

Princip rekurzije	***Princip indukcije***
f_0 i f_1 su definisani, f_0 =x, f_1=y, gde su x i y neki fiksirani elementi iz X	I (0) i I (1) su tačni
Za svaki prirodan broj n, član f_{n+2} je definisan u zavisnosti od f_{n+1} i f_n tj data je takozvana rekurentna formula oblika f_{n+2} =F(f_{n+1}, f_n), $n \geq 0$	Za svaki prirodan broj n, iz tačnosti iskaza $I(n)$ i I (n + 1) sledi da je tačan i iskaz $I(n+2)$ tj. tačna je implikacija $I(n) \wedge I(n+1) \Rightarrow I(n+2)$
Primer Dat je niz brojeva a_o=0, a_1= 1, a_{n+2}= 3a_{n+1}-2a_n $n \geq 0$. Odrediti a_3 i a_4.	Primer Dokazati da za svaki prirodan broj n, a_n=2^n−1.

Za kraj, nakon što smo samostalno došli do principa matematičke indukcije i rekurzije, izdvajam zadatke za vežbu koje učenici sada mogu samostalno raditi primenjujući principe.

Zadaci za vežbu:

1. Odredi prva tri člana niza:

- $x_0 = 3, x_n = 3x_{n-1}, n > 0$;
- $x_0 = 1, x_n = 2x_{n-1} + 3n, n > 0$;
- ....

2. Odredi prva četri člana niza:

- $x_0 = 1, x_1 = 3, x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}, n > 1$;
- $x_0 = 0, x_1 = 1, x_n = x_{n-1}^2 - x_{n-2}^2, n > 1$;
- ....

3. Odrediti rekurentne formule za neformalno definisane nizove :

- $a_n = 1 + 2 + \ldots + n, n \geq 1$;
- $b_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1), n \geq 1$;
- $d_n = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1), n \geq 1$;
- $e_n = (n+1)(n+2) \ldots 2n, n \geq 1$.

4. Na osnovu formula dobijenih u predhodnom zadatku pokazati da je

- $a_n = \frac{n(n+1)}{2}, n \geq 1$;
- $b_n = n^2, n \geq 1$;
- $e_n = 2^n d_n, n \geq 1$.

5. Dokazati da niz $q_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, n \in \mathbb{N}, q \neq 1$, zadovoljava rekurentne jednakosti :

$$\begin{cases} q_0 = 1, \\ q_n = q_{n-1} + q^n, n > 0 \end{cases}$$

Zaključak

Krenuli smo od problema i rešavajući ga došli do principa matematičke indukcije i rekurzije. Rešavajući problem po problem svakim korakom smo bili bliži formi ovog principa. U isto vreme aktivno svi su učestvovali u samom procesu. Da bismo došli do krajnje forme principa prvenstveno smo morali proći kroz njegovu suštinu rešavajući raznovrsne probleme iz kojih smo izvodili zaključke. Rezultat ovog obrnutog postupka je da sada zaista učenici razumeju zasto se javlja potreba za matematičkom indukcijom i rekurzijom. Sada neće mehanički i bez razumevanja primenjivati princip na odredjene zadatke, već će ih sa mnogo većim razumevanjem rešavati.

Nakon ovog pristupa učenici sigurno imaju drugačiji pogled na učenje i drugačiju sliku o principu matematičke indukcijei i rekurziji. Kada smo pričali o problemskoj nastavi spomenuli smo više problema:

- Učenici se drže uverenja da postoji samo jedan pravi način da se priđe problemu
- Učenici ne vide matematiku kao kreativnu aktivnost već kao skup pravila i procedura koje moraju da zapamte da bi ispratili jedini ispravan način da dođu do ispravnog odgovora

Ovi problemi su spontano i jednostavno prevaziđeni novim pristupom. Eliminisani su na samom startu kada je započeta diskusija. Prvo svako je imao svoj pristup rešavanju problema koji je išao svojim tokom samim tim nisu bili opterećeni mišlju da li je to pravi i jedini dobar pristup, a kao drugo svi su bili kreativni i najraznovrsnijim pitanjima se približavali cilju i usput dolazili do raznih saznanja.Naravno moramo opet napomenuti ključnu i vrlo zahtevnu ulogu nastavnika u vođenju toka časa bez kog bi se svaka diskusija pretvorila u haotičnu raspravu. On je tu da podpitanjima usmerava ka cilju ne mešajući se i ne namećući svoje mišljenje.

Ovakav primer časa na kojem se obrađuje tema matematičke indukcije i rekurzije svakako bi pokazao veći napredak u razumevanju ovih tema sto bi se kasnije kroz studije pokazalo kao vrlo značajno. Ne samo kroz studije ove teme imaju logički aspekt koji je primenjen i u svakodnevnom životu. Učenje se ne završava u školi. Na žalost pri tradicionalnom pristupu učenici smatraju da se on upravo završava u školi. Njihova razmišljanja na određene teme ne prelaze graniće školskog dvorišta. Zahtevi i očekivanja koja pred učenike postavlja realan, savremen život potpuno se razlikuju sa onim kako ih za taj život spremamo. Realan život nikako nije niz viđenih, prođenih situacija, već suprotno - situacije i okolnosti uvek su novi i jedinstveni, a kako ćemo se u njima snaći zavisi upravo od toga šta smo poneli iz prethodnih iskustava, šta smo naučili od drugih i na koji način smo sposobni da to objedinimo. Dobra škola bi trebalo da na odeđeni način, i u određenoj meri, imitira realan život. Dobra škola treba da osposobi učenike i za život van škole, time što će, kroz različite školske aktivnosti, podsticati celokupan dečiji razvoj i davati mogućnosti za ispoljavanje i unapređenje bogatog repertoara sposobnosti.

Naš cilj je:

- poboljšanje kvaliteta znanja i umeća koje deca stiču u školi,

- promena položaja učenika u školi od uloge receptora (prijemnika znanja) ka ulozi aktivnog konstuktora vlastitog znanja.

Učenicima se mora pokazati kako se uči, kako se pretražuje literatura, kako se pronalaze ključne reči u tekstu, kako se pravi pregled gradiva, kako se povezuju informacije, kako se pronalaze one koje nisu unapred date. Načini prezentovanja nastavnog sadržaja u školi morali bi biti zasnovani na ovim principima. Samostalnost i efikasnost učenika u učenju moguće je ostvariti preko ovih parametara, dakle, savladavanjem ovih veština. Oni su univerzalni alat koji omogućava baratanje različitim sadržajima.

Nastava matematike kroz rešavanje problema je relativno nova ideja u istoriji rešavanja problema u nastavnom planu i programu matematike. Pošto je nastava matematike kroz rešavanje problema prilično nova koncepcija, nije mnogo bila predmet istraživanja. Cilj je bio da skrenemo pažnju na ovaj pristup nastavi konkrentno na temu principa matematičke indukcije i rekurzije i da damo primer kako bi se na vrlo efikasan način mogla obraditi.

Literatura:

[1] S. A. Azer, *Problem-based learning in the fifth, sixth, and seventh grades: Assessment of students' perceptions*, Teaching and Teacher Education, 25, 2009

[2] B. J. S. Barron; Daniel L. Schwartz; Nancy J. Vye; Allison Moore; Anthony Petrosino; *Problem-and Project-Based Learning*, The Journal of the Learning Sciences, 7 (3/4), 1998.

[3] W. H. Bussey, *The Origin of Mathematical Induction*, The American Mathematical Monthly, 24 (5), 1917.

[4] A. Cusi, *The Principle of Mathematical Induction: An Experimentral Approach to Improving Awaerness of its Meaning,* In B. Czarnocha (Ed.) *Handbook of MathematicsTeaching Research,* Rzeszow Univesity Press.,2008

[5] J. Cai, *What Research Tells us About Teaching Mathematics Through Problem Solving,* Research and issues in teaching mathematics through problem solving. Reston, VA: National Concuil of Teachers of Mathematics, 2010

[6] P. Ernest, *Mathematical* Induction: *A Recurring Theme*, The Mathematical Gazette, 66, (436), 1982

[7] P. Ernest, *Mathematical Induction* Educational Studies in Mathematics, Vol. 15 (2), 1984

[8] J. D. Kečkić, *Matematika sa zbirkom zadataka za 3. razred srednje škole*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2001

[9] U. Leron and R. Zazkis, *Computational Recursion and Mathematical Induction*, For the Learning of Mathematics, 6 (2), 1986

[10] Ž. Mijajlović, Algebra 1, MILGOR, Beograd, Moskva, 1993

[11] I. Polycarpou, An *Innovative Approach to Teaching Structural Induction for Computer Science*, PhD, Florida International University, 2008

[12] S. J. Pape, C. V. Bell i I. E. Yetkin, *Developing Mathematical Thinking and Self-Regulated Learning: A Teaching Seventh-Grade Mathematics Classroom*, Educational Studies in Mathematics 53, 2003.

[13] K. H. Roh, *Problem-based Learning in Mathematics*, Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, 2003

[14] J. W. A. Young, *On Mathematical Induction*, The American Mathematical Monthly 15 (8/9), 1908