Математички факултет
Универзитет у Београду

Визуелизација Поенкареовог диск модела коришћењем програмског пакета GeoGebra

мастер рад

Ментор:
доц. др Мирослав Марић

Студент:
Марина Јовановић
1016/2012

Београд,
2013.

Садржај

1 Увод **2**

2 Укратко о програмском пакету GeoGebra **4**

3 Кратак историјски преглед развоја геометрије **6**

4 Аксиоматско заснивање геометрије равни **11**
4.1 Аксиоме апсолутне геометрије равни 11
4.2 Аксиоме паралелности 13

5 Поенкареов диск модел хиперболичке геометрије равни **15**
5.1 Помоћни резултати из еуклидске геометрије равни 15
5.1.1 Потенција тачке у односу на круг 15
5.1.2 Инверзија у односу на круг 28
5.2 Помоћни резултати из комплексне анализе 37
5.3 Конструкција модела 43
5.3.1 Визуелизација конструкције модела 52
5.4 Провера аксиома на Поенкареовом диск моделу 56
5.4.1 Аксиоме инциденције 56
5.4.2 Аксиоме распореда 58
5.4.3 Аксиоме подударности 60
5.4.4 Аксиоме непрекидности 61
5.4.5 Аксиома паралелности 62
5.4.6 Визуелни приказ провере аксиома на Поенкареовом диск моделу 65

6 Неки појмови и тврђења апсолутне и хиперболичке геометрије равни приказани у Поенкареовом диск моделу **81**
6.1 Паралелност и хиперпаралелност у Поенкареовом диск моделу 81
6.2 Праменови правих и епицикли у Поенкареовом диск моделу 82
6.3 Визуелизација заједничке нормале хиперпаралелних правих у Поенкареовом диск моделу 87
6.4 Визуелизација епицикала у Поенкареовом диск моделу 88

7 Примери **95**

8 Закључак **103**

1 Увод

Хиперболичка геометрија је грана математике која се интензивно развија последњих двеста година. Сами почеци ове области су, међутим, далеко старији. Може се рећи да се хиперболичка геометрија ,,родила" оног момента кад су математичари дошли на идеју да докажу пети Еуклидов постулат. Данас су, гледано са математичке тачке гледишта, еуклидска и хиперболичка геометрија равноправне. Није увек било тако. Еуклидска геометрија је вековима била у ,,предности". ,,Предност" еуклидске геометрије била је та што људи простор интуитивно схватају као еуклидски.

Крајем 19. века француски математичар Анри Поенкаре[1] је у еуклидској геометрији конструисао модел хиперболичке геометрије. Од тог момента се сви појмови, релације и тврђења хиперболичке геометрије могу визуелизовати.

Развојем информационо-комуникационих технологија постало је могуће релативно једноставно и за кратко време квалитетно визуелизовати геометријске објекте.

Циљ овог рада јесте да прикаже коришћење информационо-комуникационих технологија (конкретно програмског пакета GeoGebra и HTML-а) за потребе учења и наставе хиперболичке геометрије.

У поглављу **Укратко о програмском пакету GeoGebra** укратко је представљен програмски пакет GeoGebra помоћу којег је рађена визуелизација Поенкареовог диск модела. Ово поглавље посвећено је значају програмског пакета GeoGebra за интерактивну наставу математике. Пакет GeoGebra је средство којим се лако представљају интерактивни и динамички садржаји (у овом случају хиперболичка геометрија равни) на начин који ученицима (студентима) омогућава лакше разумевање и праћење датог садржаја. Примену пакета GeoGebra у овом раду можете видети на адреси http://alas.matf.bg.ac.rs/~ml08150/master.

У поглављу **Кратак историјски преглед развоја геометрије** укратко је, кроз историју, представљен развој геометрије. Наведене су само неке геометрије, како су оне настале и ко су њихови творци. Приказано је како је на геометрију гледао Еуклид, како ју је систематизовао Хилберт и како се геометрија даље развијала све до идејних твораца и оснивача хиперболичке геометрије. О историји настанка хиперболичке геометрије и геометрије уопште детаљније можете видети у [2], [7] и [4].

У поглављу **Аксиоматско заснивање геометрије равни** укратко је приказано Хилбертово аксиоматско заснивање геометрије равни. Посебна пажња посвећена је аксиомама паралелности. У зависности коју аксиому изаберемо за аксиому паралелности добијамо еуклидску или хиперболичку геометрију равни. Детаљније о Хилбертовом аксиоматском заснивању геометрије можете погледати у [7].

Поглавље **Поенкареов диск модел хиперболичке геометрије равни** представља средишњи део рада. Приказани су помоћни резултати из еуклидске геометрије који су потребни за увођење и разумевање Поенкареовог диск модела. У оквиру ових помоћних резултата објашњени су појмови потенција тачке у односу на круг,

[1] Жил Анри Поенкаре (Jules Henri Poincare, 1854 – 1912), француски математичар и теоријски физичар.

као и инверзија у односу на круг (за више детаља видети [6]). Даље су приказани помоћни резултати из комплексне анализе. Ови резултати су потребни како би се у интерактивним материјалима геометријски појмови могли представити помоћу координата (за више детаља погледати [5] и [1]). Након помоћних резултата наводимо конструкцију модела. Сваки геометријски објекат и релација у моделу дефинисани су и праћени одговарајућим визуелним динамичким приказом, који је детаљно описан. За тако дефинисан модел неопходно је показати да је тај модел заиста модел хиперболичке геометрије равни. То се ради провером аксиома хиперболичке геометрије равни на конструисаном моделу. Свака аксиома праћена је одговарајућим визуелним интерактивним приказом, као и детаљним описом.

У поглављу **Неки појмови и тврђења апсолутне и хиперболичке геометрије равни приказани у Поенкареовом диск моделу** представљени су појмови паралелности и хиперпаралелности у Поенкареовом диск моделу, који је конструисан у претходном поглављу овог рада, као и праменови правих и епицикли. Сви уведени појмови и релације праћени су одговарајућим визуелним интерактивним и динамичким приказима, који су детаљно објашњени.

У последњем поглављу **Примери** представљени су неки примери (задаци) на конструисаном моделу. Приказане су конструкције: нормале из дате тачке на дату праву, симетрале дужи, симетрале угла, круга и правилног троугла.

Као главни извор дефиниција, теорема и доказа у овом раду коришћене су књиге [3] и [6].

2 Укратко о програмском пакету GeoGebra

GeoGebra[2] је програмски пакет који служи за креирање и приказивање разних математичких садржаја, пре свега из области геометрије. Намењен је за наставу и учење математике, односно наставницима математике и њиховим ученицима. Међутим,

Слика 1: Лого програмског пакета GeoGebra

GeoGebra није намењена искључиво за прављење разних садржаја из области геометрије. Поред широке примене у геометрији, могуће је правити разне динамичке садржаје везане и за алгебру, анализу, статистику и друге гране математике. Управо због широког спектра примене GeoGebra је погодна за интерактивно учење математике. Због једноставног коришћења, прегледности и могућности рада на српском језику, GeoGebra се све више примењује у настави математике (како основношколској, тако и у средњошколској) у Републици Србији. Још неки од разлога све чешћег коришћења GeoGebra-е у настави су ти што су инсталација и употреба програма једноставни, као и то што је програм бесплатан и свима доступан.

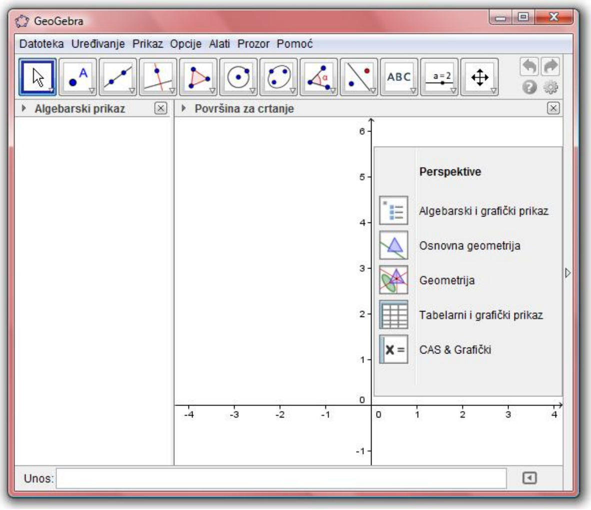
GeoGebra се користи и на многим факултетима у оквиру наставе математике и сродних наука. Најчешће служи као помоћно средство у доказивању одређених тврђења из области геометрије, где је студентима (полазницима курса) тешко прецизно да скицирају и размотре све могућности.

Поред могућности примене у интерактивној настави веома значајна карактеристика GeoGebra-е јесте и чињеница да се одређене конструкције могу направити тако да буду динамичке. Тако се омогућава промена (померање) полазних објеката чиме се, ономе ко презентује, пружа могућност истраживања разноврсних могућности и случајева.

Оно што је веома битно за интерактивну наставу јесте и повезаност алгебарског и графичког приказа. На тај начин корисници, када направе одређени динамички садржај, могу видети како се померање одређених објеката у графичком приказу манифестује на алгебарски приказ (Слика 2).

У овом мастер раду основни појмови и релације на датом моделу хиперболичке геометрије равни уведени су кроз интерактивни и динамички садржај који је направљен у програмском пакету GeoGebra (Слика 3).

[2]Аутор програмског пакета GeoGebra је Маркус Хоенвартер (Markus Hohenwarter), који је 2001. године програмски пакет креирао у оквиру свог мастер рада.



Слика 2: Изглед GeoGebra прозора - алгебарски и графички приказ

Слика 3: Изглед почетне стране веб презентације мастер рада „*Визуелизација Поенкареовог диск модела коришћењем програмског пакета GeoGebra*”

Како би се визуелно показало да је Поенкареов диск модел заиста модел хиперболичке геометрије равни, направљени су одговарајући аплети који су представљени у веб презентацији рада, помоћу којих корисник може визуелно и интерактивно видети исказе аксиома.

3 Кратак историјски преглед развоја геометрије

Први систематичан преглед геометрије дао је Еуклид[3] око 300. године пре нове ере у свом делу ,,Елементи". Текст у овом делу организован је у 13 књига, у којима су поступно изложена сва геометријска знања тог времена. Првих шест књига се односи на планиметрију, следеће четири књиге се односе на геометријску теорију бројева, а последње три књиге на стереометрију.

Објашњења основних геометријских појмова и веза међу њима организована су у *дефиниције*, *аксиоме* и *постулате*. Дефиницијом се уводи одређени појам и она представља исказ којим се значење новог појма описује другим појмовима за које се претпоставља да су познати. Основне везе међу дефинисаним појмовима су дате аксиомама и постулатима. При томе, аксиомама се констатују опште важеће истине, док се постулатима констатују везе између геометријских објеката. Аксиоме и постулати се сматрају истинитим и не подлежу доказивању. Све остале везе између геометријских објеката се исказују теоремама, њиховим последицама и ставовима, чију је истинитост неопходно доказати полазећи од аксиома и постулата.

Прву књигу Еуклид започиње низом дефиниција којима је увео основне геометријске објекте. Укупно има 23 дефиниције и међу њима су дефиниције тачке, праве, равни, угла и сл.

Еуклид у ,,Елементима" наводи следећих пет аксиома (детаљније можете видети у [2]):

А1 *Ствари (предмети, објекти) које су једнаке трећој једнаке су међусобно.*

А2 *Ако се једнаке (величине) додају једнаким (величинама), резултати су једнаки.*

А3 *Ако се једнаке (величине) одузму од једнаких (величина), резултати су једнаки.*

А4 *Ствари (предмети, објекти) које се подударају међусобно, једнаке су.*

А5 *Целина је већа од (свог) дела.*

Оно што је веома важно и око чега се вековима полемисало јесу Еуклидови постулати (за више детаља погледати [4]):

П1 *Може се повући (конструисати) права од једне до друге тачке.*

П2 *Може се конструисати непрекидна ограничена права (дуж) на правој.*

П3 *Може се конструисати круг са центром у датој тачки и датим полупречником.*

П4 *Сви прави углови су међусобно једнаки.*

[3]Еуклид (грч. *Ευκλειοης*, не зна се поуздано када је живео, претпоставља се да је живео око 300. године пре нове ере када су и написани Елементи), један је од најзнаменитијих математичара античке Грчке.

П5 *Ако права сече две праве, и унутрашњи углови са једне стране праве која сече су мањи од збира два права угла, онда се те две праве секу са те стране праве која их пресеца.*

Сви постулати, које је Еуклид навео још пре више од две хиљаде година, исказују неке геометријске истине. Прва три постулата су конструктивног карактера и вековима представљају основу свих геометријских конструкција. Четврти постулат говори о подударности правих углова. Међутим, једини постулат који је споран, тачније сложен, јесте пети постулат. Пети постулат је неелементаран и са правом се вековима сумњало да се може извести из прва четири.

Проблем петог постулата довео је до многих математичких истраживања која су тек после двадесетједног века довела до решења, а решење је била читава нова геометрија.

Данас знамо да се пети постулат не може доказати полазећи од прва четири постулата. Међутим, многи математичари су вековима покушавали да докажу пети Еуклидов постулат.

Први које је говорио о доказу петог постулата био је Прокло[4]. Он је у својим коментарима ,,Елемената" навео како је Птолемај[5] извео погрешан доказ и изнео свој, који је такође погрешан. Међутим, оно што је значајно у његовим коментарима јесте чињеница да се у њима први пут појављује еквивалентна формулација петог постулата:

Кроз тачку ван праве постоји само једна права дисјунктна с том правом.[6]

Оно што је занимљиво јесте чињеница да се и сам Гаус[7] занимао за доказ петог Еуклидовог постулата. Покушавао је да дође до одговарајућег доказа све до 1813. године. Касније се из Гаусових писама могло прочитати да је увидео да не мора да важи опште мишљење да постоји јединствена права у задатој равни која садржи дату тачку и паралелна је датој правој. На тај начин Гаус је развио ,,нееуклидску" геометрију. Међутим, иако Гаус у својим математичким делима није оставио трага резултатима до којих је дошао у овој области, његов рад је значајан јер је био један од ретких, међу математичарима свога времена, који су могли да схвате и прихвате

[4]Прокло Ликеј, познат и као Прокло Наследник или Дијадох (грч. $\Pi\rho o\kappa\lambda o\varsigma o$ $\Delta\iota\alpha\delta o\chi o\varsigma$, живео између 400. и 500. године нове ере), био је један од последњих великих грчких филозофа. Између осталог, познат је по томе што се бавио петим Еуклидовим постулатом.

[5]Клаудије Птолемај (грч. $K\lambda\alpha\upsilon\delta\iota o\varsigma$ $\Pi\tau o\lambda\epsilon\mu\alpha\iota o\varsigma$, лат. Claudius Ptolomaeus, живео у периоду око 100. године нове ере), грчко - римски астроном, математичар и географ. Познат је по ,,Великом математичком зборнику астрономије", који је касније добио назив ,,Алмагест".

[6]Ова формулација се данас назива Плејферова аксиома, а не Проклова. Названа је Плејферовом зато што је енглески математичар Џон Плејфер (John Playfair, 1748 – 1819), 1795. године написао коментаре ,,Елементима" у којима је предложио да се пети постулат замени овим исказом. Али Плејфер је доказао еквивалентност са петим постулатом, што Прокло није учинио.

[7]Јохан Карл Фридрих Гаус (Johann Carl Friedrich Gauß, 1777–1855) био је немачки математичар и научник. Оставио је траг у многим пољима математике и науке и сматра се једним од најутицајнијих математичара у историји.

идеју о нејединствености праве у датој равни која садржи дату тачку и паралелна је датој правој.

Тек у 19. веку доказано је да пети Еуклидов постулат не зависи од осталих постулата геометрије. Овај доказ био је први после много година који је био значајан за развој геометрије. Први који су дошли до овог резултата били су Николај Лобачевски[8] и Јанош Бољај[9] (Слика 4). Њих двојица су први показали да пети Еуклидов постулат не зависи од осталих постулата геометрије, односно да се не може извести из осталих постулата.

Слика 4: Јанош Бољај (лево) и Николај Лобачевски (десно)

Резултати ова два значајна математичара постали су јасни тек крајем 19. века када је Давид Хилберт[10] у свом делу ,,Основе геометрије" геометрију засновао на непротивречном, независном и потпуном систему аксиома.

За разлику од Еуклидових ,,Елемената", у Хилбертовим ,,Основама геометрије" издатим 1899. године нема дефинисања основних геометријских појмова попут тачке, праве, равни итд. На почетку свог дела Хилберт износи следеће (преузето из [7]):

,,Ми замишљамо три различита система ствари:
Ствари првог система називамо тачкама и означавамо их са $A, B, C, \ldots$*;*
Ствари другог система називамо правама и означавамо их са $a, b, c, \ldots$*;*
Ствари трећег система називамо равнима и означавамо их са $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$;

Тачке се називају елементима линеарне геометрије. Тачке и праве елементима paвaнcкe геометрије, а тачке, праве и равни се називају елементима просторне геометрије или елементима простора.

Ми замишљамо тачке, праве и равни у извесним међусобним односима и означавамо ове односе речима ,,лежати", ,,између", ,,подударно", ,,паралелно", ,,не-

[8]Николај Иванович Лобачевски (1793 – 1856), руски математичар.

[9]Јанош Бољај (Janos Bolyai, 1802 – 1860), мађарски математичар.

[10]Давид Хилберт (David Hilbert, 1862 – 1943), немачки математичар. Био је један од најзначајнијих математичара 19. и раног 20. века. Сарађивао је с Албертом Ајнштајном у развоју теорије релативности.

прекидно”; тачан и за математичке сврхе потпун опис ових односа постиже се помоћу аксиома геометрије.

Аксиоме геометрије можемо поделити у пет група; свака појединачно од ових група изражава извесне повезане основне чињенице нашег опажаја. Ми ћемо ове групе аксиома назвати на следећи начин:

1. *аксиоме инциденције,*
2. *аксиоме распореда,*
3. *аксиоме подударности,*
4. *аксиома непрекидности и*
5. *аксиоме паралелности. ”*

Прве четири групе аксиома чине аксиоматски систем апсолутне геометрије.

Вратимо се на откриће Лобачевског и Бољаја. Геометрија коју су њих двојица открили добила је назив нееуклидска геометрија Лобачевског-Бољаја или хиперболичка геометрија. Она је заснована на аксиомама апсолутне геометрије и аксиоми Лобачевског (о њој ће касније бити речи).

Лобачевски и Бољај (независно један од другог) су ту геометрију засновали полазећи од основних геометријских појмова и одговарајућих аксиома и доказивали су теореме геометријским методама, нешто слично еуклидској геометрији. Као основа за доказивање служила им је теорија паралелних правих, која је направила разлику између њихове и еуклидске геометрије.

Геометрија Лобачевског-Бољаја открива неки нови свет геометријских објеката. У њој се паралелне праве све више приближавају једна другој са једне стране, а удаљавају до бесконачности са супротне стране. Даље, две праве које имају заједничку нормалу удаљавају се бесконачно од те заједничке нормале на обе стране. Оно што је такође било занимљиво, јесте чињеница да је у геометрији Лобачевског-Бољаја збир углова у троуглу мањи од збира два права угла, као и то да се у поменутој геометрији може конструисати четвороугао који има највише три права угла и да четврти мора бити оштар.

Од настанка геометрије Лобачевског-Бољаја аксиоматско заснивање математике постало је још значајније. Аксиоматску основу су добиле не само еуклидска и геометрија Лобачевског-Бољаја, већ и пројективна, афина, вишедимензионална еуклидска и многе друге. И поред увођења аксиома задржала се могућност да су аксиоме хиперболичке геометрије логички неконзистентне. Да би се показало да дати систем аксиома има смисла, неопходно је конструисати модел. Као што је за еуклидску геометрију равни уобичајен модел био равна површ, тако је остало питање да ли уопште постоји модел очигледног представљања хиперболичке геометрије.

Оно што је веома битно јесте да је хиперболичка геометрија, упркос противљењу великог броја математичара, заживела захваљујући великом математичару Белтрамију[11] који је 1868. године показао да геометрија Лобачевског-Бољаја има смисла на

[11] Еугенијо Белтрами (Eugenio Beltrami, 1835 – 1899), италијански математичар.

посебној површи названој псеудосфера. Тиме је Белтрами конструисао први модел хиперболичке геометрије. Псеудосфера је постала предмет испитивања великих математичара као што су Клајн[12] и Риман[13]. Они су допринели афирмацији геометрије Лобачевског-Бољаја, као и њеним применама. Хиперболичка геометрија (или геометрија Лобачевског-Бољаја) је нашла широку примену у разним гранама математике као и у модерним токовима теоријске физике.

Један модел хиперболичке геометрије конструисао је француски математичар Поенкаре (Слика 5). Он је прво развио модел хиперболичке планиметрије који је познат као диск модел, који по њему носи назив Поенкареов диск модел. Касније, Поенкаре долази до открића још једног модела хипеблочке планиметрије и у питању је полуравански модел.

Слика 5: Анри Поенкаре

[12]Феликс Кристијан Клајн (Felix Christian Klein, 1849 – 1925), немачки математичар познат по своме раду на теорији група, теорији функција, нееуклидској геометрији и на повезивању геометрије са теоријом група.

[13]Георг Фридрих Риман (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 – 1866), немачки математичар који је дао значајан допринос развоју математичке анализе и диференцијалне геометрије.

4 Аксиоматско заснивање геометрије равни

4.1 Аксиоме апсолутне геометрије равни

Као што је већ наведено у поглављу 3, Давид Хилберт је у свом делу ,,Основе геометрије", које је издато 1899. године, геометрију логички утемељио. Он је геометрију засновао на непротивречном, независном и потпуном систему аксиома. Тај систем аксиома се састоји из пет група аксиома.

Геометрију засновану на прве четири групе аксиома називамо апсолутном геометријом. У зависности од аксиоме која се изабере да буде једина аксиома из пете групе имамо две геометрије. Избором Плејферове аксиоме за аксиому из пете групе заснивамо еуклидску геометрију. Међутим, уколико изаберемо аксиому Лобачевског заснивамо хиперболичку геометрију.

Следећи Хилберта ***апсолутну геометрију равни*** дефинишемо као уређену петорку $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathcal{I}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, где су:

- $\mathbf{P}$ произвољан непразан скуп који називамо ***раван***.
  Елементе скупа $\mathbf{P}$ називамо ***тачке*** и означавамо их са $A, B, C, \ldots$,

- $\mathbf{L}$ скуп одређених подскупова скупа $\mathbf{P}$ чије елементе називамо ***праве*** и означавамо са $a, b, c, \ldots$,

- $\mathcal{I} \subset \mathbf{P} \times \mathbf{L}$ релација коју називамо ***инцидентно***, при чему увек узимамо да је $(A, p) \in \mathcal{I}$ ако и само ако $A \in p$,

- $\mathcal{B} \subset \mathbf{P}^3$ релација коју називамо ***између*** и

- $\mathcal{C} \subset \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2$ релација коју називамо ***подударно***, при чему уместо ознаке $((A, B), (C, D)) \in \mathcal{C}$ користимо ознаку $(A, B) \cong (C, D)$,

при чему важе аксиоме инциденције, распореда, подударности и непрекидности.

Пре него што наведемо аксиоме прве групе, дефинишимо један појам.

За три тачке A,B и C кажемо да су ***колинеарне*** ако постоји бар једна права p инцидентна са A, B и C, у супротном кажемо да су ***неколинеарне***.

I ***Аксиоме инциденције***

1. За сваку праву p постоје најмање две разне тачке A и B инцидентне са правом p.
2. За сваке две тачке A и B постоји најмање једна права p која је инцидентна са A и B.
3. За сваке две разне тачке A и B постоји највише једна права p која је инцидентна са A и B.

4. Постоје три неколинеарне тачке A, B и C.

II ***Аксиоме распореда***

1. Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$, онда су A, B и C три разне колинеарне тачке.
2. Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$, онда је $\mathcal{B}(C, B, A)$.
3. Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$, онда није $\mathcal{B}(A, C, B)$.
4. Ако су A и B две разне тачке, онда постоји тачка C таква да је $\mathcal{B}(A, B, C)$.
5. Ако су A, B и C три разне колинеарне тачке, онда је или $\mathcal{B}(A, B, C)$ или $\mathcal{B}(B, C, A)$ или $\mathcal{B}(C, A, B)$.
6. (*Пашова аксиома*)
   Ако су A, B и C три неколинеарне тачке и p права која није инцидентна са A, а са правом одређеном тачкама B и C има тачно једну заједничку тачку P такву да је $\mathcal{B}(B, P, C)$, онда за праву p важи: или права p са правом одређеном тачкама C и A има тачно једну заједничку тачку Q такву да је $\mathcal{B}(C, Q, A)$ или права p са правом одређеном тачкама A и B има тачно једну заједничку тачку R такву да је $\mathcal{B}(A, R, B)$.

Пре него што наведемо аксиоме треће и четврте групе, дефинишимо још неке појмове.

Нека су A и B две разне тачке. Скуп свих тачака X таквих да је $\mathcal{B}(A, X, B)$ називамо ***отворена дуж*** AB. Унију отворене дужи AB и тачака A и B називамо ***затворена дуж*** AB. При томе тачке A и B називамо ***крајње тачке*** дужи AB.

Нека су A, B, C три разне тачке неке праве p. Ако важи да је $\mathcal{B}(A, C, B)$ онда кажемо да су тачке A и B ***са разних страна тачке*** C. Иначе кажемо да су тачке A и B ***са исте стране тачке*** C.

Нека су A и B две разне тачке. Скуп свих тачака X таквих да су тачке B и X са исте стране тачке A (укључујући тачку A) називамо ***полуправа*** AB ***са почетном тачком*** A. Тачку A називамо ***теме*** полуправе.

Нека су A и B две разне тачке и p права која није инцидентна ни са тачком A ни са тачком B. Кажемо да су тачке A и B ***са разних страна праве*** p ако дуж AB има заједничку тачку са правом p. Иначе кажемо да су тачке A и B ***са исте стране праве*** p.

Нека је p произвољна права и нека је A тачка која није инцидентна са правом p. Скуп свих тачака X таквих да су тачке A и X са исте стране праве p (укључујући и све тачке праве p) називамо ***полураван са почетном правом*** p. Праву p називамо ***руб*** полуравни.

III ***Аксиоме подударности***

1. Ако су A, B, C и D тачке такве да је $(A, B) \cong (C, D)$ и $A = B$, онда је $C = D$.
2. Ако су A и B било које две тачке, онда је $(A, B) \cong (B, A)$.
3. Ако су A, B, C, D, E и F тачке такве да је $(A, B) \cong (C, D)$ и, уз то $(A, B) \cong (E, F)$, онда је $(C, D) \cong (E, F)$.
4. Ако су C и C' тачке двеју отворених дужи AB и $A'B'$, такве да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$, онда је и $(A, B) \cong (A', B')$.
5. Ако су A и B две разне тачке и C теме неке полуправе, онда на тој полуправој постоји тачка D таква да је $(A, B) \cong (C, D)$.
6. Ако су A, B и C три неколинеарне тачке и A', B' тачке руба неке полуравни, такве да је $(A, B) \cong (A', B')$, онда у тој полуравни постоји јединствена тачка C' таква да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$.
7. Ако су A, B, C и A', B', C' две тројке неколинеарних тачака и D и D' тачке полуправих BC и $B'C'$, такве да је $(A, B) \cong (A', B')$, $(B, C) \cong (B', C')$, $(C, A) \cong (C', A')$ и $(B, D) \cong (B', D')$, онда је и $(A, D) \cong (A', D')$.

IV ***Аксиоме непрекидности***

1. (*Архимед-Еудоксова аксиома*)
   Ако су AB и CD две произвољне затворене дужи, онда на полуправој AB постоји коначан низ тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ таквих да је $\mathcal{B}(A, A_1, A_2, \dots, A_n)$, при чему је свака од затворених дужи $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ подударна затвореној дужи CD и важи $\mathcal{B}(A, B, A_n)$.
2. (*Канторова аксиома*)
   Ако је $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$ низ затворених дужи неке праве, таквих да је свака од тих затворених дужи надскуп следеће, онда постоји тачка X која припада свакој затвореној дужи тог низа.

4.2 Аксиоме паралелности

Ако аксиомама апсолутне геометрије равни додамо још једну од аксиома паралелности, добијамо еуклидску или хиперболичку геометрију равни.

V_1 ***Аксиома паралелности 1***

Нека су дате права p и тачка A која није инцидентна са правом p. Тада постоји тачно једна права q инцидентна са тачком A и дисјунктна са правом p.

V_2 ***Аксиома паралелности 2***

> Нека су дате права p и тачка A која није инцидентна са правом p. Тада постоје бар две праве q_1 и q_2 инцидентне са тачком A и дисјунктне са правом p.

Ако аксиомама апсолутне геометрије равни додамо аксиому V_1 добијамо ***еуклидску геометрију равни***. С друге стране ако аксиомама апсолутне геометрије равни додамо аксиому V_2 добијамо ***хиперболичку геометрију равни***. Конзистентност обе геометрије доказујемо конструкцијом модела. Испоставља се да су еуклидска геометрија равни и хиперболичка геометрија равни еквиконзистентне, односно полазећи од еуклидске геометрије равни могуће је конструисати модел хиперболичке геометрије равни и обратно.

У наставку рада дајемо конструкцију једног модела хиперболичке геометрије равни полазећи од еуклидске геометрије равни.

5 Поенкареов диск модел хиперболичке геометрије равни

У овом поглављу описујемо један модел (реализацију) хиперболичке геометрије равни. У питању је ***Поенкареов диск модел***. Поенкареов диск модел градимо полазећи од еуклидске геометрије равни.

Дефинисаћемо основне појмове и релације и доказаћемо да на овако конструисаном моделу важе све аксиоме хиперболичке геометрије равни. Поред тога, основне појмове и релације, као и проверу аксиома приказаћемо и визуелно, коришћењем програмског пакета GeoGebra. При томе дајемо динамички и интерактивни визуелни приказ.

5.1 Помоћни резултати из еуклидске геометрије равни

Еуклидску раван обележаваћемо са $\mathbb{E}^2$.

Поенкареов диск модел се конструише полазећи од еуклидске геометрије равни. Прецизније, полазећи од круга у равни $\mathbb{E}^2$. За конструкцију Поенкареовог диск модела и разматрање хиперболичке геометрије равни на том моделу неопходно је добро познавати својства еуклидског круга. Та својства се односе, пре свега, на појам потенције тачке и инверзије у односу на круг.

5.1.1 Потенција тачке у односу на круг

Теорема 5.1.1.1. *Нека су у равни $\mathbb{E}^2$ дати круг k и произвољна тачка P таква да не припада кругу k. Нека су праве p и q такве да садрже тачку P и секу круг k.*

- *Ако права p сече круг k у тачкама A и B, а права q у тачкама C и D, онда важи $PA \cdot PB = PC \cdot PD$[14].*
- *Ако је тачка P изван круга k и тачка T додирна тачка тангенте t из тачке P на круг k, онда важи $PA \cdot PB = PT^2$.*

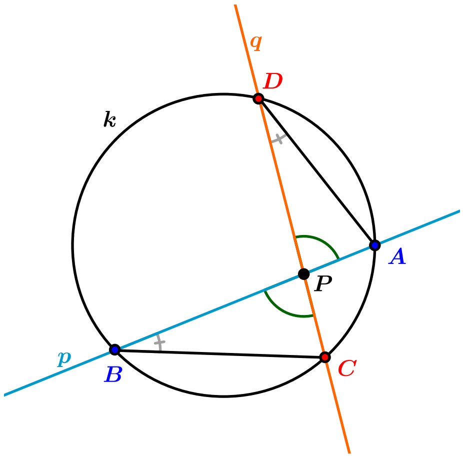
Доказ. Први део теореме доказаћемо разматрањем два случаја. У првом случају претпоставићемо да је тачка P у унутрашњости круга k, а у другом да је у спољашњости круга k.

Први случај (Слика 6): Како су углови $\angle APD$ и $\angle CPB$ унакрсни, следи да су подударни. Такође, како су углови $\angle PDA$ и $\angle PBC$ углови над истим луком AC, следи да су подударни. Отуда можемо закључити да су троуглови PAD и PCB слични. Из ове сличности следи да важи једнакост

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB},$$

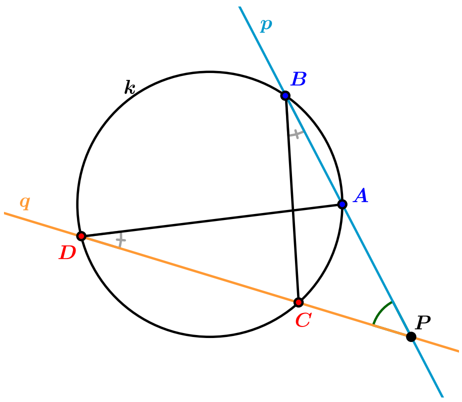
[14]Производ $PA \cdot PB$ јесте производ дужина дужи PA и PB. Исто важи за све производе дужи који се јављају у наставку текста.

односно
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$



Слика 6: Случај када је тачка P у унутрашњости круга k

Други случај (Слика 7): Како су углови $\angle APD$ и $\angle CPB$ једнаки, следи да су подударни. Такође, како су углови $\angle PDA$ и $\angle PBC$ углови над истим луком AC, следи да су подударни. Отуда можемо закључити да су троуглови PAD и PCB слични. Из ове сличности следи да важи једнакост
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB},$$
односно $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



Слика 7: Случај када је тачка P у спољашњости круга k

Докажимо сада и други део теореме (Слика 8).

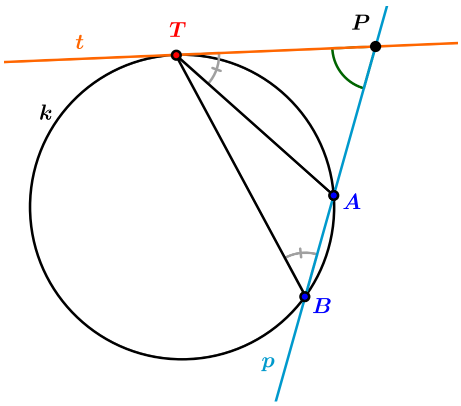
Посматрајмо троуглове PAT и PTB. Како је $\angle TPA = \angle BPT$ (заједнички угао ова два троугла) и $\angle PTA = \angle PBT$ ($\angle PTA$ је угао одређен тетивом TA и тангентом t, а $\angle PBT$ је угао над тетивом TA), следи да је $\triangle PAT \sim \triangle PTB$. Отуда добијамо једнакост

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PB},$$

односно следи да је

$$PA \cdot PB = PT^2.$$

□



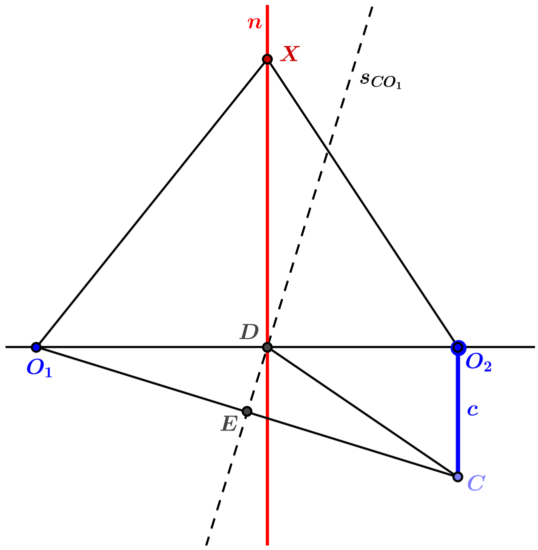
Слика 8: Случај када из тачке P конструисана тангента на круг k

Дефиниција 5.1.1.1. *Нека су у равни* $\mathbb{E}^2$ *дати круг* k *и тачка* P. ***Потенција тачке*** P ***у односу на круг*** k *јесте производ* $PA \cdot PB$, *при чему су* A *и* B *пресечне тачке круга* k *и произвољне праве* l *која садржи тачку* P. *Потенцију тачке* P *у односу на круг* k *обележавамо са* $p(P, k)$.

Из теореме 5.1.1.1 следи да потенција тачке P у односу на круг k не зависи од избора праве l. Приметимо да је потенција тачке P у односу на круг k у случају када тачка P припада кругу k једнака броју 0.

Лема 5.1.1.1. *Ако су* O_1 *и* O_2 *тачке и* c *дуж у равни* $\mathbb{E}^2$, *онда је скуп свих тачака* X *равни* $\mathbb{E}^2$ *таквих да је* $O_1X^2 - O_2X^2 = c^2$ *права нормална на праву* O_1O_2.

Доказ. Нека је C тачка таква да је $CO_2 \perp O_1O_2$ и $CO_2 = c$. Означимо са D пресечну тачку праве O_1O_2 и симетрале дужи O_1C. Како тачка D припада симетрали дужи O_1C, следи да је $O_1D = DC$. Посматрајмо троугао O_2DC. На основу Питагорине теореме важи да је $DC^2 = O_2D^2 + O_2C^2 = O_2D^2 + c^2$, односно важи $O_1D^2 = O_2D^2 + c^2$. Дакле, важи $O_1D^2 - O_2D^2 = c^2$ (Слика 9).



Слика 9: Скуп свих тачака X таквих да је $O_1X^2 - O_2X^2 = c^2$

Конструишимо нормалу n у тачки D на праву O_1O_2. Нека је X произвољна тачка која припада правој n. Посматрајмо тоуглове O_1DX и O_2DX. На основу Питагорине теореме следи да је $DX^2 = O_1X^2 - O_1D^2$ и $DX^2 = O_2X^2 - O_2D^2$, односно важи $O_1X^2 - O_1D^2 = O_2X^2 - O_2D^2$.

Дакле, важи једнакост $O_1X^2 - O_2X^2 = O_1D^2 - O_2D^2 = c^2$.

Овим смо доказали да за сваку тачку X праве n важи једнакост $O_1X^2 - O_2X^2 = c^2$. Може се доказати да свака тачка X за коју важи једнакост $O_1X^2 - O_2X^2 = c^2$ припада правој n. □

Теорема 5.1.1.2. *Нека су у равни* $\mathbb{E}^2$ *дата два круга* $k_1(O_1, r_1)$ *и* $k_2(O_2, r_2)$*, при чему је* $O_1 \neq O_2$*. Скуп* l *свих тачака* X *таквих да је* $p(X, k_1) = p(X, k_2)$ *јесте права која је нормална на праву* O_1O_2.

Доказ. Тачка P припада скупу l ако и само ако важи $p(P, k_1) = p(P, k_2)$ (Слика 10), односно ако и само ако је

$$PT_1{}^2 = PT_2{}^2,$$

при чему су T_1 и T_2 додирне тачке тангенти из P на k_1 и k_2. Како је, на основу Питагорине теореме,

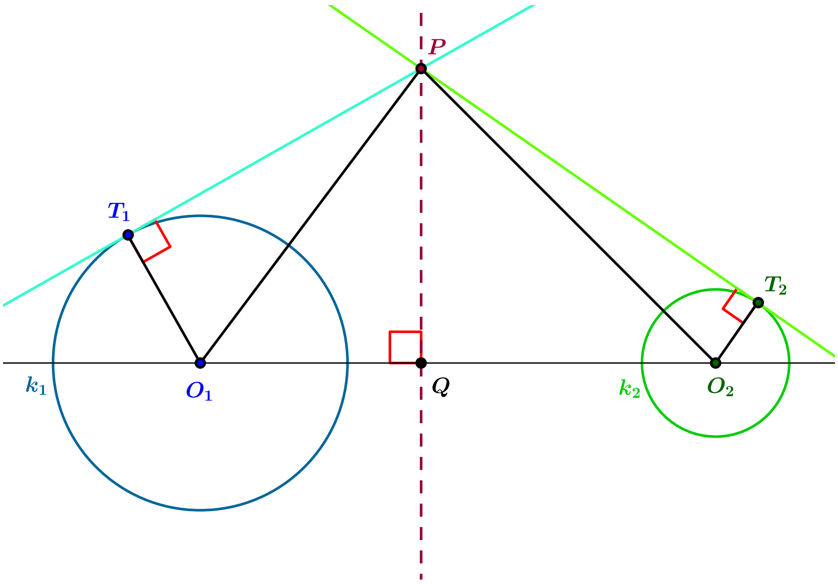
$$PT_1{}^2 = PO_1{}^2 - O_1T_1{}^2 = PO_1{}^2 - r_1{}^2 \text{ и } PT_2{}^2 = PO_2{}^2 - O_2T_2{}^2 = PO_2{}^2 - r_2{}^2,$$

следи да тачка P припада скупу l ако и само ако је

$$PO_1{}^2 - r_1{}^2 = PO_2{}^2 - r_2{}^2,$$

односно

$$PO_1{}^2 - PO_2{}^2 = r_1{}^2 - r_2{}^2.$$



Слика 10: $p\,(P, k_1) = p\,(P, k_2)$

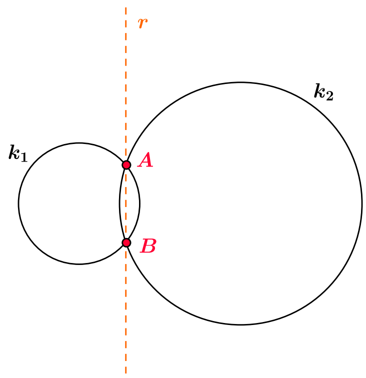
Како је разлика ${r_1}^2 - {r_2}^2 = \text{const}$, на основу претходне леме можемо закључити да тачка P припада правој која је нормална на праву O_1O_2. Односно, да је тражени скуп l управо права која је нормална на O_1O_2. $\square$

На основу претходне теореме можемо дефинисати појам радикалне осе.

Дефиниција 5.1.1.2. *Скуп свих тачака равни чије су потенције у односу на два неконцентрична круга k_1 и k_2 међусобно једнаке називамо* ***потенцијална оса*** *или* ***радикална оса*** *тих кругова.*

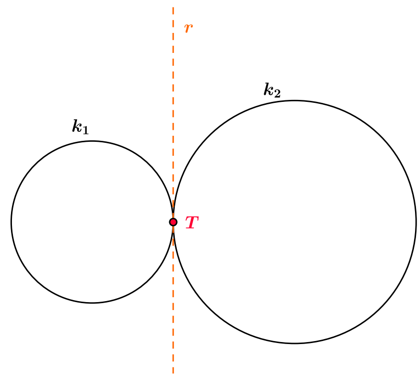
Нека су дата два неконцентрична круга k_1 и k_2. Одредимо радикалну осу тих кругова. Разликујемо три случаја:

1) Кругови k_1 и k_2 се секу у тачкама A и B. Како свака од тачака A и B има потенцију која је једнака нули у односу на оба круга ($p\,(A, k_1) = p\,(A, k_2) = 0$ и $p\,(B, k_1) = p\,(B, k_2) = 0$), то је радикална оса кругова k_1 и k_2 права AB (Слика 11).



Слика 11: Радикална оса кругова који се секу у двема тачкама

2) Кругови k_1 и k_2 се додирују у тачки T. Аналогно случају 1 радикална оса биће права која је заједничка тангента у тачки додира ових кругова (Слика 12).

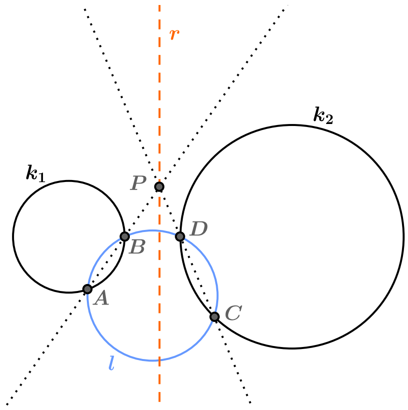


Слика 12: Радикална оса кругова који се додирују

3) Кругови k_1 и k_2 немају заједничких тачака. У овом случају радикалну осу можемо одредити конструкцијом помоћног круга. Нека је l круг такав да је $k_1 \cap l = \{A, B\}$ и $k_2 \cap l = \{C, D\}$. Радикална оса је права која садржи пресек правих AB и CD и нормална је на праву одређену центрима кругова k_1 и k_2 (Слика 13).

Даље, можемо дефинисати још неке појмове који су везани за појам потенције тачке у односу на круг.

Дефиниција 5.1.1.3. *Скуп свих кругова равни $\mathbb{E}^2$ од којих свака два круга имају исту радикалну осу r називамо* ***прамен кругова*** *или* ***систем коаксијалних кругова****, а праву r* ***радикална оса тог прамена кругова****.*



Слика 13: Радикална оса кругова који немају заједничких тачака

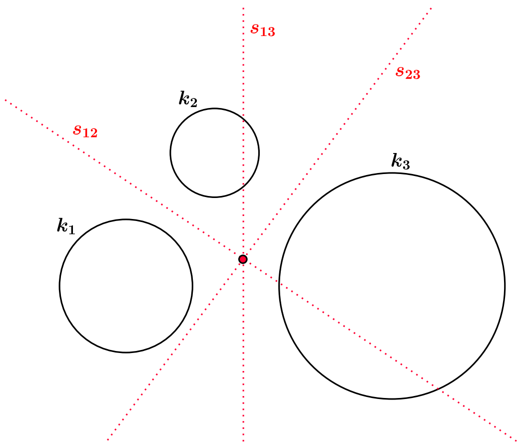
Теорема 5.1.1.3. *Нека су кругови k_1, k_2 и k_3 такви да не припадају истом прамену и да никоја два нису концентрична. Тада одговарајуће радикалне осе припадају једном прамену.*

Доказ. Нека су s_{12} радикална оса кругова k_1 и k_2, s_{23} радикална оса кругова k_2 и k_3, и s_{13} радикална оса кругова k_3 и k_1. У зависности од међусобног положаја правих s_{12} и s_{23} разликујемо два случаја.

Први случај (праве s_{12} и s_{23} се секу):

Претпоставимо да је $s_{12} \cap s_{23} = \{S\}$.

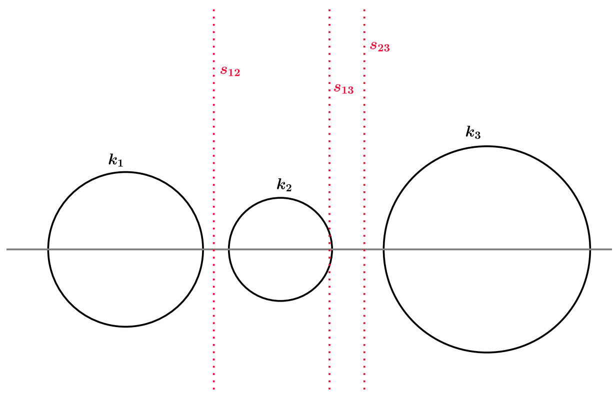
Како $S \in s_{12}$ следи да је $p\,(S, k_1) = p\,(S, k_2)$. Такође, како $S \in s_{23}$ следи да је $p\,(S, k_2) = p\,(S, k_3)$. Отуда је $p\,(S, k_1) = p\,(S, k_3)$, односно $S \in s_{13}$. Закључујемо да је $s_{12} \cap s_{23} \cap s_{13} = \{S\}$ (Слика 14).



Слика 14: Случај када радикалне осе неконцентричних кругова k_1, k_2 и k_3 припадају прамену конкурентних правих

Други случај (праве s_{12} и s_{23} су паралелне):

Потребно је доказати да је и s_{13} паралелна са s_{12} и s_{23}. С тим циљем претпоставимо да нпр. s_{13} није паралелна са s_{23}. Тада постоји тачка S таква да $S \in s_{13} \cap s_{23}$. Како $S \in s_{13}$ следи да је $p(S, k_1) = p(S, k_3)$. Такође, како $S \in s_{23}$ следи да је $p(S, k_2) = p(S, k_3)$. Отуда је $p(S, k_1) = p(S, k_2)$, односно $S \in s_{12}$. Даље, како $S \in s_{23}$ следи да $S \in s_{12} \cap s_{23}$, што је немогуће јер су по претпоставци праве s_{12} и s_{23} паралелне. Дакле, претпоставка да s_{13} није паралелна са s_{23} није одржива. Коначно можемо закључити да ако су праве s_{12} и s_{23} паралелне, онда је и права s_{13} паралелна са њима (Слика 15). □



Слика 15: Случај када радикалне осе неконцентричних кругова k_1, k_2 и k_3 припадају прамену паралелних правих

На основу претходне теореме можемо увести још један појам, појам радикалног средишта.

Дефиниција 5.1.1.4. *Тачка у којој се три радикалне осе три неконцентрична круга секу називамо* ***радикално (потенцијално) средиште****.*

Следећу теорему наводимо без доказа.

Теорема 5.1.1.4. *Важе следећа тврђења:*

а) Ако се два круга једног прамена секу у двема тачкама A и B, тада се и свака два круга тог прамена секу у тачкама A и B.

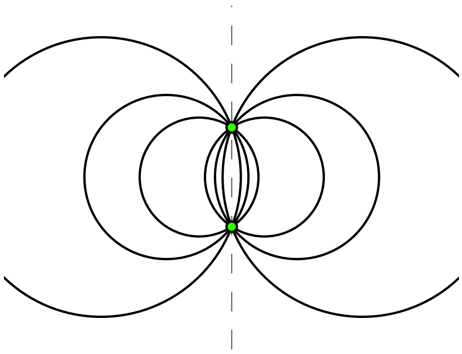
б) Ако се два круга једног прамена додирују у тачки T, тада се и свака два круга тог прамена додирују у тачки T.

в) Ако два круга једног прамена немају заједничких тачака, тада никоја два круга тог прамена немају заједничких тачака.

На основу претходно наведене теореме у еуклидској равни можемо разликовати три врсте прамена кругова: елиптички, параболички и хиперболички.

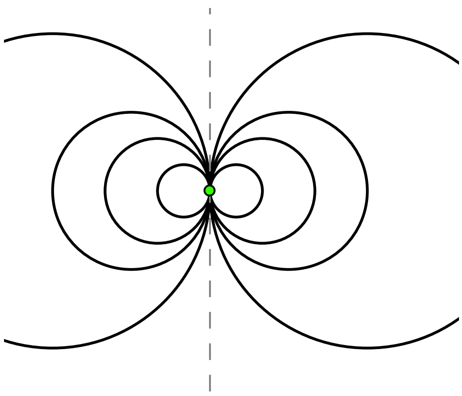
Дефиниција 5.1.1.5. *Нека су дати неконцентрични кругови у еуклидској равни који чине један прамен кругова.*

- *Ако се кругови тог прамена секу у двема тачкама тај прамен називамо* ***елиптички прамен кругова*** *(Слика 16).*



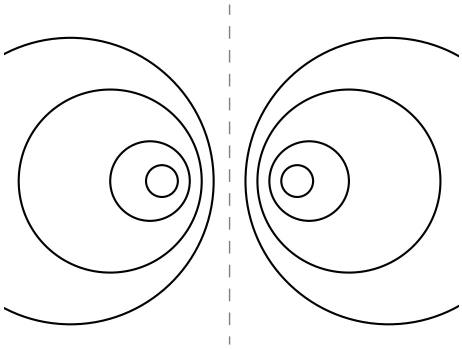
Слика 16: Елиптички прамен кругова

- *Ако се кругови тог прамена додирују тај прамен називамо* ***параболички прамен кругова*** *(Слика 17).*



Слика 17: Параболички прамен кругова

- *Ако кругови тог прамена немају заједничких тачака тај прамен називамо* ***хиперболички прамен кругова*** *(Слика 18).*

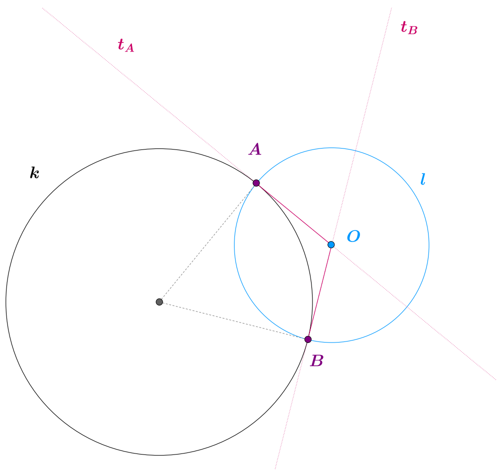


Слика 18: Хиперболички прамен кругова

Напоменимо да центри свих кругова једног прамена припадају правој нормалној на осу тог прамена.

Лема 5.1.1.2. *Нека је у равни* $\mathbb{E}^2$ *дат круг* k*. Ако је круг* l *нормалан на круг* k*, онда центар круга* l *припада спољашњости круга* k*.*

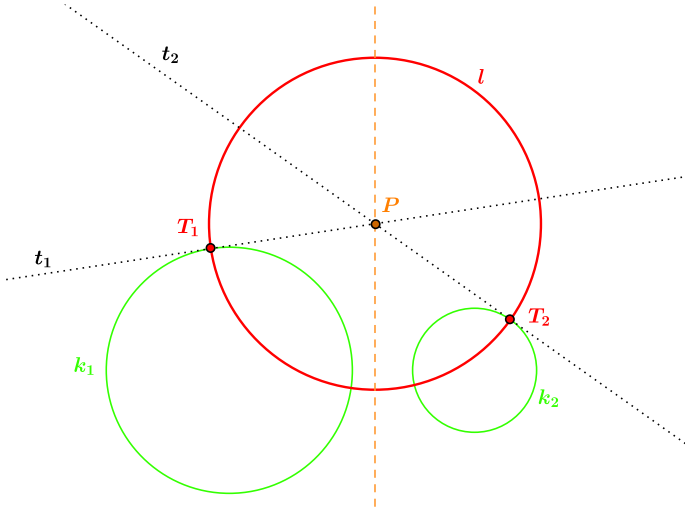
Доказ. Нека је O центар круга l. Ако су A и B пресечне тачке кругова k и l, онда полупречници OA и OB круга l припадају тангентама на круг k у одговарајућим тачкама (Слика 19). Међутим, последње је немогуће ако тачка O не припада спољашњости круга k. $\square$



Слика 19: Графички приказ леме 5.1.1.2

Лема 5.1.1.3. *Нека су у равни* $\mathbb{E}^2$ *дата два круга* k_1 *и* k_2 *и нека је* P *тачка која припада спољашњости кругова* k_1 *и* k_2 *и радикалној оси кругова* k_1 *и* k_2*. Тада постоји јединствен круг* l *чији је центар тачка* P *и који је нормалан на кругове* k_1 *и* k_2*.*

Доказ. Обележимо са t_1 и t_2 тангенту из тачке P на круг k_1, односно k_2. Нека је $\{T_1\} = t_1 \cap k_1$ и $\{T_2\} = t_2 \cap k_2$ (Слика 20).



Слика 20: Графички приказ леме 5.1.1.3

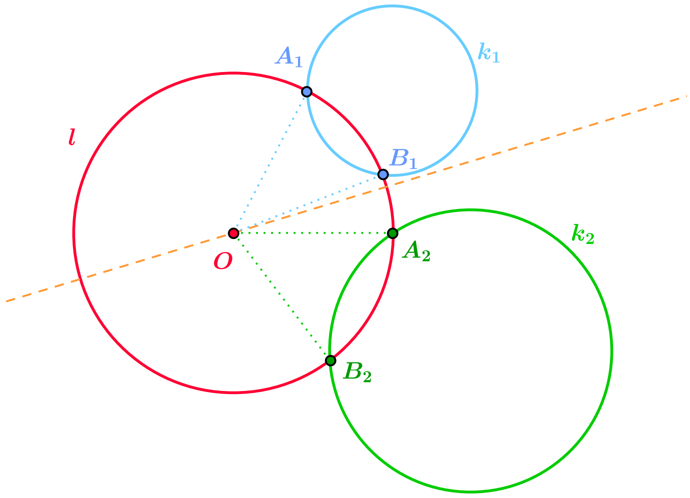
Како тачка P припада радикалној оси кругова k_1 и k_2, следи да је $p\,(P, k_1) = p\,(P, k_2)$, односно да је $PT_1 = PT_2$. Тада је полупречник круга l дуж PT_1 (односно PT_2). □

Лема 5.1.1.4. *Ако је круг* l *нормалан на кругове* k_1 *и* k_2*, онда центар круга* l *припада радикалној оси кругова* k_1 *и* k_2*.*

Доказ. Означимо са O центар круга l. Нека је $\{A_1, B_1\} = l \cap k_1$ и $\{A_2, B_2\} = l \cap k_2$. Свака од дужи OA_1, OB_1, OA_2 и OB_2 је полупречник круга l, па су једнаке (Слика 21). Дакле, отуда је $p(O, k_1) = p(O, k_2)$, односно O припада радикалној оси кругова k_1 и k_2. □

Теорема 5.1.1.5. *Ако је круг* l *нормалан на кругове* k_1 *и* k_2*, онда је круг* l *нормалан и на све кругове прамена којег одређују кругови* k_1 *и* k_2*.*

Доказ. Нека је k произвољан круг прамена кругова одређеног круговима k_1 и k_2. Обележимо са O центар круга l. На основу леме 5.1.1.4 тачка O припада радикалној оси прамена одређеног круговима k_1 и k_2. Отуда тачка O има једнаке потенције у односу на све кругове прамена кругова одређеног круговима k_1 и k_2, па и на круг k. Следи да је дуж одређена тачком O и додирном тачком тангенте из O на круг k једнака полупречнику круга l, па закључујемо да је круг l нормалан на круг k. □



Слика 21: Графички приказ леме 5.1.1.4

Теорема 5.1.1.6. *Нека је $\mathcal{K}$ неки прамен кругова и нека су l_1 и l_2 два круга нормална на кругове прамена $\mathcal{K}$. Тада је сваки круг прамена $\mathcal{L}$ одређеног са l_1 и l_2 нормалан на сваки круг прамена $\mathcal{K}$. Радикална оса прамена кругова $\mathcal{K}$ садржи центре кругова прамена $\mathcal{L}$ и одговарајуће осе су нормалне.*

Доказ. Доказ непосредно следи из претходних лема. □

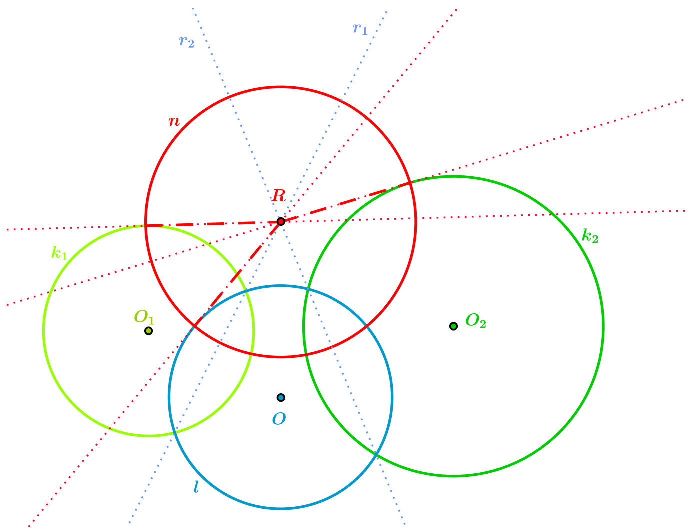
Претходно наведеном теоремом увели смо нови појам:

Дефиниција 5.1.1.6. *Праменове кругова који задовољавају претходну теорему називамо* ***нормални праменови кругова****.*

Теорема 5.1.1.7. *Нека су k_1 и k_2 два дисјунктна неконцентрична круга и нека је круг l нормалан на оба. Тада постоји јединствен круг (или права) n нормалан на сва три круга.*

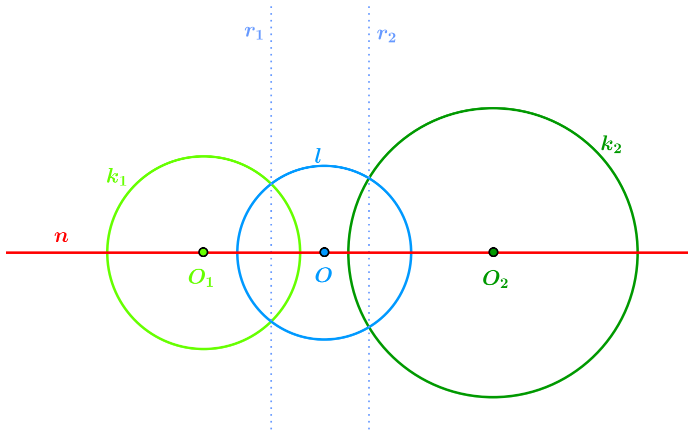
Доказ. Обележимо са r_1 радикалну осу кругова k_1 и l, а са r_2 радикалну осу кругова k_2 и l.

Ако се праве r_1 и r_2 секу, обележимо пресек са R (Слика 22). На основу дефиниције тачке R одсечци тангенти из тачке R на сваки од кругова k_1, k_2 и l су међусобно подударне дужи и свака од њих је једнака полупречнику круга n. Центар круга n је тачка R.



Слика 22: Случај када се радикалне осе r_1 и r_2 секу

Ако се праве r_1 и r_2 не секу, онда је n права одређена центрима кругова k_1 и k_2 (Слика 23).



Слика 23: Случај када су радикалне осе r_1 и r_2 дисјунктне

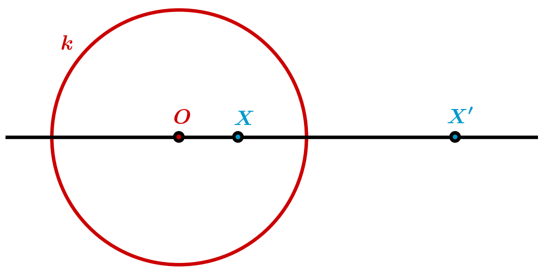
Заиста, ако са O_1 обележимо центар круга k_1, са O_2 центар круга k_2 и са O центар круга l, како је r_1 нормално на O_1O, r_2 нормално на O_2O и r_1 паралелно са r_2, следи да су O, O_1 и O_2 колинеарне. $\square$

5.1.2 Инверзија у односу на круг

Дефиниција 5.1.2.1. *Нека је $k(O,r)$ круг еуклидске равни $\mathbb{E}^2$. Пресликавање $\psi_k : \mathbb{E}^2 \setminus \{O\} \to \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$ дефинисано са:*

$$\psi_k(X) = X' \text{ ако и само ако } X' \text{ припада полуправој } OX \text{ и } OX \cdot OX' = r^2,$$

*називамо **инверзија у односу на круг** k. Круг k називамо круг, тачку O центар и полупречник r полупречник инверзије (Слика 24).*



Слика 24: X' је слика тачке X у инверзији у односу на круг k

Зашто је домен и кодомен овог пресликавања скуп $\mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$?
Ако би центар O имао своју слику O', тада би на основу дефиниције 5.1.2.1 важило:

$$\psi_k(O) = O' \text{ ако и само ако } O' \text{ припада полуправој } OO \text{ и } OO \cdot OO' = r^2.$$

Међутим, како је дужина дужи OO једнака 0, немогуће је да тачка O има слику. Слично, тачка O није слика ниједне тачке.

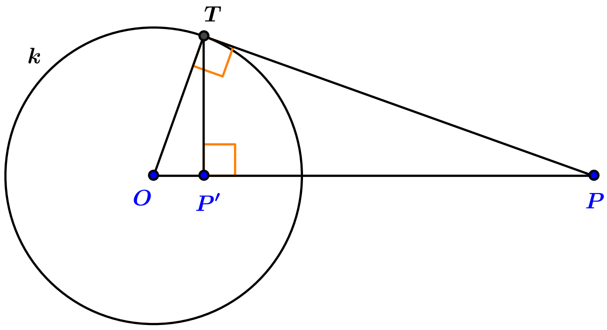
Како конструисати слику произвољне тачке P у инверзији ψ_k у односу на круг $k(O,r)$?

Пример 5.1.2.1. *Нека тачка P припада спољашњости круга k. Конструисати слику тачке P у инверзији у односу на круг k.*

Решење. Нека је T додирна тачка тангенте конструисане из тачке P на круг k и P' подножје нормале из тачке T на правој OP (Слика 25). Тачка P' је слика тачке P у инверзији у односу на круг k. Како је $\angle TOP = \angle P'OT$ и $\angle PTO = \angle TP'O = \frac{\pi}{2}$, следи да је $\triangle OTP \sim \triangle OP'T$. Дакле, следи да је

$$\frac{OT}{OP'} = \frac{OP}{OT},$$

односно, важи $OP \cdot OP' = OT^2 = r^2$. $\triangle$



Слика 25: Тачка P' је слика тачке P у инверзији у односу на круг k

Теорема 5.1.2.1. *Инверзија је бијективно пресликавање.*

Доказ. Нека је $Y \in \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$ произвољна тачка. На полуправој OY постоји јединствена тачка X, $X \in \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$ таква да је $OX = \dfrac{r^2}{OY}$, тј. $OX \cdot OY = r^2$. Како последња једнакост значи да је $Y = \psi_k(X)$, следи да је ψ_k „НА" пресликавање. С друге стране, ако је $\psi_k(X_1) = \psi_k(X_2) = Y$ онда је $OX_1 \cdot OY = OX_2 \cdot OY = r^2$, односно, $OX_1 = OX_2 = \dfrac{r^2}{OY}$. Како на основу дефиниције инверзије и X_1 и X_2 припадају правој OY следи да је $X_1 = X_2$. Односно, ψ_k је „$1-1$" пресликавање. □

У примеру 5.1.2.1 смо видели како можемо конструисати слику тачке P у инверзији у односу на круг $k(O, r)$, ако тачка P припада спољашности круга k.

Следећа теорема нам казује како можемо конструисати слику тачке P у инверзији у односу на круг $k(O, r)$, ако тачка P припада унутрашњости круга k.

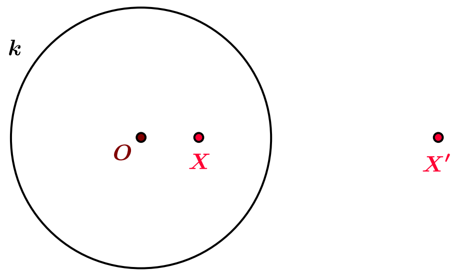
Теорема 5.1.2.2. *Инверзија је инволуција.*

Доказ. Нека је $\psi_k(X) = X'$. Тада је X' тачка полуправе OX таква да важи следећа једнакост: $OX \cdot OX' = r^2$. Међутим, онда је и X тачка полуправе OX' таква да важи једнакост: $OX' \cdot OX = r^2$, па је $\psi_k(X') = X$, односно можемо закључити да је ${\psi^2}_k(X) = X$, тј. инверзија ψ_k је инволуција. □

Сада, на основу теореме 5.1.2.2, можемо закључити да је конструкција слике тачке P, тачке која припада унутрашњости круга k, у инверзији ψ_k у односу на круг $k(O, r)$ обрнут процес од конструкције слике тачке P, која припада спољашности круга k, при истом пресликавању, тј. у инверзији ψ_k у односу на круг $k(O, r)$.

Теорема 5.1.2.3. *Инверзија у односу на круг $k(O, r)$ пресликава унутрашњу област тог круга без центра O у спољашњу област; и обратно, спољашња област се том инверзијом пресликава у унутрашњу област без центра O.*

Доказ. Нека је X произвољна тачка у унутрашњости круга инверзије, различита од центра инверзије O. Нека је X' њена слика у тој инверзији, тј. $\psi_k(X) = X'$. Тада важи $OX \cdot OX' = r^2$. Како тачка X припада унутрашњости круга k следи да је $OX < r$. Отуда добијамо да је $OX' > r$, односно закључујемо да тачка X' припада спољашњости круга k (Слика 26).

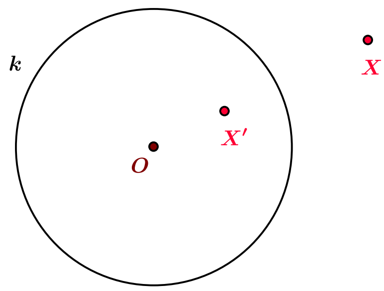


Слика 26: Ако је X у унутрашњој области X' је у спољашњости круга k

Аналогно доказујемо други део тврђења.

Нека је X произвољна тачка у спољашњости круга инверзије и нека је X' њена слика у тој инверзији, тј. $\psi_k(X) = X'$. Тада важи $OX \cdot OX' = r^2$.

Међутим, како је X у спољашњости круга k, следи да је $OX > r$. Отуда добијамо да је $OX' < r$, односно тачка X' је у унутрашњости круга инверзије. (Слика 27) $\square$



Слика 27: Ако је X у спољашњој области X' је у унутрашњој области круга k

Шта можемо закључити на основу наведене теореме 5.1.2.3?

На основу релације $OX \cdot OX' = r^2$ можемо закључити да што је тачка X ближа центру инверзије O, то је њена слика X' све даља. Дакле, можемо рећи ако се тачка X „приближава" центру O, њена слика X' ће се „удаљавати ка бесконачности". Такође, ако је тачка X „близу" круга k и њена слика ће бити „близу" круга, само са његове друге стране.

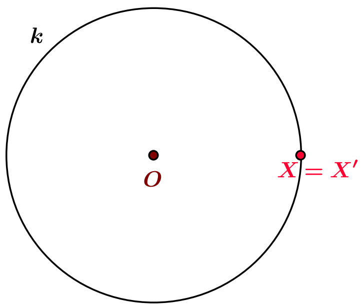
Како то можемо још записати?

Ако се тачке A и B инверзијом у односу на круг k пресликавају редом у тачке A' и B' и ако важи распоред $\mathcal{B}(O, A, B)$, онда важи распоред $\mathcal{B}(O, B', A')$.

Наредна теорема нам говори шта је слика неке тачке која припада кругу k у инвезији у односу на тај круг.

Теорема 5.1.2.4. *Све инваријантне тачке инверзије су на кругу те инверзије.*

Доказ. Тачка X је инваријантна ако и само ако важи $OX \cdot OX = r^2$.
Из ове једнакости добијамо да је дужина дужи OX једнака дужини полупречника круга инверзије, па можемо закључити да тачка X припада кругу инверзије (Слика 28). □



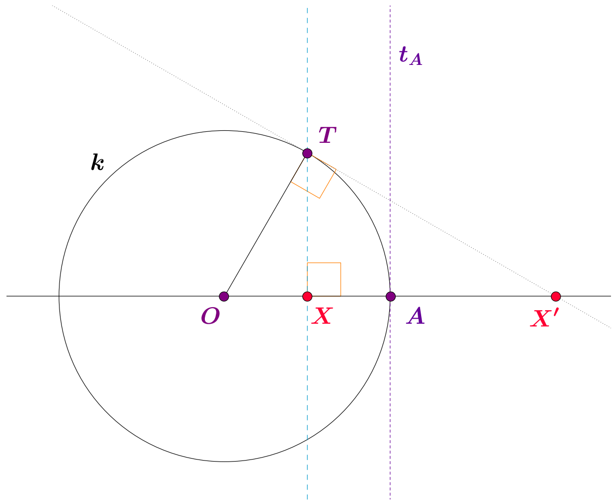
Слика 28: Тачка X је инваријантна у инверзији у односу на круг k ако и само ако припада кругу k

Теорема 5.1.2.5. *Нека је $X' = \psi_k(X)$. Права XX' је нормална на круг k.*

Доказ. Како права XX' садржи центар инверзије, следи да права XX' сече круг инверзије. Обележимо са A пресечну тачку праве XX' и круга k. По дефиницији права XX' је нормална на круг k ако је нормална на тангенту круга k у тачки A (обележимо тангенту круга k у тачки A са t_A). Како права XX' садржи полупречник OA круга k и како је полупречник OA нормалан на t_A следи тврђење теореме (Слика 29).

□

Лема 5.1.2.1. *Нека су O, A и B три неколинеарне тачке и ψ_k инверзија у односу на круг $k(O, r)$. Ако су A' и B' слике тачака A и B у тој инверзији, тада је $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$ (Слика 30).*



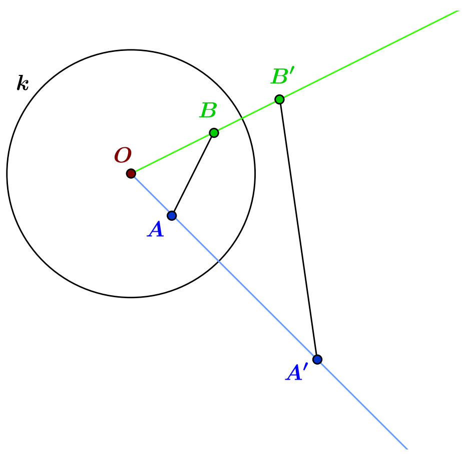
Слика 29: Права XX' је нормална на круг k

Доказ. Како важи

$$\psi_k : A, B \mapsto A', B',$$

то је

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2.$$



Слика 30: Сличност троуглова $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$

На основу тога је

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}.$$

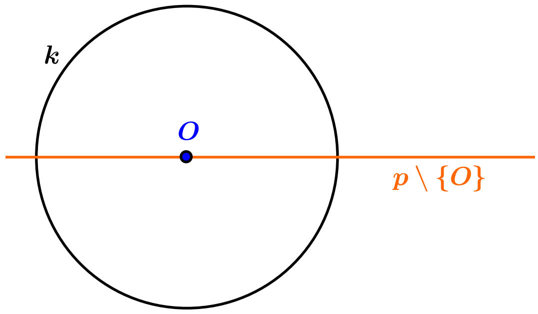
Можемо закључити да због једнакости $\angle AOB = \angle B'OA'$ важи да је

$$\triangle OAB \sim \triangle OB'A'.$$

$\square$

Теорема 5.1.2.6. *Нека је дата инверзија ψ_k у односу на круг $k(O, r)$ и нека је p права која садржи центар инверзије O. Слика праве p без тачке O биће права p без тачке O.*

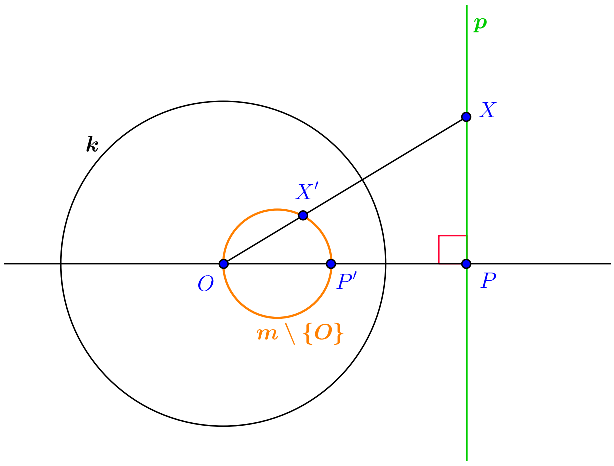
Доказ. Нека је $X \in p \setminus \{O\}$ произвољна тачка. Тада $X' = \psi_k(X)$ припада полуправој OX. Како је полуправа OX подскуп праве p следи да је $X' \in p \setminus \{O\}$ (Слика 31). Такође, ако је $Y \in p \setminus \{O\}$ произвољна онда постоји $X \in p \setminus \{O\}$таква да је $Y = \psi_k(X)$. $\square$



Слика 31: Слика праве p која садржи центар инверзије у инверзији ψ_k

Теорема 5.1.2.7. *Нека је дата инверзија ψ_k у односу на круг $k(O, r)$ и нека је p права која не садржи центар инверзије O. Слика праве p биће круг m, који садржи тачку O, али без тачке O.*

Доказ. Нека је P подножје нормале из тачке O на правој p (Слика 32). Како $O \notin p$, то је $P \neq O$, па тачка P има своју слику у инверзији ψ_k. Означимо са $P' = \psi_k(P)$. Нека је X произвољна тачка праве p различита од тачке P и нека је $X' = \psi_k(X)$. На основу леме 5.1.2.1 знамо да је $\triangle OPX \sim \triangle OX'P'$, па је $\angle OX'P' = \angle OPX = \frac{\pi}{2}$. Из овога можемо закључити да тачка X' припада кругу над пречником OP'. Означимо тај круг са m. Како је $X' \neq O$, следи да је $X' \in m \setminus \{O\}$.

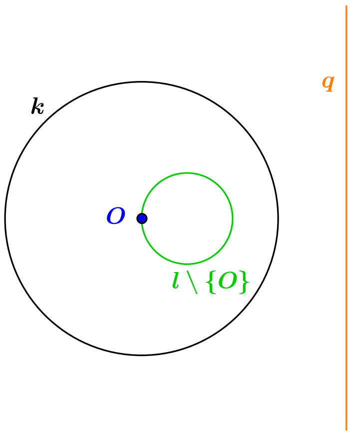


Слика 32: Слика праве p која не садржи центар инверзије у инверзији ψ_k

Обрнутим поступком доказујемо да је свака тачка скупа $m \setminus \{O\}$ слика неке тачке праве p, тако да заиста важи да је $\psi_k(p) = m \setminus \{O\}$. □

Теорема 5.1.2.8. *Нека је дата инверзија ψ_k у односу на круг $k(O, r)$ и нека је l круг који садржи центар инверзије O. Слика круга l без тачке O биће права q која не садржи тачку O.*

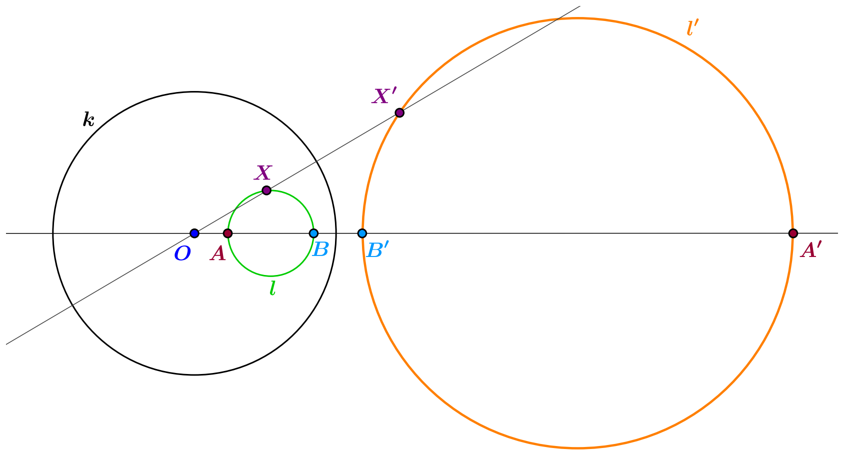
Доказ. Како је инверзија ψ_k инволуција, следи да је овај случај директна последица теореме 5.1.2.7 (Слика 33). □



Слика 33: Слика круга l који садржи центар инверзије O у инверзији ψ_k

Теорема 5.1.2.9. *Нека је дата инверзија ψ_k у односу на круг $k(O, r)$ и нека је l круг који не садржи центар инверзије O. Слика круга l биће круг l' који не садржи тачку O.*

Доказ. Нека су A и B тачке које добијамо у пресеку праве која садржи тачку O и центар круга l са кругом l (Слика 34). Претпоставимо да важи распоред $\mathcal{B}(O, A, B)$. Нека је $A' = \psi_k(A)$, $B' = \psi_k(B)$ и X произвољна тачка круга l ($X \neq A, B$). На



Слика 34: Слика круга l који не садржи центар инверзије O у инверзији ψ_k

основу леме 5.1.2.1 важи да је $\triangle OAX \sim \triangle OX'A'$ и $\triangle OBX \sim \triangle OX'B'$. Тада је $\angle OX'A' = \angle OAX$ и $\angle OX'B' = \angle OBX$. Како је

$$\angle A'X'B' = \angle OX'A' - \angle OX'B' = \angle OAX - \angle OBX = \angle AXB = \frac{\pi}{2},$$

следи да тачка X' припада кругу над пречником $A'B'$.

Обрнутим поступком доказујемо и да је свака тачка тог круга слика неке тачке круга l.

Аналогно тврђење доказујемо у случају када је $\mathcal{B}(A, O, B)$. □

Пример 5.1.2.2. *Нека су у равни $\mathbb{E}^2$ дати круг k и тачка A таква да је $A \notin k$. Ако је A' слика тачке A при инверзији у односу на круг k и l круг који садржи тачке A и A', онда је l нормалан на круг k.*

Решење. Нека су O и r центар, односно полупречник круга k. Како је A' слика тачке A при инверзији у односу на круг k, следи да је $OA \cdot OA' = r^2$. Нека је T додирна тачка тангенте из тачке O на круг l. Важи да је $p(O, l) = OA \cdot OA' = OT^2$. Следи да је $r = OT$, односно тачка T припада кругу k и полупречници кругова k и l, који садрже тачку T, су међусобно нормални. △

Пример 5.1.2.3. *Нека су у равни $\mathbb{E}^2$ дати круг k и две разне тачке A и B. Одредити круг (или праву) l који садржи тачке A и B и нормалан је на круг k.*

Решење. Обележимо са O центар круга k.

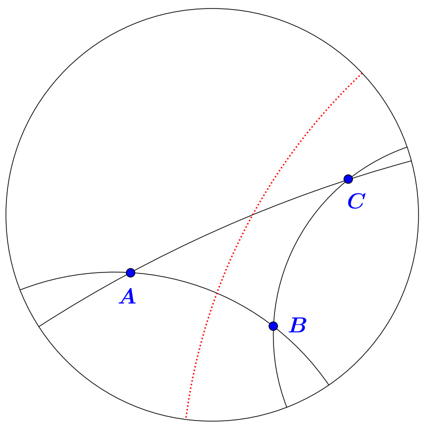
Први случај (тачке A, B и O су колинеарне):
Нека је l права одређена тачкама A, B и O. Права l је нормална на круг k.

Други случај (тачке A, B и O су неколинеарне):
Први подслучај (тачке A и B припадају кругу k): Нека су t_A и t_B тангенте на круг k у тачки A, односно B и нека је S пресечна тачка тангенти t_A и t_B. Круг l чији је центар тачка S, а полупречник $SA(=SB)$ је нормалан на круг k.
Други подслучај (бар једна од тачака A и B не припада кругу k): Без умањења општости претпоставимо да тачка A не припада кругу k. Нека је A' слика тачке A при инверзији у односу на круг k. Круг l који садржи тачке A, A' и B је нормалан на круг k. $\triangle$

Пример 5.1.2.4. *Нека су у равни $\mathbb{E}^2$ дати кругови k_1 и k_2, који немају заједничких тачака и тачка A која не припада нити једном од њих. Одредити круг (или праву) l који садржи тачку A и нормалан је на дате кругове.*

Решење. Нека је O_1 центар круга k_1 и O_2 центар круга k_2. Разликујемо два случаја.
Први случај (тачке A, O_1 и O_2 су колинеарне):
Нека је права l одређена тачкама A, O_1 и O_2. Права l садржи тачку A и нормална је на кругове k_1 и k_2.
Други случај (тачке A, O_1 и O_2 су неколинеарне):
Нека је A_1 слика тачке A при инверзији у односу на круг k_1 и нека је A_2 слика тачке A при инверзији у односу на круг k_2. Круг l који садржи тачке A, A_1 и A_2 нормалан је на кругове k_1 и k_2. $\triangle$

Теорема 5.1.2.10. *Нека су у унутрашњости круга k дате три разне тачке A, B и C. Кроз сваке две од датих тачака можемо конструисати три круга који су нормални на дати круг k. Онај лук четвртог круга који је нормалан на k, припада унутрашњости круга k, и који сече један од унутрашњих лукова AB, BC или CA, сече један и само један од тих лукова, ако четврти круг не садржи ни једну од датих тачака A, B и C (Слика 35).*



Слика 35: Графички приказ теореме 5.1.2.10

5.2 Помоћни резултати из комплексне анализе

Познато је да еуклидску раван $\mathbb{E}^2$ можемо идентификовати са скупом комплексних бројева $\mathbb{C}$. При томе, свакој тачки еуклидске равни одговара тачно један комплексан број и обратно. Еуклидску раван у којој смо тачкама придружили комплексне бројеве називамо ***комплексна раван***. Сваку геометријску фигуру еуклидске равни, тада, видимо као подскуп скупа комплексних бројева.

Ради конструкције Поенкареовог диск модела потребни су нам, пре свега, праве и кругови. Стога размотримо како изгледају једначине праве и круга у комплексној равни.

Сваку праву можемо видети као скуп свих комплексних бројева

$$z = x + i \cdot y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

таквих да је

$$ax + by + c = 0,$$

при чему су $a, b, c \in \mathbb{R}$ и бар један од бројева a и b различит од нуле. Дакле, како је $x = \mathrm{Re}\,(z)$ и $y = \mathrm{Im}\,(z)$ једначину праве можемо записати на следећи начин:

$$a\,\mathrm{Re}\,(z) + b\,\mathrm{Im}\,(z) + c = 0.$$

Даље, узимајући у обзир да је $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ и $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ добијамо да је једначина праве

$$a\frac{z + \overline{z}}{2} + b\frac{z - \overline{z}}{2i} + c = 0,$$

односно, након сређивања добијамо

$$\frac{a - bi}{2}z + \frac{a + bi}{2}\overline{z} + c = 0.$$

Нека је $A = \dfrac{a + bi}{2}$ (самим тим је $\overline{A} = \dfrac{a - bi}{2}$). Отуда закључујемо да за сваку праву постоје $A \in \mathbb{C}$ и $c \in \mathbb{R}$ такви да је права скуп свих тачака $z \in \mathbb{C}$ за које важи

$$\overline{A}z + A\overline{z} + c = 0. \tag{1}$$

Приметимо да је $A \neq 0$, јер је бар један од бројева a и b различит од нуле.

Може се показати да важи и обратно, тј. ако су $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $c \in \mathbb{R}$ онда је скуп свих тачака $z \in \mathbb{C}$ за које важи $\overline{A}z + A\overline{z} + c = 0$ права.

Круг са центром $z_0 \in \mathbb{C}$ полупречника $r > 0$ можемо видети као скуп свих тачака $z \in \mathbb{C}$ таквих да је

$$|z - z_0| = r. \tag{2}$$

Квадрирањем једначине (2) добијамо

$$|z - z_0|^2 = r^2,$$

односно, након сређивања добијамо

$$z\overline{z} - z\overline{z_0} - z_0\overline{z} + z_0\overline{z_0} - r^2 = 0.$$

Множењем последње једнакости са $B, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ добијамо

$$Bz\overline{z} - B\overline{z_0}z - Bz_0\overline{z} + B|z_0|^2 - Br^2 = 0.$$

Нека је $C = -Bz_0$ и $D = B|z_0|^2 - Br^2$ (самим тим је $\overline{C} = -B\overline{z_0}$).
Како је $D = B|z_0|^2 - Br^2$, то је

$$r^2 = \frac{B|z_0|^2 - D}{B} = \frac{\frac{|C|^2}{B} - D}{B} = \frac{|C|^2 - BD}{B^2}.$$

Међутим, како је $r^2 > 0$ следи да је $|C|^2 - BD > 0$. Односно, за сваки круг постоје $B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $C \in \mathbb{C}$ и $D \in \mathbb{R}$, $|C|^2 - BD > 0$ такви да је тај круг скуп свих тачака $z \in \mathbb{C}$ за које важи

$$Bz\overline{z} + \overline{C}z + C\overline{z} + D = 0. \tag{3}$$

Може се показати да важи и обратно, тј. ако је $B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $C \in \mathbb{C}$ и $D \in \mathbb{R}$, $|C|^2 - BD > 0$ онда је скуп свих тачака $z \in \mathbb{C}$ за које важи $Bz\overline{z} + \overline{C}z + C\overline{z} + D = 0$ круг.

На основу претходног закључујемо да и праву и круг у комплексној равни можемо задати једначином истог облика, односно једначином

$$Ez\overline{z} + F\overline{z} + \overline{F}z + G = 0, \tag{4}$$

при чему су $E, G \in \mathbb{R}$, $F \in \mathbb{C}$ и важи $|F|^2 - EG > 0$. При томе, ако је $E = 0$ једначина (4) представља једначину праве, а ако је $E \neq 0$ једначина (4) представља једначину круга.

Како се круг и права представљају једначином истог облика (4) погодно је назвати их истим именом − ***уопштени круг*** (детаљније видети у [5]).

Пре него што одредимо услов нормалности произвољног уопштеног круга

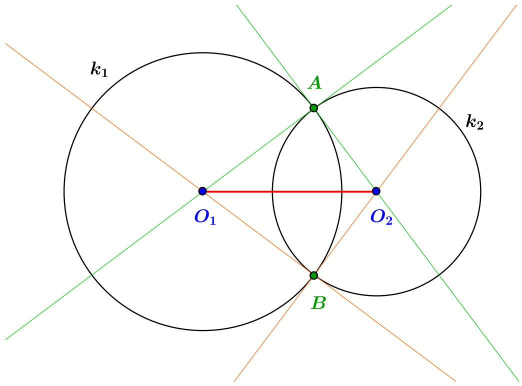
$$\{z \in \mathbb{C} : Ez\overline{z} + F\overline{z} + \overline{F}z + G = 0, E, G \in \mathbb{R}, F \in \mathbb{C}, |F|^2 - EG > 0\}$$

и круга $\{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} = 1\}$, наведимо два помоћна тврђења:

Лема 5.2.0.2. *Ако су два круга $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ међусобно нормални, онда је $O_1O_2 > r_1$ и $O_1O_2 > r_2$.*

Доказ. Нека су A и B пресечне тачке кругова k_1 и k_2 (Слика 36).

Како су k_1 и k_2 међусобно нормални кругови следи да је $O_1A \perp O_2A$, као и $O_1B \perp O_2B$. Отуда су праве O_2A и O_2B тангенте на круг k_1 у тачки A, односно B. Како пресек две различите тангенте на круг припада спољашњости круга k_1 следи да је O_2 у спољашњости круга k_1. Односно, $O_1O_2 > r_1$. Аналогно се доказује да је $O_1O_2 > r_2$. □



Слика 36: Међусобно нормални кругови k_1 и k_2

Лема 5.2.0.3. *Круг са центром* $\rho e^{i\theta}$ $(\rho > 1)$ *и полупречником* r *и круг са центром* 0 *и полупречником* 1 *су нормални ако и само ако је* $r = \sqrt{\rho^2 - 1}$.

Доказ. Нека је

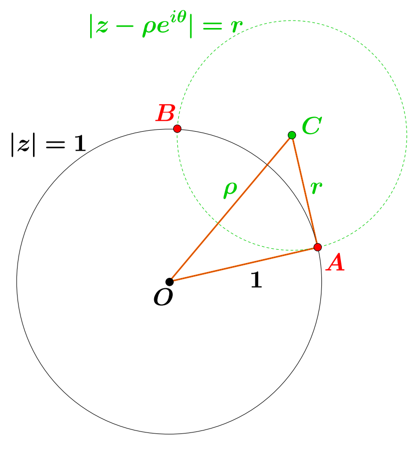
$$k_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

и

$$k_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \rho e^{i\theta}| = r\}.$$

Центар круга k_1 обележимо са O, а центар круга k_2 са C.

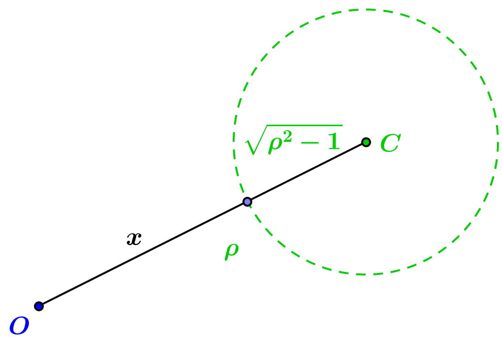
Претпоставимо прво да су кругови k_1 и k_2 нормални. Како су кругови k_1 и k_2 нормални они се секу. Обележимо са A и B пресечне тачке. Такође, из услова нормалности кругова k_1 и k_2, следи да је угао $\angle CAO$ прав, па на основу Питагорине теореме можемо закључити да је $\rho^2 = r^2 + 1^2$. Отуда, следи да је $r = \sqrt{\rho^2 - 1}$ (Слика 37).



Слика 37: Међусобно нормални кругови $|z| = 1$ и $|z - \rho e^{i\theta}| = r$

Претпоставимо сада да је $r = \sqrt{\rho^2 - 1}$, $(\rho > 1)$. Да бисмо доказали да су кругови k_1 и k_2 нормални докажимо прво да се кругови k_1 и k_2 секу.

Нека је x растојање тачке O од круга k_2. Кругови k_1 и k_2 се секу ако и само ако је $x < 1$. Приметимо да је $x = \rho - \sqrt{\rho^2 - 1}$ (Слика 38). Дакле, кругови се секу ако и

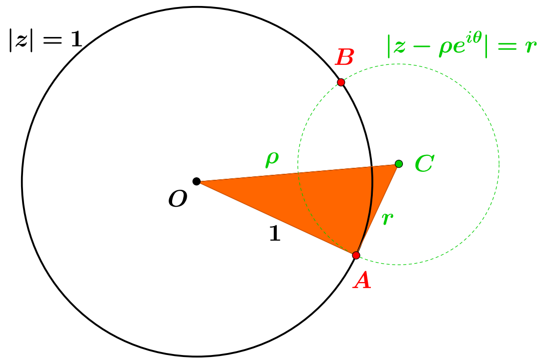


Слика 38: Испитивање да ли се кругови $|z| = 1$ и $|z - \rho e^{i\theta}| = r$ секу

само ако је
$$\rho - \sqrt{\rho^2 - 1} < 1. \tag{5}$$
Испитајмо за које ρ важи неједнакост (5). У том циљу решимо неједначину (5). Област дефинисаности дате неједначине је скуп $D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Дата неједначина је еквивалентна дисјункцији система неједначина
$$\left(\rho^2 - 1 > \rho^2 - 2\rho + 1 \text{ и } \rho - 1 \geq 0\right) \text{ или } \left(\rho^2 - 1 \geq 0 \text{ и } \rho - 1 < 0\right). \tag{6}$$
Након срећивања систем (6) је еквивалентан систему
$$(\rho > 1 \text{ и } \rho \geq 1) \text{ или } ((\rho \leq -1 \text{ или } \rho \geq 1) \text{ и } \rho < 1). \tag{7}$$
Скуп решења система (7) је $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$. Како је ρ модул комплексног броја, следи да је $\rho - \sqrt{\rho^2 - 1} < 1$ ако и само ако је $\rho > 1$.

Коначно, важи да је $x < 1$ за све допустиве вредности ρ, односно кругови k_1 и k_2 се секу.

Обележимо са A и B пресечне тачке кругова k_1 и k_2 и посматрајмо троугао OAC. Познате су нам дужине свих страница датог троугла и то је $OA = 1$, $AC = r$ и $CO = \rho$. Међутим, како је $r = \sqrt{\rho^2 - 1}$, односно $r^2 + 1^2 = \rho^2$, на основу обрата Питагорине теореме следи да је троугао OAC правоугли, тј. да је угао $\angle OAC$ прав. Овим смо доказали да су кругови k_1 и k_2 међусобно нормални (Слика 39). $\square$



Слика 39: Кругови $|z| = 1$ и $|z - \rho e^{i\theta}| = r$ се секу у тачкама A и B

Лема 5.2.0.4. *Нека су $E \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $G \in \mathbb{R}$ и $F \in \mathbb{C}$ такви да је $|F|^2 - EG > 0$. Центар z_0 и полупречник r круга $\{z \in \mathbb{C} : Ez\overline{z} + F\overline{z} + \overline{F}z + G = 0\}$ су дати са $z_0 = -\dfrac{F}{E}$ и $r^2 = \dfrac{|F|^2 - EG}{E^2}$.*

Доказ. Важи

$$Ez\overline{z} + F\overline{z} + \overline{F}z + G = 0$$

ако и само ако

$$E\left(z\overline{z} + \frac{F}{E}\overline{z} + \frac{\overline{F}}{E}z + \frac{G}{E}\right) = 0$$

ако и само ако

$$z\overline{z} + \frac{F}{E}\overline{z} + \frac{\overline{F}}{E}z + \frac{G}{E} = 0$$

ако и само ако

$$\left(z + \frac{F}{E}\right)\left(\overline{z} + \frac{\overline{F}}{E}\right) + \frac{G}{E} - \frac{|F|^2}{E^2} = 0$$

ако и само ако

$$\left|z + \frac{F}{E}\right|^2 = \frac{|F|^2 - GE}{E^2}.$$

□

Теорема 5.2.0.11. *Уопштени круг*

$$k_1 = \{z \in \mathbb{C} : Ez\overline{z} + F\overline{z} + \overline{F}z + G = 0, E, G \in \mathbb{R}, F \in \mathbb{C}, |F|^2 - EG > 0\}$$

је нормалан на круг

$$k_2 = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} - 1 = 0\}$$

ако и само ако је $E = G$.

Доказ. Разликоваћемо случајеве, када је $E = 0$ и када је $E \neq 0$.

У првом случају ($E = 0$) уопштени круг k_1 је права. Права је нормална на круг ако и само ако садржи центар круга. У овом случају права k_1 је нормална на круг k_2 ако и само ако садржи тачку 0, тј. ако и само ако је $\overline{F} \cdot 0 + F \cdot \overline{0} + G = 0$. Али како је $\overline{0} = 0$, следи да је $\overline{F} \cdot 0 + F \cdot \overline{0} + G = 0$ ако и само ако је $G = 0$.

У другом случају ($E \neq 0$) уопштени круг k_1 је круг. Нађимо прво центар и полупречник круга k_1. Ако са z_0 обележимо центар тог круга, а са r полупречник круга k_1 на основу леме 5.2.0.4 добијамо да је

$$z_0 = -\frac{F}{E}$$

и $r^2 = \dfrac{|F|^2 - EG}{E^2}$. Даље, на основу леме 5.2.0.3 кругови k_1 и k_2 су нормални ако и само ако важи

$$r = \sqrt{|z_0|^2 - 1},$$

односно, ако и само ако важи

$$r^2 = |z_0|^2 - 1,$$

тј.

$$\frac{|F|^2 - EG}{E^2} = \frac{|F|^2}{E^2} - 1,$$

тј.

$$|F|^2 - EG = |F|^2 - E^2,$$

тј.

$$-G = -E,$$

тј.

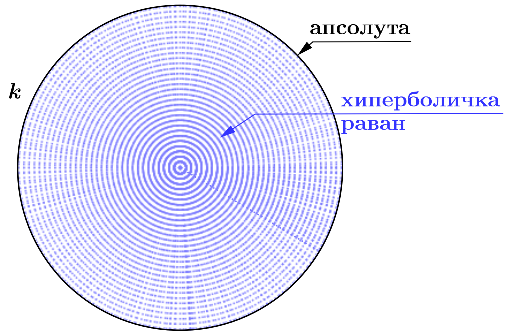
$$E = G.$$

□

5.3 Конструкција модела

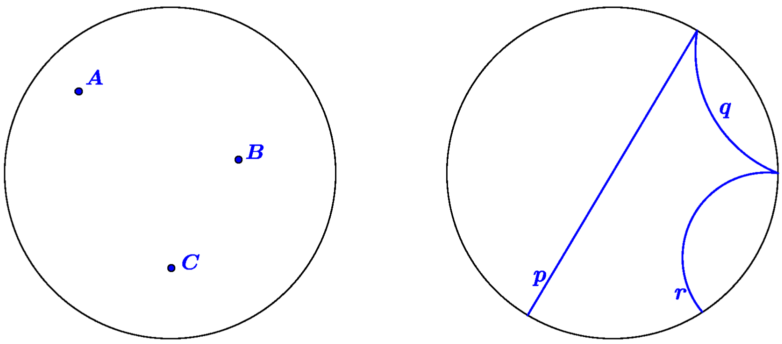
Како бисмо разликовали геометријске објекте и релације хиперболичке геометрије равни и еуклидске геометрије равни, геометријским објектима и релацијама хиперболичке геометрије равни додајемо префикс „$h-$”. Тако ћемо у хиперболичкој геометрији равни тачке и праве називати $h-$тачке и $h-$праве, а релације инцидентно, између и подударно називаћемо $h-$инцидентно, $h-$између и $h-$подударно.

Хиперболичка раван (скуп $\mathbf{P}$) биће унутрашњост произвољног еуклидског круга k полупречника 1. При томе круг k називамо ***апсолута*** (Слика 40).



Слика 40: Апсолута и хиперболичка раван

Дакле, под $h-$***тачком*** подразумевамо произвољну тачку која припада унутрашњости круга k (Слика 41). Сваки пресек круга или праве у еуклидском смислу, која је нормална на апсолуту, са хиперболичком равни називамо $h-$***права*** (Слика 41). Тачке пресека круга или праве у еуклидском смислу, која је нормална на апсолуту и апсолуте називамо ***крајеви*** одговарајуће $h-$праве. Тиме смо дефинисали елементе скупа $\mathbf{L}$.



Слика 41: $h-$тачке A, B, C и $h-$праве p, q, r

Имајући у виду чињеницу да еуклидску раван идентификујемо са скупом комплексних бројева $\mathbb{C}$, на основу претходног хиперболичку раван идентификујемо са скупом $\mathbb{D}$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Апсолуту идентификујемо са скупом $\mathbb{T}$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} - 1 = 0\}$.

Дакле, $h-$тачке идентификујемо са елементима скупа $\mathbb{D}$, тј. са комплексним бројевима модула строго мањег од 1. У делу 5.2 показали смо да је уопштени круг нормалан на круг $\{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} - 1 = 0\}$ ако и само ако је њена једначина облика $Ez\overline{z} + F\overline{z} + \overline{F}z + E = 0$, при чему је $E \in \mathbb{R}$, $F \in \mathbb{C}$ и важи $|F|^2 > E^2$. Отуда је свака $h-$права пресек скупова

$$\{z \in \mathbb{C} : Ez\overline{z} + F\overline{z} + \overline{F}z + E = 0, E \in \mathbb{R}, F \in \mathbb{C}\}$$

и

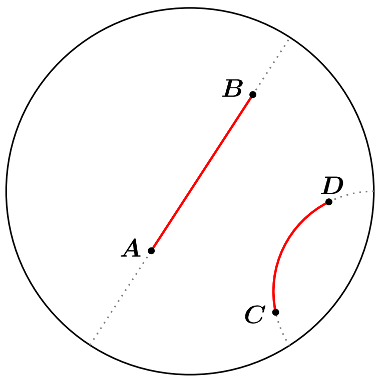
$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Представљање $h-$тачака и $h-$правих на овакав начин погодно је ради лакше реализације визуелног приказа Поенкареовог диск модела.

За $h-$тачку A кажемо да је $h-$***инцидентна*** са $h-$правом p ако $A \in p$.

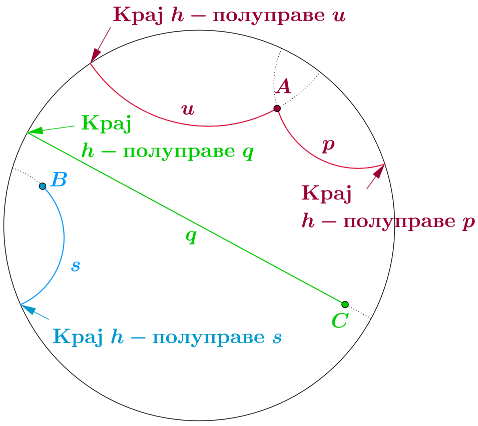
Пре него што дефинишемо релације $h-$између и $h-$подударно неопходно је да уведемо неке појмове и докажемо неке теореме.

Сваки лук круга који је нормалан на апсолуту k и који припада хиперболичкој равни или сваку дуж која припада једном од пречника апсолуте називамо $h-$***дуж*** (Слика 42).



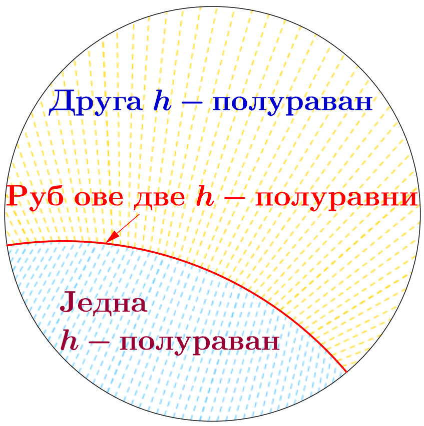
Слика 42: $h-$дужи AB и CD

$h-$***полуправа*** је сваки такав лук (односно дуж) чија једна крајња тачка припада апсолути, а друга хиперболичкој равни. Ону тачку $h-$полуправе која припада апсолути називамо ***крај***, а тачку која припада хиперболичкој равни ***теме*** $h-$полуправе (Слика 43).



Слика 43: $h-$полуправе p, q, u и s

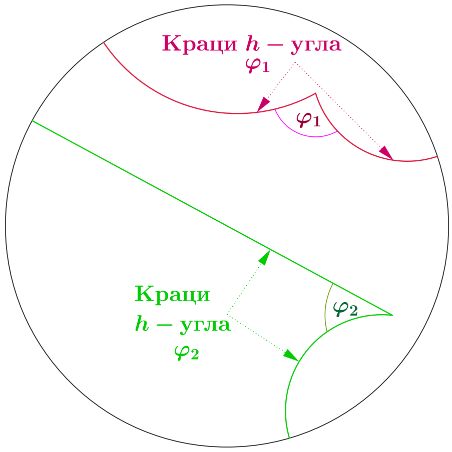
Свака $h-$права разлаже хиперболичку раван на две области које називамо $h-$***полуравни***. Ону $h-$праву, која разлаже хиперболичку раван на две $h-$полуравни називамо ***руб*** те $h-$полуравни (Слика 44).



Слика 44: Две $h-$полуравни и њихов руб

Две $h-$полуправе које имају заједничко теме разлажу хиперболичку раван на две области које називамо $h-$***углови***, а те две полуправе ***краци*** тог $h-$угла (Слика 45).

Инверзијом у односу на круг l који је нормалан на апсолуту или рефлексијом у односу на праву p нормалну на апсолуту, хиперболичка раван се пресликава на себе. Рестрикцију те инверзије односно рефлексије на хиперболичку раван називамо $h-$***рефлексија***. Под ***осом*** $h-$рефлексије подразумевамо пресек круга l, односно праве p са хиперболичком равни. Ако је x оса $h-$рефлексије φ, тада $h-$рефлексију φ обележавамо и са $\mathcal{S}_x$. Свака $h-$полураван којој је руб оса неке $h-$рефлексије том



Слика 45: $h-$углови φ_1 и φ_2

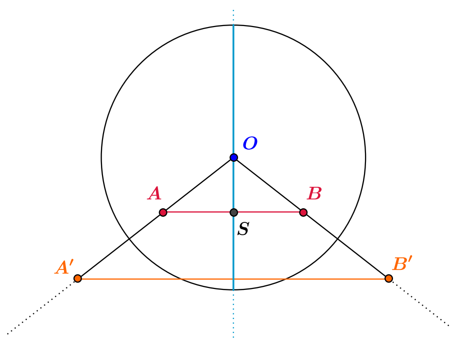
$h-$рефлексијом се пресликава на њој комплементну $h-$полураван.

Теорема 5.3.0.12. *За две разне $h-$тачке A и B постоји јединствена $h-$рефлексија којом се те две тачке пресликавају једна на другу.*

Доказ. У односу на међусобни положај дужи AB и пречника апсолуте разликујемо два случаја.

Први случај (дуж AB не припада пречнику апсолуте):
Обележимо са A' и B' слике тачака A и B у инверзији у односу на апсолуту.

1° Претпоставимо да су праве AB и $A'B'$ паралелне (Слика 46).

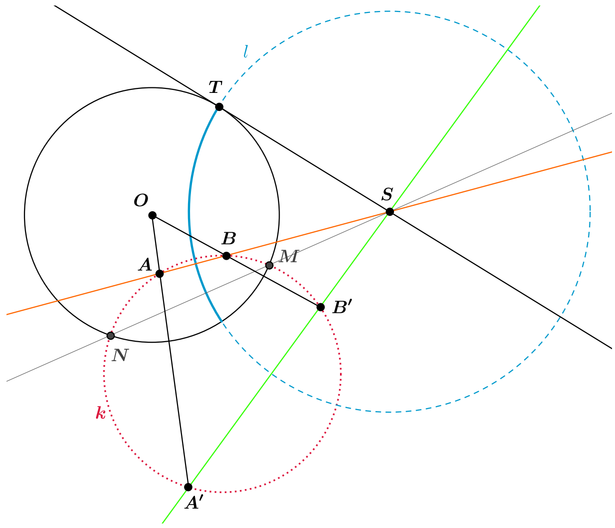


Слика 46: Случај када су праве AB и $A'B'$ паралелне

На основу леме 5.1.2.1 важи да је $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$. Отуда је $\angle OAB = \angle OB'A'$ и $\angle ABO = \angle B'A'O$. Како су AB и $A'B'$ паралелне, следи и да је $\angle OAB = \angle OA'B'$, као и $\angle ABO = \angle A'B'O$. Следи да су троуглови ABO и

$A'B'O$ једнакокраки (са теменом O, односно са основицама AB и $A'B'$). Нека је S подножје висине $\triangle ABO$ из тачке O на основици AB. Пречник апсолуте који припада правој OS представља осу тражене $h-$рефлексије.

2° Претпоставимо да се AB и $A'B'$ секу у тачки S (Слика 47).



Слика 47: Случај када се праве AB и $A'B'$ секу

Нека је T додирна тачка тангенте из тачке S на апсолуту. Нека је l круг са центром S, полупречника ST. Круг l је нормалан на апсолуту. Круг k је одређен тачкама A, B, A' и B'. На основу потенције тачке S у односу на круг k следи да је

$$SB \cdot SA = SB' \cdot SA'. \tag{8}$$

Означимо са M и N тачке пресека круга k са апсолутом. На основу потенције тачке S у односу на круг k следи да је

$$SM \cdot SN = SA' \cdot SB'. \tag{9}$$

Међутим, на основу потенције тачке S у односу на апсолуту следи да је

$$SM \cdot SN = ST^2. \tag{10}$$

Даље, на основу једнакости (9) и (10) следи да је

$$SA' \cdot SB' = ST^2. \tag{11}$$

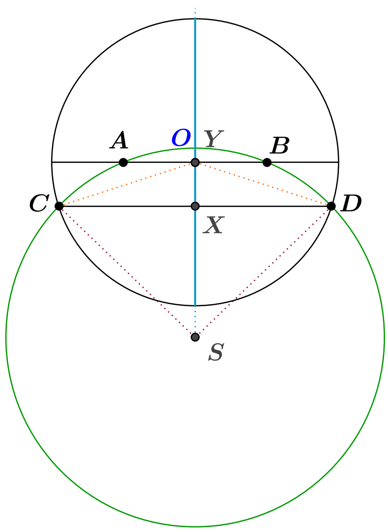
На крају, на основу једнакости (8) и (11) следи да је

$$SB \cdot SA = ST^2.$$

Дакле, део круга l који припада унутрашњости апсолуте представља осу тражене $h-$рефлексије.

Други случај (дуж AB припада пречнику апсолуте):
Нека је l круг који садржи тачке A и B и сече апсолуту у тачкама C и D.

1° Претпоставимо да су праве AB и CD паралелне (Слика 48).

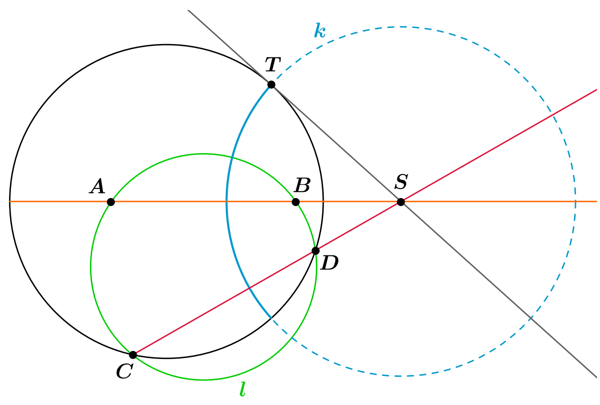


Слика 48: Случај када су праве AB и CD паралелне

Нека је S центар круга l. Посматрајмо троугао CSD. Како је $CS = DS$, следи да је $\triangle CSD$ једнакокраки. Нека је X подножје висине из темена S на основицу CD. Важи да је $SX \perp CD$ и X је средиште дужи CD.
Посматрајмо троугао COD. Како је $CO = DO$, следи да је $\triangle COD$ једнакокраки. Даље, како је X средиште дужи CD и O теме једнакокраког $\triangle COD$, следи да је $OX \perp CD$. Дакле, како су AB и CD паралелне, тачке S, X и O су колинеарне.
Посматрајмо троугао ASB. Како је $AS = BS$, следи да је $\triangle ASB$ једнакокраки. Нека је Y подножје висине из темена S на основицу AB. Важи да је $SY \perp AB$. Дакле, како је AB паралелно са CD, $SX \perp CD$ и $SY \perp AB$, следи да су тачке S, X и Y колинеарне.
Дакле, тачке S, X, Y и O су колинеарне. Како је $Y \in AB$ и $O \in AB$, следи да је $Y = O$, тј. O је средиште дужи AB.
Део праве SO који припада унутрашњости апсолуте представља осу тражене $h-$рефлексије.

2° Претпоставимо да се праве AB и CD секу у тачки S (Слика 49). Нека је T додирна тачка тангенте из S на апсолуту. Нека је k круг са центром S, полупречника ST. Круг k је нормалан на апсолуту. На основу потенције тачке S у односу на апсолуту важи да је

$$SC \cdot SD = ST^2. \tag{12}$$



Слика 49: Случај када се праве AB и CD секу у тачки S

Даље, на основу потенције тачке S у односу на круг l важи да је

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD. \tag{13}$$

На основу једнакости (12) и (13) следи да је

$$SA \cdot SB = ST^2,$$

односно, тачка A је слика тачке B при рефлексији у односу на круг k.
Дакле, део круга k који припада унутрашњости апсолуте представља осу тражене $h-$рефлексије.

Јединственост тражене осе рефлексије, у сваком од ова четири случаја, доказује се непосредно. □

Следеће теореме наводимо без доказа.

Теорема 5.3.0.13. *Ако се две $h-$праве секу, тада постоје две $h-$рефлексије којима се оне пресликавају једна на другу, а ако су дисјунктне, тада постоји јединствена $h-$рефлексија којом се те две $h-$праве пресликавају једна на другу.*

Теорема 5.3.0.14. *Постоји јединствена $h-$рефлексија којом се две $h-$полуправе са заједничким теменом пресликавају једна на другу.*

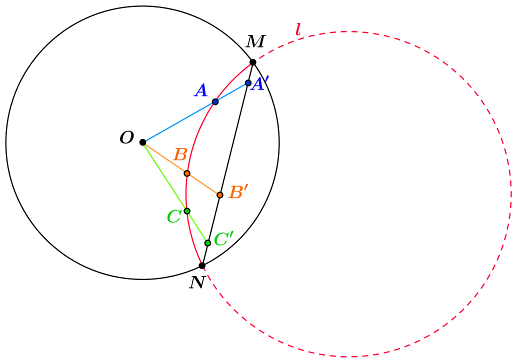
Дефинишимо сада и релације $h-$између и $h-$подударно.

Нека су A, B и C три разне $h-$тачке. За $h-$тачку B кажемо да је $h-$***између*** $h-$тачака A и C и пишемо $\mathcal{B}_h\,(A, B, C)$ ако $h-$тачка B припада $h-$дужи AC.

Следи објашњење релације $h-$између (Слика 50).

Ако је $h-$права којој $h-$тачке A, B и C припадају пречник апсолуте k, тада релација $h-$између представља релацију између у еуклидском смислу. Међутим, шта ако је $h-$права део круга l који припада хиперболичкој равни?

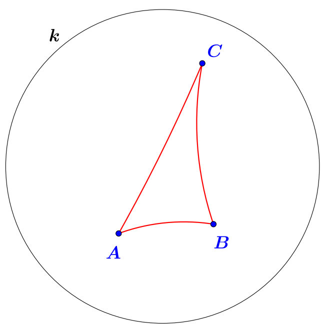
Означимо са O центар апсолуте k. Нека су M и N пресечне тачке апсолуте k и круга l. Обележимо са A', B' и C' тачке у којима праве OA, OB и OC секу тетиву MN. $h-$тачка B је $h-$између $h-$тачака A и C ако је тачка B' између тачака A' и C' (Слика 50).



Слика 50: Графичко објашњење релације $h-$између

За пар $h-$тачака (A, B) кажемо да је $h-$***подударан*** пару $h-$тачака (C, D) и пишемо $(A, B) \cong_h (C, D)$ ако постоји низ $h-$рефлексија чији производ пресликава пар (A, B) на пар (C, D). Производ тих $h-$рефлексија називамо $h-$***подударност*** (или $h-$***изометрија***).

Дефиниција 5.3.0.2. *Нека су A, B и C три $h-$неколинеарне $h-$тачке. Скуп који се састоји од $h-$дужи AB, BC и CA називамо $h-$**троугао** (Слика 51).*

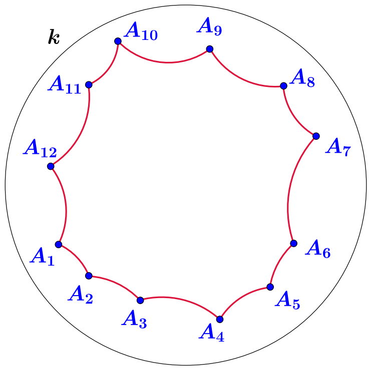


Слика 51: $h-$троугао ABC

Уведимо још појмове $h-$полигонске линије и $h-$полигона.

Нека је дата $n+1$ $h-$тачка $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n+1}$. Скуп који се састоји од датих $n+1$ $h-$тачака и $h-$тачака отворених $h-$дужи A_1A_2, $A_2, A_3, \ldots$, A_nA_{n+1} називамо $h-$***полигонска линија*** и обележавамо је са $A_1A_2A_3\ldots A_{n+1}$.

Ако се $h-$тачке A_1 и A_{n+1} поклапају, тада полигонску линију $A_1A_2A_3\ldots A_{n+1}$ код које било која три њена узастопна темена нису $h-$колинеарне тачке, називамо ***затворена*** $h-$***полигонска линија***, $h-$***полигон*** или $h-$***многоугао*** (Слика 52).



Слика 52: $h-$дванаестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}$

Наведимо на крају дефиницију растојања у Поенкареовом диск моделу.

Дефиниција 5.3.0.3. *Нека су $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Растојање између тачака z_1 и z_2 у Поенкареовом диск моделу је задато формулом*

$$\lambda(z_1, z_2) = \ln \frac{1 + \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right|}{1 - \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right|}.$$

Може се показати да λ јесте једна метрика на $\mathbb{D}$, то јест

(1) за све $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ важи $\lambda(z_1, z_2) \geq 0$,

(2) за све $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ важи $\lambda(z_1, z_2) = 0$ ако и само ако је $z_1 = z_2$,

(3) за све $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ важи $\lambda(z_1, z_2) = \lambda(z_2, z_1)$,

(4) за све $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$ важи $\lambda(z_1, z_3) \leq \lambda(z_1, z_2) + \lambda(z_2, z_3)$.

Може се још показати и да је $(A, B) \cong_h (C, D)$ ако и само ако је $\lambda(A, B) = \lambda(C, D)$.

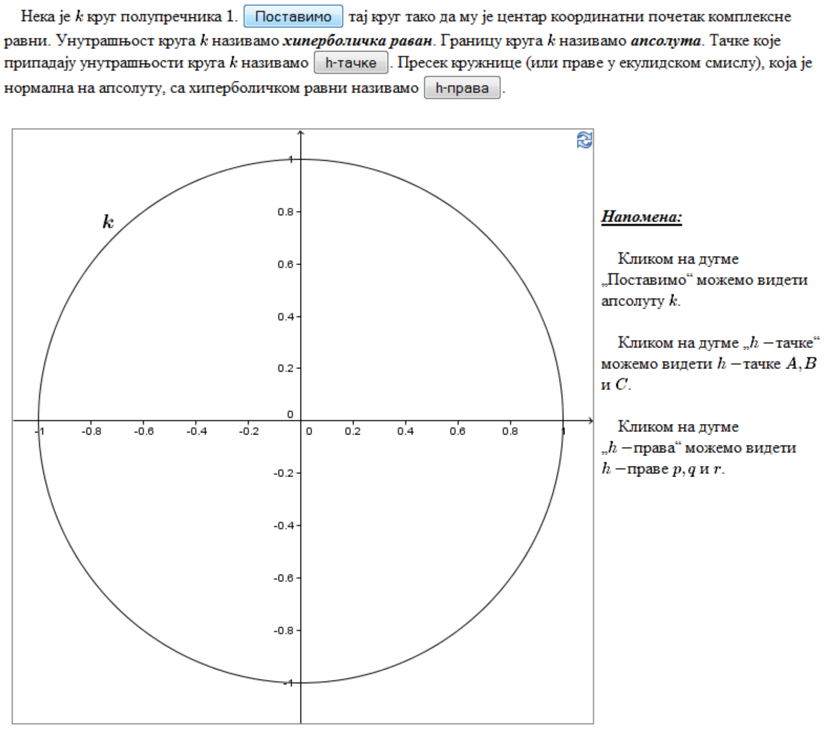
Такође, може се показати да је φ једна $h-$изометрија ако и само ако за сваке две $h-$тачке A и B важи

$$\lambda(A, B) = \lambda\left(\varphi(A), \varphi(B)\right).$$

5.3.1 Визуелизација конструкције модела

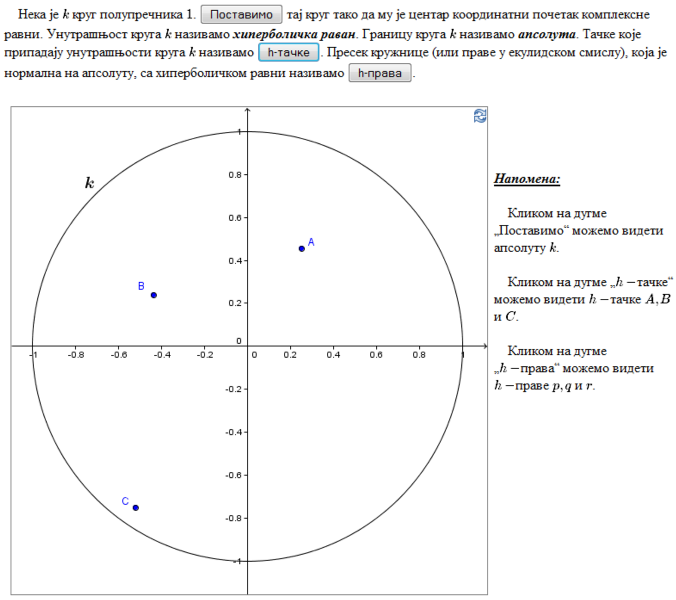
Како бисмо приказали како изгледа Поенкареов диск модел коришћењем програмског пакета GeoGebra направљени су интерактивни аплети уграђени у веб странице помоћу којих се корисник може визуелно упознати са основним појмовима и релацијама хиперболичке равни.

Најпре се интерактивно задаје еуклидски круг који представља апсолуту (Слика 53).

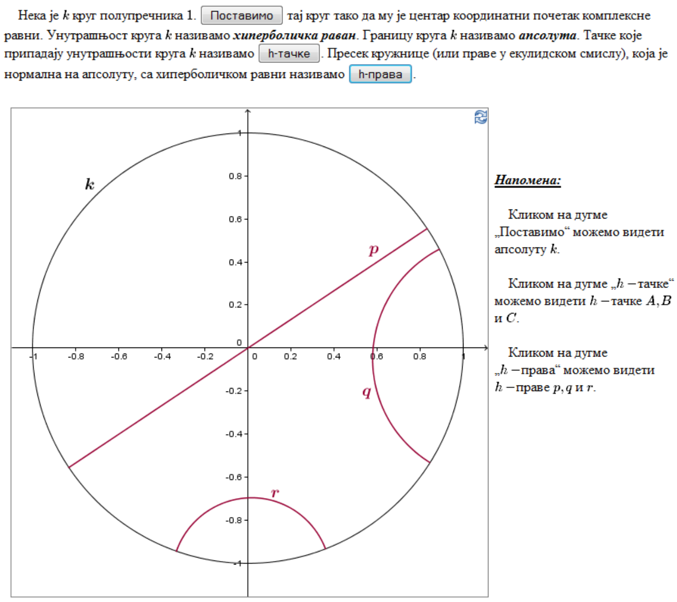


Слика 53: Визуелни приказ апсолуте

Затим се кликом на одговарајуће дугме добија визуелни приказ одређеног геометријског појма. Тако корисник може видети визуелни приказ $h-$тачке (Слика 54), $h-$праве (Слика 55), $h-$дужи (Слика 56), $h-$полуправе (Слика 57), $h-$угла (Слика 58) и $h-$полуравни (Слика 59).

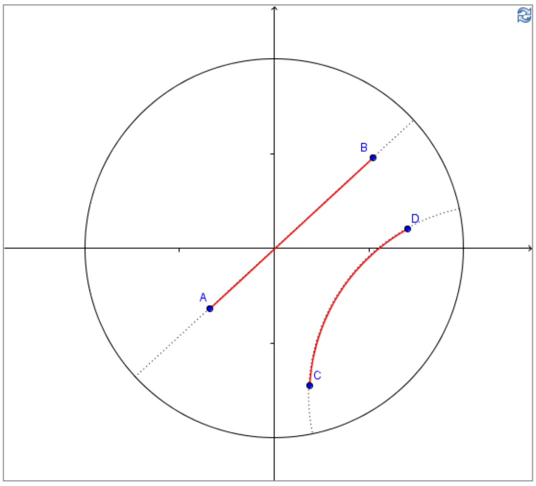


Слика 54: Визуелни приказ $h-$тачака



Слика 55: Визуелни приказ $h-$праве

Сваки лук кружнице која је нормална на апсолуту k или дужи једног од пречника апсолуте називамо h-дуж.



Напомена:

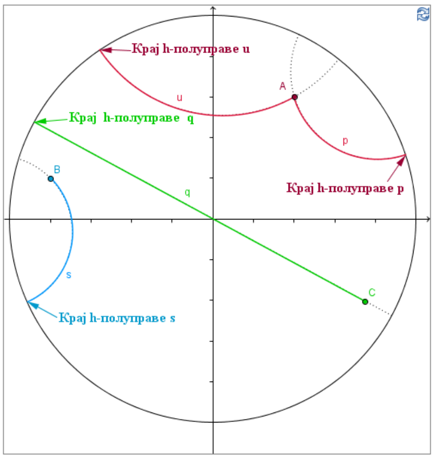
Кликом на дугме „h −дуж“ можемо видети две h −дужи AB и CD.

h −дуж AB је део једног пречника апсолуте.

h −дуж CD је лук кружнице која је нормална на апсолуту.

Слика 56: Визуелни приказ h−дужи

Сваки лук (или дуж) чија једна крајња тачка припада апсолути, а друга хиперболичкој равни називамо h-полуправа. Ону тачку h −полуправе која припада апсолути називамо крај, а h −тачку која припада хиперболичкој равни теме те h −полуправе.



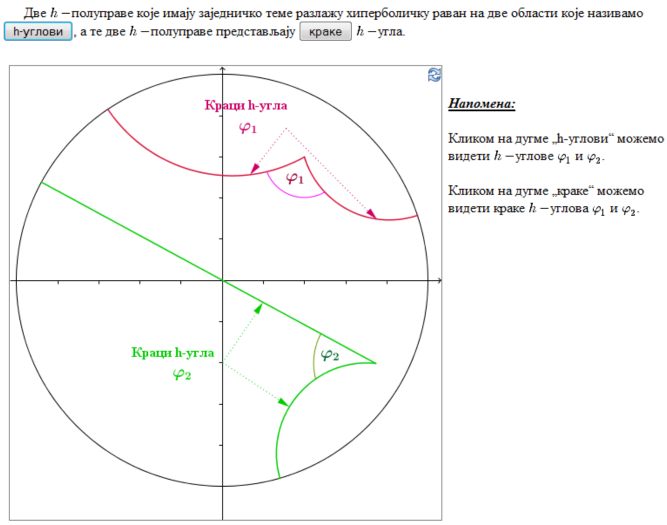
Напомена:

Кликом на дугме „h-полуправа“ можемо видети h −полуправе u, p, s, c и q.

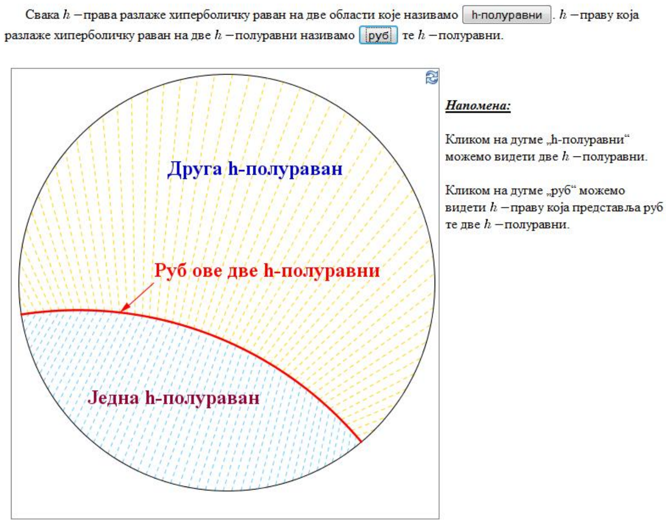
Кликом на дугме „крај“ можемо видети крајеве h −полуправих u, p, s, c и q.

Кликом на дугме „теме“ можемо видети темена h −полуправих u, p, s, c и q.

Слика 57: Визуелни приказ h−полуправе



Слика 58: Визуелни приказ $h-$угла



Слика 59: Визуелни приказ $h-$полуравни

5.4 Провера аксиома на Поенкареовом диск моделу

Како бисмо доказали да је Поенкареов диск модел заиста модел хиперболичке геометрије равни потребно је на тако дефинисаном моделу доказати да важе аксиоме хиперболичке геометрије равни.

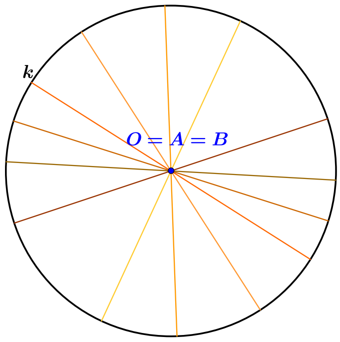
5.4.1 Аксиоме инциденције

Аксиома 5.4.1.1. *За сваку $h-$праву p постоје најмање две разне $h-$тачке A и B $h-$инцидентне са $h-$правом p.*

Доказ. Нека је p произвољна $h-$права. Како је свака $h-$права или део круга нормалног на апсолуту или пречник апсолуте, следи да свака $h-$права садржи бар две разне $h-$тачке. □

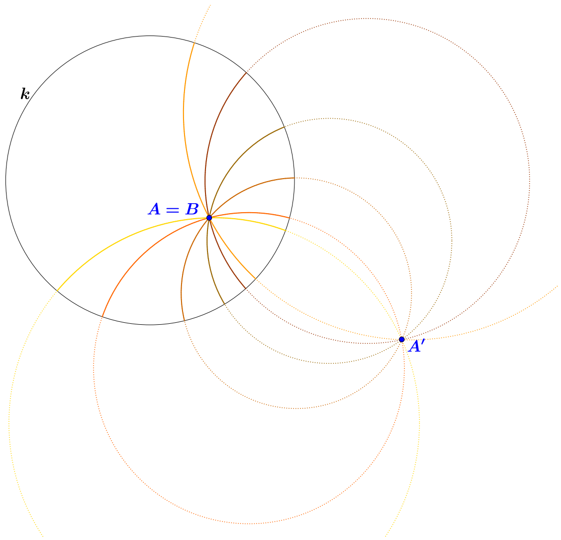
Аксиома 5.4.1.2. *За сваке две $h-$тачке A и B постоји најмање једна $h-$права p која је $h-$инцидентна са A и B.*

Доказ. Претпоставимо да је $A = B$. Ако је и $A = O$ онда је сваки пречник апсолуте $h-$права инцидентна са $h-$тачком A (Слика 60).



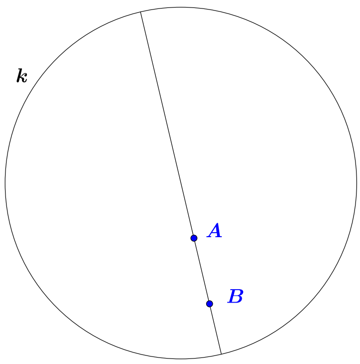
Слика 60: Постојање $h-$праве $h-$инцидентне са $h-$тачкама A и B у случају када је $O = A = B$

Ако је $A \neq O$, да бисмо доказали да постоји најмање једна $h-$права $h-$инцидентна са $h-$тачком A, довољно је да докажемо да постоји круг инцидентан са тачком A и нормалан на круг k. Нека је A' слика тачке A при инверзији у односу на круг k. На основу својстава инверзије следи да је сваки круг (а има их бесконачно) који је инцидентан са тачкама A и A' нормалан на круг k. Нека је l један од тих кругова. Лук круга l који припада хиперболичкој равни је једна $h-$права која је $h-$инцидентна са $h-$тачком A (Слика 61).



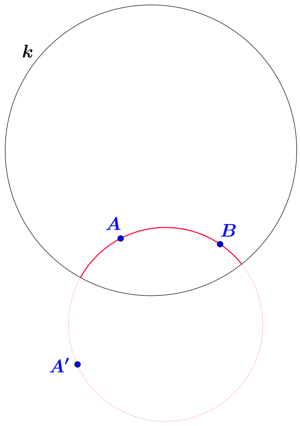
Слика 61: Постојање $h-$праве $h-$инцидентне са $h-$тачкама A и B у случају када је $A = B$ и $A \neq O$

Претпоставимо да је $A \neq B$. Ако дуж AB припада пречнику апсолуте онда је тај пречник $h-$права $h-$инцидентна са $h-$тачком A и $h-$тачком B (Слика 62).



Слика 62: Постојање $h-$праве $h-$инцидентне са $h-$тачкама A и B у случају када је $A \neq B$ и када дуж AB припада пречнику апсолуте

Ако дуж AB не припада пречнику апсолуте да бисмо доказали да постоји најмање једна $h-$права $h-$инцидентна са $h-$тачком A и $h-$тачком B довољно је да докажемо да постоји круг инцидентан са тачкама A и B и нормалан на круг k. Нека је A' слика тачке A при инверзији у односу на круг k. Нека је l круг одређен тачкама A, B и A'. На основу својстава инверзије круг l је нормалан на круг k. Лук круга l који припада хиперболичкој равни је једна $h-$права која је $h-$инцидентна са $h-$тачком A и $h-$тачком B (Слика 63). $\square$



Слика 63: Постојање $h-$праве $h-$инцидентне са $h-$тачкама A и B у случају када је $A \neq B$ и када дуж AB не припада пречнику апсолуте

Аксиома 5.4.1.3. *За сваке две разне $h-$тачке A и B постоји највише једна $h-$права p која је $h-$инцидентна са A и B.*

Доказ. Аксиома 5.4.1.2 утврђује постојање $h-$праве p која је $h-$инцидентна са $h-$тачкама A и B. Да бисмо доказали јединственост $h-$праве p размотримо два случаја. Претпоставимо, прво, да дуж AB припада пречнику апсолуте. У том случају $h-$права p је тај пречник и јединствено је одређена. Претпоставимо сада да дуж AB не припада пречнику апсолуте. Тада је $h-$права p лук круга l који је инцидентан са тачкама A и B и нормалан на круг k. На основу својстава инверзије круг l инцидентан је и са сликом тачке A при инверзији у односу на круг k. Односно, круг l је инцидентан са три различите тачке, па је самим тим и јединствен. $\square$

Аксиома 5.4.1.4. *Постоје три $h-$неколинеарне $h-$тачке A, B и C.*

Доказ. Нека су A и B две различите $h-$тачке. Тада на основу претходних аксиома постоји јединствена $h-$права која је $h-$инцидентна са A и B. Та права је или пречник апсолуте или лук круга нормалног на апсолуту. Свака тачка хиперболичке равни која не припада том пречнику (односно луку) није $h-$колинеарна са $h-$ тачкама A и B. $\square$

5.4.2 Аксиоме распореда

Аксиома 5.4.2.1. *Ако је $\mathcal{B}_h(A, B, C)$, онда су A, B и C три разне $h-$колинеарне $h-$тачке.*

Доказ. Нека су A, B и C три $h-$тачке за које важи $\mathcal{B}_h(A, B, C)$. На основу дефиниције релације $h-$између A, B и C су три разне $h-$тачке. Такође, на основу дефиниције релације $h-$између, $h-$тачка B је $h-$инцидентна са $h-$дужи AC, па су $h-$тачке A, B и C $h-$колинеарне. $\square$

Аксиома 5.4.2.2. *Ако је* $\mathcal{B}_h(A,B,C)$*, онда је* $\mathcal{B}_h(C,B,A)$.

Доказ. Нека су A, B и C три $h-$тачке за које важи $\mathcal{B}_h(A,B,C)$. Како је $\mathcal{B}_h(A,B,C)$, следи A, B и C су три разне $h-$тачке и $h-$тачка B је $h-$инцидентна са $h-$дужи AC. Како је $h-$дуж CA једнака $h-$дужи AC, следи да је $h-$тачка B $h-$инцидентна са $h-$дужи CA. Дакле, важи $\mathcal{B}_h(C,B,A)$. □

Аксиома 5.4.2.3. *Ако је* $\mathcal{B}_h(A,B,C)$*, онда није* $\mathcal{B}_h(A,C,B)$.

Доказ. Нека су A, B и C три $h-$тачке за које важи $\mathcal{B}_h(A,B,C)$. Како је $\mathcal{B}_h(A,B,C)$, $h-$тачка B је $h-$инцидентна са $h-$дужи AC, па $h-$тачка C није $h-$инцидентна са $h-$дужи AB. Дакле, не важи $\mathcal{B}_h(A,C,B)$. □

Аксиома 5.4.2.4. *Ако су* A *и* B *две разне* $h-$*тачке, онда постоји* $h-$*тачка* C *таква да је* $\mathcal{B}_h(A,B,C)$.

Доказ. Нека су A и B две разне $h-$тачке. Нека је p $h-$полуправа одређена $h-$тачкама A и B, при чему је A теме $h-$полуправе p. Обележимо са Z крај те $h-$полуправе. Нека је C средиште лука BZ (односно дужи BZ). За $h-$тачку C важи $\mathcal{B}_h(A,B,C)$. □

Аксиома 5.4.2.5. *Ако су* A*,* B *и* C *три разне* $h-$*колинеарне* $h-$*тачке, онда је или* $\mathcal{B}_h(A,B,C)$ *или* $\mathcal{B}_h(B,C,A)$ *или* $\mathcal{B}_h(C,A,B)$.

Доказ. Нека су A, B и C три разне $h-$колинеарне $h-$тачке. Постоје две могућности:

1) $h-$тачка C је $h-$инцидентна са $h-$дужи BA или

2) $h-$тачка C није $h-$инцидентна са $h-$дужи BA.

Ако важи 1), онда важи $\mathcal{B}_h\,(B,C,A)$. Ако важи 2), онда постоје две могућности:

2.а) $h-$тачка B је $h-$инцидентна са $h-$дужи AC или

2.б) $h-$тачка B није $h-$инцидентна са $h-$дужи AC.

Ако важи 2.а), онда важи $\mathcal{B}_h\,(A,B,C)$. Ако важи 2.б), онда важи $\mathcal{B}_h\,(C,A,B)$. □

Аксиома 5.4.2.6. *(Пашова аксиома)*
Нека су A*,* B *и* C *три* $h-$*неколинеарне* $h-$*тачке и нека је* $h-$*тачка* P *таква да важи* $\mathcal{B}_h\,(B,P,C)$. *Нека је* p *произвољна* $h-$*права која је* $h-$*инцидентна са* $h-$*тачком* P *и није* $h-$*инцидентна са* $h-$*тачком* A*. Тада за* $h-$*праву* p *важи:*

1. *или сече* $h-$*праву* CA *у* $h-$*тачки* Q *таквој да важи* $\mathcal{B}_h(C,Q,A)$*,*

2. *или сече* $h-$*праву* AB *у* $h-$*тачки* R *таквој да важи* $\mathcal{B}_h(A,R,B)$*.*

Доказ. Доказ следи из теореме 5.1.2.10. □

5.4.3 Аксиоме подударности

У посматраном моделу најсложенија група аксиома коју треба проверити јесу аксиоме подударности.

Аксиома 5.4.3.1. *Ако су A, B, C и D $h-$тачке такве да је $(A,B)\cong_h(C,D)$ и $A=B$, онда је $C=D$.*

Доказ. Нека су A, B, C и D $h-$тачке такве да је $(A,B)\cong_h(C,D)$ и $A=B$. Како је $(A,B)\cong_h(C,D)$, то постоји $h-$изометрија φ таква да је $\varphi(A)=C$ и $\varphi(B)=D$. Међутим, како је $A=B$, следи и да је $\varphi(A)=\varphi(B)$, односно $C=D$. □

Аксиома 5.4.3.2. *Ако су A и B било које две $h-$тачке, онда је $(A,B)\cong_h(B,A)$.*

Доказ. Нека су A и B две произвољне $h-$тачке. На основу теореме 5.3.0.12 следи да постоји $h-$изометрија φ таква да је $\varphi(A)=B$ и $\varphi(B)=A$, па важи $(A,B)\cong_h(B,A)$. □

Аксиома 5.4.3.3. *Ако су A,B,C,D,E и F $h-$тачке такве да је $(A,B)\cong_h(C,D)$ и, уз то $(A,B)\cong_h(E,F)$, онда је $(C,D)\cong_h(E,F)$.*

Доказ. Нека су A,B,C,D,E и F $h-$тачке такве да је $(A,B)\cong_h(C,D)$ и $(A,B)\cong_h(E,F)$. Одатле можемо закључити да постоје две $h-$изометрије φ_1 и φ_2 такве да важи:

$$\varphi_1(A)=C \text{ и } \varphi_1(B)=D$$

и

$$\varphi_2(A)=E \text{ и } \varphi_2(B)=F.$$

Како је свака $h-$изометрија бијекција, следи да постоји ${\varphi_1}^{-1}$. Нека је $\varphi=\varphi_2\circ{\varphi_1}^{-1}$. Како је композиција $h-$изометрија, такође $h-$изометрија, следи да је и пресликавање φ $h-$изометрија. При томе је $\varphi(C)=E$ и $\varphi(D)=F$. Дакле, $(C,D)\cong_h(E,F)$. □

Због лакше провере аксиома даљи редослед аксиома подударности се разликује од оног наведеног у делу 4.1.

Аксиома 5.4.3.4. *Ако су A и B две разне $h-$тачке и C теме неке $h-$полуправе, онда на тој $h-$полуправој постоји $h-$тачка D таква да је $(A,B)\cong_h(C,D)$.*

Доказ. Нека су A и B две разне $h-$тачке. Нека је p $h-$полуправа одређена $h-$тачкама A и B, са теменом A. Нека је C теме $h-$полуправе q. На основу теореме 5.3.0.12 постоји $h-$изометрија φ_1 таква да је $\varphi_1(A)=C$. $h-$Изометријом φ_1 се $h-$полуправа p пресликава на $h-$полуправу p', а $h-$тачка B у $h-$тачку B'. Одатле важи да је $(A,B)\cong_h(C,B')$. На основу теореме 5.3.0.14 постоји $h-$изометрија φ_2 којом се $h-$полуправа p' пресликава на $h-$полуправу q. $h-$изометријом φ_2 се $h-$тачка C пресликава у $h-$тачку C, а $h-$тачка B' у неку $h-$тачку D. Дакле, важи $(C,B')\cong_h(C,D)$. Нека је $\varphi=\varphi_2\circ\varphi_1$. Важи да је $\varphi(A)=C$ и $\varphi(B)=D$, односно $(A,B)\cong_h(C,D)$. □

Тачка D чију егзистенцију утврђује претходна аксиома је јединствена.

Аксиома 5.4.3.5. *Ако су A, B и C три $h-$неколинеарне $h-$тачке и A' и B' $h-$тачке руба неке $h-$полуравни, такве да је $(A,B)\cong_h(A',B')$, онда у тој $h-$полуравни постоји јединствена $h-$тачка C' таква да је $(A,C)\cong_h(A',C')$ и $(B,C)\cong_h(B',C')$.*

Доказ. Нека су A, B и C три $h-$неколинеарне $h-$тачке и A' и B' $h-$тачке руба неке $h-$полуравни α, такве да је $(A,B)\cong_h(A',B')$. Тада, на основу дефиниције релације $h-$подударно, следи да постоји $h-$изометрија φ таква да је $\varphi(A)=A'$ и $\varphi(B)=B'$. Ако је $\varphi(C)$ $h-$инцидентна са $h-$полуравни α, онда је тражена $h-$тачка C' једнака $\varphi(C)$. Ако $\varphi(C)$ није $h-$инцидентна са $h-$полуравни α, онда је $h-$тачка C' једнака $\psi(\varphi(C))$, при чему је ψ $h-$рефлексија са основом AB. Дакле, важи да је $(A,C)\cong_h(A',C')$ и $(B,C)\cong_h(B',C')$. Јединственост $h-$тачке C' следи из чињенице да $h-$изометрија чува углове. □

На основу претходне аксиоме следи да за сваке две уређене тројке међусобно различитих $h-$тачака (A,B,C) и (A',B',C') постоји јединствена $h-$изометрија φ таква да је $\varphi(A)=A'$, $\varphi(B)=B'$ и $\varphi(C)=C'$.

Аксиома 5.4.3.6. *Ако су A,B,C и A',B',C' две тројке $h-$неколинеарних $h-$тачака и D и D' $h-$тачке $h-$полуправих BC и $B'C'$, такве да је $(A,B)\cong_h(A',B')$, $(B,C)\cong_h(B',C')$, $(C,A)\cong_h(C',A')$ и $(B,D)\cong_h(B',D')$, онда је и $(A,D)\cong_h(A',D')$.*

Доказ. Нека је φ $h-$изометрија таква да је $\varphi(A)=A'$, $\varphi(B)=B'$ и $\varphi(C)=C'$. Важи $(B,D)\cong_h(B',\varphi(D))$. Како на основу претпоставке $(B,D)\cong_h(B',D')$ и како је $(B,D)\cong_h(B',\varphi(D))$, на основу аксиоме 5.4.3.4 следи да је $\varphi(D)=D'$. Отуда је $(A,D)\cong_h(A',D')$. □

Аксиома 5.4.3.7. *Ако су C и C' $h-$тачке двеју отворених $h-$дужи AB и $A'B'$, такве да је $(A,C)\cong_h(A',C')$ и $(B,C)\cong_h(B',C')$, онда је и $(A,B)\cong_h(A',B')$.*

Доказ. Нека су C и C' $h-$тачке отворених $h-$дужи AB и $A'B'$ такве да је $(A,C)\cong_h(A',C')$ и $(B,C)\cong_h(B',C')$. Нека је φ $h-$изометрија таква да је $\varphi(A)=A'$ и $\varphi(C)=C'$. Тада је $(C',\varphi(B))\cong_h(C,B)$. Како је на основу претпоставке $(C',B')\cong_h(C,B)$ и како је $(C',\varphi(B))\cong_h(C,B)$, на основу аксиоме 5.4.3.4 следи да је $\varphi(B)=B'$. Отуда је $(A,B)\cong_h(A',B')$. □

5.4.4 Аксиоме непрекидности

Аксиома 5.4.4.1. *(Архимед-Еудоксова аксиома)*
Ако су AB и CD две произвољне затворене $h-$дужи, онда на $h-$полуправој AB постоји коначан низ $h-$тачака $A_1,A_2,\ldots,A_n$ таквих да је $\mathcal{B}_h(A,A_1,A_2,\ldots,A_n)$, при чему је свака од затворених $h-$дужи $AA_1,A_1A_2,\ldots,A_{n-1}A_n$ $h-$подударна затвореној $h-$дужи CD и важи $\mathcal{B}_h(A,B,A_n)$.

Аксиома 5.4.4.2. *(Канторова аксиома)*
Ако је $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n, \ldots$ низ затворених $h-$дужи неке $h-$праве, таквих да свака од тих затворених $h-$дужи садржи следећу, онда постоји $h-$тачка X која припада свакој затвореној $h-$дужи тог низа.

Како је свака $h-$дуж еуклидска дуж или лук еуклидског круга, из аксиома непрекидности еуклидске геометрије може се извести следећа теорема (за детаље видети [3]):

Теорема 5.4.4.1. *(Дедекиндова теорема)*
Ако су све $h-$тачке неке $h-$дужи AB подељене у два скупа $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, таква да:

1) *свака $h-$тачка $h-$дужи AB припада само једном од скупова $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$,*

2) *скупови $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ су непразни,*

3) *између било које две $h-$тачке једног од тих скупова нема $h-$тачака које припадају другом скупу,*

тада постоји јединствена $h-$тачка X на $h-$дужи AB таква да су све остале $h-$тачке скупа $\mathcal{M}$ са једне стране те $h-$тачке, а све остале $h-$тачке скупа $\mathcal{N}$ са друге стране.

Како су Архимед - Еудоксова и Канторова аксиома последице Дедекиндове теореме, следи да су задовољене и обе аксиоме непрекидности.

Овим је доказано да је Поенкареов диск модел један модел апсолутне геометрије равни. Како бисмо доказали да је и модел хиперболичке геометрије равни потребно је још доказати одговарајућу аксиому паралелности, прецизније аксиому Лобачевског.

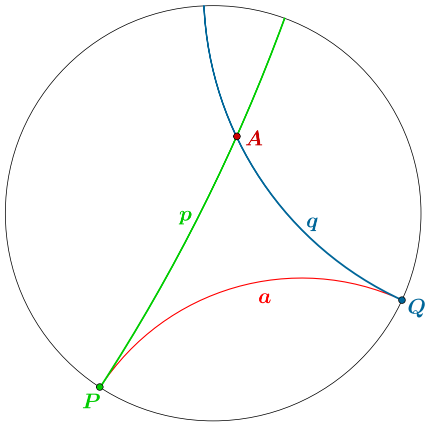
5.4.5 Аксиома паралелности

Аксиома 5.4.5.1. *(Аксиома Лобачевског)*
Нека је дата $h-$права a и $h-$тачка A која није $h-$инцидентна са $h-$правом a. Тада постоје бар две $h-$праве p и q $h-$инцидентне са $h-$тачком A и дисјунктне са $h-$правом a.

Доказ. Нека су P и Q пресечне тачке $h-$праве a и апсолуте. На основу примера 5.1.2.3 постоји јединствени круг (или права) k_1 који садржи тачке A и P и нормалан је на апсолуту. Аналогно, постоји круг (или права) k_2 која садржи тачке A и Q и нормалан је на апсолуту. Тада је $h-$права p пресек круга (или праве) k_1 са хиперболичком равни, а $h-$права q је пресек круга (или праве) k_2 са хиперболичком равни (Слика 64). $\square$

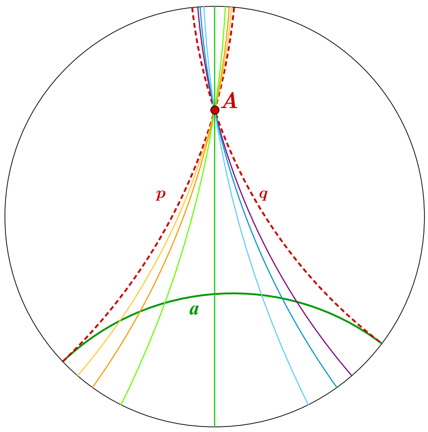
За $h-$праве p и q, уведене у претходном доказу, кажемо да су ***паралелне*** са $h-$правом a.

За све остале $h-$праве које су $h-$инцидентне са $h-$тачком A важи да припадају једном од два пара унакрсних $h-$углова које одређују $h-$праве p и q. При томе



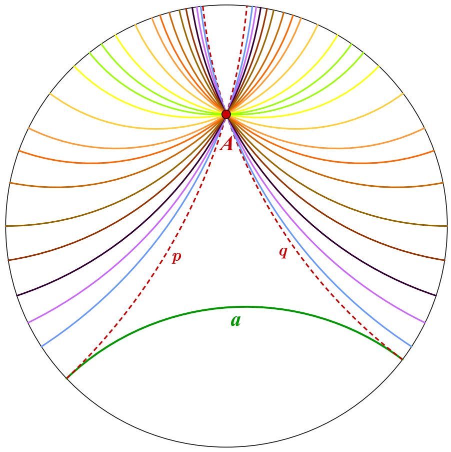
Слика 64: Графички приказ аксиоме Лобачевског

$h-$праве које припадају једном пару унакрсних $h-$углова секу $h-$праву a (Слика 65), а $h-$праве које припадају другом пару унакрсних $h-$углова су дисјунктне са $h-$правом a. За те дисјунктне праве кажемо да су ***хиперпаралелне*** са $h-$правом a (Слика 66).



Слика 65: $h-$праве које су $h-$инцидентне са A и секу $h-$праву a

Приметимо да за дату $h-$праву a и $h-$тачку A која није $h-$инцидентна са $h-$правом a постоји бесконачно много $h-$правих $h-$инцидентних са $h-$тачком A и дисјунктних са $h-$правом a.



Слика 66: $h-$праве које су $h-$инцидентне са A и дисјунктне са $h-$правом a, тј. $h-$праве које су $h-$инцидентне са A и хиперпаралелне са $h-$правом a

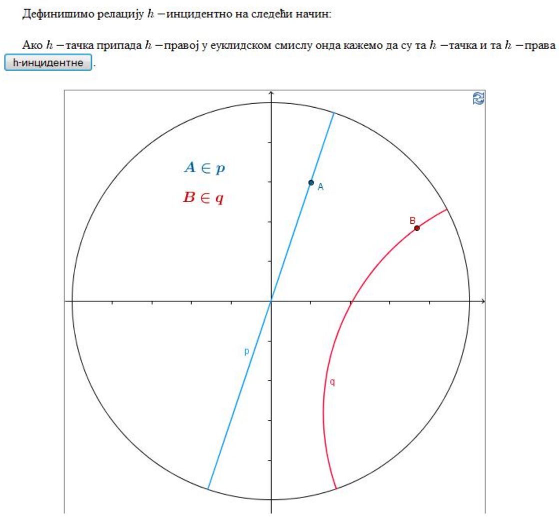
5.4.6 Визуелни приказ провере аксиома на Поенкареовом диск моделу

За сваку аксиому су помоћу програмског пакета GeoGebra направљени интерактивни аплети уграђени у веб странице, помоћу којих се даје визуелно објашњење исказа аксиома. Следи опис као и упутство за коришћење тих аплета.

Аксиоме инциденције

Аксиоме инциденције прати пет аплета.

На првом аплету је дат визуелни приказ релације $h-$инцидентно (Слика 67). Кликом на дугме ,,$h-$инцидентне" корисник добија приказ $h-$тачке A која је $h-$инцидентна са $h-$правом p, као и $h-$тачку B која је $h-$инцидентна са $h-$правом q. Дате $h-$тачке A и B, као и $h-$праве p и q су фиксиране.

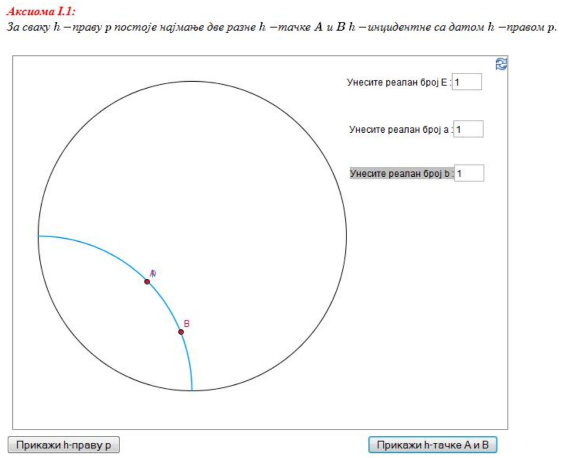


Слика 67: Визуелни приказ релације $h-$инцидентно

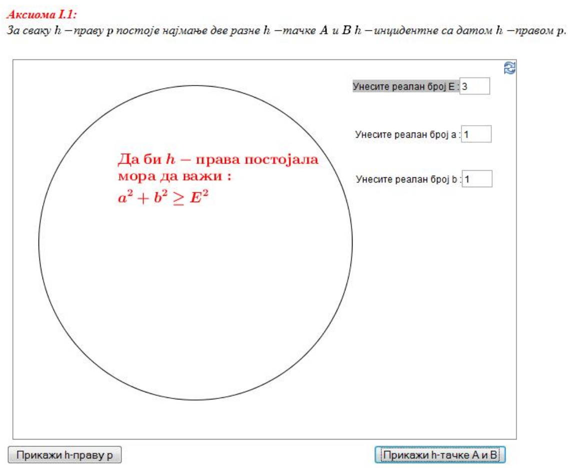
На другом аплету је дат визуелни приказ прве аксиоме инциденције (Слика 68). Корисник треба да унесе три реална броја E, a и b. Уколико су унети параметри такви да задовољавају услов $a^2 + b^2 > E^2$, кликом на дугме ,,Прикажи $h-$праву p" корисник добија визуелни приказ $h-$праве p чија је једначина

$$Ex^2 + Ey^2 + 2ax + 2by + E = 0.$$

Даље, кликом на дугме ,,Прикажи $h-$тачке A и B" корисник добија визуелни приказ $h-$тачака A и B које су $h-$инцидентне са изабраном $h-$правом p. Тако добијене $h-$тачке A и B и $h-$права p су фиксиране. Ако корисник унесе параметре E, a и b такве да не важи неједнакост $a^2 + b^2 > E^2$, на аплету се појављује одговарајуће обавештење (Слика 69). Како би могао да види визуелни приказ аксиоме, корисник мора да унесе нове параметре.

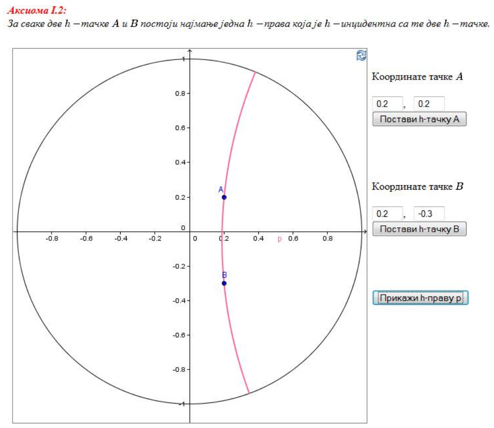


Слика 68: Визуелни приказ прве аксиоме инциденције, при чему је корисник унео одговарајуће параметре за које постоји $h-$права p

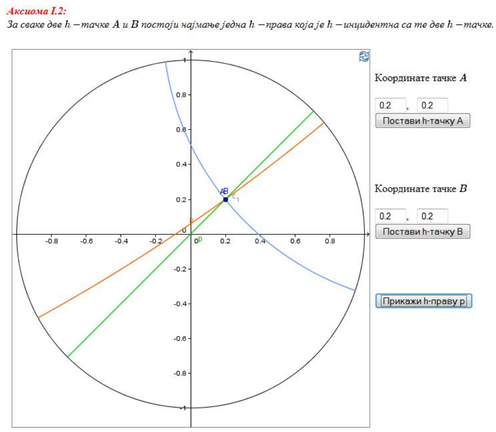


Слика 69: Визуелни приказ прве аксиоме инциденције, при чему корисник није унео одговарајуће параметре

На трећем аплету је дат визуелни приказ друге аксиоме инциденције. Корисник треба да унесе координате $h-$тачке A и координате $h-$тачке B. Уколико су координате $h-$тачака A и B такве да су тачке A и B у унутрашњости апсолуте, кликом на дугме ,,Прикажи $h-$праву p" корисник добија визуелни приказ $h-$праве p која је $h-$инцидентна са датим $h-$тачкама. Како корисник уноси координате тачака може се десити да корисник унесе координате тако да су $h-$тачке A и B различите (Слика 70). Али, може се десити и да корисник унесе две исте тачке, тј. да унесе координате тако да су $h-$тачке A и B једнаке (Слика 71). Тада се на аплету приказују три $h-$праве које су $h-$инцидентне са $h-$тачком A. Тако добијене $h-$тачке A и B



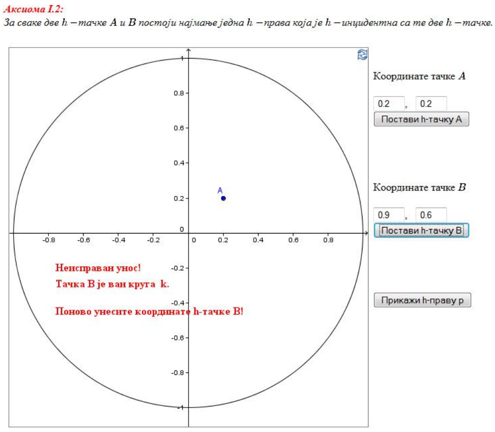
Слика 70: Визуелни приказ друге аксиоме инциденције, при чему је корисник унео координате тако да су A и B две различите $h-$тачке



Слика 71: Визуелни приказ друге аксиоме инциденције, при чему је корисник унео координате тако да су $h-$тачке A и B једнаке

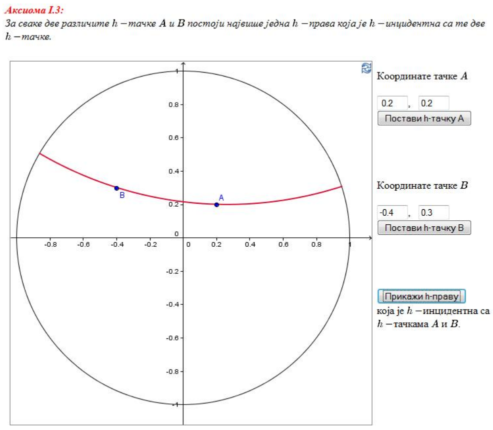
нису фиксиране, за разлику од $h-$праве p. Кориснику може померати A и B и на тај начин видети који све случајеви постоје. Уколико, померањем једне од тачака (нпр. тачке A), корисник изађе из унутрашњости апсолуте добија обавештење да A није више $h-$тачка и да поново треба унети координате тачке A или да помоћу миша врати тачку у унутрашњост апсолуте.

Ако корисник унесе координате тако да A и B нису у унутрашњости апсолуте на аплету се приказује одговарајуће обавештење (Слика 72).



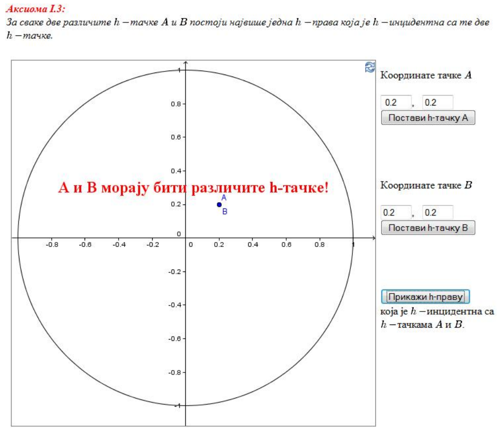
Слика 72: Визуелни приказ друге аксиоме инциденције, при чему је корисник унео координате тако да A и B нису $h-$тачке

На четвртом аплету је дат визуелни приказ треће аксиоме инциденције. Корисник треба да унесе координате две различите $h-$тачке A и B. Ако су координате тачака A и B такве да су A и B две различите $h-$тачке, кликом на дугме ,,Прикажи $h-$праву" корисник добија визуелни приказ $h-$праве која је $h-$инцидентна са датим $h-$тачкама (Слика 73).



Слика 73: Визуелни приказ треће аксиоме инциденције, при чему су $h-$тачке A и B различите

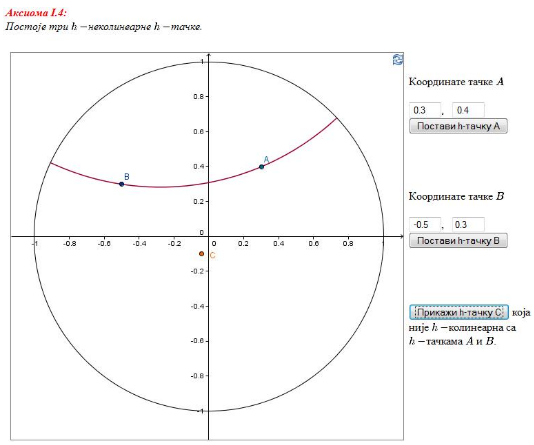
Ако корисник унесе координате тако да A и B нису различите појављује му се обавештење да A и B морају бити различите (Слика 74).



Слика 74: Визуелни приказ треће аксиоме инциденције, при чему $h-$тачке A и B нису различите

Као и у претходном аплету, кориснику је дозвољено померање тачака A и B. Ако померањем или уношењем погрешних координата нека тачка изађе у спољашњу област апсолуте, прикаже се одговарајуће обавештење.

На петом аплету је дат визуелни приказ четврте аксиоме инциденције. Корисник треба да унесе координате две различите $h-$тачке A и B. Уколико је унос исправан кликом на дугме „Прикажи $h-$тачку C" корисник добија визуелни приказ $h-$тачке C такве да су A, B и C три $h-$неколинеарне $h-$тачке (Слика 75).



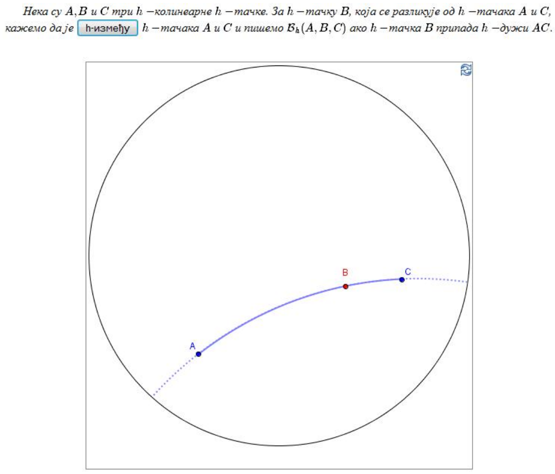
Слика 75: Визуелни приказ четврте аксиоме инциденције

Кориснику је омогућено померање тачака A и B, док је тачка C фиксирана. Уколико је унос такав да A и B нису различите, на аплету се појављује одговарајуће обавештење да A и B морају бити различите $h-$тачке. Ако је корисник унео неодговарајуће координате барем једне тачке или је померањем напустио унутрашњу област апсолуте, појављује се обавештење да дата тачка више није $h-$тачка.

Аксиоме распореда

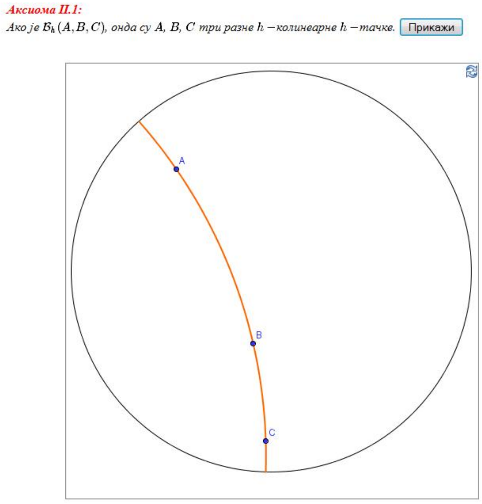
Аксиоме распореда прати седам аплета.

На првом аплету је дат визуелни приказ релације $h-$између. Кликом на дугме ,,$h-$између" корисник добија приказ три тачке A, B и C за које важи $\mathcal{B}_h(A, B, C)$ (Слика 76). Све три тачке су фиксиране.



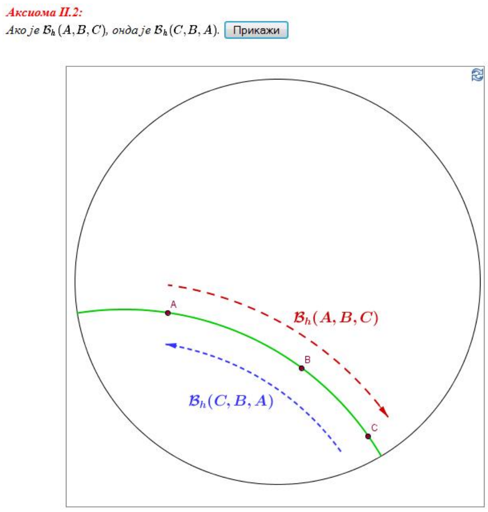
Слика 76: Визуелни приказ релације $h-$између

На другом аплету дат је визуелни приказ прве аксиоме распореда. Кликом на дугме ,,Прикажи" корисник добија одговарајући приказ (Слика 77). Сви елементи на аплету су фиксирани.



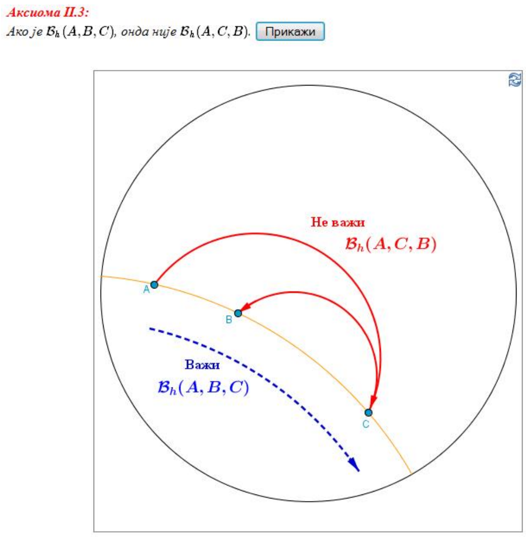
Слика 77: Визуелни приказ прве аксиоме распореда

На трећем аплету је визуелни приказ друге аксиоме распореда. Кликом на дугме ,,Прикажи" корисник добија одговарајући приказ на аплету (Слика 78). Сви елементи на аплету су фиксирани.



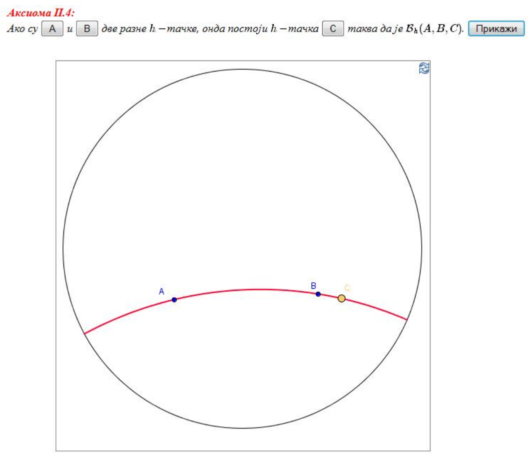
Слика 78: Визуелни приказ друге аксиоме распореда

На четвртом аплету је визуелни приказ треће аксиоме распореда. Кликом на дугме ,,Прикажи" корисник добија одговарајући приказ на аплету (Слика 79). Сви елементи на аплету су фиксирани.



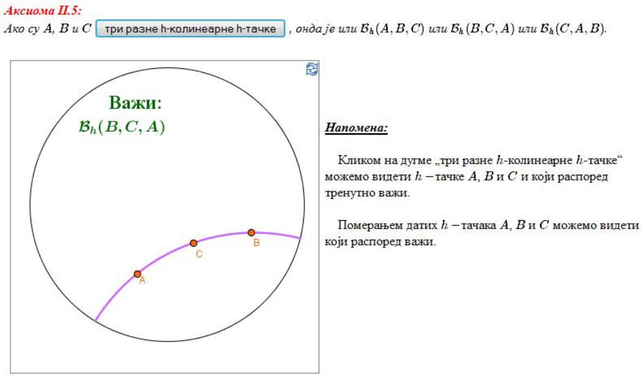
Слика 79: Визуелни приказ треће аксиоме распореда

На петом аплету је визуелни приказ четврте аксиоме распореда. Како корисник чита исказ аксиоме, тако наилази на ознаке геометријских објеката на које може да кликне и да му се ти геометријекси објекти појаве на аплету. Тако, кликом на дугме ,,A" на аплету се појављује тачка A. Аналогно је за тачке B и C. На крају притиском на дугме ,,Прикажи", се приказује одговарајућа $h-$права која спаја дате тачке. Сви елементи су фиксирани и не могу се померати (Слика 80).



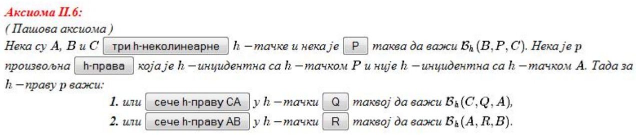
Слика 80: Визуелни приказ четврте аксиоме распореда

На шестом аплету дат је визуелни приказ пете аксиоме распореда. Кликом на дугме ,,три разне $h-$колинеарне $h-$тачке" на аплету се појављују, као што на самом дугмету пише, три разне $h-$колинеарне $h-$тачке. Кориснику је дозвољено померање сваке од три тачке и у зависности од распореда тачака на аплету се појављује обавештење који распоред тачака важи (Слика 81). Ако се, приликом померања тачака, неке две тачке поклопе појављује се обавештење да тачке морају бири различите.



Слика 81: Визуелни приказ пете аксиоме распореда

На седмом аплету дат је визуелни приказ шесте аксиоме из ове групе (Пашове аксиоме). Како корисник чита исказ аксиоме, кликом на одговарајуће дугме појављује се одговарајући објекат или објетки на аплету (Слика 82).



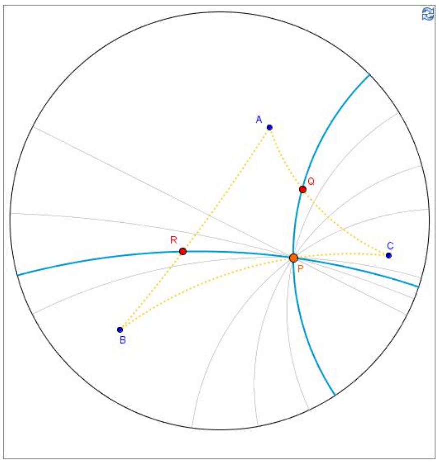
Слика 82: Исказ Пашове аксиоме

На крају пошто прође кроз цео исказ аксиоме појављују му се сви појмови (Слика 83). Сви објекти који се појављују у овом визуелном приказу су фиксирани.

Аксиоме подударности

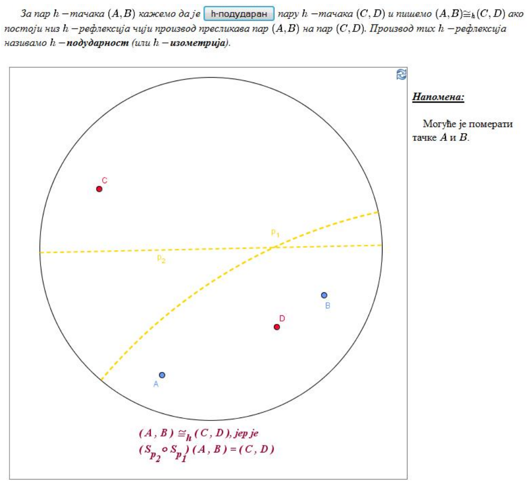
Аксиоме подударности праћене су са осам аплета.

Први аплет представља визуелни приказ релације $h-$подударно. Кликом на дугме ,,$h-$подударан" на аплету се појављују тачке A, B, C и D које испуњавају услов да је пар $h-$тачака (A, B) $h-$подударан пару $h-$тачака (C, D) (Слика 84). Кориснику је још омогућено и да помера тачке A и B и да њиховим померањем види како изгледа одговарајући $h-$подударан пар $h-$тачака C и D. Наравно, ако померањем било која



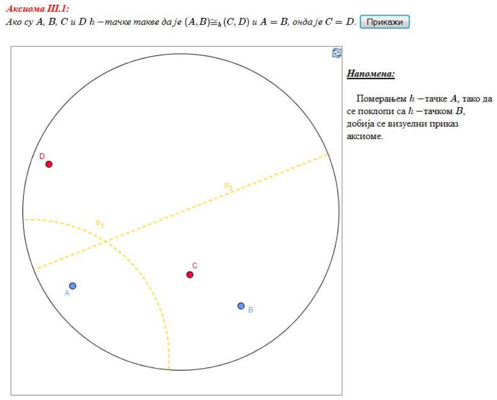
Слика 83: Визуелни приказ Пашове аксиоме

од тачака више не припада унутрашњој области апсолуте појављује се одговарајуће обавештење.



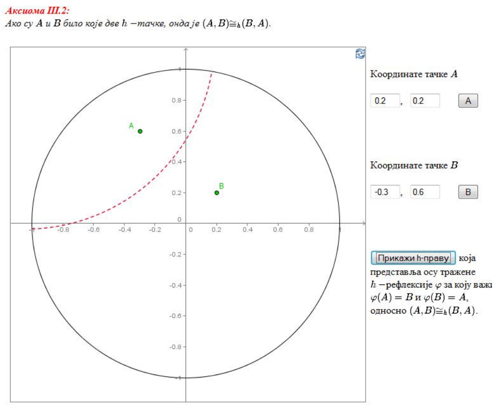
Слика 84: Визуелни приказ релације $h-$подударно

Други аплет представља визуелни приказ прве аксиоме подударности. Кликом на дугме ,,Прикажи" корисник добија одговарајући визуелни приказ. Овај аплет је скоро исти као и претходни, с тим што у овом аплету померањем тачака A и B тако да се поклопе корисник може приметити да ће се онда и одговарајуће тачке C и D поклопити (Слика 85).



Слика 85: Визуелни приказ прве аксиоме подударности

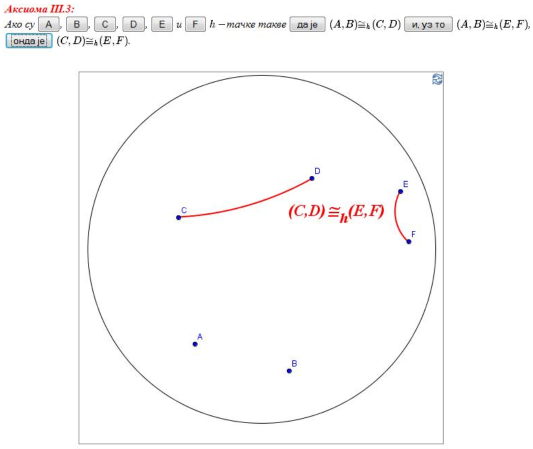
Трећи аплет представља визуелни приказ друге аксиоме подударности. У овом аплету корсник треба да унесе координате тачака A и B. Кликом на одговарајуће дугме „A" (односно „B") добија визуелни приказ $h-$тачке A (односно B). Даље, кликом на дугме „Прикажи $h-$праву" на аплету се приказује $h-$права која представља осу $h-$рефлексије φ за коју важи $\varphi(A) = B$ и $\varphi(B) = A$ (Слика 86). Уколико су A и B једна иста тачка, приказује се више од једне $h-$праве. Даље, уколико корисник погрешно унесе координате тачке A или B појављује му се одговарајуће обавештење.



Слика 86: Визуелни приказ друге аксиоме подударности

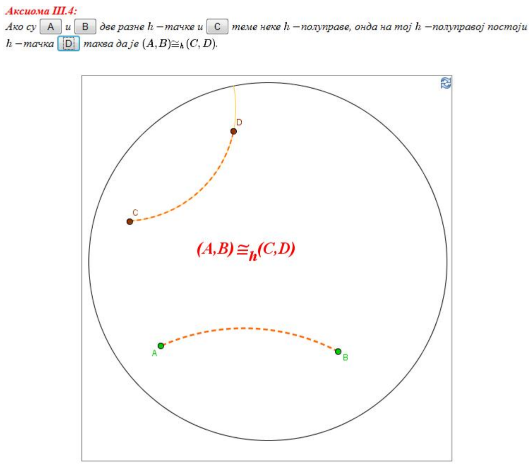
Четврти аплет представља визуелни приказ треће аксиоме подударности. За сваки објекат или релацију у исказу аксиоме постоји дугме које се односи на тај појам. Кликом на одговарајуће дугме, корисник добија визуелни приказ датог објекта или релације (Слика 87). Сви елементи који се појављују у овом аплету су фиксирани.

Пети аплет представља визуелни приказ четврте аксиоме подударности. Овај аплет функционише слично као и аплет који одговара трећој аксиоми подударности.



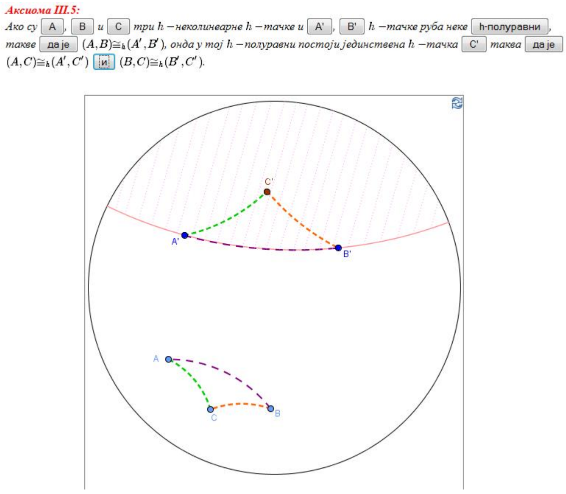
Слика 87: Визуелни приказ треће аксиоме подударности

Корисник кликом на дугме добија одговарајући визуелни приказ датог објекта или релације (Слика 88). Као и код претходног, и код овог аплета су сви елементи фиксирани.

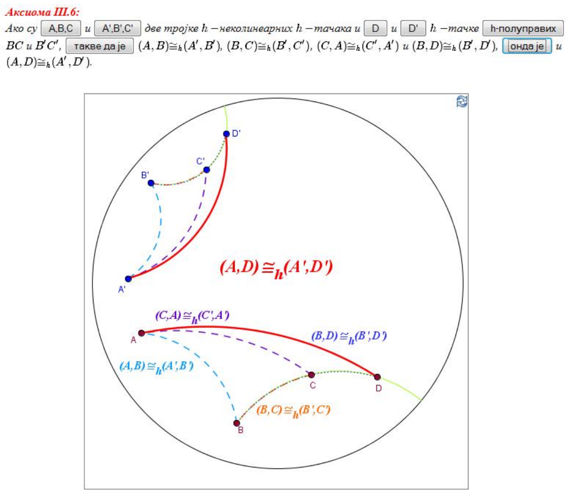


Слика 88: Визуелни приказ четврте аксиоме подударности

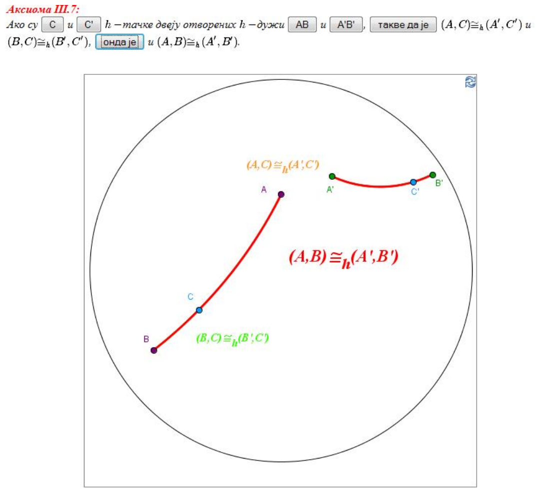
Шести аплет представља визуелизацију пете аксиоме подударности (Слика 89), седми визуелизацију шесте аксиоме (Слика 90), а осми аплет представља визуелизацију седме аксиоме подударности (Слика 91). Ови аплети функционишу као и претходни аплети који представљају визуелизацију треће и четврте аксиоме.



Слика 89: Визуелни приказ пете аксиоме подударности



Слика 90: Визуелни приказ шесте аксиоме подударности

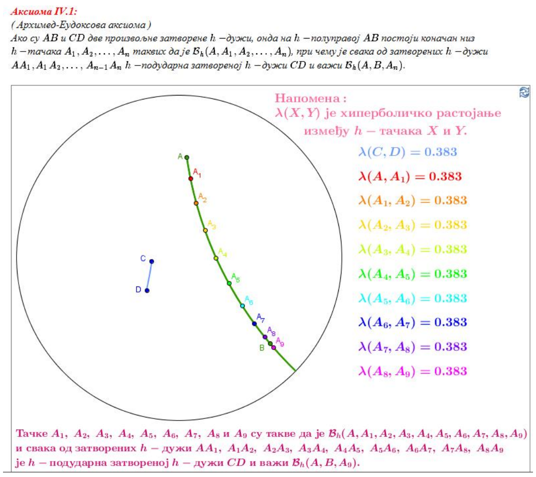


Слика 91: Визуелни приказ седме аксиоме подударности

Аксиоме непрекиднсоти

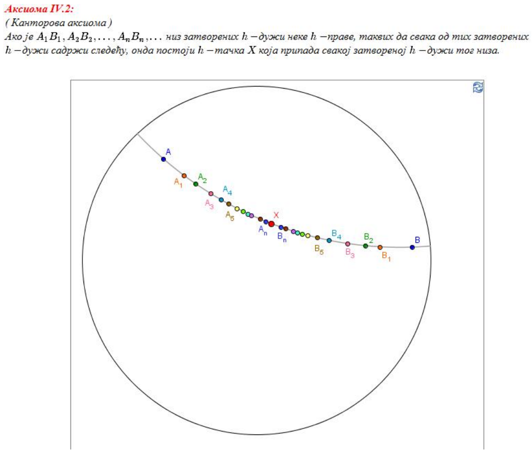
Аксиоме непрекидности праћене су са два аплета.

Први аплет представља визуелни приказ прве аксиоме непрекидности. Кликом на одговарајуће дугме на аплету (play) корисник може видети одговарајући низ тачака које испуњавају услове аксиоме (Слика 92). Поред тога, како важи $(X_1, Y_1)\cong_h(X_2, Y_2)$ ако и само ако је $\lambda(X_1, Y_1) = \lambda(X_2, Y_2)$, аплет израчунава хиперболичка растојања између узастопних $h-$тачака тог низа.



Слика 92: Визуелни приказ прве аксиоме непрекидности

Други аплет представља визуелизацију друге аксиоме непрекидности. Кликом на одговарајуће дугме на аплету (play) корисник може видети одговарајући низ тачака које испуњавају услове аксиоме (Слика 93).

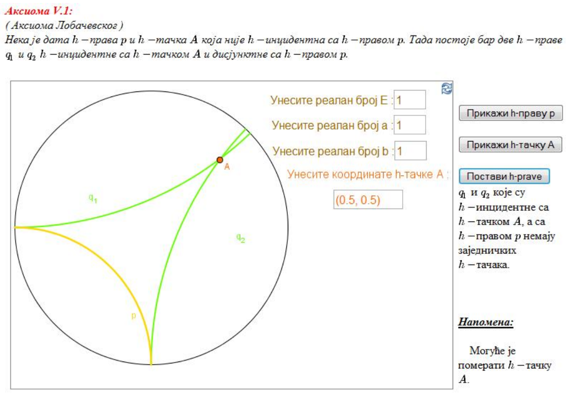


Слика 93: Визуелни приказ друге аксиоме непрекидности

Аксиома паралелности

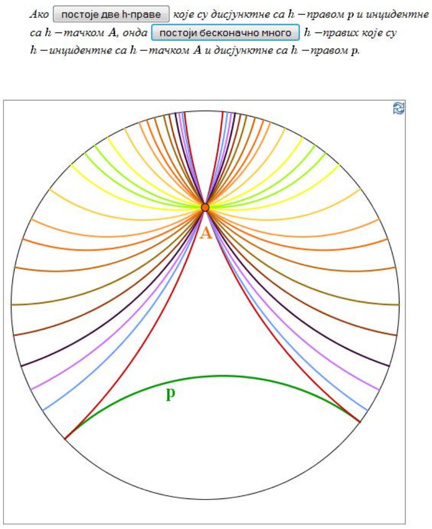
Аксиома паралелности приказана је са два аплета.

Први аплет представља визуелни приказ саме аксиоме паралелности. Корисник уноси одговарајуће параметре за $h-$праву p и координате за $h-$тачку A и кликом на дугме ,,Прикажи $h-$праве" добија приказ две $h-$праве q_1 и q_2 које су паралелне са $h-$правом p и $h-$инцидентне са $h-$тачком A (Слика 94). У овом аплету кориснику је дозвољено померање тачке A и на тај начин му је омогућено да види које ће се $h-$праве појавити у зависности од положаја дате $h-$тачке.



Слика 94: Визуелни приказ аксиоме паралелности

Други аплет се односи на визуелизацију закључка у вези појма паралелности у хиперболичкој геометрији равни (Слика 95). Кликом на одговарајуће дугме на аплету се појављују одговарајући појмови. Сви објекти на овом аплету су фиксирани.



Слика 95: Визуелни приказ постојања бесконачно много $h-$правих које су инцидентне са датом $h-$тачком A и дисјунктне са датом $h-$правом p

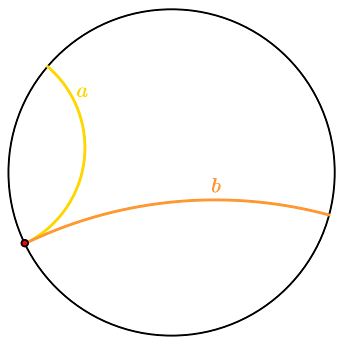
6 Неки појмови и тврђења апсолутне и хиперболичке геометрије равни приказани у Поенкареовом диск моделу

У овом поглављу увешћемо још неке појмове апсолутне и хиперболичке геометрије равни и навешћемо нека тврђења везана за уведене појмове. Све појмове уводимо у Поенкареовом диск моделу. Такође, сва тврђења наводимо у Поенкареовом диск моделу.

6.1 Паралелност и хиперпаралелност у Поенкареовом диск моделу

У еуклидској геометрији равни за две дисјунктне праве кажемо да су паралелне. У хиперболичкој геометрији равни две дисјунктне праве могу бити паралелне и хиперпаралелне. Појмове паралелности и хиперпаралелности правих у хиперболичкој геометрији равни увешћемо на Поенкареовом диск моделу.

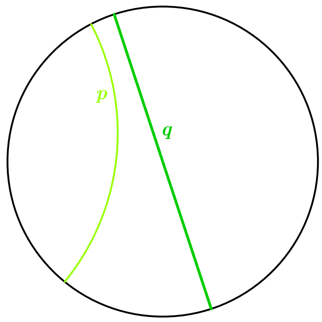
Дефиниција 6.1.0.1. *Две $h-$праве су међусобно* ***паралелне*** *ако имају један заједнички крај (Слика 96).*



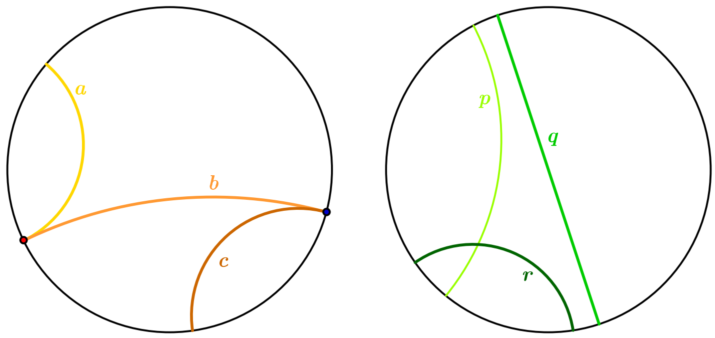
Слика 96: Пример две паралелне $h-$праве

Дефиниција 6.1.0.2. *Две $h-$праве су међусобно* ***хиперпаралелне*** *ако су дисјунктне и немају заједнички крај (Слика 97).*

Приметимо да релације паралелности и хиперпаралелности правих у хиперболичкој геометрији равни нису транзитивне. На слици 98 (лево) можемо видети да је $h-$права a паралелна са $h-$правом b и да је $h-$права b паралелна са $h-$правом c, али $h-$права a није паралелна са $h-$правом c (немају заједнички крај). Аналогно, на слици 98 (десно) можемо видети да је $h-$права p хиперпаралелна са $h-$правом q и да је $h-$права q хиперпаралелна са $h-$правом r, али $h-$права p није хиперпаралелна са $h-$правом r.



Слика 97: Пример две хиперпаралелне $h-$праве



Слика 98: Пример да паралелност и хиперпаралелност правих у хиперболичкој геометрији равни нису транзитивне релације

Теорема 6.1.0.1. *За две међусобно хиперпаралелне праве постоји јединствена права нормална на обе.*

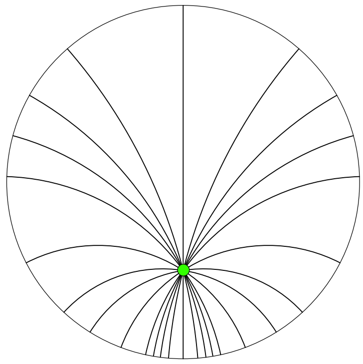
Доказ. Нека су p и q две хиперпаралелне $h-$праве. Обележимо са p' и q' одговарајуће еуклидске кругове (односно праве) које садрже $h-$праве p и q. На основу теореме 5.1.1.7 постоји јединствен еуклидски круг (или права) n нормалан на p', q' и апсолуту. Пресек круга n и хиперболичке равни јесте тражена нормала. $\square$

6.2 Праменови правих и епицикли у Поенкареовом диск моделу

У овом делу уводимо појмове прамен правих и епицикл.

Дефиниција 6.2.0.3. ***Елиптички прамен*** $h-$***правих*** *је скуп свих* $h-$*правих које садрже неку* $h-$*тачку (Слика 99).*

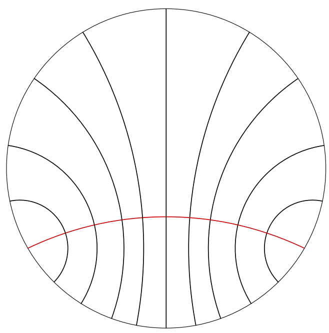
Како кругови који садрже неку $h-$тачку садрже и њој инверзну тачку у односу на



Слика 99: Пример елиптичког прамена $h-$правих

апсолуту (јер су нормални на апсолуту), све $h-$праве елиптичког прамена припадају круговима елиптичког прамена кругова.

Дефиниција 6.2.0.4. ***Хиперболички прамен*** $h-$***правих*** *је скуп свих* $h-$*правих које немају ни заједничку* $h-$*тачку ни заједнички крај (Слика 100).*



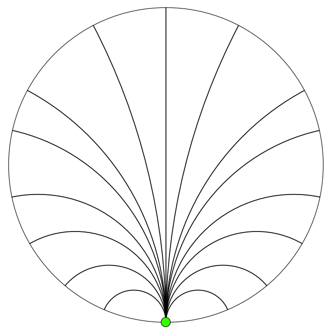
Слика 100: Пример хиперболичког прамена $h-$правих

Све $h-$праве хиперболичког прамена $h-$правих припадају хиперболичком прамену кругова.

Дефиниција 6.2.0.5. ***Параболички прамен*** $h-$***правих*** *је скуп свих* $h-$*правих које имају један заједнички крај (Слика 101).*

Центри кругова који садрже $h-$праве параболичког прамена $h-$правих припадају тангенти на апсолуту у заједничком крају датих $h-$правих. Отуда све $h-$праве параболичког прамена припадају круговима параболичког прамена кругова.

Нека је $\mathfrak{X}$ прамен $h-$правих (елиптички, параболички или хиперболички) и нека је X произвољна $h-$тачка која не припада свим елементима прамена $\mathfrak{X}$. $h-$***Епицикл***



Слика 101: Пример параболичког прамена $h-$правих

одређен праменом $\mathfrak{X}$ и тачком X је скуп $\{\mathcal{S}_x(X) : x \in \mathfrak{X}\}$[15], који обележавамо са $\mathcal{E}(\mathfrak{X}, X)$.

Теорема 6.2.0.2. *Сваки $h-$епицикл у Поенкареовом диск моделу је еуклидски круг или део еуклидског круга.*

Доказ. Нека је $\mathfrak{X}$ прамен $h-$правих у Поенкареовом диск моделу. Прамен $\mathfrak{X}$ је одређен праменом еуклидских кругова. Нека је X произвољна $h-$тачка која не припада свим елементима $h-$епицикла $\mathfrak{X}$ и нека су a и b две $h-$праве прамена $\mathfrak{X}$, које не садрже $h-$тачку X. Обележимо са a', односно b' еуклидски круг који садржи $h-$праву a, односно b. Слику тачке X инверзијом у односу на круг a' означимо са X_a, а слику тачке X инверзијом у односу на круг b' означимо са X_b. Круг l одређен тачкама X, X_a и X_b је нормалан на кругове a' и b'. Дакле, круг l је нормалан на све $h-$праве прамена $\mathfrak{X}$. Даље, нека је c произвољна $h-$права прамена $\mathfrak{X}$. Обележимо са c' еуклидски круг који садржи $h-$праву c. Важи да је круг l нормалан на круг c'. Слику тачке X инверзијом у односу на круг c' означимо са X_c. Како X припада кругу l и како је круг l нормалан на круг c', следи да круг l садржи и тачку X_c. $\square$

У зависности од врсте прамена $h-$правих разликујемо три врсте $h-$епицикала.

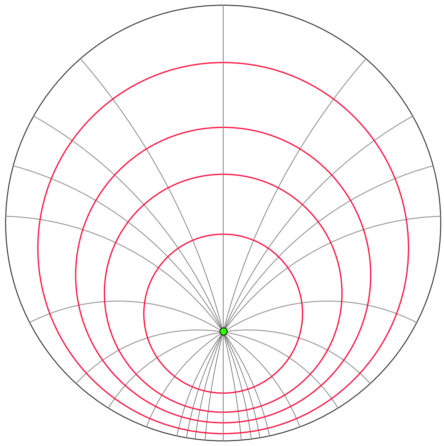
Нека је $\mathfrak{X}$ елиптички прамен $h-$правих и нека је S заједничка $h-$тачка $h-$правих које припадају прамену $\mathfrak{X}$. Прамен $\mathfrak{X}$ тада обележавамо и са $\mathfrak{X}_S$. $h-$Епицикл $\mathcal{E}(\mathfrak{X}_S, X)$ називамо $h-$***круг***, $h-$тачку S $h-$***центар***, а $h-$дуж SX $h-$***полупречник*** тог $h-$круга.

Може се показати да је $h-$круг скуп свих $h-$тачака Y за које важи $SX \cong_h SY$.

У Поенкареовом диск моделу $h-$круг је еуклидски круг (Слика 102). Напоменимо још и да је $h-$центар $h-$круга једнак еуклидском центру одговарајућег еуклидског круга једино у случају када је то центар апсолуте.

Нека је $\mathfrak{X}$ хиперболички прамен $h-$правих и нека је s заједничка нормала $h-$правих које припадају прамену $\mathfrak{X}$. Прамен $\mathfrak{X}$ тада обележавамо и са $\mathfrak{X}_s$. $h-$Епицикл $\mathcal{E}(\mathfrak{X}_s, X)$

[15]Са $\mathcal{S}_x$ обележавамо $h-$рефлексију хиперболичке равни чија је оса $h-$права x (видети и стр. 45).

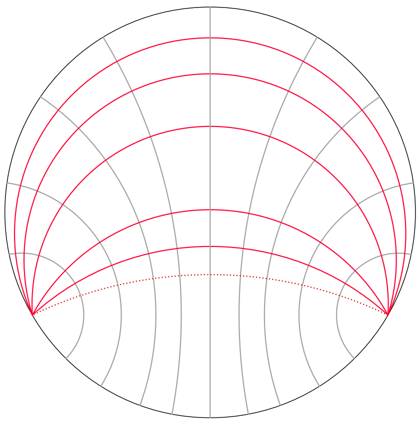


Слика 102: $h-$кругови

називамо $h-$***еквидистанта***, а $h-$праву s ***основица*** $h-$еквидистанте. Означимо са X' подножје нормале из $h-$тачке X на $h-$правој s[16]. $h-$Дуж XX' називамо ***висина*** $h-$еквидистанте.

Може се показати да је $h-$еквидистанта скуп свих $h-$тачака Y за које важи $XX' \cong_h YY'$, при чему је Y' подножје нормале из $h-$тачке Y на $h-$правој s.

У Поенкареовом диск моделу $h-$еквидистанта је лук еуклидског круга (Слика 103). Напоменимо још и да је основица $h-$еквидистанте нормална на апсолуту.

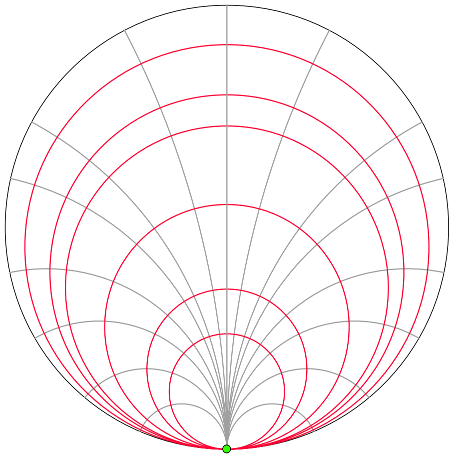


Слика 103: $h-$еквидистанте

Нека је $\mathfrak{X}$ параболички прамен $h-$правих и нека је P заједнички крај $h-$правих које припадају прамену $\mathfrak{X}$. Прамен $\mathfrak{X}$ тада обележавамо и са $\mathfrak{X}_P$. $h-$Епицикл $\mathcal{E}(\mathfrak{X}_P, X)$ називамо $h-$***орицикл***.

[16]Конструкција нормале из дате $h-$тачке на дату $h-$праву приказана је у задатку 7.0.0.2

У Поенкареовом диск моделу $h-$орицикл је еуклидски круг без једне тачке, заједничког краја $h-$правих одговарајућег прамена (Слика 104).

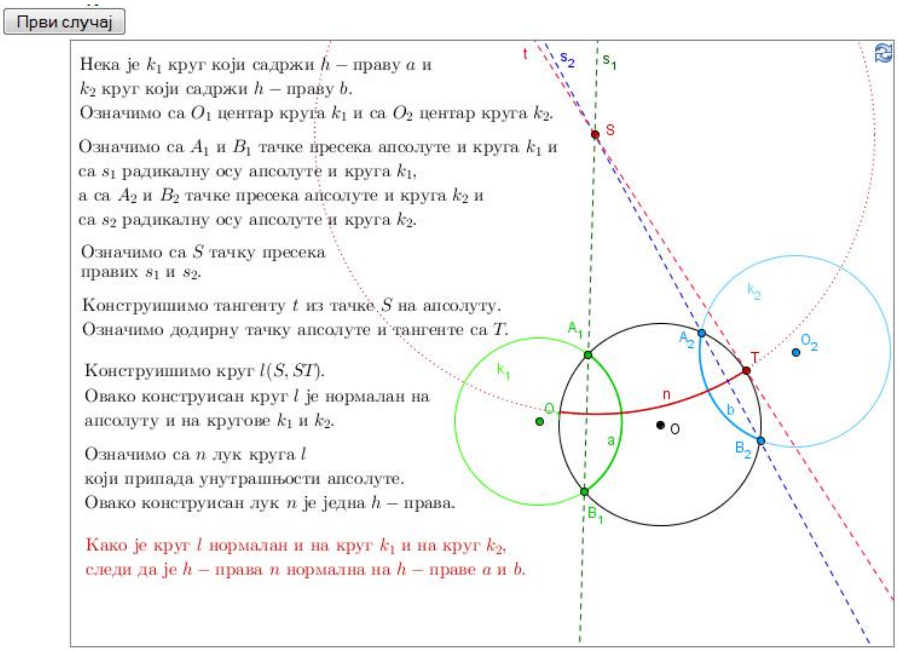


Слика 104: $h-$орицикли

6.3 Визуелизација заједничке нормале хиперпаралелних правих у Поенкареовом диск моделу

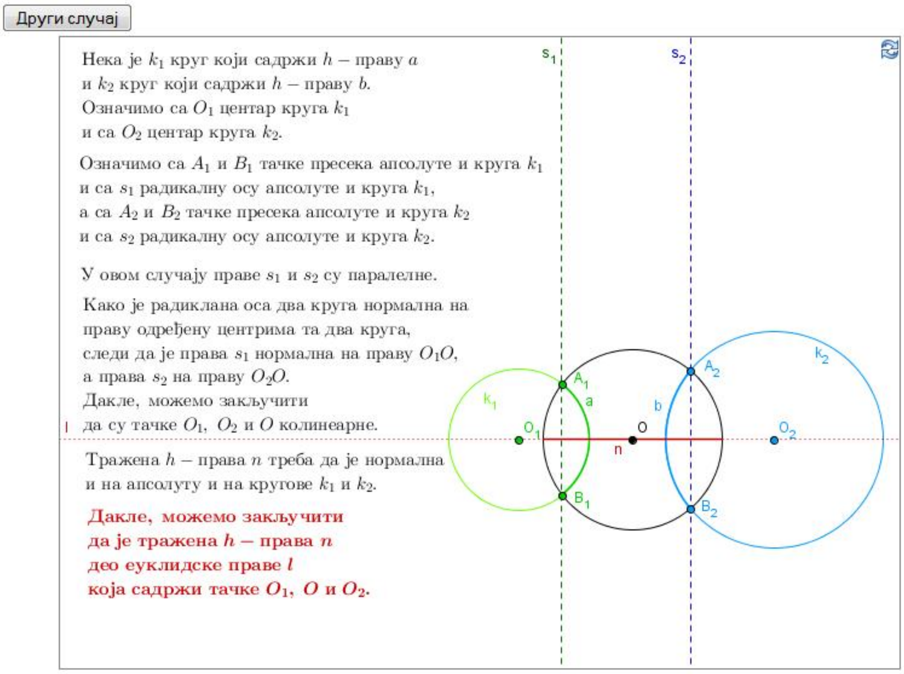
Визуелизација заједничке нормале две хиперпаралелне $h-$праве

Визуелизација заједничке нормале две хиперпаралелне праве праћена је одговарајућим аплетима. Тачније, доказ одговарајуће теореме је праћен са два аплета зато што се доказ разлаже на два случаја. Притиском на дугме ,,Први случај” корисник може видети конструкцију заједничке нормале две хиперпаралелне праве када је та заједничка нормала део еуклидског круга (Слика 105). Даље, притиском на дугме ,,Други



Слика 105: Визуелизација конструкције заједничке нормале хиперпаралелних $h-$правих, први случај

случај” корисник може видети конструкцију заједничке нормале две хиперпаралелне праве када је заједничка нормала део еуклидске праве (Слика 106).



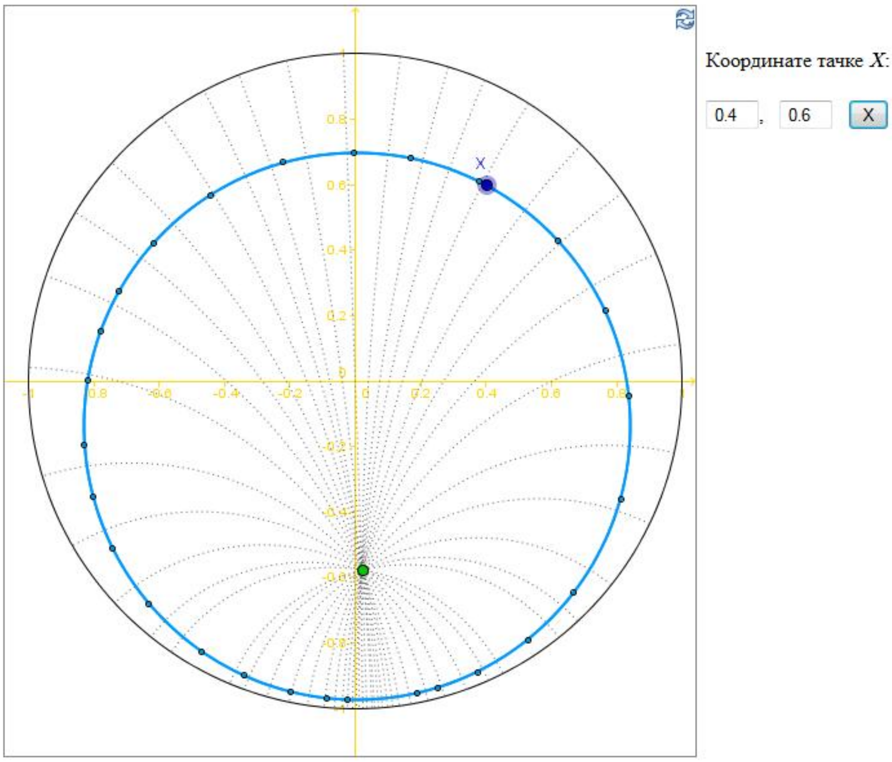
Слика 106: Визуелизација конструкције заједничке нормале хиперпаралелних $h-$правих, други случај

6.4 Визуелизација епицикала у Поенкареовом диск моделу

Визуелизација $h-$круга

Визуелизација $h-$круга, тачније његова конструкција, праћена је одговарајућим аплетом.

На аплету је задат приказ елиптичког прамена $h-$правих. Прамен је фиксиран. Како би се конструисао одговарајући $h-$круг, корисник уноси координате тачке X. Ако су координате такве да X није $h-$тачка, кориснику се на аплету приказује одговарајуће обавештење. Након што унесе исправне координате, покретањем анимације помоћу знака play на аплету се појављује низ $h-$тачака које представљају слике $h-$тачке X при $h-$рефлексији у односу на сваку $h-$праву датог елиптичког прамена. На крају се конструише круг (у еуклидском смислу) који садржи $h-$тачку X и све њене слике добијене поменутим $h-$рефлексијама (Слика 107). Тако конструисан круг представља тражени $h-$круг. Корисник може померањем тачке X да види какви се све $h-$кругови могу добити. Ако при померању тачке X или приликом уноса координата тачка X не припада унутрашњости апсолуте, на аплету се исписује одговарајућа порука.

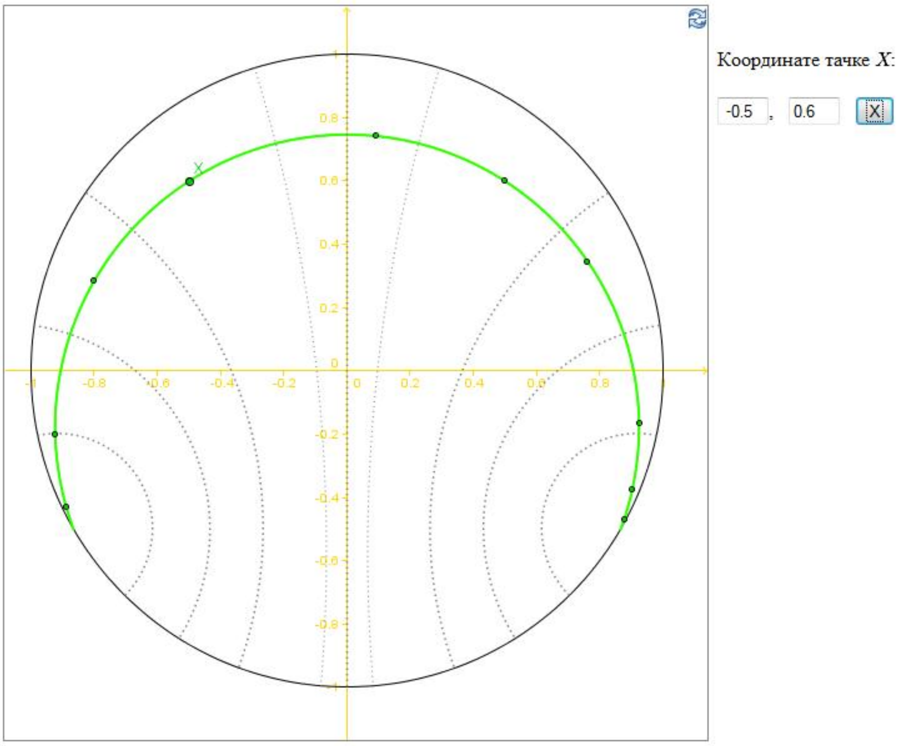


Слика 107: Визуелизација конструкције $h-$круга

Визуелизација $h-$еквидистанте

Визуелизација $h-$еквидистанте, тачније њена конструкција, праћена је одговарајућим аплетом.

На аплету је задат приказ хиперболичког прамена $h-$правих. Прамен је фиксиран. Како би се конструисала одговарајућа $h-$еквидистанта, корисник уноси координате тачке X. Ако су координате такве да X није $h-$тачка, кориснику се на аплету приказује одговарајуће обавештење. Након што унесе исправне координате, покретањем анимације помоћу знака play на аплету се појављује низ $h-$тачака које представљају слике $h-$тачке X при $h-$рефлексији у односу на сваку $h-$праву датог хиперболичког прамена. На крају се конструише део круга (у еуклидском смислу) који припада унутрашњости апсолуте, садржи $h-$тачку X и све њене слике добијене поменутим $h-$рефлексијама (Слика 108). Тако конструисан лук еуклидског круга представља тражену $h-$еквидистанту. Корисник може померањем тачке X да види какве се све $h-$еквидистанте могу добити. Ако при померању тачке X или приликом уноса координата тачка X не припада унутрашњости апсолуте, на аплету се исписује одговарајућа порука.



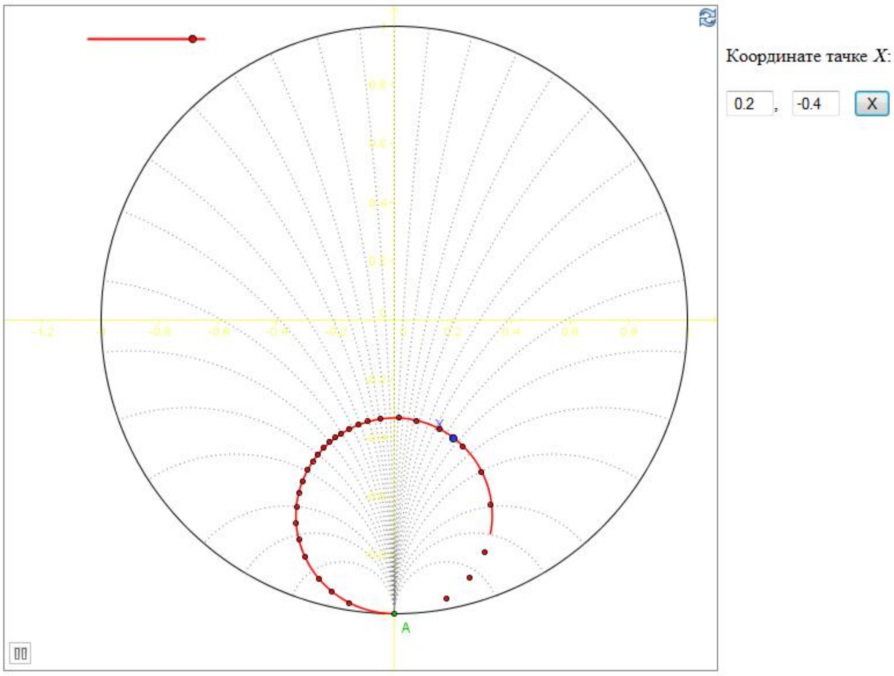
Слика 108: Визуелизација конструкције $h-$еквидистанте

Визуелизација $h-$орицикла

Визуелизација $h-$орицикла, тачније његова конструкција, праћена је одговарајућим аплетом.

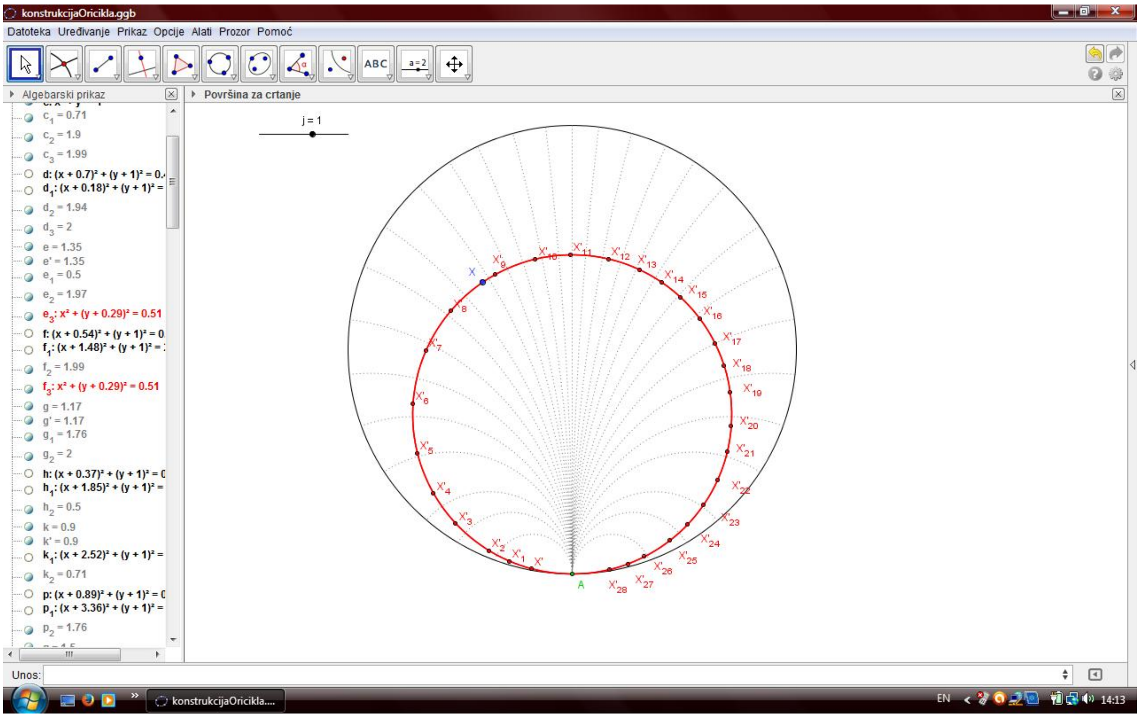
На аплету је задат приказ параболичког прамена $h-$правих. Прамен је фиксиран. Како би се конструисао одговарајући $h-$орицикл, корисник уноси координате тачке X. Ако су координате такве да X није $h-$тачка, кориснику се на аплету приказује одговарајуће обавештење. Након што корисник унесе исправне координате, на аплету се појављује знак play за покретање анимације. Покретањем анимације на аплету се појављује низ $h-$тачака које представљају слике $h-$тачке X при $h-$рефлексији у односу на сваку $h-$праву датог параболичког прамена. На крају се конструише круг (у еуклидском смислу) који садржи $h-$тачку X и све њене слике добијене поменутим $h-$рефлексијама (Слика 109). Тај круг, без једне тачке (заједничког краја задатог прамена правих) представља тражени $h-$орицикл. Корисник може померањем тачке X да види какви се све $h-$орицикли могу добити. Ако при померању тачке X или приликом уноса координата тачка X не припада унутрашњости апсолуте, на аплету се исписује одговарајућа порука.

Даћемо детаљан опис прављења овог аплета (Слика 110).



Слика 109: Визуелизација конструкције $h-$орицикла

Прво конструишемо апсолуту. Апсолута је представљена кругом чија је једначина $x^2 + y^2 = 1$. Како бисмо могли да конструишемо $h-$орицикл, потребан нам је прамен паралелних $h-$правих, тј. параболички прамен $h-$правих. Знамо да овај прамен карактерише постојање заједничког краја $h-$правих. Зато смо задали произвољну тачку A на апсолути. Тачка A представља заједнички крај паралелних $h-$правих. Затим смо конструисали 14 $h-$правих. Њих смо конструисали тако што смо узели 14 произвољних тачака које се налазе у унутрашњости круга који представља апсолуту и потом конструисали кругове који су нормални на апсолуту и садрже тачку A, једну од тих произвољних тачака и слику те тачке при инверзији у односу на апсолуту. Како бисмо добили $h-$праве, неопходно је било да конструишемо лукове тих кругова који се налазе у унутрашњости апсолуте. Лукове смо конструисали помоћу алата којим је омогућена конструкција лука одређеног трима тачкама. Тачке које су одређивале један лук биле су тачка A, произвољна тачка кроз коју смо конструисали круг који је нормалан на асполуту, као и тачка пресека апсолуте и тог круга. Када смо направили 14 таквих лукова, конструисали смо пречник апсолуте који садржи тачку A. Затим смо рефлексијом у односу на конструисани пречник пресликали свих 14 лукова и на тај начин смо добили 29 $h-$правих које припадају параболичком прамену. Тачку A и све лукове и дуж које представљају $h-$праве смо означили као непомичне објекте. Следеће што је урађено, јесте конструкција произвољне тачке X. Тачки X смо доделили индикатор i. Почетна вредност индикатора је 0, а када корисник унесе тачку X и притисне одговарајуће дугме вредност

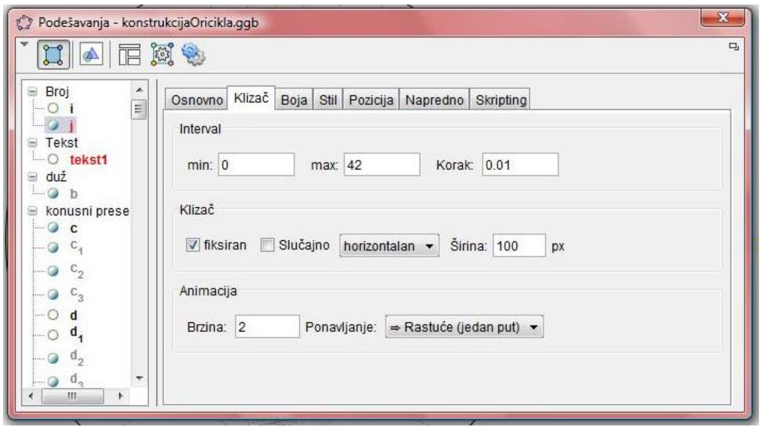


Слика 110: Приказ прављења аплета који даје визуелни приказ конструкције $h-$орицикла

индикатора i постаје 1. Тачка X није фиксирана и корисник може да је помера.

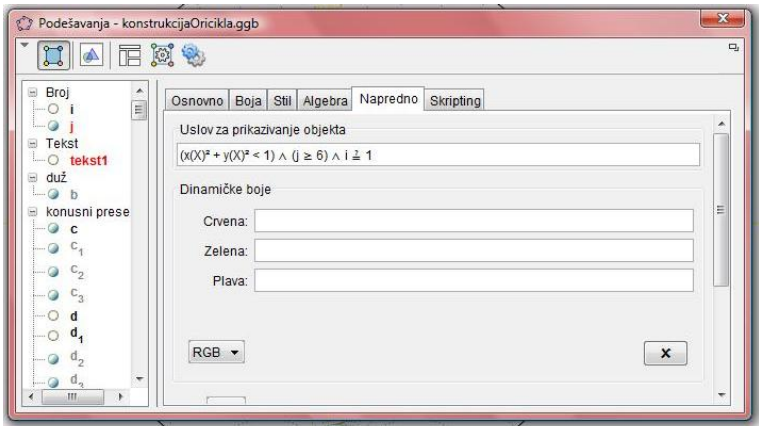
Након конструкције тачке X унели смо текст којим смо се обезбедили да кориснику дамо потребно обавештење ако је унос неисправан или ако померањем тачка X напусти унутрашњост апсолуте. Услов за појављивање овог обавештења јесте да је индикатор i једнак 1 и да је тачка X у спољашњости апсолуте или на апсолути, тј. да важи $x^2(X) + y^2(X) \geq 1$, односно да је корисник унео координате тачке X и да тачка X није у унутрашњости апсолуте.

Следећи корак у прављењу аплета јесте конструкција тачака које представљају слике $h-$тачке X при $h-$рефлексијама у односу на дате $h-$праве. $h-$Рефлексије су реализоване као инверзије у односу на кругове чији су делови дате $h-$праве. Овим пресликавањима добија се 29 тачака X', X_1', ... X_{28}', колико има и $h-$правих. Све тачке су постављене да буду непомични објекти, тј. да корисник не може да их помера. Заједнички услов приказивања за ове тачке јесте да је корисник унео координате тачке X и да је тачка X у унутрашњости апсолуте. Међутим, како би се на аплету појављивала једна по једна тачка уведен је један клизач j (Слика 111). Клизач је постављен да буде непомичан објекат и да се креће од 0 до 42 одређеним кораком и брзином. Након тога је свакој тачки додељен још један услов који треба да буде испуњен како би се приказала. Редом су додељивани услови. Тачка X' има додатни услов, а то је да је $j \geq 1$, тачка X_1' да је $j \geq 2$ и тако редом све до тачке X_{28}'



Слика 111: Задавање карактеристика клизачу j

која има услов $j \geq 29$ (Слика 112).



Слика 112: Задавање услова тачкама X', X'_1, ... X'_{28}

Када су обезбеђени услови приказивања тачака X', X'_1, ... X'_{28}, постоји могућност конструисања еуклидског круга који их све садржи и у коме је садржан тражени $h-$орицикл. Како у GeoGebra-и постоји алат којим је могуће конструисати круг кроз три дате тачке, то је конструкција овог $h-$орицикла била једноставна и нису биле потребне све тачке. Али како координате тачке X уноси корисник може се десити да $h-$тачка X буде $h-$инцидентна са неком од задатих $h-$правих, зато су конструисана два иста круга, само кроз три различите тачке. Први круг e_3 је круг кроз тачке A, X и X', а други круг f_3 је конструисан кроз тачке A, X и X'_1. Услов појављивања јесте $x^2(X) + y^2(X) < 1 \wedge i \stackrel{?}{=} 1 \wedge j \geq 41$. Све тачке које су слике тачке X и кругови e_3 и f_3 су црвене боје.

На крају како би се лепо видела конструкција $h-$орицикла (круга у еуклидском смислу без једне тачке, тачке A) било је потребно наћи центар (у еуклидском смислу) тог круга који представља $h-$орицикл. Центар S је тачка која представља пресек симетрале дужи XA и симетрале дужи XX'. Затим је на кругу e_3 изабрана произвољна тачка Y, а круг e_3 постављен као невидљив објекат. Следеће што је урађено јесте конструкција лука одређеног центром и двема тачкама са круга. Дати лук је лук g_3 који је одређен центром S и тачкама A и Y. Лук g_3 је црвене боје, као и кругови e_3 и f_3. Како би, коначно, била приказана конструкција $h-$орицикла, потребно је још редефинисати тачку Y. Редефинисање је урађено на следећи начин: Уколико је $j == 0$ тачка Y је у ствари тачка A, иначе ако је $30 < j < 40$ потребно је ротирати тачку A за угао $(30 - j)/10(360)^\circ$ око тачке S, у супротном она постаје тачка A (Слика 113).

Слика 113: Задавање услова тачки Y

Овим је спроведена конструкција $h-$орицикла, а кругови e_3 и f_3 су направљени тако да се појаве одмах пошто се заврши кретање тачке Y по кругу чији је део тражени $h-$орицикл.

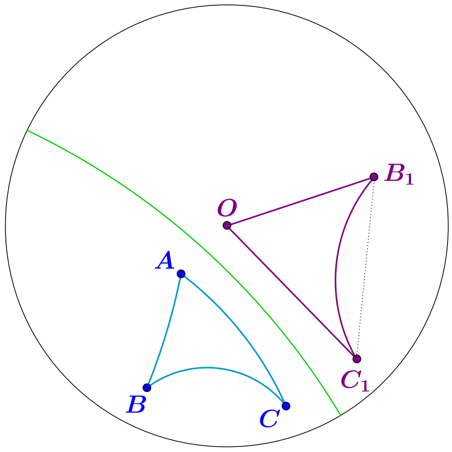
На крају саме конструкције, на аплету се приказује одговарајуће обавештење шта је заправо $h-$орицикл, тј. да је то $h-$круг без тачке A.

7 Примери

У овом поглављу дајемо неколико примера задатака из хиперболичке геометрије равни реализованих у Поенкареовом диск моделу.

Задатак 7.0.0.1. *Показати да је збир унутрашњих углова произвољног $h-$троугла мањи од π.*

Решење. Нека је ABC произвољан $h-$троугао и O центар апсолуте. Постоји $h-$рефлексија φ којом се $h-$тачка A пресликава у O. Означимо са $B_1 = \varphi(B)$ и $C_1 = \varphi(C)$. $h-$рефлексијом φ $h-$углови датог $h-$троугла ABC пресликавају се на њима $h-$подударне $h-$углове $h-$троугла OB_1C_1 (Слика 114).



Слика 114: $h-$троугао ABC

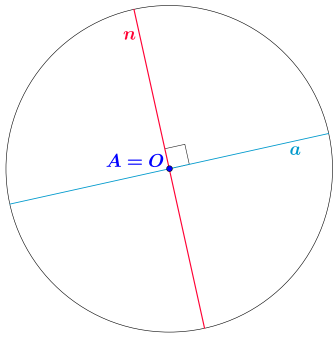
$h-$дужи AB и AC се пресликавају на $h-$дужи OB_1 и OC_1 које припадају пречницима апсолуте. Како су $h-$углови $\angle OB_1C_1$ и $\angle B_1C_1O$ мањи од углова троугла OB_1C_1 у еуклудском смислу и како је збир углова у троуглу (еуклидском) OB_1C_1 једнак π, то следи да је збир $h-$углова $h-$троугла OB_1C_1 мањи од π. Даље, како се при свакој инверзији или осној рефлексији чувају углови, а свака $h-$рефлексија је рестрикција неке инверзије или осне рефлесије, то је и збир углова у $h-$троуглу ABC мањи од π. $\triangle$

Задатак 7.0.0.2. *Нека су дате $h-$права a и $h-$тачка A. Одредити $h-$праву n која садржи $h-$тачку A и нормална је на $h-$праву a.*

Решење. Означимо са O центар апсолуте. Разликоваћемо два случаја, када је $A = O$ и када је $A \neq O$.

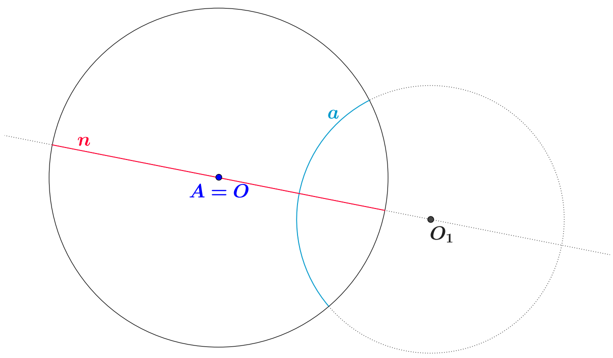
Први случај ($A = O$):
Како је $h-$права n $h-$инцидентна са A, следи да је n пречник апсолуте, тј. део еуклидске праве. У зависности од међусобног положаја $h-$тачке A и $h-$праве a разликујемо два подслучаја:

а) $h-$тачка A и $h-$права a су $h-$инцидентне.
Како је $A = O$, следи да је $h-$права a пречник апсолуте, односно део еуклидске праве. Даље, како су $h-$праве a и n пречници апсолуте (делови еуклидске праве) и треба да су међусобно нормалне, следи да је $h-$права n онај пречник апсолуте који је у тачки A нормалан на пречник апсолуте који представља $h-$праву a (Слика 115).



Слика 115: Случај када је $h-$тачка A $h-$инцидентна са $h-$правом a

б) $h-$тачка A и $h-$права a нису $h-$инцидентне.
Како је $A = O$, следи да је $h-$права a лук круга a_1 нормалног на апсолуту. Означимо са O_1 центар круга a_1. Како a и n треба да су међусобно нормалне $h-$праве, следи да ће $h-$права n бити садржана у правој која је нормална на круг a_1 и садржи тачку O. Да би права била нормална на круг потребно је да садржи центар тог круга. Дакле, тражена $h-$права n ће бити део еуклидске праве OO_1 који припада унутрашњости апсолуте (Слика 116).



Слика 116: Случај када $h-$тачка A и $h-$права a нису $h-$инцидентне

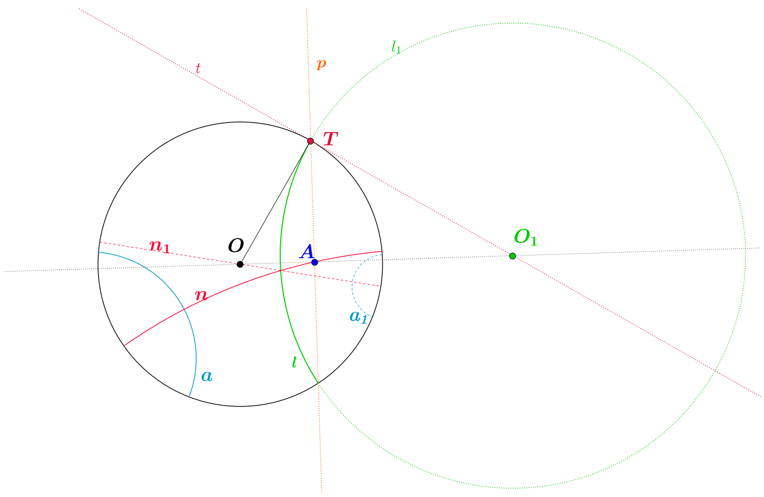
Други случај ($A \neq O$):
Конструишимо праву p која садржи тачку A и нормална је на праву OA. Означимо са T тачку пресека апсолуте и праве p. Констуишимо, даље, тангенту t у тачки T на апсолуту. Означимо са O_1 пресек правих OA и t, а са l $h-$праву која је део еуклидског круг $l_1\,(O_1, O_1T)$. Посматрајмо троугао O_1TO и троугао O_1AT (Слика 117). Како је $\angle OTO_1 = \angle TAO_1$ и $\angle TO_1O = \angle AO_1T$, то су троуглови O_1TO и O_1AT слични. Из сличности $\triangle O_1TO \sim \triangle O_1AT$ следи једнакост:

$$\frac{O_1T}{O_1A} = \frac{OO_1}{O_1T} = \left(\frac{OT}{AT}\right),$$

односно

$$O_1T^2 = O_1A \cdot OO_1.$$

Можемо закључити да важи $\psi_{l_1}(A) = O$, односно да је O слика тачке A при инверзији у односу на круг l_1.
Инверзијом у односу на l $h-$тачка A се слика у $h-$тачку O, а $h-$права a у $h-$праву a_1. Нека је n_1 $h-$права која садржи O и нормална је на a_1. Како је $h-$права a слика $h-$праве a_1 при инверзији у односу на l, следи да ће и n бити слика $h-$праве n_1 при истој инверзији. Даље, како је $h-$права n_1 $h-$инцидентна са $h-$тачком O, следи да ће $h-$права n бити $h-$инцидентна са $h-$тачком A. На крају, како свака инверзија чува углове, следи да ће овако конструисана $h-$права n бити нормална на $h-$праву a (Слика 117). $\triangle$



Слика 117: Случај када је $h-$тачка A различита од $h-$тачке O

Задатак 7.0.0.3. *Нека су дате различите $h-$тачке A и B. Одедити $h-$симетралу $h-$дужи AB.*

Решење. Разликоваћемо два случаја:

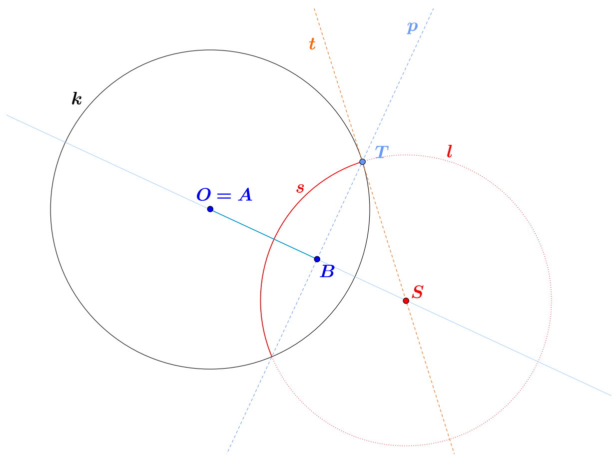
Први случај (једна од датих $h-$тачака поклапа се са центром апсолуте, нпр. нека је $A = O$):
Конструишимо праву p која је инцидентна са тачком B и нормална је на праву OB. Пресек апсолуте и праве p означимо са T. Конструишимо тангенту у тачки T на апсолуту. Пресек тангенте t и праве OB означимо са S. Конструишимо круг l чији је центар тачка S и полупречник ST. Посматрајмо троуглове STO и SBT (Слика 118). Како је $\angle OTS = \angle TBS$ и $\angle TSO = \angle BSO$, следи да је $\triangle STO \sim \triangle SBT$, односно следи да је

$$\frac{ST}{SB} = \frac{OS}{ST} = \left(\frac{OT}{BT}\right),$$

односно

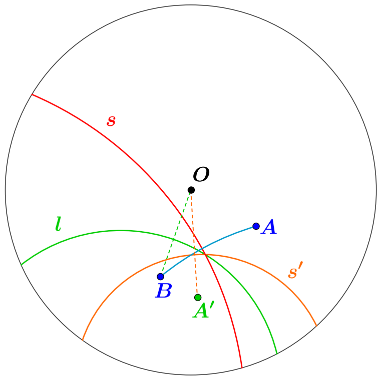
$$ST^2 = SB \cdot OS.$$

Дакле, O је слика тачке B при инверзији у односу на круг l чији је лук $h-$права s. Односно важи $\psi_l(O) = B$ и $\psi_l(B) = O$, па овако конструисана $h-$права s представља симетралу дужи OB, односно AB.



Слика 118: Случај када је $A = O$

Други случај (нека су $h-$тачке A и B различите од центра апсолуте O):
Конструишимо $h-$симетралу $h-$дужи OB као у првом случају. Означимо ту симетралу са l. $h-$Рефлексијом у односу на $h-$праву l $h-$тачка B се слика у $h-$тачку O, а $h-$тачка A у $h-$тачку A'. Конструишимо сада, као у првом случају, $h-$симетралу $h-$дужи OA'. Означимо је са s'. Како се $h-$рефлексијом у односу на l $h-$тачка O слика у $h-$тачку B, а $h-$тачка A' у $h-$тачку A, то ће се и $h-$симетрала $h-$дужи OA' сликати у $h-$симетралу $h-$дужи AB, односно тражена $h-$симетрала s биће слика $h-$праве s' при $h-$рефлексији у односу на $h-$праву l (Слика 119).



Слика 119: Случај када је и $A \neq O$ и $B \neq O$

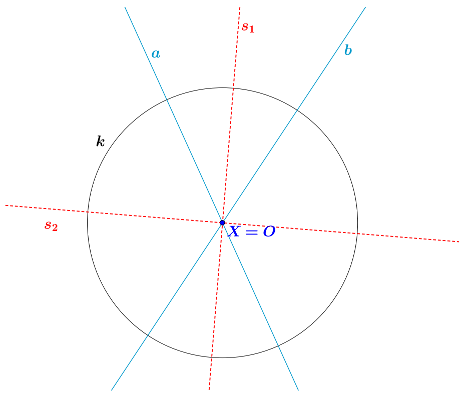
$\triangle$

Задатак 7.0.0.4. *Нека су a и b две $h-$праве које се секу. Одредити $h-$симетралу $h-$угла који оне одређују.*

Решење. Нека је $h-$тачка X пресек $h-$правих a и b. Означимо са O центар апсолуте.

У зависности од положаја $h-$тачке X у односу на центар апсолуте, разликоваћемо два случаја.

Први случај (X је центар апсолуте, тј. $X = O$):
Како су $h-$праве a и b $h-$инцидентне са центром апсолуте, следи да су дате $h-$праве пречници апсолуте (делови еуклидских правих). У том случају, $h-$симетрала $h-$правих a и b биће симетрала угла одређеног правама које садрже $h-$праве a и b (Слика 120).



Слика 120: Случај када се дате $h-$праве a и b секу у центру апсолуте

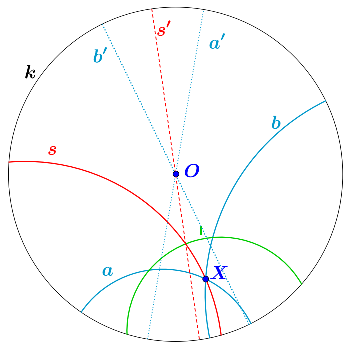
Други случај ($h-$тачка X је различита од центра апсолуте):
Нека је l $h-$права која представља $h-$симетралу $h-$дужи OX. $h-$Рефлексијом у односу на $h-$праву l имамо следеће:

а) $h-$тачка X се пресликава у $h-$тачку O,

б) $h-$права a се пресликава у $h-$праву a' и

в) $h-$права b се пресликава у $h-$праву b'.

Како је $h-$тачка X $h-$инцидентна са $h-$правама a и b, следи да је $h-$тачка O $h-$инцидентна са $h-$правама a' и b', односно следи да су a' и b' делови еуклидских правих. Означимо са s' симетралу угла која је одређена правама a' и b'. На основу првог случаја можемо закључити да ће тражена $h-$симетрала s бити слика $h-$праве s' при $h-$рефлексији у односу на $h-$праву l (Слика 121). $\triangle$

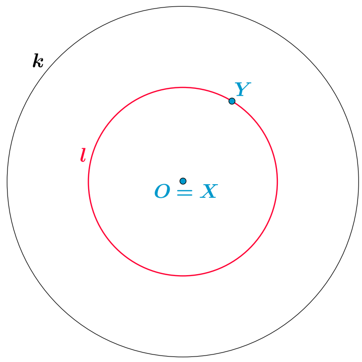


Слика 121: Случај када се дате $h-$праве a и b не секу у центру апсолуте

Задатак 7.0.0.5. *Нека су X и Y две различите $h-$тачке. Конструисати $h-$круг l чији је центар $h-$тачка X и садржи $h-$тачку Y.*

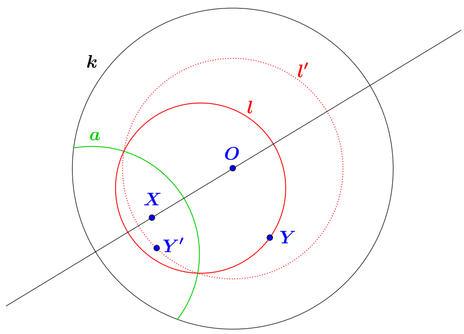
Решење. У овом задатку разликоваћемо два случаја.

Први случај $(X = O)$:
У овом случају $h-$круг l је еуклидски круг чији је центар тачка $O\,(= X)$ и полупречник дуж OY (Слика 122).



Слика 122: Случај када је $X = O$

Други случај ($X \neq O$ и $Y \neq O$):
$h-$Симетралу a $h-$дужи OX конструишемо као у задатку 7.0.0.3. При $h-$рефлексији у односу на $h-$праву a $h-$тачка X се слика у $h-$тачку O, а $h-$тачка Y у $h-$тачку Y'. На основу првог случаја можемо конструисати $h-$круг l' чији је центар $h-$тачка O и који садржи $h-$тачку Y' (Слика 123). Дакле, тражени $h-$круг l чији је центар

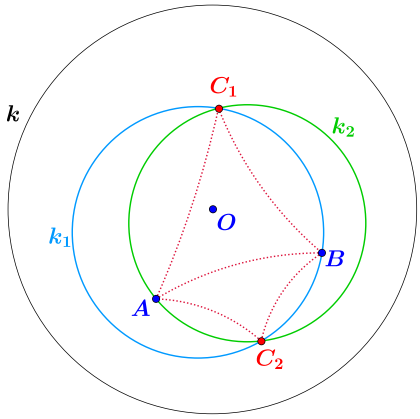


Слика 123: Случај када је $X \neq O$ и $Y \neq O$

$h-$тачка X и полупречник XY добијамо као слику $h-$круга l' при $h-$рефлексији у односу на $h-$праву a. $\triangle$

Задатак 7.0.0.6. *Нека су дате две различите $h-$тачке A и B. Одредити $h-$тачку C такву да је $h-$троугао ABC правилан.*

Решење. Тражену $h-$тачку C добићемо у пресеку $h-$круга $k_1(A, AB)$ и $h-$круга $k_2(B, BA)$. $h-$Кругове k_1 и k_2 конструишемо као у задатку 7.0.0.5. Међутим, како се овако конструисани $h-$кругови k_1 и k_2 секу у двема $h-$тачкама, то ће задатак имати два решења (Слика 124).



Слика 124: Тачке C_1 и C_2 су такве да су $h-$троуглови ABC_1 и ABC_2 правилни

$\triangle$

8 Закључак

Као што је у уводу напоменуто визуелизација хиперболичке геометрије има велики значај. Пре свега, визуелни приказ је користан онима који предају или уче хиперболичку геометрију. Наравно, могуће је визуелизовати само конкретан модел хиперболичке геометрије. У овом раду определили смо се за визуелизацију Поенкареовог диск модела из неколико разлога. Први разлог је што је у еуклидском смислу тај модел ограничен. Ограниченост нам омогућава да се сви објекти и релације визуелно прикажу у целости. Други разлог јесте тесна повезаност Поенкареовог диск модела са неким значајним концептима еуклидске геометрије, као што су потенција тачке у односу на круг и инверзија у односу на круг. Трећи разлог јесте релативно једноставан начин провере аксиома.

Даље истраживање ишло би у правцу визуелизације других појмова, релација и тврђења апсолутне и хиперболичке геометрије равни у Поенкареовом диск моделу. Пре свега, то су изометријске трансформације.

У раду је приказана визуелизација модела равни, а не и простора. Разлог за то је пре свега, тај што програмски пакет GeoGebra још увек нема довољно развијене алате за визуелизацију тродимензионог простора.

Литература

[1] Anderson, J.W.: Hyperbolic Geometry, Springer - Verlag, London, 2005.

[2] Билимовић, А.: Еуклидови елементи $\Sigma TOIXEIA$, Српска академија наука, Београд, 1957.

[3] Лучић, З.: Еуклидска и хиперболичка геометрија, Total design и Математички факултет, Београд, 1997.

[4] Лучић, З.: Огледи из историје античке геометрије, Службени гласник, Београд, 2009.

[5] Матељевић, М.: Комплексне функције 1&2, Друштво математичара Србије, Београд, 2006.

[6] Митровић, М., Огњановић, С., Вељковић, М., Петковић, Љ., Лазаревић, Н.: Геометрија за први разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 1988.

[7] Hilbert, D. (превео Ж. Гарашанин): Основе геометрије, Математички институт, Београд, 1957.

[8] http://sr.wikipedia.org/wiki/Poenkareov_disk_model, приступљено 10.06.2013.

[9] http://sr.wikipedia.org/sr/Hiperbolička_geometrija, приступљено 29.05.2013.

[10] http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/sazdanovic/hyperbolicgeometry/hypge.htm, приступљено 31.05.2013.