Matematički fakultet Univerzitet u Beogradu

Rešavanje zadataka iz algebre i teorije brojeva pristup Terensa Taoa

Mentor: prof. dr Zoran Petrović

Student: Milica Minić

UVOD

Matematika je zastupljena u većem delu školovanja svakog pojedinca. Stalno rešavamo zadatke na časovima u osnovnoj i srednjoj školi a neki čak i dalje. Ti zadaci su uglavnom standardni i podeljeni u različite oblasti. Na primer, sam početak učenja Pitagorine teoreme je izračunavanje nepoznatih, pomoću formule, u pravouglom trouglu gde su katete obeležene sa „a" i „b" a hipotenuza sa „c". Rutinski zadaci bi bili da se izračuna dužina jedne od te tri stranice. Učenici to često nazivaju tipskim zadatkom. Imamo podatke i primenimo formulu. Računanje i primena formula je jedan jako mali deo ove nauke ali nažalost je to ono što većini učenika odgovara da se ne bi preterano mučili. Ako bismo zadali da se izračuna krak jednakokrakog trougla gde su visina i osnovica poznate, bi već bila primena teoreme i za korak teže. Međutim, ako učenici rade primenu Pitagorine teoreme kao nastavnu temu onda to nije tako teško ali ako ovaj zadatak dobiju bez ikakvog nagoveštaja o temi možda bi se malo i zamislili. Još korak dalje bi bilo izdvajanje nekog pravouglog trougla u četvorouglu, mnogouglu, krugu itd. Malo se bavimo pitanjem kako rešavati zadatke iz matematike ako prethodno ne znamo metod kojim se radi. Dakle, kako razmišljati. Knjiga Terensa Taoa „Solving Mahematical Problems" je veoma korisna u ovom pogledu. U njoj je opisan celokupan proces razmišljanja pri rešavanju zadataka. Sam pristup zadatku pa polako do konačnog rešenja istog. Čitanje ove knjige možda bi mnogima promenilo mišljenje o smislu matematike i zadataka u školovanju. Nekima bi verovatno olakšalo rešavanje i uvideli bi da imaju pogrešan pristup problemima iz matematike. U ovom radu je prikazan metod razmišljanja i rešavanja zadataka na osnovu ove knjige. Neki od zadataka su u knjizi detaljno rešeni a neki su ostavljeni kao vežbanja za čitaoce. Trudili smo se da i vežbanja analiziramo na isti način.

Zanimljivo je da je Terens Tao pisao knjigu kad je imao nepunih 16 godina. On je veoma zanimljiva ličnost što se matematike tiče. Jedan je od dobitnika Fildsove medalje 22. avgusta 2006. godine. Nama je, sa aspekta nastave, veoma interesantno njegovo školovanje. Stoga na kraju navodimo neke detalje o njegovom školovanju bazirane na članku „Radical Acceleration in Australia: Terence Tao" sa sajta instituta Davidson.

ZADACI

Zadatak 1.1: Naći dužine stranica i veličine uglova trougla ako su dužine stranica date u aritmetičkoj progresiji sa razlikom d i površina tog trougla je t.

Prvo treba shvatiti problem. O kakvom se problemu radi? Postoje tri glavne vrste problema:

1) „pokazati da...“ ili „proceniti...“- pitanje u kome određena izjava mora da se dokaže
2) „pronaći...“ ili „pronaći sve...“- pitanja koja zahtevaju da se pronađe nešto ili sve što odgovara određenim zahtevima
3) „da li ima...“- pitanja koja zahtevaju dokazivanje izjave ili davanje suprotnog primera

Vrsta problema je bitna jer se tako određuje osnovni metod pristupa. Kod prvog poblema su zadati podaci i cilj je doći do zaključka ili pronaći vrednost izraza (ovde je cilj jasno vidljiv i može mu se smisleno pristupiti). Druga vrsta problema je nepredvidiva. Treba pogoditi odgovor koji je skoro tačan a onda ga malo promeniti kako bi bio tačniji ili se mogu promeniti zahtevi koje neki cilj mora da ispuni tako da je lakse ispuniti uslove. Treća vrsta problema je tipično najteža jer se prvo mora napraviti odluka o tome da li cilj postoji ili ne, i dati dokaz ili protiv dokaz.

Naravno da ne spadaju sva pitanja u ove jasno podeljene kategorije ali opšti format bilo kog pitanja će ipak odrediti strategiju koju treba slediti pri rešavanju problema.

Kod *zadatka 1.1* imamo “proceniti …” vrstu problema. Moramo pronaći nekoliko nepoznatih a date su nam neke varijable. To ukazuje na algebarsko rešenje tj. da ćemo imati puno jednačina koje povezuju d, t, stranice i uglove koje vode ka rešenju.

Vrlo je bitno razumeti podatke. Šta je dato u problemu? Da bi se razumeli podaci, treba videti kako ciljevi i zahtevi reaguju jedni na druge. Na primer, kod ovog problema je zadat trougao, površina trougla i podatak da su dužine stranica zadate u aritmetičkoj progresiji sa razlikom d. Sada zaključujemo da su nam potrebne teoreme koje uključuju stranice, uglove i površinu trougla. Na primer sinusna teorema, kosinusna teorema i formule za površinu. Takođe ne treba zaboraviti aritmetičku progresiju i uzeti u obzir zapis stranica a, $a+d$, $a+2d$.

Takođe je vrlo bitno razumeti i cilj. Šta nam je potrebno? Poznavanje cilja pomaže u fokusiranju pažnje na najbolja sredstva koja se mogu upotrebiti. Poznavanje cilja takođe nam pomaže kod stvaranja taktičkih ciljeva za koja znamo da će nas približiti rešavanju problema. U ovom zadatku je cilj, kao što smo ranije pomenuli, da se pronađu sve stranice i uglovi trougla.

Pošto sada imamo podatke i cilj, moramo to predstaviti na efikasan način, tako da podaci i cilj budu predstavljeni što jednostavnije. Moramo uzeti stranice i uglove u smilu varijabli. Možemo izabrati stranice kao a, b i c, dok uglovi mogu biti α, β i ϒ. Ali možemo iskoristiti podatke kao bi pojednostavili zapis. Pošto su stranice u aritmetičkoj progresiji možemo zapis promeniti u a, $a+d$ i $a+2d$,ali ovaj zapis može biti još bolja ako je napišemo simetrično $b-d$, b i $b+d$. Jedino što ovde imamo uslov što nam ustvari može biti činjenica tj. dodatna informacija za nas, $b>d$. Za uglove imamo u vidu da je α+β+ϒ=180 °

Sada sve treba zapisati. Stavljanje svega što znamo na papir pomaže na tri načina:

1) Imaćemo veće beleške,
2) Kada zapnemo možemo dugo da gledamo u njih,
3) Fizički čin zapisivanja onoga što znamo može da pokrene novu inspiraciju i povezivanje stvari.

Moramo biti pažljivi da ne pišemo suvišne stvari. Traba istaći činjenice za koje smatramo da će nam biti korisne, a nebitne ideje koje se dovode u pitanje na drugu stranu beleške.

Sada možemo da izdvojimo jednačine i nejednačine koje nam mogu biti od pomoći.

- α, β, ϒ, t>0 I b≥d I možemo uzeti bez smanjenja opštosti da je d≥0
- α+β+ ϒ=180˚ (zbir uglova u trouglu)
- $\frac{b-d}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{b+d}{\sin\varphi}$ (sinusna teorema)
- $b^2=(b-d)^2+(b+d)^2-2(b-d)(b+d)\cos\beta$ (kosinusna teorema)
- $t=\frac{(b-d)b\sin\varphi}{2}=\frac{(b-d)(b+d)\sin\beta}{2}=\frac{b(b+d)\sin\alpha}{2}$ (formula za površinu)
- $t^2=s(s-b+d)(s-b)(s-b-d)$ gde je $s=\frac{(b-d)+b+(b+d)}{2}$ poluobim (heronova formula)
- $b+d\le b+(b-d)$ (nejednakost trougla)

Mnoge od ovih činjenica mogu biti beskorisne ili mogu odvući pažnju. Verovatno je da su jednačine korisnije od nejednakosti, pošto se naši ciljevi i podaci javljaju u obliku jednačina. Heronova formula se može istaći kao posebno korisna jer se pojednostavljuje na $s=\frac{3b}{2}$.

Treba malo i modifikovati problem. Postoji puno načina variranja problema tako da se njime može lako baratati:

1) uzeti u obzir posebne slučajeve nekog problema kao što su ekstremni ili najgori slučajevi,
2) rešiti uopštenu verziju problema,
3) formirati pretpostavku koja će nagovestiti problem, i probati dokaz toga,
4) izvući neke posledice problema i probati dokaz toga,
5) preformulisati problem,
6) proučiti rešenja sličnog problema,
7) generalizovati problem.

Ovo je korisno kada ne možemo ni da započnemo zadatak, jer ponekad rešavanje lakšeg problema otkriva način na koji se dolazi do glavnog problema. Na sličan način, bavljenjem i rešavanjem problema dodatnim pretpostavkama može se doći do opšteg rešenja. Treba uvek imati na umu da su posebni slučajevi po svojoj prirodi posebni, pa ponekad i dobra tehnika nema koristi u rešavanju opšteg slučaja.

Kod *zadatka 1.1* možemo isprobati poseban slučaj kad je $d = 0$. U ovom slučaju moramo da nađemo dužinu stranice jednakostraničnog trougla površine t. Kod ovog slučaja se odgovor može izračunati $b = \frac{2t^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}}$ jer je ($t = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$). Što bi značilo da opšti odgovor takođe treba da uključuje kvadratne korene ili četvrti koren, ali se ne nagoveštava ni na koji drugi način kako prići problemu. Treba znatno modifikovati problem. U ovoj strategiji se obavljaju znatne modifikacije kao što su otklanjanje podataka, menjanje podataka sa ciljem, ili negiranje cilja. U suštini bavimo se problemom dok ga ne rešimo, onda pokušavamo da utvrdimo kako smo ga rešili: tako ćemo ustanoviti koje su ključne komponente podataka.

Što se tiče našeg pitanja, trougao se može zameniti četvorouglom, krugom itd. I tu onda nema pomoći, problem se onda samo više komplikuje. Ali sa druge strane, može se primetiti da sam trougao nije toliko bitan koliko njegove dimenzije. Ne moramo znati poziciju trougla. To dalje potvrđuje da moramo da se koncentrišemo na strane i uglove (a, b, c, α, β, ϒ) a ne geometriju.

Možemo izostaviti neke ciljeve: na primer, umesto da rešavamo sve strane i uglove možemo rešiti samo strane. Ali, može se primetiti da će prema sinusnoj i kosinusnoj teoremi uglovi trougla biti svakako odredjeni. Tako da je jedino neophodno rešiti strane. Ali mi znamo da strane imaju dužine $b-d$, b i $b+d$, tako da samo treba da saznamo šta je b kako bi završili s problemom.

Možemo izostaviti i neke podatke, kao što je aritmetička razlika d, ali onda ćemo imati nekoliko mogućih rešenja a nedovoljno podataka kako bi rešili problem. Na sličan način, izostavljanjem površine t nećemo imati dovoljno podataka da dođemo do rešenja. Nikad ne treba zaboraviti da pitanje može da se reši na više od jednog načina i nijedan način ne može da se sudi kao apsolutno najbolji.

Treba dokazati rezultate vezane za naše pitanje. Informacije su tu da bi se iskoristile, tako da ih treba prikupiti i njima se pozabaviti. Da li se može dobiti još smislenih podataka? Takođe, dokazivanje manjih rezultata može kasnije biti od koristi kada probamo da dokažemo glavne rezultate ili pokušamo da nađemo odgovor. Koliko god mali bio rezultat, ne smemo da ga zaboravimo, kasnije može biti od koristi. Osim toga, daje nam nešto na šta možemo da se oslonimo kada zapnemo.

U problemu 'proceniti...' kao kod pitanja vezana za trougao, ova taktika i nije tako korisna. Ali možemo pokušati. Na primer, naš taktički cilj je da nađemo rešenje za b. To zavisi od dva parametra d i t. Drugim rečima, b je zapravo funkcija: $b = b(d,t)$. (Ako ovaj zapis izgleda neprikladno za geometrijsko pitanje, to je onda zato što se kod geometrije obično ignoriše funkcionalna zavisnost entiteta.

Sada možemo dokazati neke mini rezultate kod ove funkcije $b(d,t)$ kao što su $b(d,t) = b(-d,t)$ (zato što aritmetička progresija ima ekvivalentnu aritmetičku progresiju sa inverznom aritmetičkom razlikom), ili $b(kd,k^2t) = kb(d,t)$ (to se postiže širenjem trougla koji zadovoljava $b = b(d,t)$ putem k). Za ovaj određeni problem ova taktika nam omogućava da izvršimo neku normalizaciju, na primer $t = 1$ ili $d = 1$ a takođe mogućnost za proveravanje konačnog odgovora. Međutim, kod ovog problema ove metode ipak daju male prednosti i nećemo ih više ovde koristiti.

Treba uprostiti, iskoristiti podatke i dostići taktičke ciljeve. Sada kada smo odredili zapis i imamo nekoliko jednačina, treba ozbiljno da se pozabavimo postizanjem naših taktičkih ciljeva koje smo već uspostavili. Kod jednostavnih problema obično postoje standardni načini na koji se to radi:

(Na primer, algebarsko uprošćavanje se obično detaljno radi u srednjoškolskim knjigama). Generalno je ovaj deo najduži i najteži deo problema: ali, čovek može da izbegne situaciju da se izgubi u problemu ako se seti relevantnih teorema, podataka i načina na koji se koriste, a najvažnije cilja. Takođe je i dobra ideja da se ne primenjuje bilo kakva tehnika ili metod na slepo, već da se unapred promisli i uvidi gde može da se upotrebi. Tako može da se uštedi ogromna količina vremena jer se eliminiše nepotrebno istraživanje pre nego sto se uloži puno napora, i suprotno tako što se daje prioritet obećavajućim istragama.

Kod *zadatka 1.1,* već smo se usredsredili na Heronovu formulu. Nju možemo iskoristiti kako bi postigli naš taktički cilj rešavanja b. Na kraju krajeva, već smo rekli da sinusna i kosinusna teorema mogu da odrede α, β, ϒ kada znamo b. Kao dokaz više da idemo napred, zapazićemo kako Heronova formula uključuje d i t. U suštini, ona koristi sve nase podatke (već smo uključili činjenicu da su strane u aritmetičkoj progresiji u našoj notaciji). Kako god bilo, Heronova formula u slučaju d, t i b postaje

$$t^2 = \frac{3b}{2}\left(\frac{3b}{2} - b + d\right)\left(\frac{3b}{2} - b\right)\left(\frac{3b}{2} - b - d\right)$$

što može da se pojednostavi na

$$t^2 = \frac{3b^2(b-2d)(b+2d)}{16} = \frac{3b^2(b^2-4d^2)}{16}$$

Sada moramo da rešimo b. Desna strana je polinom u zavisnosti b^2 (ako uzmemo d i t kao konstante), a zapravo to je kvadratna jednačina drugog stepena. Sada se kvadratna jednačina može lako rešiti. Ako uklonimo imenioce i sve stavimo na levu stranu dobićemo

$$3b^4 - 12d^2b^2 - 16t^2 = 0,$$

pa korišćenjem kvadratne formule

$$b^2 = \frac{12d^2 \pm \sqrt{144d^4 + 196t^2}}{6} = 2d^2 \pm \sqrt{4d^2 + \frac{16}{3}t^2}$$

Pošto b mora da bude pozitivno, dobijamo

$$b = \sqrt{2d^2 + \sqrt{4d^4 + \frac{16}{3}t^2}}$$

kao proveru možemo da potvrdimo da kada je d=0 to se slaže sa našim prethodnim računom da je

$$b = \frac{2t^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{4}}}$$

Kada sračunamo sve strane $b-d$, b, $b+d$ onda i procena uglova α, β, ϒ, sledi iz kosinusne teoreme i problem je rešen!

Zadatak 2.1. (Taylor 1989, strana 7). Pokazati da među bilo koja 18 uzastopna trocifrena broja postoji makar jedan koji je deljiv zbirom svojih cifara.

Ovo je konačan problem. Postoji samo oko 900 trocifrenih brojeva, tako da teoretski možemo sami rešiti ovaj problem. Ali da razmotrimo da li možemo da smanjimo sebi posao. Kao prvo, cilj izgleda malo čudan. Treba broj da bude deljiv zbirom cifara! Kao i do sada da prvo napišemo cilj kao matematičku formulu tako da možemo lakše da je obračunamo. Trocifren broj može biti zapisan u obliku abc gde su a, b i c cifre. Pišemo abc_{10} kako bi izbegli mešanje sa $a \cdot b \cdot c$. Zapazićemo kako je $abc_{10} = 100a + 10b + c$. Dok je abc proizvod cifara a, b i c. Ako upotrebimo standardni zapis $a \mid b$ da označimo da a deli b, sada moramo da rešimo $(a+b+c) \mid abc_{10}$ gde su abc_{10} cifre jedne od 18 datih uzastopnih brojeva. Da li možemo da smanjimo, uprostimo ili nekako upotrebimo ovu jednačinu? To jeste moguće, ali nije moguće uprostiti na bilo šta upola pristojno lako (kao na primer korisna jednačina koja povezuje a, b i c direktno). Zapravo $(a+b+c) \mid abc_{10}$ je jako teško obračunati, čak i kada bi zamenili abc_{10} sa $100a+10b+c$. Možemo da zapišemo neka rešenja za abc_{10} :

100, 102, 108, 110, 111, 112, 114, 117, 120, 126, ..., 990, 999.

Čini se da su nesistematska i slučajna. Ali ipak se dovoljno često javljaju tako da bilo koji niz od 18 uzastopnih brojeva treba da ima jedno. A koji je zapravo značaj broja 18? Pod pretpostavkom da nije u pitanju neka digresija (možda je potrebno samo 13 uzastopnih brojeva, ali je 18 tu da bismo skrenuli sa pravog puta) šta će nam 18?

Možda se nekom učini da je zbir cifara nekog broja ustvari povezan sa brojem 9 (bilo koji broj ima isti ostatak kao i njegov zbir cifara kada se podeli sa 9) i 18 je povezan sa 9, tako da tu može biti nejasna veza. Ipak ne treba mešati uzastopne brojeve i deljivost. Čini se da moramo da preformulišemo pitanje ili predložimo neko slično kako bi stigli do rešenja.

Sada kad smo u potrazi za bilo čim što je povezano sa brojem 9, trebalo bi da obratimo pažnju na to da većina brojeva koji zapravo zadovoljavaju $(a+b+c) \mid abc_{10}$ jesu deljivi sa 9 ili makar sa 3. Zapravo postoji samo 3 izuzetka od liste date gore (100, 110 i 112) i praktično svi brojevi deljivi sa 9 zadovoljavaju prethodnu deljivost. Tako da umesto sto smo probali da dokažemo direktno:

Za bilo koja 18 uzastopna broja, makar jedan rešava $(a+b+c) \mid abc_{10}$.

mogli smo da probamo nešto nalik:

Za bilo koja 18 uzastopna broja, postoji broj deljiv sa 9 koji rešava $(a+b+c) \mid abc_{10}$.

Ovaj pristup izgleda da povezuje naše podatke (18 uzastopnih brojeva) i cilja (broj koji zadovoljava $(a+b+c) \mid abc_{10}$) jer 18 uzastopnih brojeva uvek sadrži broj deljiv sa 9 (zapravo oni sadrze dva takva broja) tako da sa strane numeričkih dokaza i heurističkih svojstava broja 9, čini se da brojevi deljivi sa 9 zadovoljavaju $(a+b+c) \mid abc_{10}$. Ovakav pristup je najbolji način da se pomire dve različite tvrdnje.

Ovaj posebni pristup (kada se uzmu u obzir brojevi deljivi sa 9) jeste funkcionalan, ali je potreban dodatni rad kako bi se pokrili svi slučajevi. Bolje je koristiti brojeve deljive sa 18:

18 uzastopnih brojeva ➔ broj deljiv sa 18 ➔ rešenje za $(a+b+c) \mid abc_{10}$

Razlozi za ovu promenu su dvostruki:

18 uzastopnih brojeva će uvek sadrzati tačno jedan broj deljiv sa 18, ali će imati dva deljiva broja sa 9. Čini se da je bolje i prikladnije koristiti brojeve deljive sa 18 nego one deljive sa 9. Na kraju krajeva, ako koristimo brojeve deljive sa 9 da bismo rešili problem, pitanje bi onda zahtevalo 9 uzastopnih brojeva umesto 18.

Trebalo bi biti lakše dokazati $(a+b+c)\mid abc_{10}$ za brojeve deljive sa 18 nego za one deljive sa 9, pošto su deljivi sa 18 nista više nego poseban slučaj brojeva deljivih se 9. Tako se ispostavlja da brojevi deljivi sa 9 nemaju uvek rešenje (uzmite u obzir na primer 909), ali oni koji su deljivi sa 18 će imati rešenje, kao što ćemo i videti.

Kako god bilo, isprobavanjem se pokazalo da brojevi deljivi sa 18 daju rezultate. Ali zašto? Uzmimo na primer 216 koji je deljiv sa 18. Zbir cifara je 9, i 9 deli 216 jer 18 deli 216. Ili neki drugi primer: 882 je deljivo sa 18, a zbir cifara je 18. Tako da je 882 očigledno deljivo sa svojim zbirom cifara. Ako se pozabavimo sa još par primera videćemo da je zbir cifara broja deljivog sa 18 uvek 9 ili 18, čime se početni broj skoro po pravilu deli. I sa svim ovim nagađanjima sledi dokaz.

DOKAZ

Među 18 uzastopnih brojeva jedan mora biti deljiv sa 18, recimo abc_{10}. Pošto je abc_{10} takođe deljivo sa 9, $a+b+c$ mora biti deljivo sa 9. (Setimo se pravila deljenja sa 9? Neki broj je deljiv sa 9 ako i samo ako je njegov zbir cifara deljiv sa 9). Posto $a+b+c$ varira izmedju 1 i 27, $a+b+c$ mora biti 9, 18 ili 27. 27 se samo javlja kada je abc=999, ali ovo nije deljivo sa 18. Posto je $a+b+c$ jednako 9 ili 18 tako onda $(a+b+c)\mid 18$. Ali $18\mid abc_{10}$ je po definiciji, tako da je $(a+b+c)\mid abc_{10}$.

Setimo se da sa pitanjima koja uključuju stvari kao što su cifre, direktan pristup nije obično pravi odgovor. Zapetljana formula treba da se uprosti u nešto jednostavnije. U ovom slučaju, fraza 'mora biti jedan broj od bilo kojih 18 uzastopnih' je zamenjena sa 'mora biti broj deljiv sa 18' i ona je slabija, ali lakša i relevantnija za ovo pitanje (koje se odnosilo na deljivost). Ispostavilo se da je to ipak dobra pretpostavka. I uvek se setimo da sa konačnim problemima, strategije nisu kao one u višoj matematici.

Na primer, formula $(a+b+c)\mid abc_{10}$ se nije uzela u obzir kao tipična matematička (kao na primer primena modularne aritmetike) već smo stavili granicu na $a+b+c$ (9, 18 ili 27) zbog činjenice da svi brojevi imaju samo tri cifre, tako da ostajemo sa mnogo jednostavnijom $9\mid abc_{10}$, $18\mid abc_{10}$ ili $27\mid abc_{10}$.

Zapravo, nikad nismo ni morali da proširimo abc_{10} algebarski kao $100a+10b+c$. Možda se to činilo kao logičan prvi korak, ali se ispostavilo da je neka vrsta distrakcije i ne čini problem lakšim za rešavanje.

Ispada da je 18 uzastopnih brojeva najmanje brojeva potrebnih da se osigura da jedan od njih zadovoljava $(a+b+c)\mid abc_{10}$.

Zadatak 2.2 (Tejlor 1989, strana 37). Da li postoji takvo 2^n da njegove cifre mogu da se preurede i stvore drugo 2^n? (Nisu dozvoljene nule u prednjim ciframa: na primer 0032 nije dozvoljena).
Ovo se čini kao nerešiva kombinacija. 2^n i preraspoređivanje cifara. Zašto? Dva su razloga:
a) preraspoređivanje cifara ima toliko puno mogućnosti;
b) nije lako utvrditi individualne cifre 2^n.

To verovatno znači da je potreban nešto agresivniji pristup.
Prvo što treba uraditi jeste, možda, pretpostaviti odgovor. Posredni dokaz ukazuje da ovo nije pitanje koje uključuje metodu eksperimentisanja tako da je odgovor verovatno 'ne'. Sa druge strane, neko izuzetno smišljeno izvođenje bi moglo da dovede do pametnog raspoređivanja cifri, ali takvo izvođenje nije lako pronaći. Prvo pretpostavimo lake opcije. Ako smo u pravu, sačuvali smo dosta vremena time što nismo išli težim putem. Ako nismo u pravu, ionako smo osuđeni na dug rad. To naravno ne znači da treba da zaboravimo obećavajući, ali naporan put da rešimo problem. To pre znači da treba dobro da se osvrnemo pre nego što uronimo u dubok problem.
Kao i u *zadatku 2.1*, cifre su zaista vrsta digresije. Kod *zadatka 2.1* samo smo želeli da znamo dve stvari o zbiru cifara. Prvo je uslov deljivosti a drugo je ograničenje veličine. Moramo da uprostimo problem tako što ćemo generalizovati proces zamene cifara. Sa čisto logicke strane, sada nam je gore jer moramo više da dokazujemo, ali smo u prednosti što se tiče jasnoće i jednostavnosti. (Zašto se preopteretiti podacima koji se ne upotrebljavaju? To će biti samo distrakcija.)
Tako da sada moramo da odaberemo glavna svojstva 2^n i zamene cifara. Nadamo se da ćemo naći svojstva jednog koja nisu u skladu sa drugim. Hajde prvo da probamo sa 2^n jer se lakše rešava. Evo primera:
1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024,2048,4096,8192,16384,32768,65536.....
Ne možemo ništa posebno reći o ovim ciframa. Poslednja cifra 2^n je očigledno paran broj (osim broja 1), ali ostale cifre prilično izgledaju nasumično. Zamislimo da uzmemo na primer broj 4096. Jedna neparna cifra, nekoliko parnih pa čak i nula. Šta sprečava ovaj broj da bude prerasporedjen u jos jedan 2^n? Da li na primer može biti preuređen u 2^{4256} =1523....936 ? Naravno da ne! Zasto? 'Jer je prevelik'. Da li se računa veličina? Da. Bilo bi na hiljade cifara u 2^{4256}, a samo četiri cifre u 4096. Tako da preuređivanje cifara ne može da promeni ukupan broj cifara. (Zapišimo bilo koje činjenice koje mogu biti od koristi kod našeg problema, čak i ako su proste ne treba misliti da će nam 'očigledne' činjenice uvek pasti na pamet kada nam zatrebaju. Čak i zlato koje se kopa po povrsini mora da se potraži i stalno motri.)
Tako da sa ovakvim informacijama možemo da nastavimo sa našim opštim planom. Sada opšte pitanje glasi: Da li postoji stepen dvojke tako da postoji još jedan stepen dvojke sa istim brojem cifara kao prvi?
Nažalost, odgovor na ovo pitanje se brzo može ustanoviti kao 'da'; 2048 i 4096 na primer. Bili smo isuviše opšti. Hajde da ponovo pogledamo problem 2.1. To što znamo da samo 'zbir cifara deljivih sa 18

mora da bude deljiv sa 9' nije dovoljno da se reši problem. Bila nam je potrebna i činjenica da je 'zbir cifara trocifrenog broja najvise 27'. Ukratko, nismo pronašli dovoljno činjenica kod našeg problema da bismo ga rešili. Ipak imali smo do sada delimično uspeha, jer smo ograničili mogucnosti preraspoređivanja cifara. Uzmimo broj 4096. On se jedino može preurediti u drugi četvorocifreni broj. A koliko ima četvorocifrenih 2^n? Samo četiri-1024, 2048, 4096 i 8192.To je zato što se 2^n duplira, ne ostaje u istom stanju predugo. Zapravo može se ubrzo primetiti da četiri 2^n najviše mogu da imaju isti broj cifri. (Peti uzastopni 2^n bio bi 16 puta veći od prvog, i tako bi morao da ima više cifara od prvog 2^n). To znači da za svaki 2^n ima najviše tri druga 2^n koja bi verovatno bila u raspodeli brojeva prvobitnog 2^n. Ostalo je samo tri ili manje slučajeva da se eliminisu za svako 2^n, umesto neodređenog broja koji smo imali na početku. Možda ćemo uz malo dodatnog rada eliminisati i ostale slučajeve.

Već smo istakli da kada zamenimo cifre, broj koji ostane ima isti broj cifara kao i prvobitni. Ali je obrnuti slučaj daleko od istine, i ovaj jedinstveni slučaj zamene cifara neće sam rešiti problem. Ovo znači da smo previše generalizovali. Hajde da se ponovo vratimo u igru. Nešto drugo može da se sačuva kada se zamene cifre.

Hajde da pogledamo neke primere. Hajde da uzmemo opet 4096. Mogućnosti zamene cifara su 4069, 4096, 4609, 4690, 4906, 4960, 6049, 6094, 6409, 6490, 6940, 6904, 9046, 9064, 9406, 9460, 9604, 9640.

Šta ovi brojevi imaju zajedničko? Imaju isti skup cifara. Sve je to lepo, ali 'skup cifara' nije veoma koristan matematički entitet (ne koriste mnoge teoreme i sredstva ovaj koncept). Ipak je 'zbir cifara' bolje oružje. Ako dva broja imaju isti skup cifara, onda moraju da imaju isti zbir cifara. Tako da smo došli do još informacija. Menjanje cifara čuva njihov zbir. Ako ovu informaciju iskombinujemo sa prethodnom, dobijamo novo pitanje zamene:

Da li postoji takvo 2^n i jos jedno 2^n sa istim brojem cifara i istim zbirom cifara kao prvo 2^n?

Ako je potvrdan odgovor ovog pitanje onda je potvrdan odgovor i početnog pitanja. Sada je na ovo pitanje malo lakše odgovoriti od prvobitnog, jer su 'broj cifara' i 'zbir cifara' standardne stvari u teoriji brojeva.

Hajde da sada pogledamo zbir cifara 2^n pošto imamo ovaj novi koncept pa da se osvrnemo na to kako ih sada naše novo pitanje uključuje.

Imamo:

2^n	Zbir cifara	2^n	Zbir cifara	2^n	Zbir cifara
1	1	256	13	65536	25
2	2	512	8	131072	14
4	4	1024	7	262144	19
8	8	2048	14	524288	29
16	7	4096	19	1048576	31
32	5	8192	20		
64	10	16384	22		
128	11	32768	26		

Odavde sledi da je zbir cifara obično prilično mali. Na primer, zbir cifara 2^{17} je jedva 14. Ovo je zapravo maler, jer se više uklapaju mali brojevi od većih. (Ako svako od 10 ljudi nasumice izabere jedan dvocifreni broj, postoji poprilično velika (9,5%) šansa da se poklope, ali ako svako od njih odabere broj sa 10 cifara, onda je šansa jedan u milion). Ali mali brojevi takođe pomažu kod odabiranja šema, tako da ovo nisu uopšte loše vesti.

Neki zbirovi se poklapaju: 16 i 1024 na primer. Ali čini se da se u svakom slučaju zbir cifara polako penje. Očekujemo da 100 cifreni broj 2^n ima veći zbir cifara od 10 cifrenog. Ali se takodje trba setiti da se ograničavamo na 2^n sa istim brojem cifara, tako da ova ideja i neće biti mnogo od pomoći.

Rezultat ovih zapažanja je sledeći: zbir cifara ima makroskopsku strukturu koja se lako shvata (polako se povećava sa n; zapravo je veoma verovatno da je zbir cifara 2^n prosečno $(4{,}5\log_{10}2)n \approx 1.355n$ za veliko n) ali je loša mikroskopska struktura. Cifre se ipak mnogo menjaju.

Ranije smo pomenuli da je 'skup cifara' nepogodan, sada se čini i da zbir cifara ne daje tako brze rezultate. Da li postoji još jedno smanjenje problema koje će nam dati nešto sa čim možemo da radimo?

Pomenuli smo ranije da je zbir cifara 'konvencionalno oružje u matematici'. Hajde da na primer pogledamo prethodno pitanje. Ali jedini pravi način da se zbir cifara uklopi u glavne tokove jeste uzeti u obzir zbir cifara po modulu 9. Možemo se prisetiti da je broj jednak svom zbiru cifara po modulu 9.

Na primer $3297=3x10^3+2x10^2+9x10^1+7x10^0 \pmod 9$

$=3x1^3+2x1^2+9x1^1+7x1^0 \pmod 9$

$=3+2+9+7 \pmod 9$

jer je 10 jednako sa 1 (mod 9).

Tako da naše novo modifikovano pitanje glasi:

Da li postoji stepen dvojke takav da postoji i drugi stepen dvojke sa istim brojem cifara i istim zbirom cifara po modulu 9 kao i prvi stepen dvojke?

Sada možemo iskoristiti činjenicu da je neki broj jednak svom zbiru cifara po modulu 9 kako bi preformulisali ovo pitanje opet.

Da li postoji stepen dvojke takav da postoji drugi stepen dvojke sa istim brojem cifara i istim ostatkom (mod 9) kao prvo stepen dvojke?

Obratimo pažnju na pojmove 'preuređivanje cifara', 'skup cifara' i 'zbir cifara' koje smo potpuno eliminisali, što izgleda obećavajuće.

Hajde da sada modifikujemo tabelu zbira cifara stepena dvojke i da vidimo šta ćemo dobiti.

2^n	ostatak (mod 9)	2^n	ostatak (mod 9)	2^n	ostatak (mod 9)
1	1	256	4	65536	7
2	2	512	8	131072	5
4	4	1024	7	262144	1
8	8	2048	5	524288	2
16	7	4096	1	1048576	4
32	5	8192	2		
64	1	16384	4		
128	2	32768	8		

Moramo da dokažemo da dva 2^n nemaju isti ostatak (mod 9) i isti broj cifara. Ako pogledamo u tabelu videćemo da ima nekoliko 2^n sa istim ostatkom: 1, 64, 4096 i 262144. Ali nijedan od ova četiri nema isti broj cifara. Zapravo 2^n sa istim ostatkom (mod 9) se čini da su toliko odvojena da nema šanse da imaju isti broj cifri. U suštini 2^n sa istim ostatkom su ipak prilično odvojena i može se brzo primetiti da se ostaci (mod 9) ponavljaju na svaka šest stepena. Ova pretpostavka se lako može dokazati putem modularne aritmetike: $2^{n+6}=2^n 2^6=2^n x64=2^n$ (mod 9)

Ovakav rezultat znači da će se ostaci 2^n beskonačno ponavljati, kao i decimala koja se ponavlja: 1, 2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, 4, 8, 7, 5 .....To onda znači da dva stepena dvojke sa istim zbirom cifara (mod 9) moraju biti makar odvojena sa šest stepena. Ali onda stepeni dvojke nikako ne mogu imati isti broj cifara, jer će onda jedan biti 64 puta veći od drugog. To znači da nema dva stepena dvojke sa istim brojem cifara i istim zbirom cifara (mod 9). Sada smo dokazali naše modifikovano pitanje, tako da možemo da se vratimo unazad dok ne stignemo do našeg prvobitnog pitanja, i napišemo puni odgovor.

DOKAZ

Hajde da pretpostavimo da su dva stepena dvojke povezana zamenom cifara. To znači da imaju isti broj cifara a takođe i isti zbir cifara (mod 9). Ali zbirovi (mod 9) su periodični sa periodom 6, bez ponavljanja u okviru bilo kog perioda, tako da su dva stepena dvojke makar 6 stepena odvojena. Ali onda je nemoguće da imaju isti broj cifara, što je kontradiktorno.

Ovaj problem je stalno uprošćavan sve dok se bespotrebni delovi problema nisu zamenili sa prirodnijim, fleksibilnijim i pogodnijim pojmovima. Ovakvo uprošćavanje može biti pomalo nedosledna stvar jer uvek postoji opasnost od prevelikog uprošćavanja ili lošeg uprošćavanja. Ali je u ovom problemu skoro bilo šta bolje nego bavljenje zamenom cifara, tako da pojednostavljivanje ne može mnogo da škodi. Postoji i mogućnost da upravljanje i uprošćavanje problema mogu da se pretvore u besciljno traganje, ali kada stvarno skrenemo s puta treba probati bilo šta.

Zadatak 2.3 (uzeto iz takmičenja iz matematike u Australiji 1987). Pronaći sve cele brojeve n tako da jednačina $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{n}{a+b}$ odgovara nekim vrednostima celih brojeva koji nisu nula (uz to da je $a+b\neq 0$)

Ovo izgleda kao standardna Diofantova jednačina, tako da ćemo verovatno početi sa množenjem imenilaca da bismo dobili

$\frac{a+b}{ab}=\frac{n}{a+b}$ i onda $\left(a+b\right)^2=nab$.

Sada bismo mogli bismo da eliminišemo n i reći da $ab \mid \left(a+b\right)^2$ ili pokušati da se skoncentrišemo na činjenicu da je nab kvadrat. Ove tehnike su dobre ali izgleda da one ne daju rezultate. Veze leve i desne strane u jednačini $\left(a+b\right)^2=nab$ nisu dovoljno jake. Jedna strana je kvadrat a druga je proizvod.

Jedna stvar koju treba imati na umu kod rešavanja problema jeste biti spreman da privremeno ostavimo jedan interesantan metod koji ne daje rezultate i probamo sa nekim koji je obećavajući. Možemo probati da pristupimo problemu putem algebre, onda ponovo iskoristimo teoriju brojeva kasnije, ako algebra ne uspe. Ako proširimo $\left(a+b\right)^2=nab$ i saberemo članove dobićemo $a^2+\left(2-n\right)ab+b^2=0$

a ako smo dovoljno hrabri da upotrebimo kvadratnu formulu dobićemo

$$a=\frac{b}{2}\left[(n-2)\pm\sqrt{\left(n-2\right)^2-4}\right]$$

Ovo sada deluje zbrkano, ali mi to možemo preokrenuti u svoju korist. Znamo da su a,b i n celi brojevi, ali imamo i kvadratni koren u formuli. Sada jedino može da deluje da je član $\left(n-2\right)^2-4$ kvadrat nekog celog broj. Ali to onda znači da je za 4 manje od kvadrata takođe kvadrat. Ovo je veoma ograničavajuće.

Razmaci između korena su veći od 4 posle nekoliko kvadrata, moramo da testiramo samo prvih nekoliko članova n. Ispostavlja se da $(n-2)^2$ mora da bude 4, tako da je n 0 ili 4. Sada možemo da radimo na svakom slučaju posebno, tako što ćemo pronaći bilo primer za svaki slučaj ili dokaz da takav slučaj ne postoji.

Slučaj 1: n=0. Ako to unesemo u recimo $(a+b)^2 = nab$ dobijamo $(a+b)^2 = 0$ pa tako i $a+b=0$. Ali to je nemoguće pošto u prvoj jednačini sada imamo $\frac{0}{0}$ što je nedozvoljeno. Tako da n ne može biti 0.

Slučaj 2: n=4. Ponovo nam $(a+b)^2 = nab$ daje $(a+b)^2 = 4ab$ a kada saberemo članove dobijamo $a^2 - 2ab + b^2 = 0$. Ako faktorišemo dobijamo $(a-b)^2 = 0$ tako da a mora da bude jednako b. Ovo nije kontradikcija ali primer $a=b$, n=4 deluje kada ga stavimo u prvobitnu jednacinu $(a+b)^2 = nab$.

Tako da je naš odgovor bio n=4, ali smo do njega došli prilično komplikovanom metodom kvadratne formule. Neprikladno je koristiti je, ali pošto ona uvodi član kvadratnog korena, što vodi do toga da član unutar kvadratnog korena mora biti broj čiji je kvadrat ceo broj, ponekad je korisna.

Zadatak 2.4 (Tejlor 1989) Naći sva rešenja za $2^n + 7 = x^2$ kada su n i x celi brojevi.

Ovakvoj vrsti problema je zaista potrebna metoda eksperimentisanja kako bi se našao pravi put. Najelementarnije metode u Diofanovim jednačinama su modularna aritmetika i faktorizacija. Modularna aritmetika prebacuje celu jednačinu u prikladan moduo, ponekad konstantan (npr (mod 7) ili (mod 16)) ili promenljiv (npr (mod pq)). Faktorizacija menja problem u oblik (faktor)x(faktor)=(nesto lepo), gde desna strana može biti konstanta, prost broj, kvadrat ili nešto drugo što ima ograničen izbor faktora.

Na primer, kod *zadatka 2.3* su se obe metode razmatrale od početka, ali su odbačene u korist algebarskog pristupa, što je u stvari skrivena tehnika faktorizacije.

Sada je najbolje prvo isprobati elementarne tehnike, što će kasnije uštedeti puno vremena.

Dobiti korisnu faktorizaciju je blizu nemogućeg, osim kada je n paran. Onda dobijamo razliku dva kvadrata (bitna faktorizacija u Diofantovim jednačinama) kao što je:

$$7 = x^2 - 2^n = \left(x - 2^m\right)\left(x + 2^m\right),$$

gde je $m = \frac{n}{2}$. Onda možemo da kazemo da su $\left(x-2^m\right)$ i $\left(x+2^m\right)$ faktori broja 7, tj. moraju biti -7 , -1, 1 ili 7.

Daljom podelom na slučajeve uskoro ćemo doći do toga da nema rešenja (ako pretpostavimo da je n paran). Ali to je otprilike onoliko koliko nam metod faktorizacije može reći. Ne znamo gde su stvarna rešenja i koliko ih ima. (Iako znamo da n mora biti neparan).
Sledeći je pristup modularne aritmetike. Strategija je iskoristiti moduo da bi se otarasili jednog ili vise članova. Na primer, mogli smo da napišemo jednačinu po modulu x kako bi dobili

$$2^n + 7 = 0 \pmod{x}$$

ili možda moduo 7 da dobijemo

$$2^n = x^2 \pmod{7}$$

Na žalost, ove metode ne daju baš dobre rezultate. Ali pre nego što odustanemo, ima još jedan moduo da se isproba. Probali smo da eliminišemo '7' i 'x^2' clanove; da li umesto njih možemo da eliminišemo 2^n? Da, tako što ćemo izabrati recimo moduo 2. Onda dobijamo

$$0 + 7 = x^2 \pmod{2}$$

kada je n>0 i

$$1 + 7 = x^2 \pmod{2}$$

kada je n=0. Ovo nije tako loše pošto smo skoro potpuno eliminisali ulogu n. Ali i dalje nema rešenja pošto x^2 član na desnoj strani može biti 0 ili 1, tako da nismo zapravo isključili sve mogućnosti. Da bismo ograničili vrednosti x^2, moramo da izabaremo različite module. Uz ovu misao, da treba ograničiti vrednosti na desnoj strani, sada razmišljamo da probamo moduo 4 umesto 2:

$$2^n + 7 = x^2 \pmod{4}$$

Drugim rečima imamo

$$0 + 3 = x^2 \pmod{4} \text{ kada je } n>1$$

$$2 + 3 = x^2 \pmod{4} \text{ kada je } n=1$$

$$1 + 3 = x^2 \pmod{4} \text{ kada je } n=0$$

Posto x^2 mora biti 0 (mod 4) ili 1 (mod 4), eliminisaćemo mogucnost $0 + 3 = x^2 \pmod{4}$. To znači da n jedino može biti 0 ili 1. Brzom proverom ćemo dobiti da jedino n=1 može da da rešenje, i x mora da bude jednako 3 ili -3.
Glavna ideja pri rešavanju Diofanovih jednačina tipa 'naći sva rešenja', jeste eliminisati sve osim konačnog broja mogućnosti. To je još jedan razlog zašto (mod 7) i (mod x) neće biti od pomoći, jer i ako budu, onda bi eliminisali sve slučajeve, za razliku od pristupa (mod 4) koji je eliminisao sve osim par njih.

Zadatak 2.5 (Hajos 1963). Dokazati da za bilo koji celi nenegativan broj n, broj $1^n+2^n+3^n+4^n$ je deljiv sa 5 ako i samo ako n nije deljivo sa 4.

Ovaj problem prvo izgleda zastrašujuće. Jednačine kao što je ova mogu da podsete na Fermaovu poslednju teoremu. Ali naše pitanje je mnogo blaže. Želimo da pokažemo da određen broj jeste (ili nije) deljiv sa 5. Osim ako direktna faktorizacija nije očigledna, moraćemo da iskoristimo pristup modula. (Što znači da je $1^n+2^n+3^n+4^n=0 \pmod 5$ za n koje nije deljivo sa 4 a $1^n+2^n+3^n+4^n \neq 0 \pmod 5$ za n koje jeste deljivo sa 4).

Pošto koristimo tako male brojeve, možemo sami da procenimo neke od vrednosti $1^n+2^n+3^n+4^n \pmod 5$.Najbolji način da se to postigne jeste da se pojedinačno odrede svi sabirci po modulu 5 pre sabiranja.

(mod 5)

n	1^n	2^n	3^n	4^n	$1^n+2^n+3^n+4^n$
0	1	1	1	1	4
1	1	2	3	4	0
2	1	4	4	1	0
3	1	3	2	4	0
4	1	1	1	1	4
5	1	2	3	4	0
6	1	4	4	1	0
7	1	3	2	4	0
8	1	1	1	1	4

Sada je očigledno da ima neke periodičnosti. U suštini 1^n, 2^n, 3^n i 4^n imaju periodičnu funkciju sa periodom 4. Da bismo dokazali ovu pretpostavku možemo da se služimo definicijom periodičnosti.

Hajde da uzmemo 3^n kao primer. Ako kažemo da je periodičan sa periodom 4 to znači da je

$$3^{n+4}=3^n \pmod 5$$

A to je lako dokazati jer je $3^{n+4}=3^n x 81=3^n \pmod 5$ tj. $81=1 \pmod 5$.

Na sličan način možemo dokazati da su 1^n, 2^n i 4^n periodični sa periodom 4. To znači da je $1^n+2^n+3^n+4^n$ periodično sa periodom 4. Što dalje znači da samo moramo da dokažemo naše pitanje za n=0, 1, 2, 3 jer će se periodičnost postarati za sve ostale slučajeve za n. Ali već smo pokazali da je pitanje istinito u ovim slučajevima (pogledati gornju tabelu). Tako da smo mi završili.
Kad god pokušavamo da rešimo jednačine koje uključuju parametar (u ovom slučaju n), periodičnost je uvek korisna, pošto ne moramo da proveravamo sve vrednosti parametra kako bi proverili jednačinu. Proveravanje jedne periode (na primer n=0, 1, 2 i 3) bilo bi dovoljno.

Zadatak 2.6 (Shklarsky) Neka k i n budu prirodni brojevi gde je k neparan. Dokazati da je zbir $1^k+2^k+.....+n^k$ deljiv sa $1+2+....+n$.

Ovakvo pitanje je tipično vežbanje kod Bernulijevih polinoma (ili kod primene teorije ostatka), što je interesantan deo matematike koji ima jako puno primena. Ali bez oštrog pristupa Bernulijevih polinoma (ili Rimanove funkcije) moraćemo da se oslonimo na jednostavnu staru teoriju brojeva.
Prvo, znamo da $1+2+....+n$ može da se napiše u obliku $\frac{n(n+1)}{2}$. Koji oblik ćemo koristiti? Prethodni je više estetski, ali i pomalo beskoristan po pitanju deljenja. (Uvek je lakše ako je delilac iskazan kao rezultat a ne kao suma). Možda bi bilo korisnije kada bi bilo neke bolje faktorizacije $1^k+2^k+.....+n^k$ koja uključuje $1+2+....+n$ ali je nema (makar ne očigledne). Kada bi postojao neki način da se spoje deljivost putem $1+2+....+n$ sa deljivošću putem $1+2+....+(n+1)$ onda bi indukcija bila pravi put, ali ni to ne izgleda kao moguća opcija. Tako da ćemo umesto toga probati sa formulom $\frac{n(n+1)}{2}$.
Tako da koristeći modularnu aritmetiku, koja je najbolji način da se dokaže da jedan broj deli drugi, naš cilj je da pokažemo da $1^k+2^k+...+n^k=0\left(\bmod \frac{n(n+1)}{2}\right)$. Hajde da na trenutak zapostavimo '2' u $\frac{n(n+1)}{2}$. Onda pokušavamo da dokažemo nešto što ima oblik

(faktor 1)x(faktor 2)|(izraz).

Ako su dva faktora uzajamno prosta, onda je naš cilj ekvivalentan odvojenom dokazivanju

(faktor 1) | (izraz) i (faktor 2) | (izraz)

Ovo bi trebalo biti lakše za dokazivanje. Lakše je dokazati deljivost ako su delioci manji. Ali nam '2' stoji na putu. Kako bi se izborili sa njim moraćemo da podelimo problem na slučajeve, u zavisnosti od toga da li je n parno ili neparno. Slučajevi su prilično slični a slučaj kada je n neparan dat je u *vežbanju 2.4.* U tom slučaju možemo da napišemo da je $n=2m$ (kako bi izbegli zbrkane članove '$\frac{n}{2}$'u sledećim jednačinama, ovakva mala organizacija posla će pomoći da lagano dođemo do rešenja). Ako zamenimo sve n-ove sa 2m-ovima, moramo da dokažemo:

$$1^k + 2^k + ... + (2m)^k = 0(\bmod m(2m+1))$$

ali pošto su m i $2m+1$ uzajamno prosti, to je ekvivalentno dokazivanju

$$1^k + 2^k + ... + (2m)^k = 0(\bmod 2m+1) \text{ i}$$

$$1^k + 2^k + ... + (2m)^k = 0(\bmod m)$$

Hajde da počnemo od dela (mod $2m+1$). Jako je sličan problemu 2.5 ali je malo lakši, jer znamo da je k neparan. Ako upotrebimo moduo $2m+1$, $2m$ je ekvivalentno sa -1, $2m-1$ je ekvivalentno sa -2, i sve tako, tako da naš izraz $1^k + 2^k + ... + (2m)^k$ postaje

$$1^k + 2^k + ... + m^k + (-m)^k + ... + (-2)^k + (-1)^k = 0(\bmod 2m+1)$$

Ovo smo uradili kako bi mogli nešto da poništimo. k je neparan tako da je $(-1)^k$ jednako -1. Onda je $(-a)^k = -a^k$ .Rezultat ovoga je to što se gornja suma može poništiti u paru i ostaje 0.

Sada moramo da rešimo deo (mod m) tj. moramo da pokažemo da je

$$1^k + 2^k + ... + (m-1)^k + (m)^k + (m+1)^k + ... + (2m-1)^k + (2m)^k = 0(\bmod m)$$

Pošto radimo po modulu m, tako da neki od gornjih članova mogu da se uproste. m i $2m$ su oba ekvivalentni 0 po modulu m a $m+1$ je ekvivalentno sa 1, $m+2$ je ekvivalentno sa 2 i tako dalje. Tako da se gornje sumiranje pojednostavlja na

$$1^k + 2^k + ... + (m-1)^k + 0^k + 1^k + ... + (m-1)^k + 0 = 0(\bmod m)$$

Ali nekoliko članova se javlja dva puta, tako da kobinacijom (i izbacivanjem nula) dobijamo

$$2(1^k + 2^k + ... + (m-1)^k) = 0(\bmod m)$$

Sada skoro istu stvar možemo da uradimo kao za (mod $2m+1$) slučaj, osim što postoji mali problem kada je m paran.

Ako je m neparan, možemo da preformulišemo gornju tvrdnju kao

$$2(1^k+2^k+\ldots+\left(\frac{m-1}{2}\right)^k+\left(-\frac{m-1}{2}\right)^k+\ldots+(-2)^k+(-1)^k)=0\left(\bmod m\right)$$

i da uradimo istu proceduru poništavanja kao pre. Ali ako je m paran (tako da je $m=2p$ na primer) onda postoji srednji član p^k koji se ne potire sa svim. Drugim rečima, u ovom slučaju izraz se ne poništava odmah do nule, već se umesto toga potire do $2p^k=0\left(\bmod 2p\right)$

Ali je ovo naravno jednako nuli. Bez obzira na to da li je p parno ili ne, dokazali smo da je $1^k+2^k+\ldots+n^k$ deljivo sa $\dfrac{n(n+1)}{2}$ ako je n paran.

Zadatak 2.7 (Shklarsky) Neka je p prost broj veći od 3. Pokazati da je brojilac (skraćenog) razlomka $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{(p-1)}$ deljiv sa p².

Ovo pitanje je pitanje tipa 'dokazati da', a ne 'pronaći' ili 'pokazati da postoji', tako da ne bi trebalo da bude potpuno nemoguće. Ipak, moramo da dokažemo nešto o brojiocu skraćenog razlomka, ne nešto što se lako rešava. Ovaj brojilac će morati da se transformiše u nešto tipičnije, kao što je algebarski izraz tako da možemo lakše sa njim da računamo. Pitanje ne zahteva samo deljivost prostim brojem, već i deljivost kvadratom prostog broja. To je znatno teže. Želeli bismo da nekako smanjimo problem na čisto deljivost prostim brojem kako bi problem bio lakši za rešavanje.

Tako da ako pogledamo oblik pitanja, treba da imamo na umu ciljeve:

a) izraziti brojilac kao matematički izraz sa kojim možemo baratati,

b) imati za cilj smanjenje problema počev od p² problema deljivosti pa do nečeg jednostavnijeg, možda p problema deljivosti.

Hajde da krenemo od prvog cilja. Prvo ćemo doći lako do brojioca, ali ne i do smanjenog brojioca. Sabiranjem razlomaka sa zajedničkim imeniocem dobijamo

$$\frac{2\times3\times\ldots\times(p-1)+1\times3\times\ldots\times(p-1)+\ldots+1\times2\times\ldots\times(p-2)}{(p-1)!}$$

Sada pretpostavljamo da možemo da dokažemo da je ovaj brojilac deljiv sa p². Kako nam to pomaže da dokažemo da je smanjeni brojilac takođe deljiv sa p²? Šta je u stvari smanjeni brojilac? To je prvobitni brojilac posle poništavanja sa imeniocem. Da li poništavanje može da uništi svojstvo p² deljivosti? Da, ako se višestruko p poništi. Ali višestruko p se ne može poništiti, jer je imenilac uzajamno prost sa p

(p je prost broj i (p-1) može da se izrazi kao proizvod brojeva manjih od p). To znači da samo treba da dokažemo da je gornji brojilac deljiv sa p^2. Sada imamo da rešimo jednačinu

$$2\times 3\times \ldots\times\left(p-1\right)+1\times 3\times\ldots\times\left(p-1\right)+\ldots+1\times 2\times\ldots\times\left(p-2\right)=0\left(\operatorname{mod} p^2\right)$$

(Opet smo se okrenuli modularnoj aritmetici, što je obično najbolji način da se vidi kada jedan broj deli drugi. Ali ako pitanje uključuje više od jedne deljivosti, na primer nešto što uključuje sve delioce određenog broja, onda su druge tehnike bolje.)

Iako sada imamo jednačinu, sva je konfuzna. Naš sledeći zadatak je da je uprostimo. Sada na levoj strani imamo neodređenu sumu neodređenih rezultata. (Neodređen samo znači da imamo '3 tačkice' u izrazu'). Ipak možemo da predstavimo neodređene rezultate malo bolje. Svaki neodređeni rezultat su tipično brojevi od 1 do p - 1. To može kompaktnije da se izrazi kao $\frac{\left(p-1\right)!}{i}$, moguće je podeliti moduo p^2 sa i jer je i uzajamno prost broj sa p^2. Tako da je sada naš cilj da dokažemo da

$$\frac{\left(p-1\right)!}{1}+\frac{\left(p-1\right)!}{2}+\ldots+\frac{\left(p-1\right)!}{p-1}=0\left(\operatorname{mod} p^2\right)$$

To faktorišemo da bismo dobili

$$\left(p-1\right)!\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p-1}\right]=0\left(\operatorname{mod} p^2\right)$$

(Bitno je da ne zaboravimo da se bavimo modularnom aritmetikom, tako da će broj kao $\frac{1}{2}$ biti ekvivalentan celom broju)

Hajde da sada vidimo šta imamo

(faktor) x (faktor) = 0 (mod p^2)

Da nemamo modularnu aritmetiku, onda bismo brzo mogli da kažemo da je jedan od faktora 0. Uz modularnu aritmetiku, možemo da tvrdimo skoro istu stvar, ali moramo biti obazrivi. Srećom prvi faktor (p - 1)! je uzajamno prost broj sa p^2 (jer je (p - 1)! uzajamno prost sa p) pa možemo da ga delimo. Rezultat je to da je predhodna jednačina ekvivalentna sa

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p-1}=0 \text{ gde sve posmatramo u prstenu } Z_{p^2}$$

(Sada je ovo jako slično našem prvobitnom pitanju, jedina razlika je to što razmatramo ceo razlomak a ne samo brojioc. Ali ne može se prelaziti iz jednog oblika u drugi bez obazrivosti. Ovakve komplikacije su bile neizbežne).

Sada smo redukovali pitanje i sada treba da dokažemo prilično bezazlenu jednačinu modularne aritmetike. Ali gde nastaviti odavde? Možda će pomoći primer. Hajde da uzmemo primer da je p = 5. Imamo

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=1+13+17+19$$

$$= 0 \text{ u prstenu } Z_{25}$$

baš kao što smo hteli. Ali zašto to funkcioniše? Brojevi 1 , 13, 17, i 19 izgledaju kao dati nasumice, ali se 'magično' uklapaju u pravu sumu. Možda je u pitanju slučajnost. Hajde da probamo za p = 7

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=1+25+33+37+10+41$$

$$= 0 \text{ u prstenu } Z_{49}$$

U pitanju je ista vrsta 'slučajnosti'. Kako to funkcioniše? Nije jasno kako sve ovo uspeva da izostavi modul p^2. Možda ako imamo cilj b) na umu, možemo da dokažemo prvo (mod p), tj.hajde da prvo dokažemo

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{(p-1)}=0$$

Daće nam nešto na čemu možemo da radimo ako ništa drugo. Uostalom, ako ne možemo da rešimo ovaj problem (mod p), nema šanse da ćemo moći da rešimo problem (mod p^2).

Ispostavilo se da je ovaj problem mnogo lakši za rad. Na primer, kada je p=5, onda imamo

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=1+3+2+4$$

$$= 0 \text{ u prstenu } Z_5$$

a kada je p=7 onda imamo

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=1+4+5+2+3+6$$

$$= 0 \text{ u prstenu } Z_7$$

Sada se pojavljuje i šablon. Recipročne vrednosti $\frac{1}{1},\frac{1}{2},...,\frac{1}{p-1}$ (mod p) izgleda da pokrivaju sve ostatke 1, 2, ...(p - 1) (mod p) tačno jednom. Na primer, u gornjoj jednačini sa p = 7, brojevi 1 + 4 +5 +2 +3+6 menjaju mesto da bi oformili 1 + 2 +3 +4 +5 +6 što je 0. Da bi proverili duži primer, mod 11 daje

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{11}=1+6+4+3+9+2+8+7+5+10 \pmod{11}$$
$$=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \pmod{11}$$
$$=0 \pmod{11}$$

Ova taktika koja pokazuje da recipročne vrednosti mogu da se poređaju dobrim redosledom važi za (mod p), ali se ne može lako generalizovati za (mod p²). Umesto što se mučimo da stavimo kvadratni kamen u okruglu rupu (iako jeste izvodljivo ako poguramo jače), bolje je naći kamen koji je okrugliji. Tako da ono što sada moramo da uradimo jeste pronaći drugi dokaz za činjenicu da

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{(p-1)}=0 \pmod{p}$$

dokaz koji generalizuje, makar delimično slučaj (mod p²).

Posle rešavanja *problema* 2.6, znamo da simetrija ili asimetrija mogu da se iskoriste, naročito kod modularne aritmetike. Kod problema dokazivanja prethodne jednačine možemo sumu da učinimo još asimetričnijom zamenjivanjem p - 1 sa -1, p - 2 sa - 2 i tako dalje da bismo dobili

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{-3}+\frac{1}{-2}+\frac{1}{-1} \pmod{p}$$

Sada možemo lako da uparimo i poništimo (nema 'srednjeg člana' koji ne može da se upari, pošto je p neparan prost broj). Da li možemo da uradimo isto kod (mod p²)?

Odgovor je 'otprilike'. Kada smo rešili problem (mod p), spojili smo $\frac{1}{1}$ i $\frac{1}{p-1}$, $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{p-2}$ i tako dalje.

Kada probamo isto spajanje kod (mod p²), ono što dobijamo je

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(p-1)/2}+\frac{1}{(p-1)/2}\right)$$
$$=\frac{p}{1\times(p-1)}+\frac{p}{2\times(p-2)}+\ldots+\frac{p}{(p-1)/2\times(p+1)/2}$$
$$=p\left[\frac{1}{1\times(p-1)}+\frac{1}{2\times(p-2)}+\ldots+\frac{1}{(p-1)/2\times(p+1)/2}\right] \pmod{p^2}$$

Ovo sada na prvi pogled pre izgleda komplikovanije nego lakše. Ali dobili smo veoma bitan faktor p na desnoj strani. Sada umesto da dokazujemo da je

(izraz) = 0 (mod p^2)

moramo da dokažemo nešto tipa

(p x izraz) = 0 (mod p^2)

što je ekvivalentno dokazivanju nečeg što ima oblik

(izraz) = 0 (mod p).

Drugim rečima, sada smo ograničeni na pitanje (mod p) umesto pitanja (mod p^2). Sada smo dostigli cilj b) dat gore. Smanjili smo pitanje na ono koje ima manji moduo, pa je i mali porast u kompleksnosti opravdan.

I brzo se vidi da je prividan porast u kompleksnosti izraza samo lažan, pošto (mod p) može da eliminiše više članova nego što (mod p^2) može. Sada samo moramo da pokažemo da

$$\frac{1}{1\times(p-1)}+\frac{1}{2\times(p-2)}+\ldots+\frac{1}{(p-1)/2\times(p+1)/2}=0\left(\operatorname{mod} p\right)$$

Ali p - 1 je ekvivalentno -1 (mod p), p - 2 je ekvivalentno - 2 (mod p) i tako dalje, tako de se jednačina smanjuje na

$$\frac{1}{-1^2}+\frac{1}{-2^2}+\ldots+\frac{1}{-\left(\left(p-1\right)/2\right)^2}=0\left(\operatorname{mod} p\right)$$

ili ekvivalentno

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{\left(\left(p-1\right)/2\right)^2}=0\left(\operatorname{mod} p\right)$$

Ova jednačina nije tako loša, osim što se niz sa leve strane završava na nepoznatom mestu ($\frac{1}{\left(\left(p-1\right)/2\right)^2}$) a ne kod prirodnijeg mesta $\frac{1}{\left(p-1\right)^2}$.

Ali možemo ih spojiti, koristeći činjenicu da je $(-a)^2=a^2$ da bi dobili

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{\left(\left(p-1\right)/2\right)^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{\left(\left(p-1\right)/2\right)^2}+\frac{1}{\left(-1\right)^2}+\frac{1}{\left(-2\right)^2}+\ldots+\frac{1}{\left(-\left(p-1\right)/2\right)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1^2}+\ldots+\frac{1}{\left(p-1\right)^2}\right]\left(\operatorname{mod} p\right)$$

Tako da dokazivanjem da je $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{\left(\left(p-1\right)/2\right)^2}$ jednako sa 0 (mod p) bilo bi ekvivalentno dokazivanju da je $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{\left(p-1\right)^2}$ jednako sa 0 (mod p). Ovo drugo je poželjnije zbog svog simetricnijeg formata.

Sada jedino moramo da dokažemo da je

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{\left(p-1\right)^2}=0\left(\bmod p\right)$$

da bi dokazali celo pitanje. Ovo je taktički mnogo bolja formulacija od prvobitne koja uključuje brojioce i p^2 deljivost.

Tako da smo sada postigli sve naše taktičke ciljeve, smanjili pitanje do pristupačne granice. Ali kuda idemo dalje? Pitanje se čini veoma usko povezano sa drugim problemom

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{\left(p-1\right)}=0\left(\bmod p\right)$$

koji smo radili. Ali nećemo da idemo u krug. Naš trenutni cilj će uključiti prvo pitanje dok je ova jednačina samo sporedan problem, lakša verzija problema. Pre nego da se vrtimo u krug ići ćemo putanjom spirale i ciljati ka rešenju. Već smo dokazali lakšu verziju pa je pitanje da li možemo dokazati naš cilj istim metodama?

Imali smo dve metode pri rešavanju. Jedna je preraspodela recipročnih vrednosti a druga je ukidanje parova. Ova druga na žalost nije tako dobra za naš cilj, uglavnom zbog kvadrata u imeniocima, koji daju simetriju a ne asimetriju. Ali metoda raspređivanja je obećavajuća. Uzećemo opet primer p = 5 (tako da možemo da se koristimo prethodnim radom)

$$\begin{aligned}\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}&=1^2+3^2+2^2+4^2\left(\bmod 5\right)\\&=1^2+2^2+3^2+4^2\left(\bmod 5\right)\\&=0\left(\bmod 5\right)\end{aligned}$$

Način na koji dobijamo rešenje kada je p = 5 dolazimo i do opšteg slučaja.

Na osnovu gornjih primera čini se da su klase ostataka $\frac{1}{1},\frac{1}{2},...,\frac{1}{(p-1)}$ (mod p) samo preraspodela brojeva 1,2,...,(p-1) (mod p) dokaz ove činjenice biće dat na kraju ove diskusije. Tako možemo reći da su brojevi $\frac{1}{1^2},\frac{1}{2^2},...,\frac{1}{(p-1)^2}$ samo preraspodela brojeva $1^2+2^2+...+(p-1)^2$. Drugim rečima

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{(p-1)^2}=1^2+2^2+...+(p-1)^2 \pmod p$$

Ovo je lakši izraz jer smo uklonili recipročne vrednosti koje su samo nijansa pri sumiranju. Ustvari sada možemo potpuno da se otarasimo sume koristeći standardnu formulu

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

(koja se lako dokazuje indukcijom) tako da smo sada uprostili $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{(p-1)^2}=0 \pmod p$ na dokazivanje da je $\frac{(p-1)p(2p+1)}{6}=0 \pmod p$

I može se lako dokazati da je ovo istinito kada je p prost broj veci od 3 (jer je $\frac{(p-1)(2p+1)}{6}$ ceo broj u tom slučaju).

To je to. Mi stalno treba da uprošćavamo jednačinu na sve lakše formulacije, dok ne dobijemo ništa. Pomalo dug put ali je nekada jedini način da se razreše ova jako komplikovana pitanja.

Sada dokaz da su reciprocne vrednosti $\frac{1}{1},\frac{1}{2},...,\frac{1}{(p-1)}$ (mod p) permutacija brojeva 1,2,...,(p-1) (mod p).

To je ekvivalentno tome da je svaki ostatak koji nije nula (mod p) recipročan jednom i samo jednom ostatku koji nije nula (mod p), što je očigledno.

Zadatak 3.1 (Greitzer 1978) (*) Pretpostavimo da je f funkcija koja preslikava pozitivan ceo broj u pozitivan ceo broj, tako da f ispunjava da je $f(n+1)>f(f(n))$ za sve cele brojeve n. Pokazati da je $f(n)=n$ za sve pozitivne cele n.

Ova jednačina deluje nedovoljno da bismo dokazali šta želimo. Na kraju krajeva, kako nejednakost može da dokaže jednakost? Drugi problemi ovog tipa (kao u vežbanju 3.1) uključuju funkcionalne jednačine i lakši su za rešavanje jer se mogu primeniti razne zamene i slične stvari i postepeno se početni podaci pretvoriti u pristupačan oblik. Ovo pitanje deluje potpuno drugačije.

Ali ako pitanje pažljivo pročitamo primetićemo da funkcija preuzima vrednosti celih brojeva za razliku od većine pitanja koja uključuju funkcionalne jednačine koje se obično preslikavaju na realne brojeve. Brzi način da se to iskoristi jeste da se nejednakost 'pojača'

$$f(n+1) \geq f(f(n))+1$$

Hajde da vidimo šta može da se izvede. Standardni metod rešavanja ovih jednačina jeste zamenjivanje relevantnih vrednosti u varijable, tako da treba početi sa n = 1:

$$f(2) \geq f(f(1))+1$$

To nam na prvi pogled ne govori mnogo o $f(2)$ ili $f(1)$ ali +1 sa desne strane nagoveštava da $f(2)$ ne može biti previše malo. Kako se f preslikava na pozitivne cele brojeve, $f(f(1))$ mora biti makar 1, tako da je $f(2)$ makar 2. Sada moramo da pokažemo da je $f(2)$ zapravo 2, tako da da smo možda na pravom putu. (Uvek probamo da iskoristimo taktike koje nas približavaju cilju, u slučaju kada svi dostupni direktni pristupi budu iscrpljeni. Samo tada treba misliti o pristupu sa strane ili povremeno unazad.)

Možemo li da pokažemo da je $f(3)$ makar 3? Možemo da probamo opet kao sa $f(2)$ da bi dobili $f(3) \geq f(f(2))+1$. Koristeći isti argument kao i gore, možemo reći da je $f(3)$ makar 2. Ali možemo li reći nešto jače? Ranije smo rekli da je $f(f(1))$ bilo makar 1. Možda je $f(f(2))$ makar 2. (Pošto već znamo da $f(n)$ treba na kraju da bude jednako sa n, znamo da je $f(f(2))$=2 ali još ne možemo iskoristiti tu činjenicu, pošto mi ustvari ne možemo koristiti nešto što pokušavamo da dokažemo.) Sa ovakvim razmišljanjem možemo upotrebiti opet jači uslov

$$f(3) \geq f(f(2))+1 \geq f(f(2)-1)+1+1 \geq 3$$

Ovde smo uključili $f(2)-1$ u 'n' naše formule. To funkcioniše pošto već znamo da je $f(2)-1$ makar 1. Čini se da možemo izvesti da je $f(n) \geq n$. Pošto smo iskoristili činjenicu da je $f(2)$ bilo makar 2 da bi dokazali da je $f(3)$ bilo makar 3, opšti dokaz podseća na indukciju.

Mada je indukcija ipak zagonetna pomisao. Pogledajmo sledeći slučaj koji kaze da je $f(4) \geq 4$. Na osnovu našeg jačeg uslova znamo da je $f(4) \geq f(f(3))+1$. Već znamo da je $f(3) \geq 3$, pa bismo voleli da izvedemo da je $f(f(3)) \geq 3$ kako bi mogli da zaključimo da je $f(f(3))+1 \geq 4$. Da bismo to izveli voleli bismo da imamo pri ruci oblik 'ako je $n \geq 3$, onda je $f(n) \geq 3$'. Najlakši način za tako nešto jeste da se ta vrsta činjenice prenese na indukciju koju pokušavamo da dokažemo. Još preciznije, pokazaćemo :

Lema 3.1 $f(m) \geq n$ za sve $m \geq n$

Dokaz

Indukcijia za n:

Baza indukcije $n = 1$: Ovo je očigledno. Dato nam je da je $f(m)$ pozitivan celi broj, tako je $f(m)$ makar 1.

Induktivni korak: Ako pretpostavimo da lema važi za n, probaćemo da dokažemo da je $f(m) \geq n+1$ za sve $m \geq n+1$. Za sve $m \geq n+1$ možemo dobiti da je $f(m) \geq f(f(m-1))+1$. Sada je $(m-1) \geq n$, pa je $f(m-1) \geq n$ (putem indukcijske hipoteze). Možemo ići dalje. Pošto je $f(m-1) \geq n$ onda je opet putem indukcijske hipoteze $f(f(m-1)) \geq n$. Onda je $f(m) \geq f(f(m-1))+1 \geq n+1$ i tada se indukcijska hipoteza može dokazati.

Ako lemu 3.1 primenimo na slučaj $m = n$, dobićemo manje bitan cilj $f(n) \geq n$ za sve pozitivne cele brojeve n.

Šta sada? Pa kao i sa svim pitanjima vezanim za funkcionalnu jednačinu, kada dobijemo novi rezultat samo treba da se njime bavimo i da pokušamo da ga kombinujemo sa prethodnim rezultatima. Naš jedini prethodni rezultat je $f(n+1) \geq f(f(n))+1$, tako da našu novu jednačinu možemo da zamenimo u ovu. Jedini koristan rezultat koji dobijamo je $f(n+1) \geq f(f(n))+1 \geq f(n)+1$. Drugim rečima, $f(n+1) > f(n)$.

Ovo je jako korisna formula. To znači da je f rastuća funkcija! To znači da je $f(m) > n$ ako i samo ako je $m > n$. Što bi dalje značilo da bi naša početna jednacina $f(n+1) > f(f(n))$ mogla biti preformulisana kao $n+1 > f(n)$. A to, uz $f(n) \geq n$ objašnjava ono što smo želeli.

Zadatak 3.2 (Australijsko takmičenje iz matematike 1984) Pretpostavimo da je f funkcija pozitivnih celih brojeva koja dobija vrednosti celih brojeva uz sledeća svojstva:

(a) $f(2) = 2$

(b) $f(mn) = f(m)f(n)$ za sve pozitivne cele brojeve m i n

(c) $f(m) > f(n)$ ako je $m > n$

Pronaći $f(1983)$

Sada moramo pronaći posebnu vrednost f. Najbolji način je da probamo da procenimo sve vrednosti f, a ne samo $f(1983)$. (1983 je inače samo godina kada se javilo ovo pitanje). Naravno treba pretpostaviti da postoji samo jedno rešenje za f. Ali implicitno je u pitanju data činjenica da postoji samo jedna moguća vrednost $f(1983)$ (inače bi bilo više od jednog odgovora) a i zbog prosečno teškog pitanja iz 1983 možemo na realan način da procenimo da postoji samo jedno rešenje za f.

Dakle, kakva su svojstva f? Znamo da je $f(2)=2$. Stalnom primenom uslova pod (b) dobijamo da je $f(4)=f(2)f(2)=4$, $f(8)=f(4)f(2)=8$ itd. Naime, indukcijom lako pronalazimo da je $f(2^n)=2^n$ za sve vrednosti n. Tako je $f(x)=x$ kada je x jednak 2^n. Možda je $f(x)=x$ za sve vrednosti x. Ako to primenimo na date uslove (a),(b) i (c) videćemo da deluje: $f(x)=x$ je jedno rešenje za (a), (b) i (c). Dakle, ako mislimo da postoji samo jedno rešenje za f, onda mora da se radi o ovom. Tako bi možda hteli da dokažemo opštije ali jasnije pitanje:

Jedina funkcija pozitivnih celih brojeva za cele brojeve koja ispunjava (a),(b) i (c) je identička funkcija (tj. $f(n)=n$ za sve vrednosti n).

Tako da moramo da dokažemo da ako f ispunjava (a), (b) i (c) onda je $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3$ itd. Hajde da prvo probamo da dokažemo da je $f(1)=1$ (kod funkcionalnih jednačina prvo treba probati sa lakim primerima kako bi stekli uvid u pitanje). Ako pogledamo (c) znamo da je $f(1)<f(2)$ i znamo da je $f(2)=2$, tako da je $f(1)$ manje od 2. A na osnovu (b) dobijamo da (ako je n =1 i m =2) je

$f(2)=f(1)f(2)$ i pritom $2=2f(1)$.

To znači da $f(1)$ mora biti jednako sa 1, kao što smo hteli.

Sada imamo da je $f(1)=1$ i $f(2)=2$. A šta ćemo sa $f(3)$? Nije nam od pomoći više (a) dok (b) samo daje $f(3)$ kod drugih brojeva kao što su $f(6)$ ili $f(9)$, što takođe nije od neke pomoći. (c) nam daje da je $f(2)<f(3)<f(4)$ ali $f(2)$ je 2 i $f(4)$ je 4 tako da je $2<f(3)<4$

Ali jedini ceo broj između 2 i 4 je 3. Onda $f(3)$ mora biti 3.

To nam daje neki znak: $f(3)$ je bilo 3 samo zato što je ceo broj. Hajde da vidimo da li možemo češće da se oslonimo na ove znake.

Već znamo da je $f(4)=4$. Hajde da vidimo šta ćemo sa $f(5)$. Ako upotrebimo (c) u nadi da ćemo ponoviti istu stvar kao i sa $f(3)$, dobijamo $f(4)<f(5)<f(6)$

Sada je $f(4)=4$. Ali šta ćemo sa $f(6)$? $f(6)=f(2\cdot 3)=f(2)f(3)=2\cdot 3=6$. Stoga je $f(5)$ između 4 i 6 i mora biti 5. Ovo ide na bolje. Sada smo rešili sve vrednosti $f(n)$ sve do n =6.

Pošto se oslanjamo na prošle rezultate kako bi postigli nove, opšti dokaz jako podseća na indukciju. Ali pošto ne koristimo samo jedan prošli rezulltat već njih nekoliko, verovatno nam treba jaka indukcija.

Lema 3.2 $f(n)=n$ za sve n.

Dokaz:

Koristimo jaku indukciju. Prvo proveravamo bazu indukcije: da li je $f(1)=1$? Da, već smo to pokazali. Sada treba da pretpostavimo da je $m>2$ i da je $f(n)=n$ za sve n manje od m. Želimo da dokažemo da je $f(m)=m$. Kada se osvrnemo na par primera videćemo da moramo da podelimo na slučajeve kada je m parno i neparno.

Slučaj 1: m je parno.

U ovom slučaju možemo napisati $m=2n$ za neke cele n. Kako je n manje od m, na osnovu hipoteze jake indukcije $f(n)=n$. Stoga je $f(m)=f(2n)=f(2)f(n)=2n=m$ kao što smo i hteli.

Slučaj 2: m je neparno.

Ovde pišemo $m=2n+1$. Na osnovu (c), $f(2n)<f(m)<f(2n+2)$. Jakom indukcijom je $f(2n)=2n$ i $f(n+1)=n+1$ jer su $n+1$ i $2n$ manji od m.

A na osnovu (b) $f(2n+2)=f(2)f(n+1)=2(n+1)=2n+2$, tako da naša nejednačina postaje $2n<f(m)<2n+2$ i tako je $f(m)=2n+1=m$ kako smo i želeli. Tako da u oba slučaja važi hipoteza indukcije. I tako po jakoj indukciji $f(n)$ mora biti n. Odgovor na naše pitanje $f(1983)$ mora biti 1983 i to je to.

Zadatak 3.3: (Australijsko takmičenje 1987.) Neka su a, b i c realni brojevi takvi da $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ gde su svi imenioci različiti od nule. Dokazati da je $\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}+\frac{1}{c^5}=\frac{1}{(a+b+c)^5}$

Na prvi pogled ovaj zadatak deluje jednostavno. Postoji samo jedna data informacija tako da bi trebalo da postoji i niz logičkih koraka koji vode do željenog rezultata. Prvobitni pokušaj da se iz date jednačine izvede druga jednačina je da se i leva i desna strana podignu na peti stepen što nam daje nešto slično željenom rezultatu ali sa znatno konfuznijom funkcijom na levoj strani. Izgleda da nema drugih očiglednih manipulacija što se tiče direktnog pristupa.

Na drugi pogled, prva jednačina deluje sumnjivo, kao jedna od jednačina za koje su učenici upozoreni da ih ne koriste jer su obično varljive. Ovo nam daje naš prvi pravi trag. Prva jednačina bi trebalo da prilično ograniči a, b i c. Možda bi vredelo da se data jednačina drugačije interpretira.

Zajednički imenilac deluje kao dobar početak. Kombinovanjem tri recipročne vrednosti na levoj strani dobijamo $\frac{ab+bc+ac}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$ i unakrsnim množenjem dobijamo

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+3abc=abc$$

Sada bi se mogli setiti raznih nejednačina koje bi se ovde mogle upotrebiti: Koši-Švarc, aritmetička sredina, geometrijska sredina i itd. To ne bi bilo loše da su a, b i c ograničene da su pozitivne, ali ovde ne postoji takvo ograničenje. Zapravo, uslov ne važi ako su a, b i c pozitivni jer bi $\frac{1}{a+b+c}$ onda bilo manje od sve tri recipročne vrednosti na levoj strani početne jednačine.

Pošto je jednačina $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+3abc=abc$ ekvivalentna sa početnim uslovom i algebarski je prostija jer nema recipročnih vrednosti. Možda bismo mogli da izvedemo traženu jednačinu iz ove naše. Direktni pristup ponovo nije moguć. Jedini drugi način da se jedna jednačina izvede iz nekih drugih jednačina je da se dokaže neki srednji rezultat ili da se izvrši neka korisna zamena.

Čini se da zamene i nisu toliko dobre. Početni uslov i naša modifikovana jednačina su same po sebi dovoljno jednostavne i nikakve zamene ih ne bi činile još jednostavnijim. Zato ćemo probati da pogodimo i dokažemo jedan srednji rezultat.

Najbolja vrsta srednjeg rezultata je parametrizacija jer ovo može direktno da se zameni u željenoj jednačini. Jedna od načina da se izvrši parametrizacija je da se reši jedna od varijabli, recimo a. Naša jednačina neće biti lako rešena za a zbog kvadratne formule dok se početna jednačina rešava za a. Možemo probati i nešto drugo. Našu dobijenu jednačinu možemo prevesti u neki bolji oblik. Rešenja te jednačine su koreni polinoma $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+2abc$. Najbolji način kako postupati sa polinomima je da se rastave na činioce. Da bismo otkrili koji su činioci moramo da eksperimentišemo.

Polinom je homogen, pa bi i njegovi činioci trebalo da budu takvi. Polinom je simetričan, tako da bi i činioci trebalo da budu međusobno simetrični. Zato bi trebalo da probamo sa činiocima oblika $a+b$, $a-b$, a, $a+b+c$, $a+b-c$, itd. Ubrzo postane očigledno da su $a+b$, $b+c$ i $c+a$ faktori. Odavde je lako utvrditi da je naš polinom moguće podeliti na činioce ($a+b$) ($b+c$) ($c+a$). To znači da uslov tačan ako i samo ako je $a+b$=0, $b+c$=0 ili $c+a$=0. Zamenjujući svaku od ovih jednačina u jednačinu koju treba dokazati dolazimo do rešenja. Npr $a+b$=0 tj $a=-b$ sledi

$$\frac{1}{a^5}+\frac{1}{(-a)^5}+\frac{1}{c^5}=\frac{1}{(a-a+c)^5} \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{c^5}=\frac{1}{c^5}$$

Zadatak 3.4: Dokazati da se bilo koji polinom iz oblika $f(x)=(x-a_o)^2(x-a_1)^2\cdots(x-a_n)^2+1$, gde su $a_o,a_1,...,a_n$ svi celi brojevi, ne može rastaviti na dva netrivijalna polinoma, svaki sa celobrojnim koeficijentima.

Ovo je prilično opšta konstatacija koja kaže da je na primer:

$$(x-1)^2(x+2)^2+1=x^4+2x^3-3x^2-4x+5$$

Polinom ne može da se rastavi na druge polinome sa celim brojevima kao koeficijentima. Kako to možemo da dokažemo?

Pretpostavimo da se $f(x)$ rastavi na dva netrivijalna polinoma , $p(x)$ i $q(x)$. Onda $f(x)=p(x)q(x)$ za sve x. Ali moramo zapamtiti da f ima posebne osobine: to je neka vrsta kvadrata plus jedan. Kako to onda možemo da koristimo? Pa mogli bismo reći da je $f(x)$ uvek pozitivno ili čak da je jedinica, ali to ne govori mnogo o $p(x)$ i $q(x)$, osim da oni imaju isti znak. Međutim, imamo još jedan podatak: $f(x)$ nije samo neki kvadrat plus jedan nego je taj kvadrat iz kombinacije linearnih činioca. Možemo li da ove $(x-a_i)$ upotrebimo u našu korist?

Najkorisniji činilac je 0, jer bi onda ceo izraz bio 0. $(x-a_i)$ je 0 kada je x jednako a_i pa to možemo ubaciti za x. Dobijamo: $f(a_i)=...(a_i-a_i)^2...+1$

Ako se vratimo na $p(x)$ i $q(x)$ ovaj rezultat znači da je $p(a_i)q(a_i)=1$

Šta sve ovo znači? Veoma malo ukoliko se neko ne seti da p i q imaju koeficijente sa celim brojevima i da su a_i celi brojevi. Rezultat svega ovoga je das u i $p(a_i)$ i $q(a_i)$ celi brojevi. Tako imamo dva cela broja koja se množe do 1. To jedino može da se desi kada su celi brojevi ili oba 1 ili oba -1.

Ukratko :

$p(a_i)=q(a_i)=\pm 1$. Ovde treba biti obazriv sa obeležavanjem '$\pm$', mi znamo da su $p(a_1)$ i $q(a_1)$, na primer jednaki ali $p(a_1)$ i $p(a_2)$ mogu da imaju iste ili suprotne znakove na osnovu svega što znamo do sada.

Manje više smo utvrdili vrednost od $p(a_0)...p(a_n)$ i $q(a_0)...q(a_n)$. Ali polinomi imaju onoliko stepena slobode koliki je njihov stepen. Sada je $pq=f$ tako da je stepen od p plus stepen od q ustvari stepen od f , što je $2n$. To znači da jedan od polinoma, na primer p, ima stepen najviše n. Kao zaključak, imamo jedan polinom sa stepenom koji je najviše n ali ograničen da se nadje na datim tačkama n. Nadajmo se da ovo može da se iskoristi za kontradikciju a to je ono što tražimo.

Šta mi to znamo o nekom polinomu koji ima stepen do najviše n? On ima najviše n korena. Da li znamo nešto o korenima od p? P je činilac od f, tako da su koreni od p takođe koreni od f. Šta su koreni od f? Oni ne postoje (u najmanju ruku nema ni jednog na liniji gde su realni brojevi) f je uvek pozitivno tj. uvek je najmanje 1. Pa shodno tome nema korene tj. p nema korene. A šta to onda znači kad polinom nema korene? To znači da on nikada ne prelazi nulu, što znači on nikada ne menja znak. Drugim rečima, p je uvek pozitivno ili uvek negativno. To nas dovodi do dva slučaja, ali možemo sebi uštedeti malo truda ako primetimo da jedan slučaj uključuje drugi. I zaista, ako imamo jednu podelu na činioce $f(x)=p(x)\,q(x)$, mi automatski imamo drugu podelu na činioce $f(x)=(-p(x))(-q(x))$. Pa tako ako je p uvek negativno, mi uvek možemo da zamenimo tu podelu na činioce i da završimo sa novom podelom na činioce gde je p uvek pozitivno.

Uzećemo da je p uvek pozitivno, bez gubljenja opštosti. Mi već znamo da je $p(a_i)$ ili +1 ili -1, i sada znamo da je pozitivno, pa $p(a_i)$ mora da bude +1 za sve vrednosti i. A $q(a_i)$ je primoramo da bude jednako kao i $p(a_i)$ tj. +1 za sve i. Šta sada?

Pa $p(x)$ i $q(x)$ su primorani da imaju vrednost +1 najmanje n puta. To drugačije može da se izrazi preko korena na sledeći način: $p(x)-1$ i $q(x)-1$ imaju najmanje n korena. Ali $p(x)-1$ ima stepen koji je najviše n, jer i sam $p(x)$ ima stepen od najviše n. To znači da jedini način da $p(x)-1$ može da ima n korena je da $p(x)-1$ ima stepen koji je tačno n. To onda znači da je $p(x)$ stepena n, a takođe onda i $q(x)$ je stepena n.

Sada da sumiramo ono što do sada znamo: pretpostavili smo da je $f(x) = p(x)\,q(x)$. P i q su oba pozitivna cela broja polinoma stepena n, a $p(a_i) = q(a_i) = 1$. Ili $p(a_i) - 1 = q(a_i) - 1 = 0$, za sve vrednosti i. Sada znamo korene od $p(x) - 1$: to su a_i-ovi. Oni su jedini koreni od $p(x) - 1$ jer $p(x) - 1$ može jedino da ima n korena najviše. To znači da je $p(x) - 1$ jednako $p(x) - 1 = r(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$ a slično tome $q(x) - 1 = s(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$. Gde su r i s neke konstante. Da bismo znali više o r i s setimo se da su p i q polinomi sa celim brojevima. Vodeći koeficijent za $p(x) - 1$ je r, a za q je s. To znači da r i s moraju da budu celi brojevi.

Sada ove formule za $p(x)$ i $q(x)$ primenjujemo na našu originalnu formula $f(x) = p(x)\,q(x)$ i dobijamo

$$(x - a_1)^2 (x - a_2)^2 \cdots (x - a_n)^2 + 1 = \left(r(x - a_1)\cdots(x - a_n) + 1\right) \times \left(s(x - a_1)\cdots(x - a_n) + 1\right)$$

Ovu jednačinu čine dva eksplicitno određena polinoma. Najbolja stvar koju sada treba uraditi je uporediti koeficijente.

Upoređujući x^n koeficijente dobijamo da je $1 = r\ s$, a pošto su r i s celi brojevi, to znači da je $r = s = 1$ ili $r = s = -1$. Hajde da prvo pretpostavimo da je $r = s = 1$. Naša polinomska jednačina je sada ovakva

$$(x - a_1)^2 (x - a_2)^2 \cdots (x - a_n)^2 + 1 = \left((x - a_1)\cdots(x - a_n) + 1\right) \times \left((x - a_1)\cdots(x - a_n) + 1\right)$$

Nakon proširenja i skraćivanja ovo postaje $2(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) = 0$, što je smešno . Drugi slučaj je sličan.

Vežbanje 2.1: U jednoj društvenoj igri madjioničar zamoli jednog učesnika da zamisli jedan trocifren broj abc_{10}. Onda mu kaže da sabere 5 brojeva acb_{10}, bac_{10}, bca_{10}, cab_{10} i cba_{10} i da otkrije njihov zbir. Pretpostavimo da je zbir 3194. Koji je broj zamislio učesnik?

Krećemo od toga da odredimo opseg u kom se nalaze ove cifre tj. zbir cifara. S obzirom da se svaka od tri cifre u nekom trenutku nalazi na prvom mestu trocifrenog broja, znači da ne mogu biti nula.

$$3 \le a + b + c \le 27$$

Znamo da je $acb_{10} + bac_{10} + bca_{10} + cab_{10} + cba_{10} = 3194$. Ako bismo to malo rasčlanili, dobili bismo:

$$100a + 200c + 200b + 20c + 20a + 10b + 2a + 2b + c = 3194$$

$$\text{tj. } 122a + 212b + 221c = 3194$$

Ovde deluje da je najlakši put do rešenja modularna matematika. U ovom slučaju je zgodno raditi sa velikim brojevima. Pošto je 53 delioc broja 212, možemo uzeti taj broj .

$$122a + 212b + 221c = 3194$$

$$16a + 9c \equiv 14(\text{mod}\,53)$$

sada nam se isplati da ovo pomnožimo sa 6 da bismo dobili rezultate koji su manji brojevi:

$$96a + 54c \equiv 84(\text{mod}\,53)$$

$$-10a + c \equiv -22(\text{mod}\,53)$$

$$c \equiv 10a - 22(\text{mod}\,53)$$

Znamo da je a cifra a takođe i c. Isprobavanjem dobijamo da je jedino rešenje za a ustvari $a = 3$. Zatim dobijamo da c daje isti ostatak kao i 8 pri deljenju sa 53. Odatle zaključujemo da c jedino i može da bude 8.

Sa druge strane, imamo 4 kao cifru jedinice u našoj sumi. To znači da je $2a + 2b + c \equiv 4(\text{mod}\,10)$ tj. $2b \equiv 0(\text{mod}\,10)$. Odavde imamo da je $b = 5$.

Ovo znači da je učesnik zamislio broj 358. Lako je proveriti istinitost ovog tvrđenja.

Vežbanje 2.2: Naći najveći ceo broj n takav da je $n^3 + 100$ deljiv sa $n + 10$.

Pošto se u zadatku trazi deljivost nekim odredjenim brojem zaključujemo da nam je potrebna modularna matematika da bismo to dokazali. Takodje je prvo što nam pada na pamet da trazimo ostatak pri deljenju sa $n + 10$.

$$(-10)^3 + (90 - n) \equiv 0(\text{mod}(n + 10))$$

$$-1000 + 90 - n \equiv 0(\text{mod}(n + 10))$$

$$-n \equiv 910(\text{mod}(n + 10))$$

$$10 \equiv 910(\text{mod}(n + 10))$$

$$0 \equiv 900(\text{mod}(n + 10))$$

Iz ovog postupnog rešavanja dobijamo da je najveći mogući broj za $n + 10$ upravo 900 tj. n =890.

Vežbanje 2.3: Pokazati da jednačina $x^4 + 131 = 3y^4$ nema rešenja ako su x i y celi brojevi.

Jednačina na prvi pogled dejuje da joj treba prići sa stanovišta moularne matematike. Besmisleno je posmatrati ostatke pri deljenju sa x ili pri deljenju sa y. Sa druge strane broj 131 je prevelik da bi se nešto lepo izvelo sa njim. Probaćemo na primer broj 5. Gledaćemo ostatak pri deljenju brojem 5.

$$x^4 + 1 = 3y^4\,(\text{mod}\,5)$$

S obzirom na to da su nam x i y nepoznate moramo da pokušamo metodom isprobavanja nekih vrednosti u nadi da ćemo uočiti neku pravilnost.

x	x^4	x^4+1 (mod 5)	y	y^4	$3y^4$ (mod 5)
0	0	1	0	0	0
1	1	2	1	1	3
2	1	2	2	1	3
3	1	2	3	1	3
4	1	2	4	1	3

Baš ono što smo i očekivali. Odavde zaključujemo da jednačina nem rešenja ako su naše nepoznate celi brojevi jer nikada ne daju isti ostatak pri deljenju sa 5.

Vežbanje 2.4: Neka su k i n prirodni i neparni brojevi (slučaj kada je n parno dat je u *zadatku 2.6*). Dokazati da je zbir $1^k+2^k+......+n^k$ deljiv sa $1+2+....+n$.

n-neparno , n=2m+1, $1+2+....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ➔ $\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{(2m+1)(2m+2)}{2}=(2m+1)(m+1)$

$$1^k+2^k+......+n^k \equiv 0 \quad \left(\bmod \ \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$1^k+2^k+......+(2m+1)^k \equiv 0 \quad (\bmod \ (2m+1)(m+1))$$

Pošto su 2m+1 i m+1 uzajamno prosti možemo da podelimo na slučajeve:

a) $1^k+2^k+......+(2m+1)^k \equiv 0 \quad (\bmod \ 2m+1)$

b) $1^k+2^k+......+(2m+1)^k \equiv 0 \quad (\bmod \ m+1)$

$$2m+1 \equiv 0 \quad (\bmod \ 2m+1)$$

$$2m \equiv -1 \quad (\bmod \ 2m+1)$$

$$2m-1 \equiv -2 \quad (\bmod \ 2m+1)$$

$$\bullet \qquad \bullet \qquad \bullet$$

$$2m-m+1 \equiv -m \quad (\bmod \ 2m+1)$$

$$1^k+2^k+......+m^k+(-m)^k+....+(-2)^k+(-1)^k+0^k \equiv 0 \quad (\bmod \ 2m+1)$$

Sve se krati u parovima tako da je ovo tvrđenje tačno!

Slično slučaju pod a)

$$1^k + 2^k + ... + m^k + \ 0^k + 1^k + 2^k + ... + m^k \equiv 0 \ \ (\bmod\ m+1)$$

$$2(\ 1^k + 2^k + ... + m^k) \equiv 0 \ \ (\bmod\ m+1)$$

$m+1$ - neparno , m -parno

$$2(1^k + 2^k + ... + (\frac{m}{2})^k + (-\frac{m}{2})^k + ... + (-2)^k + (-1)^k) \equiv 0 \ \ (\bmod\ m+1)$$

Takođe se sve krati u parovima

$m+1$ - parno , m -neparno ➔ $m+1 = 2p$ ➔ $m = 2p-1$

$$2(1^k + 2^k + ... + (2p-1)^k) \equiv 0 \ \ (\bmod\ 2p)$$

Ovde ostaje srednji član p^k

$$2p^k \equiv 0 \ (\bmod\ 2p)$$

Vežbanje 2.5: Neka je $n \geq 2$ ceo broj. Pokazati da $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ nije ceo broj.

U zadatku treba pokazati da određeni broj nije ceo. Možemo da krenemo od toga da jeste i da se nadamo da ćemo dobiti kontradikciju. Naime,

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = m$ gde nam je m ceo broj tj. iz skupa Z.

Ovde nam je potreban Bertrandov postulat koji kaže da za svaki prirodan broj n postoji prost broj u brojevima $n+1, n+2, ..., 2n$ (tj. između brojeva n i $2n$).

Ako uzmemo da nam je $\frac{n}{2} < p < n$ imamo dva slučaja.

1° $n = 2k$, ovde nam je n paran broj i imamo $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + ... + \frac{1}{2k} = m$, sada se p nalazi u poretku $k+1 < p < 2k$ pa možemo primeniti pomenuti Bertrandov postulat da je p prost broj. Naš broj možemo predstaviti kao:

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + ... + \frac{1}{2k} = \frac{1}{p} + \frac{a}{b}$, gde p sigurno ne deli b. Odavde je $\frac{1}{p} + \frac{a}{b} = m$

Sređivanjem tj. množenjem sa pb dobijamo $b + pa = mpb$. Obzirom da je jednačina u pitanju odavde mora da sledi da p deli b zbog leve strane jednakosti. A to je kontradikcija i već smo naveli da to nikako ne može da bude tačno.

2° $n=2k+1$, ovde nam je n neparan broj i imamo

$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+...+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}=m$, ovde je p u poretku $k+1<p<2k+2$ i primenom Bertrandovog postulata slučaj se svodi na prethodni. Na isti način se dolazi do kontradikcije.

Vežbanje 2.6 : Neka je p prost broj i k pozitivan ceo broj koji nije deljiv sa p-1. Pokazati da je $1^k+...+(p-1)^k$ deljiv sa p.

Ovde nam je potrebno opisivanje ciklične grupe $\left(Z_p\setminus\{0\},\cdot_p\right)$ tj. $Z_p=\{0,1,...,p-1\}$ tada postoji $r\in Z_p\setminus\{0\}$ tako da je $<r>=\{r,r^2,...,r^{p-1}\}=\{1,2,...,p-1\}$ odavde je:

$$\begin{aligned}1^k+2^k+...+(p-1)^k &\equiv_p r^k+r^{2k}+...+r^{(p-1)k}\\ &\equiv_p r^k+\left(r^k\right)^2+...+\left(r^k\right)^{p-1}\end{aligned}$$

Uzećemo da je $t=r^k\neq_p 1$ jer je sigurno da (p-1) ne deli k. Red elementa r u Z_p je p-1. Ako je $u=t+t^2+...+t^{p-1}$ tada je $(t-1)u=t^2+t^3...+t^p-t-t^2-...-t^{p-1}$ posle skraćivanja ostane $t^p-t=t\left(t^{p-1}-1\right)\equiv_p 0$ jer je prema Maloj Fermaovoj teoremi $t^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$.

Kada sumiramo sve što smo uradili dobijamo da p ne deli (t-1) ali da p deli (t-1)u. Odatle zaključujemo da p deli u tj kada se setimo šta nam je u, dobijamo da p zaista deli $1^k+...+(p-1)^k$.

Vežbanje 3.1: Neka je funkcija f neprekidna, realna funkcija za koju važi da je $f(0)=1$ i $f(m+n+1)=f(m)+f(n)$ za sve prirodne brojeve. Pokazati da je $f(x)=1+x$ za sve realne x.

Isprobavanjem nekih vrednosti možemo da vidimo u kom smeru treba da započnemo dokaz zadatka.

$f(0)=1$	$f(0)=1+0=1$
$f(1)=f(0+0+1)=f(0)+f(0)=1+1=2$	$f(1)=1+1=2$
$f(2)=f(1+0+1)=f(1)+f(0)=2+1=3$	$f(2)=1+2=3$
$f(3)=f(1+1+1)=f(1)+f(1)=2+2=4$	$f(3)=1+3=4$
•	•
•	•
•	•

Odavde deluje da je to zaista tačno i da će indukcijom za prirodne brojeve ići lako.

Indukcija:

1° $n=1$: $f(1)=2=1+1$

2° Pretpostavimo da tvrđenje vazi za svako n: $f(n)=1+n$

3° Treba pokazati da iz $n \Rightarrow n+1$: $f(n+1)=f(n+0+1)=f(n)+f(0)=1+n+1=1+(1+n)$

Dokazali smo tvrđenje ali samo za prirodne brojeve. Probaćemo da dokažemo za cele brojeve.

$$f(m+(-m)+1)=f(m)+f(-m)$$

$$f(1)=f(m)+f(-m)$$

Pošto je m prirodan broj možemo iskoristiti tvrđenje koje smo već dokazali.

$$f(-m)=f(1)-f(m)=2-(1+m)=1-m=1+(-m)$$

Ostaje nam samo da dokažemo za racionalne brojeve.

Čemu bi bilo jednako $f\left(\frac{n}{3}\right)$?

$$f\left(\frac{n}{3}\right)+f\left(\frac{n}{3}\right)+f\left(\frac{n}{3}\right)=f\left(\frac{n}{3}+\frac{n}{3}+1\right)+f\left(\frac{n}{3}\right)=f\left(\frac{n}{3}+\frac{n}{3}+1+\frac{n}{3}+1\right)=f\left(n+2\right)=n+2+1=n+3$$

Ako izjednačimo početnu levu stranu i desnu dobijamo $3f\left(\frac{n}{3}\right)=n+3 \Rightarrow f\left(\frac{n}{3}\right)=\frac{n}{3}+1$

Dokaz opšteg slučaja bi bio sličan.

$$f\left(\frac{n}{m}\right)+f\left(\frac{n}{m}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{m}\right)=f\left(\frac{n}{m}+\frac{n}{m}+\cdots+\frac{n}{m}+m-1\right)=f\left(n+m-1\right)=n+m-1+1=n+m$$

Ponovo izjednačavanjem strana dobijamo $mf\left(\frac{n}{m}\right)=n+m \Rightarrow f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}+1$

S obzirom da je naša funkcija na početku data kao neprekidna možemo da primenimo limes funkcije kad $x_n \to x$ gde je $x_n \in Q$. Dokazali smo da je $f\left(x_n\right)=x_n+1$ i dobijamo $f\left(x\right)=x+1$

To bi ujedno bio i kraj dokaza za realne brojeve.

Vežbanje 3.2: Pokazati da se problem 3.2 može rešite i ako uslov (a) zamenimo slabijim uslovom

(a′) $f(n)=n$ za bar jedan ceo broj $n \geq 2$

Pored ovog uslova važe i ona dva uslova iz problema 3.2

(b) $f(mn)=f(m)f(n)$, $m,n \in N$

(c) $f(n) \leq f(n+1)$, $n \in N$

Sada je dovoljno samo dokazati da je $f(2)=2$ i dokaz ovog zadatka se svodi na dokaz *problema 3.2*.

Znamo da je $f(n)=n$ za neko $n\geq 2$. Odavde sledi da je:

$n=f(n)=f(1\cdot n)=f(1)f(n)=f(1)n$ i zaključujemo da je $f(1)=1$

Dakle, znamo da funkcija f ima svojstva: $f:N\to Z$, $f(1)=1$, $f(n)=n$ i da je rastuća funkcija.

Odavde jedino može biti $f(2)=2$, $f(3)=3$, …..

Vežbanje 3.4 : Pronaći sve funkcije koje slikaju nenegativne realne brojeve na nenegativne realne brojeve takve da važi:

$$f\left(xf\left(y\right)\right)f\left(y\right)=f\left(x+y\right),\ \text{za sve } x,y\geq 0$$

$$f\left(2\right)=0,$$

$$f\left(x\right)\neq 0,\ 0\leq x<2$$

Prvo, za $y=2$ iz (a) imamo:

$f\left(xf\left(2\right)\right)f\left(2\right)=f\left(x+2\right)$ pa pošto je $f\left(2\right)=0$, imamo da je $f\left(x+2\right)=0$, za $x\geq 0$. Dakle, $f\left(x\right)=0$ za $x\geq 2$. Ovde možemo da uvedemo smenu $x+2=t$ pa je $f\left(t\right)=0,\ t\geq 2$.

Drugo, za $x+y=2$ tj. $x=2-y$, $x,y\geq 0$, imamo:

$f\left(\left(2-y\right)f\left(y\right)\right)f\left(y\right)=f\left(2\right)=0$. Kako su $x,y\geq 0$ i $x+y=2$ sledi $x,y\in\left[0,2\right]$ pa je $f\left(\left(2-y\right)f\left(y\right)\right)=0$ za svako $y\in\left[0,2\right)$, jer je $f\left(y\right)\neq 0$ zbog uslova (c).

Dakle , za sada $f\left(\left(2-y\right)f\left(y\right)\right)=0$, $y\in\left[0,2\right)$ i $f\left(y\right)=0$, $y\geq 2$. Treba naći $f\left(y\right)$ za $0\leq y<2$.

Kako je $f\left(x\right)\neq 0$, $x\in\left[0,2\right)$ ➔ $\left(2-y\right)f\left(y\right)\geq 2$ za svako $y\in\left[0,2\right)$ tj. $f\left(y\right)\geq\dfrac{2}{2-y}$, $y\in\left[0,2\right)$.

Ako bi za neko $y_0\in\left[0,2\right)$ bilo $f\left(y_0\right)>\dfrac{2}{2-y}$, sledi da postoji $y_1>y_0$, $y_1<2$ tako da je

$f\left(y_0\right)=g\left(y_1\right)=\dfrac{2}{2-y_1}$.

Kako je $0\leq y_0<y_1<2$ to je $2-y_1\in\left(0,2\right)$.

Dakle imamo ,

$$0=f\left(2\right)=f\left(\left(2-y_1\right)\frac{2}{2-y_1}\right)=f\left(\left(2-y_1\right)f\left(y_0\right)\right)$$

dakle iz (a) sledi da je $f\left(\left(2-y_1\right)f\left(y_0\right)\right)f\left(y_0\right)=0=f\left(2-y_1+y_0\right)$ tj. $f\left(2+y_0-y_1\right)=0$. Kako je $0<2+y_0-y_1<2$ jer je $y_0-y_1<0$, dolazimo do kontradikcije jer je iz (c) $f\left(x\right)\neq 0, 0\leq x<2$.

Dakle, za svako $y\in\left[0,2\right)$ je $f\left(y\right)=\dfrac{2}{2-y}$.

Konačno , $f\left(x\right)=\left\{\begin{matrix} 0, x\geq 2 \\ \dfrac{2}{2-x}, 0\leq x<2 \end{matrix}\right\}$

Lako se proverava da ova funkcija zadovoljava (b) i (c) postavljene uslove. Za uslov (a) imamo:

$$f\left(xf\left(y\right)\right)=f\left(x\frac{2}{2-y}\right)=f\left(\frac{2x}{2-y}\right)$$

Ako je $\dfrac{2x}{2-y}\geq 2$ ➔ $f\left(\dfrac{2x}{2-y}\right)=0$, tj. $f\left(xf\left(y\right)\right)=0$ pa je $f\left(xf\left(y\right)\right)f\left(y\right)=0=f\left(x+y\right)$ jer iz $\dfrac{2x}{2-y}\geq 2$ ➔ $2x\geq 4-2y$ ➔ $2\left(x+y\right)\geq 4$ ➔ $x+y\geq 2$ pa je $f\left(x+y\right)=0$.

Ako je $\dfrac{2x}{2-y}<2$ važi $f\left(xf\left(y\right)\right)f\left(y\right)=f\left(\dfrac{2x}{2-y}\right)f\left(y\right)=\dfrac{2}{2-\dfrac{2x}{2-y}}\dfrac{2}{2-y}$

Kada ovo malo sredimo dobijamo $\dfrac{2}{2-\left(x+y\right)}=f\left(x+y\right)$

Vežbanje 3.6: Naći sve cele brojeve a, b, c i d takve da istovremeno važi da je $a+b+c+d=0$ i $a^3+b^3+c^3+d^3=24$

Pošto imamo dve jednačine koje povezuju naše nepoznate, posmatraćemo ih kao sistem. Problem je što imamo više nepoznatih nego datih jednačina pa je potrebno izvesno tumačenje.

Hoćemo prvu jednačinu nekako da upotrebimo u drugoj. Najlogičnije je izraziti zbir: $a+b=-\left(c+d\right)$ i uvešćemo smenu, $t=a+b$,da bi nam bilo lakše izražavanje u drugoj jednačini.

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= \left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right) \\ &= \left(a+b\right)\left(\left(a+b\right)^2-3ab\right) \\ &= t\left(t^2-3ab\right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c^3+d^3 &= \left(c+d\right)\left(c^2-cd+d^2\right) \\ &= \left(c+d\right)\left(\left(c+d\right)^2-3cd\right) \\ &= -t\left(t^2-3cd\right) \end{aligned}$$

Kao drugu jednačinu sada imamo:

$t\left(t^2-3ab\right)-t\left(t^2-3cd\right)=24$ tj. $3t\left(cd-ab\right)=24$ i konačno $t\left(cd-ab\right)=8$

Sada deluje lakše pošto nemamo puno slučajeva za ovaj proizvod.

1° Ako je t=1 onda je $\left(cd-ab\right)=8$.

Kako je t=1 imamo da je $a+b=1, c+d=-1$. Kada ovo primenimo da predhonu jednačinu dobijamo

$c\left(-1-c\right)-a\left(1-a\right)=8$ tj. $\left(a-c\right)\left(a+c\right)-\left(a+c\right)=8$ in a kraju $\left(a+c\right)\left(a-c-1\right)=8$

a) $a-c-1=1$ ➔ $2a=10$ ➔ $a=5, c=3, d=-4, b=-4$

$a+c=8$

b) $a-c-1=-1$ ➔ $2a=-8$ ➔ $a=-4, c=-4, d=3, b=5$

$a+c=-8$

Isprobavanjem ostalih varijanti dobijamo istu kombinaciju brojeva ili brojeve koji nisu celi.

2° Ako zamenimo vednosti iz prethodnog slučaja dobijamo isti rezultat sličnim sistemom.

3° Ako je t=2 onda je $cd-ab=4$

Kako je t=2 imamo da je $a+b=2, c+d=-2$. Kada ovo primenimo dobijamo $\left(a+c\right)\left(a-c-2\right)=4$

a) $a-c-2=2$ ➔ $2a=6$ ➔ $a=3, c=-1, d=-1, b=-1$

$a+c=2$

b) $a-c-2=-2$ ➔ $2a=-2$ ➔ $a=-1, c=-1, d=-1, b=3$

$a+c=-2$

Za sve ostale slučajeve dobijamo isti rezultat. Dakle, konačno rešenje su kombinacija brojeva 3,-1,-1,-1 i 3,5,-4,-4.

Vežbanje 3.8: Neka je $f(x)$ polinom čiji su koeficijenti celi brojevi i neka su i a i b celi brojevi. Pokazati da $f(a)-f(b)$ može da bude 1 samo ako su a i b uzastopni.

Kako je $f(x)\in Z\left[X\right]$ ona je oblika $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$. Odatle je

$$f(a)-f(b)=(a_0+a_1a+\ldots+a_na^n)-(a_0+a_1b+\ldots+a_nb^n)=a_1(a-b)+a_2(a^2-b^2)+\ldots+a_n(a^n-b^n)$$

$$=(a-b)(a_1+a_2(a+b)+\ldots+a_n(a^{n-1}+..+b^{n-1}))=1$$

$$\Rightarrow a-b=1 \text{ ili } a-b=-1$$

$a=b+1$ ili $a=b-1$. U oba slučaja su to dva uzastopna broja.

BIOGRAFIJA

U maju 1983. god. kada je imao 8 godina i 10 meseci Terens je na poziv Stenlija, direktora katedre za nadarene mlade matematičare na John Hopkins univerzitetu, radio test iz matematike koji se odnosio na sklonosti i sposobnosti (SAT-M) i osvojio fenomenalnih 760 poena od mogućih 800. Samo 1% redovnih studenata starosti 17 -18 godina u Americi je uspelo da do danas osvoji 750 i više poena na ovom testu, onoliko koliko je Stenliju poznato, a jedan osmogodišnjak je jedva uspeo da osvoji nešto više od 700 poena.

Na neki način je ironično da se jedan tako izuzetno nadareni učenik kao što je Terens, pojavi u Australiji u jednom egalistički opsednutom društvu gde je društvena antipatija ka nadarenoj deci i ka onima koji bi doneli posebne programe za nadarene koji se bitno razlikuje od već uspostavljenih programa za nadrene onako kako je to država definisala. Dve države u Australiji, Zapadna Australija i Viktorija stvarno obezbeđuju strukturalne ubrzane programe za jako nadarene srednjoškolce u okviru državnog, vladinog sistema, ali su ovi programi izloženi jakim kririkama udruženja nastavnika, medija i mnogih političara. Država u kojoj živi Tarens, Južna Australija, nema ovakav program. Nekoliko slučajeva ubrzanog programa je proisteklo iz interesovanja i brige nastavnika koji su dobili nešto malo podrške ili je nisu uopšte dobili od državnog sistema obrazovanja.

Možda je nelogično, ali Terensov otac, Dr Bili Tao, pedijatar, misli da odsustvo formalne strukture može da ima pre prednost nego smetnju.

"Moja supruga i ja smo srećni što smo imali mogućnost da veoma blisko sarađujemo, najpre sa direktorima i osobljem iz Terensove osnovne i srednje škole a kasnije i sa ljudima sa fakulteta u okviru Flinder Univerziteta, da bi uradili visoko individualizovani program koji je prilagođen Terensovim nivoima sposobnosti za sve predmete i oblasti, ne samo za matematiku i prirodne nauke. Da je Južna Australija već imala urađen program za nadarenu decu, Terens bi možda bio uključen u sistem koji nije tako fleksibilan, i koji bi bio prilično drugačiji od onoga koji je njemu potreban". (B.Tao,1985)

RANO DETINJSTVO

Terens je rođen u Adelaidi 15. jula 1975.god. kao najstariji sin Bili i Grejs Tao. Grejs je diplomirala matematiku i fiziku a sreli su se u Hong Kongu gde su oboje studirali pre nego što su emigrirali u Australiju 1972.god. Terens ima dva mlađa brata- Trevora i Nigela koji su takođe veoma talentovani.

Terensova prerana intelektuelna zrelost pokazala se u ranom dobu. On je sam naučio da čita tako što je gledao seriju "Ulica Sezam" i to pre nego što je napunio 2 godine. Njegovi roditelji su bili apsolutno iznenađeni ovim njegovim znanjem. Zatim su otkrili da se igra sa kockicama na kojima su bila napisana slova abecede, a on je te kockice ređao po abecednom redu. Neke kockice su imale i brojeve i roditelji su otkrili da Terens može redom da poređa brojeve, a ubrzo nakon toga da radi jednostavne operacije sabiranja i oduzimanja.

Nekoliko meseci posle Terensovog drugog rođendana roditelji su videli kako on koristi pisaću mašinu koja je stajala u očevoj kancelariji. Terens je prekucao celu stranicu iz neke knjige za decu pomoću samo jednog prsta. Tada su njegovi roditelji odlučili da bi bilo ludo sputavati svog briljantnog sina, mada nisu želeli ni da ga "preforsiraju". Počeli su da pozajmljuju i da kupuju knjige za njega i shvatili su da im je teško da održe korak sa ovim detetom. Ohrabrivali su Terensa da čita i da istražuje ali su vodili računa o tome da ga ne izlažu i da ga ne uvode u neke visoko apstraktne teme i predmete, više verujući u to da je njihov zadatak da kod njega razviju osnovnu pismenost i veštine kada su brojevi u pitanju tako da on sam može da uči iz knjiga i na taj način sam odredi sebi brzinu i stepen razvoja. " Sada, kada se osvrnemo unazad", kaze Dr Tao, " sigurni smo da je to bio baš taj kapacitet za individualno učenje koji je pomogao Terensu da tako brzo napreduje bez toga da zastane na tom putu zbog nemogućnosti da se u pravo vreme pronađe adekvatni nastavnik. " U trećoj godini Terens je znao da čita, piše i da radi matematičke operacije za uzrast dece od 6 godina.

Terensovi roditelji smatraju da je najvažniji događaj u njegovom obrazovanju bio taj kada nije uspeo njegov pokušaj da se ranije upiše u redovnu školu.

"Mi smo toliko bili poneti brzinom Terensovog napretka za period od 2 godine do 3 godine i 6 meseci, da smo prilično naivno i prosto pomislili da će sve biti veoma lako i ružičasto i da ako ga ranije pošaljemo u školu, škola će učiniti sve što je neophodno da zadovolji njegove potrebe, i da će on moći da nastavi da se razvija brzinom koja njemu odgovara". (B.Tao, 1985)

Terens se upisao u jednu privatnu osnovnu školu u februaru 1979. god kada je imao 3 godine i 6 meseci. Ovaj poseban oblik brzog napredovanja u školi, međutim, nije odgovarao Terensovim veoma specifičnim potrebama. Intelektualno, on je bio daleko ispred dece koja su imala 5 godina u njegovom razredu. Sa društvene tačke gledišta, međutim, on još uvek nije bio spreman da provede produženo vreme sa decom koja su bila starija od njega dve godine. Njegov učitelj nije mogao da prati situaciju i žalio se da je Terens bio taj koji je zbunjivao druge učenike. Posle nekoliko nedelja roditelji i nastavnici su došli do zajedničke odluke da ispišu Terensa iz te škole. Roditelji su ga onda upisali u obližnje zabavište gde su bila deca njegovog uzrasta.

Brojne studije (npr. Worcester 1955, Hobson 1979, Alexander i Skinner 1980) pokazuju da tamo gde se mlađa deca upišu u redovnu školu na osnovu intelektualne i naučne prerane zrelosti kao i društvene spremnosti, oni pokazuju iste, ako ne i bolje rezultate nego njihovi stariji drugari. Međutim, većina dece koja su bila predmet izučavanja su bila ona koja su bila najmanje 12 meseci u školi i primećeno je da je emocionalna zrelost važan preduslov za društveni i školski uspeh deteta. (Reynolds, Birch,Tuseth,1962).

Porodica Tao smatra da su naučili nekoliko važnih lekcija na osnovu ovog ranog iskustva.

"Najpre smo shvatili da bez obzira na to kojom dinamikom napreduje dečiji intelektualni razvoj, dete nije spremno za redovno školovanje dok ne postigne izvesni nivo sazrevanja, i ludost je izlagati ga ovakvoj vrsti obrazovanja pre nego što dostigne taj nivo zrelosti. Ovo iskustvo nas je nateralo da vrlo pažljivo pratimo Terensovo napredovanje u obrazovanju. Naravno, on je izuzetno brzo napredovao, ali smo mi sa velikom pažnjom u svakoj fazi njegovog razvitka obezbeđivali da sa jedne strane bude spreman i željan da napreduje a da ga u isto vreme ne izložimo društvenim situacijama koje bi mogle biti štetne.

Drugo, postali smo svesni da nije dovoljno da neka škola ima dobru reputaciju i direktora koji uviđa i pomaže deci sa nadarenim sposobnostima. Nastavnik koji neposredno radi sa nadarenim učenikom mora biti fleksibilna osoba koja će olakšati i pratiti razvoj nadarenog deteta i koji će sam kreirati kreativno mišljenje i ljubav ka intelektualnoj aktivnosti.

Takođe, i verovatno najvažnije, shvatili smo da za obrazovanje ne može biti odgovorna samo škola.Verovatno za mnogu decu, a sigurno za onu nadarenu, obrazovni program treba zajedno da urade nastavnici i roditelji tako što će uzeti u obzir svoja saznanja o intelektualnom napretku deteta, njegovom društvenom i emocionalnom razvoju, odnosu prema porodici i prijateljima, negovim posebnim potrebama i interesovanju, što znači da treba uzeti u obzir sve aspekte njegovog spoznajnog i emocionalnog razvoja. To se nije desilo prilikom Terensovog prvog školskog iskustva, ali sam ja ubeđen da je kasniji uspeh njegovog obrazovnog programa, od 5. godine pa na dalje, uglavnom bio rezultat kvalitetnog odnosa moje supruge i mene sa njegovim nastavnicima i mentorima". (B.Tao,1985)

Tokom 18 meseci koje je Terens proveo u zabavištu njegove matematičke sposobnosti su napredovale fenomenalnom brzinom. Uz podršku svoje majke, Grejs, on je završio skoro sve osnovne programe iz matematike (to se uči u normalnim okolnostima sa 7 godina) pre nego što je napunio 5 godina.

UDRUŽENJE IZ JUŽNE AUSTRALIJE ZA NADARENU I TALENTOVANU DECU (SAAGTC)

Dok je Terens bio u zabavištu njegovi roditelji su počeli da čitaju knjige koje su se odnosile na obrazovanje nadarene dece i priključili su se Udruženju (SAAGTC) , grupi nastavnika i roditelja nadarene dece gde se subotom sprovodio program za nadarenu decu , a seminari i radionice za roditelje i nastavnike. Ovde je po prvi put Terens bio u mogućnosti da radi i da se druži sa drugom izuzetno nadarenom decom. Iako tamo nije sreo nikog ko je imao slične matematičke sposobnosti kao on, što nije iznenađujuće jer je njegov IQ statistički jedan u million, mogao je da se druži sa ostalom decom koja su delila njegovu glad za informacijom, njegovu sposobnost da skupi i integriše apstraktne koncepte i njegovo ushićenje u kreativnom istraživanju. Međutim, čak i u okviru ubrzanog sadržaja programa SAAGTC , shvatili su da je neophodno da se Terensov napredak ubrza mnogo više nego napredak nadarene dece njegovog uzrasta.

"Dobro se sećam jednog od prvih susreta sa Terensom, kada sam kao predsednik SAAGTC neformalno ocenjivao njegove matematičke sposobnosti radi njegovog uključivanja u adekvatne SAAGTC programe. Jos nije imao 4 godine a znao je napamet da pomnoži dva dvocifrena broja, dok je meni, ispitivaču, bila potrebna olovka i papir da bih proverio njegove odgovore. Druga slika koja mi je pred očima kad je Tery u pitanju je situacija mesec dana pre njegovog 5. rođendana dok je u jednoj matematičkoj radionici SAATGC radila grupa nadarene dece starosti 7-9 godina. Nastavnik je od učenika tražio da pronađu sledeća 2 broja u nizu brojeva koji je glasio 9, 18, 27, 36. Terens je brzo razmislio i odgovorio da su to brojevi 45 i 54. Naravno da je bio u pravu. Svi ovi brojevi su redom bili deljivi brojem 9".

OSNOVNO / SREDNJE OBRAZOVANJE

Tokom ovog perioda, čitanjem i razgovorom sa edukatorima, Grejs i Bili Tao, razvili su koncept jedne forme školskog programa koji bi zadovoljio Terensove intelektualne i društvene potrebe. Mada su njegove performanse kod većine predmeta bile daleko iznad nivoa njegovih godina, on nije jednako napredovao u svim predmetima. Njegova čudesna matematička sposobnost je za nekoliko godina bila ispred njegove jezičke sposobnosti. Oni su osmislili jednu strukturu gde bi Terens mogao da pohađa nekoliko nivoa u isto vreme tako što će program za svaki pojedinačni predmet biti prilagodjen njegovim trenutnim mogućnostima. Ovaj koncept bi imao dodatnu prednost koja bi se sastojala u tome da on može da se meša sa decom svih uzrasta i sposobnosti onako kako bude napredovao tokom školovanja.

Njegovi roditelji su obilazili jedan broj lokalnih škola tražeći neku čiji direktor ima neophodnu fleksibilnost i širokogrudost da prihvati Terensa zajedno sa programom koji su oni imali na umu. Nakon nekoliko sastanaka sa direktorom, 2 meseca nakon Terensovog 5. rođendana upisali su ga u Bellevue Heights osnovnu školu, državnu školu koja je bila udaljena oko 3,5 km od njihove kuće. (Uobičajeno doba za polazak u školu u Južnoj Australiji je kad neko ima 5 godina, a kad neko napuni 5 godina on odmah polazi u ono polugođe koje je prvo odmah nakon njegovog petog rodjendana). Nakon kratkog perioda u kome su direktor Keith Lomax i nastavnici mogli da procene Terensove obrazovne i društvene mogućnosti odredili su da bude u jednom mešovitom odeljenju gde je matematiku slušao sa 5. razredom a ostale predmete sa drugim razredom.

Na ovaj način je uspostavljen obrazac za integrisani više razredni ubrzani program koji su predočili Terensovi roditelji i koji je nakon mnogo razmišljana i diskusija usvojen u ovoj školi. Početkom 1982.god. kada je Terens imao 6 godina i 6 meseci iz različitih predmeta je pohađao 3,4,6 i 7 razred. Tokom školovanja mogao je da radi i da se druži sa decom različitog uzrasta i sposobnosti i izbegnute su praznine u savladavanju znanja iz svih predmeta zato što je on napredovao svojim tempom u svakom predmetu, bez formalnog "preskakanja razreda".

U 7. godini Terens je u matematici bio daleko ispred onih koji su bili u 7. razredu i uveče je kod kuće radio po programu za 10. razred. Njegovom direktoru je uskoro bilo jasno da Terensu treba pružiti priliku da radi sa drugim učenicima na nivou koji je dostigao. Nakon što je direktor razmotrio situaciju sa Terensovim roditeljima, on je uspešno obavio zadatak i svog kolegu, direktora obližnje srednje škole (u Južnoj Australiji srednja škola podrazumeva razrede od 8. do 12.) ubedio da dozvoli Terensu da jedno vreme provede tamo da bi nastavio sa onim integrisanim programom. I tako, sa 7 godina i 6 meseci Terens je počeo da uči u srednjoj školi tako što je dnevno imao jedan ili dva časa, a ostatak vremena je provodio u svojoj osnovnoj školi. Do trećeg semestra, 1983., kada je Terens imao 8 godina i 2 meseca, on je u srednjoj školi, Blackwood High, toliko napredovao da je matematiku 1 i 2 radio sa učenicima 12. razreda, fiziku sa učenicima 11. razreda, a Engleski i društvene nauke sa učenicima 8. razreda, dok je ostatak nedelje u osnovnoj školi učio druge predmete sa učenicima 5. i 6.razreda. Terensova porodica je insistirala da jedan deo vremena on provede u osnovnoj školi da bi se družio sa decom koja su po godinama bila njegovog uzrasta.

Uz neke male poteškoće ova srednja škola se prilagodila Terensu i on njoj. John Fidge, Terensov nastavnik matematike za 11. razred, je shvatio i rekao da nakon prve dve nedelje koje su bile malo čudne, Terens je bio prihvaćen kao još jedan drug iz odeljenja, i njegovi drugovi su smatrali da je on druželjubiv, prilagodljiv, od pomoći i sa dobrom naravi. To, kada neko smatra da Terens čak i u ranom detinjstvu završava zadatke dva časa pre nego što to urade njegovi drugovi koji imaju 16 godina, govori mnogo o njegovim sposobnostima za druženje. On je ushićeni dečak koji je svestan da se razlikuje od drugih ali ne ispoljava zbog toga uobraženost zbog svog izuzetnog dara i ima jednu neobičnu sposobnost da komunicira sa ljudima različitog doba, od dece koja su mlađa od njega do profesora na fakultetu sa kojima sada radi. Bili Tao smatra da su one dve godine u osnovnoj školi kada je svakog polugođa Terens završavao nekoliko razreda u isto vreme udarile temelj koji mu je pomogao da se kasnije druži sa starijim učenicima.

Jedan važan faktor za Terensovu uspešnu asimilaciju u srednjoj školi bila je njegova izuzetna mladost, jer na njega učenici koji su imali 16 ili 17 godina, a sa kojima je on učio, nisu gledali kao na neku pretnju, bilo intelektualnu ili društvenu. On se sigurno nije takmičio sa njima u dobijanju nekog posla, stipendije ili kad su u pitanju bili muško-ženski odnosi. Ovo mu je omogućilo da ga tretiraju samo kao još jednog učenika u razredu, uz veoma retke privilegije kada su ga nekad nastavnici nosili na ledjima prilikom nekog dugog pešačenja.

SREDNJE / VIŠE OBRAZOVANJE

Novembra 1983. godine, kada je imao 8 godina i 3 meseca, Terens je neformalno polagao ispit (Soth Australian Matriculation) iz matematike 1 i 2 koji se polaže za upis na fakultet i položio ga tako što je iz matematike 1 osvojio 90% poena a iz matematike 2, 85% poena. U februaru naredne godine na predlog i na osnovu saveta nastavnika i iz osnovne i iz srednje škole koji su smatrali da je Terens i emocionalno i naučno sazreo, njegovi roditelji su se složili da bi on trebalo da počne da pohađa srednju školu ne povremeno, nego stalno, kao redovan učenik. Upisali su ga u 8. razred da bi mogao da bude sa drugovima sa kojima je godinu dana ranije zajedno učio neke stvari vezane za 7 razred i na tom nivou slušao je sledeće predmete : engleski, francuski, opšte predmete, likovno i fizičko vaspitanje. Međutim, nastavljajući sa svojim integrisanim programom, on je učio gradivo iz fizike za 12. razred, hemiju za 11. razred i geografiju za 10. razred. Takođe je počeo da uči i matematiku koja se radi na prvoj godini fakulteta, u početku sam, a onda, nakon nekoliko meseci uz pomoć jednog profesora matematike sa obližnjeg Fliders Univeziteta Južne Australije. Septembra te godine Terens je počeo da pohađa vežbe iz fizike za prvu godinu fakulteta, i 2 meseca kasnije položio je prijemni iz fizike sa uspehom većim od 90%. Istog meseca, uvidevši da ima nešto slobodnog vremena, nakon što je maturirao i položio interne ispite, u srednjoj školi je počeo da uči Latinski jezik.

Početkom 1985. god., nekoliko meseci pre njegovog 10. rođendana, Terens je proveo jednu trećinu svog vremena na Fliders Univerzitetu gde je pohađao predavanja iz matematike za drugu godinu fakulteta i fiziku za prvu godinu. Ostatak vremena je provodio u srednjoj školi gde je hemiju učio sa 12. razredom, geografiju i latinski (nakon samo 9 meseci učenja ovog jezika) sa 11. razredom, francuski sa 10. a engleski i društvene nauke sa 9. Novembra 1985. god. na fakultetu je polagao prijemni za hemiju gde je i upisao prvu godinu hemije na Flanders Univerzitetu 1986. godine.

KADA U POTPUNOSTI UPISATI STUDIJE NA UNIVERZITETU?

Pred porodicom je sada bilo pitanje : Kojim putem da krene Terens? Skoro i da nije bilo sumnje u to da ako Terens krene sada na fakultet on će diplomirati iz matematike pre svog 12. rođendana. Procenjeno je da je Terensov IQ negde između 220 i 230 i ne postoje naučne oblasti gde je slab. Čak i kada su u pitanju engleski i društvene nauke, za koje on smatra da su mu najslabiji predmeti, on je po znanju za 4 razreda ispred svojih vršnjaka.

Nekoliko faktora je uticalo na to da Terensova porodica razmišlja o njegovom budućem školovanju. Septembra 1984. god., kada je imao 9 godina, Terens je, sa još jednom malom grupom studenata srednjih škola, pozvan da se takmiči na takmičenju gde se biraju kandidati koji će predstavljati Australiju na Matematičkoj Olimpijadi. Uprkos tome što je bio najmalđi kandidat, 5 godina mlađi od drugih, on je zauzeo prvo mesto u Južnoj Australiji i 6. na celom kontinentu. Međutim, na Matematičkoj Olimpijadi u Australiji, koja je održana 6 meseci kasnije, on je izgubio svoje 6. mesto pa shodno tome nije bio izabran u Australijski tim koji se takmičio na Medjunarodnoj Matematičkoj Olimpijadi u Finskoj, jula 1985. god.
Porodica Tao je osetila da ovakav rezultat nosi jednu važnu poruku . " Terensovo napredovanje u matematici je bilo toliko brzo", kaže Dr Tao, "baš onako kako brzo raste trava po lepom vremenu, pa Terens nije imao vremena da pusti duboke korene. Kada se suočio sa stvarnim izazovima na nivou sa kojim se nije sreo ranije, tada se pokazala njegova slabost. Međutim, za Terensa je mnogo bezbolnije da ne uspe u svojoj zemlji nego na nekoj Medjunarodnoj Olimpijadi gde bi privukao dosta pažnje, čak i među drugim takmičarima, zbog svoje izuzetne mladosti."
U maju 1985. god., na poziv Juliana Stenlija, Terens je sa roditeljima proveo tri nedelje u Americi gde je posetio nekoliko univerzitetskih kampova, uključujući John Hopkins, Purdue, Columbia, Princeton, Berkley i Stanford gde je razgovarao sa ekspertima iz matematike i onima koji su se bavili obrazovanjem nadarenih osoba. Porodica Tao kaže da im je ovo iskustvo pomoglo da iskristalisu svoje razmišljanje o tome kakvo treba da bude Terensovo obrazovanje u budućnosti.
Terensovi roditelji su smatrali da bi on verovatno trebalo da sačeka još najmanje 3 godine pre nego što kompletno upiše fakultet, kada bi imao 13 godina..
"Nema nikakve potrebe da sada žuri. Ako sada treba da upiše redovni fakultet samo zato da bi bio najmlađi student koji je diplomirao, ili da bi u nečemu bio prvi, to bi onda ličilo na neki fazon. Mnogo je važnija mogućnost da se konsoliduje njegovo obrazovanje, da se izgradi šira osnova. Za Terensa je bitno da ima široko početno obrazovanje. Ja mogu da vidim dva različita modela o tome kako njegovo obrazovanje može da napreduje. Prvi je onaj koji bi mogao da nazovem model "stuba" gde bi se ubrzanje usmerilo vertikalno naviše u matematici i fizici uz malo širenja u drugim oblastima znanja. Ovde je problem to što napredak može biti brz i lak na početku, a kada taj stub bude viši teže je na tome izgraditi dodatno dalje znanje, što ova struktura više raste to ona može postati nesigurnija. Drugi model koji smo mi odabrali je piramidalni po obliku gde se Terensov rad u matematici i prirodnim naukama integriše sa mnogim drugim oblastima znanja. Početni napredak može biti usporen dok on istražuje odnose koji vladaju među ovim oblastima, ali kako piramida raste taj napredak postaje lakši i brži i cela struktura počiva na čvrstoj osnovi međusobno povezanog znanja. Bitno je da ima široka osnovna znanja. Na najvišem nivou bilo kog predmeta granica između nauke i umetnosti, izmedju matematike i filozofije postaje sve manja i sa manjim razlikama. Ne možete da postignete visok nivo sofisticiranosti ako ste

isuviše specijalizovani u nečemu. Čak i kod čiste matematike postoje mnogi problemi koje ne možete da rešite samo tako što ćete primeniti samo matematičke tehnike.

Ako Terens sada upiše fakultet on bi sigurno mogao da obavi taj posao ali bi imao malo vremena da se bavi originalnim istraživanjem. Time što sada nije stalno nego povremeno na fakultetu on može da napreduje jednim laganim tempom i mnogo više pažnje može da se pokloni kreativnosti, originalnom razmišljanju i širem obrazovanju. Kasnije, kada bude redovno studirao imaće mnogo više vremena za istraživanje ili za nešto drugo što će mu biti interesantno. Možda će biti malo stariji kada diplomira ali će biti mnogo bolje pripremljen za rigorozan rad za postdiplomske i doktorske studije.

Lako je obeležiti koje je dete čudo od deteta, ali sva ta deca ne postaju geniji. Genijalnost nije povazana sa brzinom razvoja i napredovanja. Ona zahteva kvalitetne kreativne misli i istrazivanja. Sposobnost da se probije i da pruži jedinstveni ili originalni doprinos". (B.Tao, 1985)

Drugi razlog u odluci Terensove porodice je njihova zabrinutost za njegov društveni razvoj. Univerzitet nije najbolje mesto za mlado dete da društveno sazri, sigurno ne pre adolescencije. Time što će nastaviti da jedan deo svog vremena provodi u srednjoj školi Terens može da nastavi da stiče drugove slične njegovom uzrastu, da nauči da sortira prioritete u životu, da uspostavi zreliju samo-percepciju i da generalno izađe na kraj sa realnostima iz života.

ISTRAŽIVANJE O TOME KAKO DOMAĆA ATMOSFERA UTIČE NA IZUZETNO NADARENU DECU

Terens Tao je bio izuzetno srećan u svom domu. I Terensovo odrastanje i odnosi koji vladaju u njegovoj porodici su pozitivno uticali. To uključuje veliku ljubav ka učenju sebe radi u okviru porodice, vrednovanje intelektualnog dostignuća, oblikovanje stalne motorne snage od strane oba roditelja koja vodi ka cilju i toplo prihvatanje svega toga od strane nadarenog deteta zbog njegovog dobrobita, a ne samo zbog njegovog uspeha. Interesantno je to da je Terensov dom, gde roditelji i deca uživaju u zajedničkom druženju i dele veoma vidljiva i duboka osećanja, gde se deci pruža velika intelektualna sloboda i gde postoji tačno definisan, ali ne i strogo nametnuti kod etičkog ponašanja, tipičan i karakterističan dom bez svađa i problema. Do danas ima malo istraživanja o tome kolika je uloga roditelja u obrazovanju izuzetno nadarene dece. Većina toga što je napisano je usmereno ka eksploatativnim tendencijama koje ispoljavaju. Roditelji ovih mladih čudaka odbacuju ideju da superiorne sposobnosti mogu biti urođene i smatraju da je genijalnost njihovog deteta jedinstveno jedna funkcija obrazovnog programa koju su oni dizajnirali i koju nadgledaju i prate.

Postoji mala sumnja da roditelji-kreatori predstavljaju izuzetnu manjinu među roditeljima koji imaju nadarenu decu. Oni su, međutim, izuzetno vidljivi i primećeni zato što napadno objavljuju vesti o genijalnosti svog deteta. Treba obaviti dalja istraživanja o onome što se naziva "brižni roditelji", kao što je slučaj sa porodicom Tao koji su sa oduševljenjem uključeni u oblikovanje i razvoj obrazovnog programa za svoje izuzetno nadareno dete, ali koji svoju ulogu vide kao ulogu vodiča i pomagača u ispoljavanju izuzetnih sposobnosti svog deteta, a ne da budu tvorci svega toga.

TERENSOV EMOCIONALNI RAZVOJ

Profesor Miriam Goldberg, prilikom svoje posete Australiji u ime Australijske Komisije za školstvo je rekla da je "avet elitizma koji proganja australijske edukatore" praćen čudnim i jedinstvenim verovanjem u Australiji da je sposobnost "slagati se sa svakim" od velikog značaja u detinjstvu a rezultirajuća briga je "da bi bilo koja procedura u školi sa pojedinačnom decom koja su sposobnija od većine mogla da naruši njihov osećaj identiteta i prihvatanje od običnog čoveka". (Goldberg, 1981)
U takvoj obrazovnoj i društvenoj klimi, programi kao što je Terensov izazivaju sumnju, čak i odbojnost i to ne samo u krugovima koji se bave obrazovanjem. Većina kritika, naravno, potiče od nastavnika koji nikada nisu upoznali Terensa, niti su radili sa njim i koji nikada nisu razgovarali sa bilo kojim nastavnikom koji je bio uključen u Terensovo obrazovanje. Oni nastavnici koji su radili sa njim ubrzo su shvatli apsurdnost bilo kakvog predloga da bi on trebalo da provede svo vreme, ili najveći deo vremena sa decom svog uzrasta, opšte mišljenje je, međutim, da bi ga trebalo ostaviti "da bude samo normalno dete."
Terensovi roditelji i nastavnici bi podržali Feldhusenovo mišljenje (Feldhusen 1983) da primoravanje visoko nadarenog učenika da bude isti kao i svako drugo prosečno dete je u stvari primoravanje njega ili nje da budu nenormalni ili, zaista, subnormalni.
"Uprkos ovakvoj nepovoljnoj društvenoj klimi, Terens je kao pojedinac bio opšte voljen dečak kome su se divili i nastavnici i učenici sa kojima je radio. Imajući tu mogućnost da pratim razvoj Terensove ličnosti u poslednjih 6 godina, siguran sam da ta toplina i prihvatanje su u najvećoj meri zbog ljubaznosti i skromnosti njegove prirode. On može da priča iskreno i poverljivo i sa nepoznatima i sa svojim prijateljima, ali ne ispoljava niti aroganciju niti uobraženost. Njegovi roditelji su ga naučili da ne bude izveštačen u ponašanju, da se ne pravi važan, ali u isto vreme i da ne krije svoje sposobnosti. Za razliku od mnoge izuzetno nadarene dece, čini se da on nema poteškoća u odnosu sa ljudima slabijih i nižih mogućnosti". (Hollingworth, 1942)
On ne razmišlja o sebi kao o nekom koji je bolji od drugih, nego da je samo različit od njih. Po Terensu, svako ima svoju vrednost, i svako ima nešto što može nečemu da doprinese.
Terensova motivacija da nadmaši, da otkrije i da stvori je pokretačka snaga u njegovom životu. Rezultati ovih njegovih napora su nagrade, priznanja ili bilo šta drugo ali su mu manje bitna nego ushićenje intelektualnim spekulacijama. Evo šta je Bili Tao rekao kakva je bila Terensova reakcija kada je saznao da je osvojio najveći broj poena koji je ikada osvojen od strane dečaka njegovog doba na SAT-M testu, a sve ovo na osnovu Stenlijevog istraživanja.

„Pitao sam ga šta bi želeo da dobije kao nagradu i on je verovatno pomislio da je to mnogo teže pitanje nego sam SAT-M test. Nakon nekoliko trenutaka zamolio je za parče čokolade koja se nalazila u frižideru neko vreme i skoro bila zaboravljena. Kada sam mu je pružio, podelio je na pola i jednu polovinu dao meni. Bio je, naravno, oduševjen rezultatom, ali nije bilo nikakvog velikog slavlja ili nečeg sličnog zbog toga. Više je bio zainteresovan da se vrati čitanju knjige iz fizike“. (B.Tao, 1985)

Terensova sposobnost da analizira i komentariše svoj sopstveni intelektualni razvoj i napredak je začuđujuć za nekog ko je tako mlad. Tokom posete Purdue Univerzitetu razgovarao je sa nastavnicima i onima koji su diplomirali na Institutu za obrazovanje nadarenih o svom ranom iskustvu.

„Pre par godina po prvi put sam se prijavio za državno takmičenje iz matematike. Imao sam dva sata da uradim zadatke, a ja sam to završio za 20 minuta a ostatak vremena sam proveo smišljajući metod kako da nadjem vrednost od pi. Kasnije, kada je moja mama otkrila šta sam ja radio i kada me je pitala zašto nisam proveo više vremena radeći zadatke i proveravajući rezultate, ja sam joj samo rekao da sačeka dok ne pobedim. Nema potrebe da vam kažem da nisam pobedio i nisam dobio nikakvu nagradu i neko vreme sam bio prilično deprimiran. Tata je kasnije otkrio da je većina mojih pogrešnih odgovora bio rezultat aritmetičkih grešaka. Nakon te epizode naučio sam da na svakom ispitu treba da isplaniram i utrošim vreme na pravi način i proverim ono što sam napisao. Nažalost, ja još uvek ne poklanjam dovoljno pažnje proveravanju.

Otkrio sam da mogu bolje da naučim i više zapamtim ako mojoj braći pokazujem ono što sam naučio. Tako da sam jednom bratu pokazivao šah a drugom muziku. Nikad nisam bio dobar u muzici, ustvari mrzeo sam je dok nisam sebe motivisao da je pokažem Trevoru. Sada ustvari prilično uživam da sviram u duetu sa njim. Proveo sam dosta svog slobodnog vremena tražeći intersantne načine kako da podučavam moju braću i verovatno sam više naučio tako što sam njih podučavao nego što su oni naučili od mene“. (T.Tao, 1985)

Literatuta

AMOC (Australian Mathematical Olymiad Committee) Correspodence Programme (1986-1987)

Australian Mathematics Competition (1984), *Mathematical Olympiads: The 1984 Australian Scene*, Canbera College of Advanced Education, Belconnen, ACT.

Australian Matematics Competition (1987), *Mathematical Olympiads: The 1987 Australian Scene*, Canbera College of Advanced Education, Belconnen, ACT.

Borchardt, W.G. (1961), *A Sound Course in Mechanics*, Rivingston, London.

Greitzer, S.L. (1987), *International Mathematical Olympiads* 1959-1977, Mathetatical Association of America, washington, DC.

Hajos, G., Neukomm, G., and Suranyi, J. (eds0 (1963), *Hurgarian Problem Book I, based on the Eotvos Competitions* 1894-1905, (new Mathematical Library 11), orig. comp. J. Kurschak, tr. e. Rapaport, Mathematical Association of America, Washington, DC.

Hardy, G.A. (1975), *A course of Pure Mathematics*, 10th eds Cambridge University Press

Polya , G. (1957), *How to solve it*, 2 ed, Princeton University, Princeton

Shklarsky,D.O., Chentzov, N.N., and Yaglom , I.M. (1962), *The* USSR *Olimpiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics*, revd. and ed. I. Sussmar, tr. J . Maykovich, W.H. Freeman and Company , San Francisco, CA.

Taylor, P.J. (1989), *International Mathematics: Tournament of the Towns , Questions , and Solutions, Tournaments* 6 to 10 (1984 to 1988), Australian Mathematics Foundation Ltd, Belconnen, ACT

Thomas, G.B. and Finney, R.L. (1988), *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley, Reading, MA.

www.davidsongifted.org, Radical Acceleratioo in Australia: Terence Tao.