Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Asocirane slučajne veličine, njihova svojstva i primene

Mentor:

prof. dr. Pavle Mladenović

Student:

Jelena Mojsilović

SADRŽAJ

UVOD

Tema ovog master rada su asocirane slučajne veličine. Tema je odabrana u dogovoru sa mentorom prof. Pavlom Mladenovićem. Razlog zašto je izabrana baš ova tema je taj što je ovo tema koja se i dalje istražuje i zato što se i dalje dopunjuju karakteristike i poboljšavaju uslovi za važenje različitih teorema vezanih za ovu oblast što se može videti na osnovu radova koji su nastali u proteklih par godina. Ovaj rad će biti podeljen u dva dela. Prvi deo će se baviti teorijskim karakteristikama asociranih slučajnih veličina. Na početku će biti navedene osnovne definicije i teoreme iz teorije verovatnoće i matematičke statistike, kao i kratak istorijski razvoj asociranih slučajnih veličina. Nakon toga biće navedene definicije i teoreme sa dokazima koji će biti detaljno objašnjeni i koji su značajni za razumevanje pojma asociranih slučajnih veličina. Drugi deo rada predstavlja deo koji se bavi primenama asociranih slučajnih veličina. Koristeći teoretske delove prvog dela rada pokazaćemo primenu u različitim oblastima. Oblasti u kojima će biti prikazana primena su teorija verovatnoće i matematička statistika. Takođe, veći deo drugog dela rada će biti posvećen eksponencijalnim nejednakostima asociranih veličina. Na kraju rada nakon zaključka biće navedena literatura koja se koristila u ovom radu.

1.ASOCIRANE SLUČAJNE VELIČINE-TEORIJSKE KARAKTERISTIKE

1.1.OSNOVNE DEFINICIJE, TEOREME I NEJEDNAKOSTI

Definicija 1.1.1. *Funkcija* $F: R^n \to R$ *zove se* n*-dimenziona funkcija raspodele ako važe sledeći uslovi:*

1) $\lim_{x_k \to \infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, za svako k$\epsilon\{1, 2, \dots, n\}$
2) $F(+\infty, +\infty, \dots, +\infty) = 1$
3) F je neprekidna s desne strane po svakom argumentu
4) $\Delta_F(I) \geq 0$ za svaki n-dimenzioni interval I

Definicija 1.1.2. *Neka je dat prostor verovatnoća* $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ *i neka je* $(R, \boldsymbol{B})$ *par čije su komponente skup realnih brojeva i Borelova* σ*-algebra podskupova skupa realnih brojeva. Funkcija* $X: \Omega \to R$ *zove se slučajna veličina, ako je merljiva u odnosu na* σ*-algebre* $\boldsymbol{A}$ *i* $\boldsymbol{B}$*, tj. ako za svaki Borelov skup* $B \epsilon \boldsymbol{B}$ *važi*

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \epsilon B\} \epsilon \boldsymbol{A}$$

Definicija 1.1.3. *Neka je* $(\Omega, \boldsymbol{A}, P)$ *prostor verovatnoća i* n *prirodan broj veći od* 1*. Funkcija* $X: \Omega \to R^n$ *zove se višedimenzionalna slučajna veličina ili slučajan vektor ako za svaki Borelov skup* $B \epsilon \boldsymbol{B}^n$ *važi*

$$X^{-1}(B) \epsilon \boldsymbol{A}$$

Teorema 1.1.1. *Neka su* $F_1, F_2, \dots, F_n$ *, redom, funkcije raspodela slučajnih veličina* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *i* $F: R^n \to R$ *funkcija raspodele slučajnog vektora* $(X_1, X_2, \dots, X_n)$*. Slučajne veličine* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *su nezavisne ako i samo ako za svaku* n*-torku* $(x_1, x_2, \dots, x_n) \epsilon R^n$ *važi*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1) F_2(x_2) \cdots F_n(x_n)$$

Teorema 1.1.2. *Neka je X slučajna veličina sa apsolutno-neprekidnom funkcijom raspodele F i gustinom raspodele f i neka je $g: R \to R$ Borelova funkcija. Ako je $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f(x) dx < +\infty$, onda postoji kao konačan broj matematičko očekivanje slučajne veličine $g(X)$ i važi jednakost*

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

Teorema 1.1.3. *Za proizvoljne slučajne veličine (za koje postoje matematička očekivanja) i realan broj c važe sledeća tvrđenja:*

1) $E(cX) = cE(X)$;
2) Ako je $P(A) = 0$ onda je $E(XI_A) = \int_A XdP = 0$.
3) Iz uslova $X(\omega) \leq Y(\omega)$ za svaki $\omega \in \Omega$, sledi nejednakost $E(X) \leq E(Y)$;
4) $|E(X)| \leq E(|X|)$;
5) Ako su A i B disjunktni događaji, onda važi nejednakost

$$E(XI_{A \cup B}) = E(XI_A) + E(XI_B)$$

6) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
7) $E(X)$ i $E(|X|)$ su istovremeno konačni brojevi ili ne.

Definicija 1.1.4. *Neka je X proizvoljna slučajna veličina. Matematička očekivanja slučajnih veličina X^n, $|X|^n$ i $(X - E(X))^n$, ako postoje, zovu se redom n-ti momenat, n-ti apsolutni momenat i n-ti centrirani momenat slučajne veličine X. Specijalno, drugi centrirani momenat $E(X - E(X))^2$ zove se disperzija slučajne veličiine X i označava kratko $D(X)$.*

Teorema 1.1.4. *Osnovna svojstva disperzije su sledeća:*

1) Za svaku slučajnu veličinu važi jednakost

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

2) Za svaku slučajnu veličinu važi nejednakost

$$0 \leq D(X) \leq E(X^2)$$

3) Za svaku slučajnu veličinu i realne brojeve a i b važi jednakost

$$D(aX + b) = a^2 D(X)$$

4) Ako su $X_1, X_2, \dots, X_n$ nezavisne slučajne veličine, onda važi jednakost

$$D(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k)$$

<u>Definicija 1.1.5.</u> *Neka su X i Y slučajne veličine sa konačnim i strogo većim od nule disperzijama. Kovarijacija slučajnih veličina X i Y je broj $cov(X,Y)$ zadat sa*

$$cov(X,Y) = E(X - EX)(Y - EY) = E(XY) - EX \cdot E(Y).$$

Koeficijent korelacije slučajnih veličina X i Y je broj $\rho(X,Y) = cov(X,Y)/\sqrt{DX}\sqrt{DY}$.

<u>Definicija 1.1.6.</u> *Neka je $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ slučajan vektor, takav da za sve $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ važi $EX_k^2 < +\infty$. Matrica $B = [b_{kl}]_{n\,x\,n}$, gde je $b_{kl} = cov(X_k, X_l)$, zove se kovarijaciona matrica slučajnog vektora X.*

<u>Teorema 1.1.5.</u> *Matrica $B = [b_{kl}]_{n\,x\,n}$ je kovarijaciona matrica nekog slučajnog vektora $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, ako i samo ako je B simetrična i nenegativno definisana matrica.*

Sada ćemo navesti 4 definicije vezane za vrste konvergencija nizova slučajnih veličina.

<u>Definicija 1.1.7.</u> *Niz slučajnih veličina (X_n) konvergira u verovatnoći ka slučajnoj veličini X ako važi:*

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n\to\infty} P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} = 0$$

<u>Definicija 1.8.</u> *Niz slučajnih veličina (X_n) konvergira skoro sigurno (konvergira sa verovatnoćom 1), ka slučajnoj veličini X ako važi :*

$$P\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = 1$$

<u>Definicija 1.1.9.</u> *Niz slučajnih veličina (X_n) konvergira u srednjem reda p, gde je $0 < p < +\infty$, ka slučajnoj veličini X ako važi:*

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0$$

Ako je p=2 ova konvergencija se naziva srednjekvadratna konvergencija.

Definicija 1.1.10. *Niz slučajnih veličina (X_n) konvergira u raspodeli (ili slabo kovergira) ka slučajnoj veličini X ako za svaku ograničenu i neprekidnu funkciju $f: R \to R$ važi:*

$$\lim_{n\to\infty} E(f(X_n)) = E(f(X))$$

Definicija 1.1.11. *Neka je $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uzorak iz raspodele F i neka je $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jedna realizacija tog uzorka. Kada se ti brojevi poređaju po veličini dobijamo niz $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$. Definišimo slučajne veličine $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ na sledeći način: Za svaku realizaciju $(x_1,\ x_2, \dots, x_n)$ neka je*

$$X_{(1)} = x_{(1)},\ X_{(2)} = x_{(2)},\ \dots,\ X_{(n)} = x_{(n)}.$$

Slučajne veličine $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ se nazivaju statistike poretka.

Definicija 1.1.12. *Slučajni proces $\{X_t,\ t \in T\}$, gde je $T \subset Z$ ili $T \subset R$ je strogo stacionaran ako za svaki prirodan broj n i proizvoljne elemente $t_1, \dots, t_n \in T$ raspodela verovatnoća slučajnog vektora $\left(X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau}\right)$ ne zavisi od $\tau \in T$.*

Teorema 1.1.6. ***(Jaki zakon velikih brojeva):*** Neka je (X_n) niz nezavisnih slučajnih veličina takav da važi $\sum_{n=1}^{\infty} DX_n/n^2 < +\infty$. Tada je

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k) = 0\right) = 1$$

Sada ćemo navesti nekoliko definicija i teorema iz oblasti matematičke analize koje se koriste u ovom radu.

Definicija 1.1.13. *Skup $G \subset X$ je otvoren u X ako za svako $x \in G$ postoji $\delta > 0$ tako da je $B[x, \delta) \subset G$.*

Definicija 1.1.14. *Za skup F, podskup metričkog prostora X, kažemo da je zatvoren u X ako je skup $X \backslash F$ otvoren u X.*

Definicija 1.1.15. *Za podskup K metričkog prostora X kažemo da je kompaktan ako se iz svakog otvorenog pokrivača skupa K može izdvojiti konačan potpokrivač.*

Teorema 1.1.7. *Neka je (X, d) metrički prostor. Ako je $F \subset X$ kompaktan, tada je F zatvoren i ograničen.*

Sada ćemo navesti teoremu koja se odnosi na kompaktnost u R^n.

Teorema 1.1.8: *Skup $K \subset R^n$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen.*

Sada ćemo navesti nejednakosti koje su korišćene u radu.

Markovljeva nejednakost: Neka je X nenegativna slučajna veličina i neka je $a > 0$. Tad važi:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Holderova nejednakost: Neka su p i q realni brojevi takvi da važi $p > 1$, $q > 1$ i $1/p + 1/q = 1$, a X i Y slučajne veličine za koje važi $E|X|^p < \infty$ i $E|Y|^q < \infty$. Tada važi nejednakost

$$E|XY| \leq (E|X|^p)^{1/p}(E|Y|^q)^{1/q}$$

1.2.ISTORIJSKI RAZVOJ ASOCIRANIH SLUČAJNIH VELIČINA

U ovom istorijskom osvrtu na razvoj asociranih slučajnih veličina navešćemo kad je prvi put uveden pojam asociranih slucajnih veličina i navesti autore čiji su radovi, knjige i monografije dale veliki doprinos boljem razumevanju ovog pojma.

Pojam asociranih slučajnih veličina prvi put se uvodi 1967. u statističkoj literaturi kod Esara. Identičan koncept je korišćen 1971. i pod nazivom FKG-nejednakosti, gde FKG predstavlja inicijale autora Fortuin. Pretpostavlja se da Esarova potreba za uvođenjem pojma asociranih slučajnih veličina potiče od uočavanja značaja asociranih veličina za pouzdanost sistema. Prvi doprinosi razvoju mogu se pronaći u knjizi autora Barlow and Proschan (1975), dok se dalje diskusije mogu pronaći u knjigama i radovima autora Shaked i Tong (1992), Shaked i Shanthikumar (1994), Szekli (1995), Yoshihara(1997), Sackrowitz (1992, 1994) i Sarkar i Chang. Najraniji doprinosi za korišćenje u statistici mogu se videti u radovima sledećih autora: Harris (1960), Lebowitz (1972), Simon (1973), Preston (1974), Kemperman (1977). Newman (1980) je bio prvi koji je ustanovio centralnu graničnu teoremu za pozitivne asocirane slučajne veličine. Postoji još nekoliko radova, čiji je on autor ili koautor, koji su dali doprinos boljem razumevanju i značaju asociranih slučajnih veličina. Još neki od radova koji su značajni sa gledišta verovatnoće i statistike su radovi autora Grimmett (1984), Birkel (1888a,b, 1989) Bagai i Prakasa Rao (1991, 1995), Roussas (1991, 1993, 1994, 1995, 1996), Yu (1993) i Cai i Roussaa (1997a,b, 1998a,b). Birkel (1988a) bio je prvi koji je dokazao ograničenja momenata asociranih slučajnih veličina. Još jedna od važnijih oblasti koju treba spomenuti su eksponencijalne nejednakosti za asocirane slučajne veličine i njihov značaj se može videti u radovima sledećih autora: Ionnides i Roussas (1998), Henriques and Oliveira (2002a,b) and Oliveira (2005).

1.3.DEFINICIJA I OSNOVNA SVOJSTVA ASOCIRANIH VELIČINA

Nakon što smo naveli osnovne definicije i teoreme i prikazali istorijski razvoj asociranih slučajnih veličina prelazimo na deo gde ćemo navesti definiciju i osnovna svojstva asociranih slučajnih veličina.

Definicija1.3.1. *Za slučajne veličine $X_1, X_2, \dots, X_n$ kažemo da su asocirane ako važi*

$$Cov[f(\boldsymbol{X}), g(\boldsymbol{X})] \geq 0$$

za sve neopadajuće funkcije f i g za koje postoje $Ef(\boldsymbol{X})$, $Eg(\boldsymbol{X})$, $Ef(\boldsymbol{X})g(\boldsymbol{X})$.

(X *je oznaka za n-dimenzioni vektor $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.)*

Nakon osnovne definicije navešćemo najvažnija svojstva asociranih slučajnih veličina koja ćemo i dokazati.

Svojstvo 1: *Svaki podskup skupa asociranih slučajnih veličina je takođe asociran skup.*

Dokaz. Navedeno svojstvo direktno sledi iz definicije kada se izaberu neopadajuće funkcije f i g koje zavise samo od slučajnih veličina koje se nalaze u podskupu.

Svojstvo 2: *Ako su dva skupa asociranih slučajnih veličina međusobno nezavisna jedan od drugog onda je i njihova unija skup asociranih slučajnih veličina.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $\boldsymbol{X} = (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$ i $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ asocirani skupovi slučajnih veličina koji su međusobno nezavisni jedan od drugog. Neka su $f = f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ i $g = g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ neopadajuće funkcije. Tada imamo da važi sledeće:

$$\begin{aligned} Cov[f, g] &= E_{X,Y} fg - E_{X,Y} f \cdot E_{X,Y} g \\ &= E_X E_Y fg - E_X\{E_Y f \cdot E_Y g\} + E_X\{E_Y f \cdot E_Y g\} - E_X E_Y f \cdot E_X E_Y g \\ &= E_X Cov_Y[f, g] + Cov_X[E_Y f, E_Y g], \end{aligned}$$

gde $E_X, E_Y, E_{X,Y}$ redom predstavljaju matematička očekivanja skupova **X, Y** i očekivanje zajedničke raspodele skupova **X** i **Y**. Pošto su skupovi **X** i **Y** međusobno nezavisni važi da je $E_{X,Y} = E_X E_Y$. Pošto je $Cov_Y[f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y}), g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y})] \geq 0$ za svako fiksirano **x**, onda je $Cov_X[f, g] \geq 0$. $E_Y f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y})$ i $E_Y g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y})$ su neopadajuće funkcije po $\boldsymbol{x}$, pa sledi da je $Cov_X[E_Y f, E_Y g] \geq 0$.

Svojstvo 3: *Skup koji se sastoji samo od jedne slučajne veličine je asociran.*

Dokaz. Ovo svojstvo je posledica teoreme koja će biti navedena u delu *Kriterijumi za asociranost.*

Svojstvo 4: *Neopadajuće funkcije asociranih slučajnih veličina su asocirane.*

Dokaz. Neka su $X_1, X_2, \dots, X_n$ asocirane, f_i neopadajuće i $Y_i \equiv f_i(\boldsymbol{X}),\ i = 1, \dots, m$. Ako su funkcije f i g neopadajuće onda su i $f(f_1, \dots, f_m)$ i $g(g_1, \dots, g_m)$ neopadajuće. Iz *definicije 1.3.1* sledi da je $Cov_Y[f(\boldsymbol{Y}), g(\boldsymbol{Y})] = Cov_X[f(f(\boldsymbol{X})), g(f(\boldsymbol{X}))] \geq 0$.

Svojstvo 5: *Ako su $X_1^{(k)}, \dots, X_n^{(k)}$ asocirane za svako k i $\boldsymbol{X}^{(k)} \to \boldsymbol{X}$ u raspodeli onda su $X_1, \dots, X_n$ asocirane.*

Dokaz. Ovo svojstvo je posledica teoreme koja ce biti kasnije navedena u radu.

Navedena svojstva omogućavaju lakši rad i korišćenje asociranih slučajnih veličina, što će se i videti u daljem toku rada.

Teorema1.3.1. *Nezavisne slučajne veličine su asocirane.*

Dokaz. Tvrđenje ove teoreme sledi iz svojstava dva i tri.

1.4.KRITERIJUMI ZA ASOCIRANOST

Postoje različiti kriterijumi za asociranost koji su međusobno ekvivalentni. U ovom delu ćemo navesti koji su to kriterijumi i koje uslove treba da zadovoljavaju da bi bilo ispunjeno svojstvo asociranosti. U suštini to nisu drugi kriterijumi već modifikacije definicije koju smo naveli za asocirane slučajne veličine. Te modifikacije ogledaju se u tome da neki od pojmova koji učestvuju u definiciji treba da ispunjavaju određene kriterijume da bi bio ispunjen uslov asociranosti.

Za početak pokazaćemo da uslov asociranosti koji je određen *definicijom 1.3.1* važi ako su neopadajuće funkcije f i g :

(1) binarne
(2) ograničene i neprekidne

Pre nego što ovo dokažemo navešćemo identitet koji će biti korišćen u dokazu.

$$Cov[f(\boldsymbol{X}), g(\boldsymbol{X})\,] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Cov\big[Y_f(s)Y_g(t)\big]dsdt \qquad (*)$$

gde je $Y_f(x)$ definisana na sledeći način:

$$Y_f(x) = \begin{cases} 1, & f(\boldsymbol{X}) > x \\ 0, & f(\boldsymbol{X}) \leq x \end{cases}$$

Sada ćemo navesti teoremu u kojoj se koriste binarne funkcije f i g i u kojoj se koristi gore naveden identitet:

Teorema 1.4.1. *Neka je $Cov[\gamma(\boldsymbol{X}), \delta(\boldsymbol{X})\,] \geq 0$ za sve binarne neopadajuće funkcije γ i δ. Tada su $X_1, X_2, \dots, X_n$ asocirane.*

Dokaz. Neka su funkcije f i g neopadajuće. Znamo da važi identitet (*). $Y_f(s)$ i $Y_g(t)$ su neopadajuće funkcije od $\boldsymbol{X}$, pa prema pretpostavci teoreme imamo da je $Cov\big[Y_f(s)Y_g(t)\big] \geq 0$. Sledi na osnovu *definicije 1.3.1.* da su $X_1, X_2, \dots, X_n$ asocirane.

Posledica ove teoreme je *svojstvo 3.*

Sada ćemo pokazati da je za uslov asociranosti dovoljno da u *definiciji 1.3.1* uzmemo funkcije koje su ograničene i neprekidne. Pre nego što dokažemo teoremu vezanu za ograničene i neprekidne funkcije navešćemo lemu koju ćemo koristiti u dokazu teoreme.

Lema1.4.1. *Ako je $Cov[u(\boldsymbol{X}),\ v(\boldsymbol{X})] \geq 0$ za sve ograničene, neprekidne i neopadajuće u i v onda je $Cov[\varphi(\boldsymbol{X}),\ \omega(\boldsymbol{X})] \geq 0$ za sve binarne, neprekidne s desna i neopadajuće φ i ω.*

Dokaz. Neka je $A = \{x \mid \varphi(\boldsymbol{x}) = 1\}$ i neka je $d(\boldsymbol{x}, A)$ rastojanje od tačke $\boldsymbol{x}$ do skupa A. Definisaćemo $u^{(k)}(\boldsymbol{x})$ na sledeći način:

$$u^{(k)}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & d(\boldsymbol{x}, A) \geq k^{-1} \\ 1-k, & d(\boldsymbol{x}, A) < k^{-1} \end{cases}$$

Svaka funkcija $u^{(k)}(\boldsymbol{x})$ je nenegativna, ograničena odozgo sa jedinicom, neprekidna i neopadajuća. Na sličan način možemo definisati i $v^{(k)}$ koristeći funkciju ω. Prema pretpostavci teoreme imamo da je $Cov\left[u^{(k)}(\boldsymbol{X}),\ v^{(k)}(\boldsymbol{X})\right] \geq 0$. Pošto je φ neprekidna s desna, A je zatvoren, pa sledi da $u^{(k)} \to \varphi$. Slično se pokazuje da i $v^{(k)} \to \omega$. Iz ove konvergencije dolazimo do zaključka da je $Cov[\varphi(\boldsymbol{X}),\ \omega(\boldsymbol{X})] \geq 0$.

Teorema 1.4.2. *Neka je $Cov[u(\boldsymbol{X}),\ v(\boldsymbol{X})] \geq 0$ za sve ograničene, neprekidne i neopadajuće funkcije u i v. Tada su $X_1, X_2, \dots, X_n$ asocirane slučajne veličine.*

Dokaz. Definisaćemo skupove $A_i = \{x|\ \gamma_i(\boldsymbol{x}) = 1\}$, $i = 1, 2$ za binarne neopadajuće funkcije γ_i. Može se pronaći kompaktan skup $C_i \subset A_i$, tako da važi $P[C_i] + \varepsilon \geq P[A_i]$. Neka je $C_i^+ = \{\boldsymbol{c} + \boldsymbol{t}|\ \boldsymbol{c} \in C_i,\ \mathrm{x}_1 \geq 0, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n} \geq 0\}$ zatvoren skup. Tada je $C_i \subset C_i^+ \subset A_i$. Definisaćemo funkciju $\varphi_i(x)$ na sledeći način:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in C_i^+ \\ 0, & inače \end{cases}$$

Funkcija φ_i je binarna, neprekidna s desna i neopadajuća. Na osnovu *leme 1.4.1.* imamo

$$Cov[\varphi_1(\boldsymbol{X}), \varphi_2(\boldsymbol{X})] \geq 0.$$

Dalje, pošto je $\gamma_i \geq \varphi_i$ važi

$$E\gamma_1(\boldsymbol{X})\gamma_2(\boldsymbol{X}) \geq\ E\varphi_1(\boldsymbol{X})\varphi_2(\boldsymbol{X}).$$

Takođe važi

$$E\varphi_i(\boldsymbol{X}) + \varepsilon \geq E\gamma_i(\boldsymbol{X}).$$

Koristeći navedene nejednakosti dobijamo:

$$\begin{aligned} Cov[\gamma_1(\boldsymbol{X}), \gamma_2(\boldsymbol{X})] &\geq E\varphi_1(\boldsymbol{X})\varphi_2(\boldsymbol{X}) - [E\varphi_1(\boldsymbol{X}) + \varepsilon][E\varphi_2(\boldsymbol{X}) + \varepsilon] \\ &\geq\ Cov[\varphi_1(\boldsymbol{X}), \varphi_2(\boldsymbol{X})] - 2\,\varepsilon - \varepsilon^2 \\ &\geq -2\,\varepsilon - \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Kada stavimo da $\varepsilon \to 0$ dolazimo do zaključka da je $Cov[\gamma_1(\boldsymbol{X}), \gamma_2(\boldsymbol{X})]\ \geq 0$. Na osnovu *teoreme 1.4.1.* sledi da su $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n}$ asocirane što je i trebalo dokazati.

Sada ćemo navesti teoremu u kojoj ćemo uspostaviti kriterijum za asociranost $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n}$ koristeći funkciju indikatora $Y_i(x)$, koja je definisana na sledeći način:

$$Y_i(x) = \begin{cases} 1, & X_i > x \\ 0, & X_i \leq x \end{cases}$$

Teorema 1.4.3. *Neka je niz slučajnih veličina*

$$\begin{matrix} Y_1(x_1) & \cdots & Y_1(x_k) \\ \vdots & & \vdots \\ Y_n(x_1) & \cdots & Y_n(x_k) \end{matrix}$$

asociran za svaki izbor k i $x_1, \ldots, x_k$. *Tada su* $X_1, \ldots, X_n$ *asocirane.*

Dokaz. Neka su u i v nenegativne, ograničene, neprekidne i neopadajuće funkcije. Za date $x_1 < \cdots < x_k$ definišemo $u^{(k)}(\boldsymbol{X})$ na sledeći način:

-$u^{(k)}(\boldsymbol{X}) = 0$, ako postoji $Y_i(x_1)$=0 za i=1,…n

-$u^{(k)}(\boldsymbol{X}) = u(\boldsymbol{S})$, gde je $\boldsymbol{S}_i = max_j\{x_j |\, Y_i(x_j) = 1\}$, ako su svi $Y_i(x_1)$=1.

Funkcije $u^{(k)}$ su nenegativne i neopadajuće bez obzira da li se posmatraju kao funkcije od $\mathbf{X}$ ili od $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{x})$. Na identičan način se definiše i $v^{(k)}$. Pošto su u, v i uv neprekidne sledi $0 \leq u^{(k)} \to u$, $0 \leq v^{(k)} \to v$ i $0 \leq u^{(k)}v^{(k)} \to uv$ za svaku fiksiranu vrednost od $\boldsymbol{X}$. Takođe, u, v i uv su ograničene, pa na osnovu konvergencije važi i $Eu^{(k)}(\boldsymbol{X}) \to Eu(\boldsymbol{X})$, $Ev^{(k)}(\boldsymbol{X}) \to Ev(\boldsymbol{X})$ i $Eu^{(k)}(\boldsymbol{X})v^{(k)}(\boldsymbol{X}) \to Eu(\boldsymbol{X})v(\boldsymbol{X})$ .Na osnovu hipoteze imamo $0 \leq Cov\left[u^{(k)}(\boldsymbol{X}), v^{(k)}(\boldsymbol{X})\right]$, odakle sledi $Cov[u(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X})] = \lim_{k\to\infty} Cov\left[u^{(k)}(\boldsymbol{X}), v^{(k)}(\boldsymbol{X})\right] \geq 0$. Kada svakoj od ograničenih, neprekidnih i neopadajućih funkcija u i v dodamo dovoljno veliki broj konstanti one mogu postati i nenegativne. Na osnovu *teoreme 1.4.2* i svega navedenog možemo doći do zaključka da su $X_1, \ldots, X_n$ asocirane što je i trebalo dokazati.

1.5.SPECIJALNI SLUČAJEVI ASOCIRANIH SLUČAJNIH VELIČINA

U ovom delu ćemo razmotriti dva slučaja vezana za asocirane slučajne veličine koja su nam od značaja za još bolje razumevanje pojma asociranosti. Prvi koji ćemo razmotriti je asociranost binarnih slučajnih veličina, a nakon toga ćemo se upoznati sa različitim uslovima za asociranost i njihovim odnosima.

1) ASOCIRANOST BINARNIH SLUČAJNIH VELIČINA

Kada se posmatraju binarne slučajne veličine može se primetiti da svojstvo asociranosti ima zanimljive primene koje će biti prikazane u delu rada sa primenama, ali pre nego što dođemo do tih delova rada dokazaćemo jedno svojstvo i dve teoreme koje će nam biti od koristi.

Svojstvo 6: *Ako su $X_1, X_2, \dots, X_n$ asocirane binarne slučajne veličine, onda su i $1 - X_1$, $1 - X_2, \dots, 1 - X_n$ takođe asocirane binarne slučajne veličine.*

Dokaz. Ako je γ binarna, neopadajuća funkcija, onda dualna funkcija $\gamma^D(\boldsymbol{x}) = 1 - \gamma(\mathbf{1} - \boldsymbol{x})$ gde je $\mathbf{1} - \boldsymbol{x} = (\mathbf{1} - x_1, \dots, \mathbf{1} - x_n)$ je takođe binarna i neopadajuća.Uzmimo da je $\boldsymbol{Y} = \mathbf{1} - \boldsymbol{X}$. Tada

$$Cov_{\boldsymbol{Y}}[\gamma(\boldsymbol{Y}), \delta(\boldsymbol{Y})] = Cov_{\boldsymbol{X}}[\gamma^D(\boldsymbol{Y}), \delta^D(\boldsymbol{X})] \geq 0$$

za binarne neopadajuće γ, δ.

Teorema 1.5.1. *Neka su $X_1, X_2, \dots, X_n$ asocirane binarne slučajne veličine. Tada je*

a) $P[X_1 = 1, \dots, X_n = 1] \geq P[X_1 = 1] \cdots P[X_n = 1]$

b) $P[X_1 = 0, \dots, X_n = 0] \geq P[X_1 = 0] \cdots P[X_n = 0]$

Dokaz. Izabraćemo $\gamma(\boldsymbol{X}) = \mathrm{X}_1$, $\delta(\boldsymbol{X}) = X_2 \cdots X_n$, obe su neopadajuće funkcije od $\boldsymbol{X}$. S obzirom da su $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_n$ asocirane imamo $\mathrm{EX}_1 \cdots \mathrm{X}_n \geq \mathrm{EX}_1 \cdot \mathrm{EX}_2 \cdots \mathrm{X}_n$. Ponavljajući ovaj korak dobijamo da je $\mathrm{EX}_1 \cdots \mathrm{X}_n \geq \mathrm{EX}_1 \cdot \mathrm{EX}_2 \cdots \mathrm{EX}_n$. S obzirom da je kod binarne slučajne veličine $EX = P[X = 1]$ dobijamo da važi tvrđenje pod a). Kada iskoristimo upravo dokazano i *svojstvo 6* dobijamo da važi i tvrđenje pod b).

Teorema 1.5.2. *Za binarne slučajne veličine X i Y asociranost je ekvivalentna sledećem uslovu:*

$$Cov[X,Y] \geq 0$$

Dokaz. Ako su slučajne veličine X i Y asocirane iz definicije sledi da je $Cov[X,Y] \geq 0$. Pretpostavimo sad da je $Cov[X,Y] \geq 0$. Posmatraćemo sve moguće binarne neopadajuće funkcije $\gamma(X,Y)$:

$$(\gamma \equiv 0) \leq (\gamma \equiv XY) \leq \begin{pmatrix} \gamma = X \\ \gamma = Y \end{pmatrix} \leq (\gamma = X + Y - XY) \leq (\gamma \equiv 1).$$

Kovarijacija između bilo kog para binarnih funkcija γ, δ za koje važi $\gamma \leq \delta$ je automatski nenegativna. Preostali par $\gamma = X,\ \delta = Y$ ima nenegativnu kovarijaciju po pretpostavci. Ovim je dokaz završen.

2) RAZLIČITI USLOVI ZA ASOCIRANOST I NJIHOVI ODNOSI

U ovom delu ćemo se baviti uslovima asociranosti i posmatrati ih gradativno tj. koji je najslabiji, a koji najjači. Navešćemo tri uslova koja su već navođena u radu i dodaćemo četvrti uslov koji je poznat kao pozitivna regresiona zavisnost jedne veličine od druge. Nakon toga ćemo dokazati dve teoreme i prokomentarisati šta se dešava sa ovim uslovima u opštem slučaju

Sada ćemo navesti gore pomenute uslove tako da važi $(4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$.

(1) $Cov[S,T] \geq 0$
(2) $Cov[f(S),\ g(T)] \geq 0$ za sve neopadajuće f, g
(3) S i T su asocirane
(4) $P[T > t \mid S = s]$ je neopadajuća po s.

Iz do sada navedenih definicija i teorema znamo da važi $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$. Prva teorema koju ćemo dokazati se odnosi na uslove (4) i (3) tj. dokazaćemo da važi $(4) \Rightarrow (3)$.

Teorema1.5.3. *Ako je T pozitivno regresiono zavisna od S, tada su S i T asocirane.*

Dokaz. U zapisu $Cov[f(S,T), g(S,T)] = Efg - EfEg = E_S E_{T|S} fg - E_S E_{T|S} f E_S E_{T|S} g$ očekivanje za uslovnu raspodelu je obeleženo sa $E_{T|S}$. Dalje imamo

$$Cov[f,g] = E_S E_{T|S} fg - E_S\{E_{T|S} f \cdot E_{T|S} g\} + E_S\{E_{T|S} f \cdot E_{T|S} g\} - E_S E_{T|S} f E_S E_{T|S} g$$

$$= E_S Cov_{T|S}[f,g] + Cov_s[E_{T|S} f, E_{T|S} g]$$

Sada pretpostavimo da su f i g neopadajuće. Tada je $Cov_{T|S}[f,g] \geq 0$ prema *svojstvu 3*, pa odatle sledi $E_S Cov_{T|S}[f,g] \geq 0$. Da bismo pokazali da je $Cov_s[E_{T|S} f, E_{T|S} g] \geq 0$ možemo primetiti da je $P[T > t \mid S = s]$ neopadajuće po s i da iz toga sledi $P[f(T,s') > t \mid S = s]$ neopadajuće po s samim tim i $P[f(T,s) > t \mid S = s]$ je neopadajuće po s odakle dobijamo da je $E_{T|S=s} f(T,s)$ neopadajuće po s. Dakle konačno imamo da je $Cov_s[E_{T|S} f, E_{T|S} g] \geq 0$ prema *svojstvu 3*.

Sada ćemo navesti i peti uslov koji se naziva pozitivno kvadratna zavisnost za koji ćemo u narednoj teoremi pokazati da je ekvivalentan sa uslovom (2).

(5) $P[S \leq s, T \leq t] \geq P[S \leq s] P[T \leq t]$ za sve s, t.

Teorema 1.5.4. *S i T su pozitivno kvadratno zavisne ako i samo ako je $Cov[f(S,), g(T)] \geq 0$ za sve neopadajuće f i g tj. uslovi (2) i (5) su ekvivalentni.*

Dokaz. Da bismo pokazali da (2)⇒(5) izabraćemo f i g na sledeći način:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \leq s \\ 1, x > s \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, x \leq t \\ 1, x > t \end{cases}$$

Dakle, f i g su neopadajuće i iz uslova (2) imamo sledeće

$$0 \leq Cov[f(S), g(T)] = Cov[1 - f(S,), 1 - g(T)]$$

$$= P[S \leq s, T \leq t] - P[S \leq s] P[T \leq t],$$

što je i trebalo dokazati. Za drugu implikaciju nećemo navoditi dokaz jer se koriste lema i teorema koje nisu navedene u ovom radu.

Bitno je naglasiti da u opštem slučaju za proizvoljne slučajne veličine nijedan par od prva četiri navedena uslova nije tj. ne mora biti ekvivalentan osim u nekim specijalnim slučajevima kao što su binarne slučajne veličine što smo već i pokazali. Kada kažemo prva četiri uslova misli se na uslove (1), (2), (3) i (4).

Navešćemo dva primera tj. dve tabele raspodele verovatnoća gde se vidi da slučajne veličine S i T koje uzimaju vrednosti a_1, a_2, a_3, pri čemu važi $a_1 < a_2 < a_3$ zadovoljavaju:

1) Uslov (2), ali ne i uslov (3)
2) Uslov (3), ali ne i uslov (4)

Tabela1:

$T\backslash S$	a_1	a_2	a_3
a_3	8/64	0	15/64
a_2	0	18/64	0
a_1	15/64	0	8/64

Tabela2:

$T\backslash S$	a_1	a_2	a_3
a_3	1/8	0	1/4
a_2	0	1/4	0
a_1	1/4	0	1/8

Ovim smo zaokružili priču o specijalnim slučajevima asociranih slučajnih veličina i prelazimo dalje na teoreme i pojmove koji su vezani za temu rada. Naredna teorema koju ćemo navesti je veoma zanimljiva zato što su posledice ove teoreme različite primene u oblasti teorije verovatnoće i matematičke statistike, a to će biti i pokazano u delu rada koji se odnosi na primene asociranih slučajnih veličina. Sada ćemo formulisati i dokazati upravo pomenutu teoremu.

Teorema 1.5.5. *Neka su $T_1, \dots, T_n$ asocirane, $S_i \equiv f_i(\boldsymbol{T})$ i f_i neopadajuće, $i = 1, \dots, k$. Tada važi:*

a) $P[S_1 \le s_1, \dots, S_k \le s_k] \ge \prod_{i=1}^{k} P[S_i \le s_i]$
b) $P[S_1 > s_1, \dots, S_k > s_k] \ge \prod_{i=1}^{k} P[S_i > s_i]$

za sve $s_1, \dots, s_k$.

Dokaz. Prema svojstvu 4, $S_1, \dots, S_n$ su asocirane. Sada ćemo uvesti $X_i(s)$ na sledeći način:

$$X_i(s) = \begin{cases} 1, & S_i > s \\ 0, & S_i \leq s \end{cases}$$

Tada je $X_i(s)$ neopadajuće za S_i odakle sledi prema *svojstvu 4* da su $X_1(s), \dots, X_k(s)$ asocirane. Koristeći *teoremu 1.5.1.* dobijamo da važe nejednakosti koje je trebalo dokazati.

1.6.NEJEDNAKOSTI MOMENATA ASOCIRANIH SLUČAJNIH VELIČINA

Na osnovu svega što smo do sada napisali evidentno je da su asocirane slučajne veličine najvećim delom određene kovarijacijom. Ovde nas interesuju ograničenja momenata asociranih slučajnih veličina. Krenućemo od sledećeg koeficijenta koji je određen takođe kovarijacijom:

$$u(n) = sup_{k\epsilon N} \sum_{j:|j-k|\geq n} Cov(X_j, X_k), \qquad n \epsilon N \cup \{0\}$$

Ispostaviće se da granica momenata parcijalnih suma asociranih slučajnih veličina zavisi i od brzine opadanja keoficijenta $u(n)$. Sada ćemo navesti teoreme i leme uz pomoć kojih ćemo doći do željenih rezultata. Prvo ćemo navesti dve leme koje će se koristiti u dokazima teorema koje će biti navedene nakon njih.

Lema 1.6.1. *Neka su $X_1, X_2, \ldots$ asocirane slučajne veličine sa konačnom disperzijom i neka je $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Tada sledeće nejednakosti važe za $X_1^* = max\{a, min\{X_1, b\}\}$, $X_1^+ = max\{X_1, 0\}$, $X_1^- = max\{-X_1, 0\}$:*

a) $0 \leq Cov(X_1^*, X_2) \leq Cov(X_1, X_2)$
b) $0 \leq Cov(X_1^+, X_2) \leq Cov(X_1, X_2)$
c) $0 \geq Cov(X_1^-, X_2) \geq -Cov(X_1, X_2)$

Dokaz. Za $t \epsilon \boldsymbol{R}$ formiramo $f(t) = max\{a, min\{t, b\}\}$, $g(t) = t$. Tada su f i $g - f$ neopadajuće. S obzirom da su X_1 i X_2 asocirane dobijamo $0 \leq Cov(f(X_1), X_2) \leq Cov(g(X_1), X_2)$. Ovim je dokazana nejednakost pod a). Primenom nejednakosti pod a) dobijamo da važe nejednakosti b) i c) ako redom uzmemo $a = 0, b = \infty$ i $a = -\infty, b = 0$.

Lema1.6.2. *Neka su $X_1 \geq 0$ i X_2 asocirane slučajne veličine i neka je $\rho > 0$. Tada važi sledeće:*

a) Ako je $X_1 \leq R < \infty$, tada važi

$$Cov\left(X_1^{1+\rho}, X_2\right) \leq (1+\rho) R^{\rho} Cov(X_1, X_2)$$

b) Ako je $|X_2| \leq R < \infty$ i $p > 1 + \rho$, tada važi

$$Cov\left(X_1^{1+\rho}, X_2\right) \leq (1 + \rho + 2R)(E|X_1|^p)^{\frac{\rho}{p-1}}\left(Cov(X_1, X_2)\right)^{(p-1-\rho)/(p-1)}$$

c) Ako je $\gamma > 0$ i $p, q > 1$, pri čemu važi $1/p + 1/q = 1$ tada imamo da važi i

$$Cov\left(X_1^{1+\rho}, X_2\right) \leq (3+\rho)\left(E|X_1|^{p(1+\rho+\gamma)}\right)^{\frac{\rho}{p(\rho+\gamma)}} \times (E|X_2|^q)^{\frac{\rho}{q(\rho+\gamma)}}\left(Cov(X_1, X_2)\right)^{\gamma/(\rho+\gamma)}$$

d) Ako je $\delta > 0$, tada važi

$$Cov\left(X_1^{1+\rho}, X_2\right) \leq (3+\rho)\,(E|X_1|^{2+\rho})^{\frac{\rho(1+\rho+\sigma)}{(\delta+\rho(2+\rho+\delta))}} \times \left(E|X_2|^{2+\rho+\delta}\right)^{\frac{\rho}{(\delta+\rho(2+\rho+\sigma))}}\left(Cov(X_1, X_2)\right)^{\delta/(\delta+\rho(2+\rho+\delta))}$$

<u>Dokaz.</u>

a) Odabraćemo za $t \in \boldsymbol{R}$ funkcije f i g na sledeći način:

$$f(t) = t^{1+\rho} 1_{\{0 \leq t \leq R\}}$$

$$g(t) = (1+\rho)R^{\rho} 1_{\{0 \leq t \leq R\}} + \rho R^{1+\rho} 1_{\{t > R\}}$$

Tada je $g - f$ neopadajuće. Pošto su X_1 i X_2 asocirane sledi da važi

$$Cov(f(X_1), X_2) \leq Cov(g(X_1), X_2)$$

Ovim je dokaz pod a) završen.

b) Neka je $N > 0$ fiksirano. Tada imamo

$$Cov\left(X_1^{1+\rho}, X_2\right) = Cov(f(X_1)^{1+\rho}, X_2) + Cov\left(X_1^{1+\rho} - f(X_1)^{1+\rho}, X_2\right) \qquad (1)$$

, gde je za $t \in R$

$$f(t) = t 1_{\{0 \leq t \leq N\}} + N 1_{\{t > N\}}.$$

Uzimajući u obzir da su neopadajuće funkcije asociranih veličina takođe asocirane sledi da su $f(X_1)$ i X_2 asocirane. Na osnovu dela pod a) i *leme 1.6.1.*(a) imamo da je :

$$Cov(f(X_1)^{1+\rho}, X_2) \leq (1+\rho)N^{\rho} Cov(X_1, X_2) \qquad (2)$$

Drugi sabirak sa desne strane jednakosti (1) je ograničen sa

$$Cov\left(X_1^{1+\rho} - f(X_1)^{1+\rho}, X_2\right) \leq 2RE\left|X_1^{1+\rho}\right| 1_{\{X_1 > N\}} \leq 2RN^{-p+1+\rho} E|X_1|^p \qquad (3)$$

Sada ćemo iskoristiti jedno svojstvo koje nećemo dokazivati, a to je da su nekorelisane asocirane slučajne veličine nezavisne. Na osnovu toga možemo pretpostaviti da je ne umanjujući opštost $Cov(X_1, X_2) > 0$. Kada uzmemo da je $N = (E|X_1|^p / Cov(X_1, X_2))^{1/(p-1)}$, i na osnovu (1), (2) i (3) sledi da važi nejednakost pod b).

c) Neka je $N > 0$ fiksirano. Uradićemo kao pod b). Na osnovu Holderove nejednakosti drugi sabirak sa desne strane jednakosti (1) je ograničen sa

$$Cov\left(X_1^{1+\rho} - f(X_1)^{1+\rho}, X_2\right) \leq 2\left(E\left|X_1^{p(1+\rho)} 1_{\{X_1 > N\}}\right|\right)^{1/p} (E|X_2|^q)^{1/q}$$
$$\leq 2N^{-\gamma}\left(E|X_1|^{p(1+\rho+\gamma)}\right)^{1/p} (E|X_2|^q)^{1/q} \qquad (4)$$

Ponovo ćemo pretpostaviti da je $Cov(X_1, X_2) > 0$. Kada izaberemo da je

$$N = \left[\left(E|X_1|^{p(1+\rho+\gamma)}\right)^{1/p} (E|X_2|^q)^{1/q} / Cov(X_1, X_2)\right]^{1/(\rho+\gamma)}$$

i iskoristimo (1), (2) i (4) dobijamo da važi nejednakost pod c).

d) Nejednakost pod d) sledi iz nejednakosti pod c) kada uzmemo $\gamma = \delta/(2 + \rho + \delta)$ i $p = (2 + \rho)/(1 + \rho + \gamma)$.

<u>Teorema 1.6.1.</u> *Neka su $X_1, X_2, \ldots$ asocirane slučajne veličine koje zadovoljavaju uslove*

$$E(X_j) = 0$$

$$sup_{j \epsilon N} E\left|X_j\right|^{r+\delta} < \infty, \text{ za neko } r > 2 \text{ i } \delta > 0. \qquad (5)$$

Pretpostavimo da važi sledeće:

$$u(n) = O\left(n^{-(r-2)(r+\delta)/2\delta}\right). \qquad (6)$$

Tada postoji konstanta B koja ne zavisi od n takva da za svako $n \epsilon N$ važi:

$$sup_{m \epsilon N \cup \{0\}} E|S_{n+m} - S_m|^r \leq Bn^{r/2}. \qquad (7)$$

<u>Dokaz.</u> Uzećemo da je $r = l + \rho$, gde $l \epsilon N$, $l \geq 2$ i $\rho \epsilon (0, 1]$. Dokaz će ići indukcijom po l. Radi jednostavnijeg praćenja dokaza uvešćemo sledeću notaciju:

$$S_{m,n} = S_{n+m} - S_m$$

$$a_n = sup_{m \epsilon \boldsymbol{N} \cup \{0\}} E\left|S_{m,n}\right|^r$$

Pokazaćemo da postoji $C_1 < \infty$ i $\varepsilon \in (0,1)$, takvi da za svako $m \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, $n \in \boldsymbol{N}$, važi:

$$E\left|S_{m,2n}\right|^r \leq 2a_n + C_1 {a_n}^{1-\rho} n^{\rho r/2} + C_1 {a_n}^{1-\varepsilon} n^{\varepsilon r/2} \tag{8}$$

Iz (8) imamo sledeće

$$a_{2n} \leq 2a_n + C_1 {a_n}^{1-\rho} n^{\rho r/2} + C_1 {a_n}^{1-\varepsilon} n^{\varepsilon r/2} \text{ za } n \in \boldsymbol{N},$$

i po indukciji postoji $C < \infty$ takvo da $a_n \leq C n^{r/2}$ za $n \in \{2^{\mu} : \mu \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}\}$.

Sada ćemo navesti nekoliko nejednakosti koje ćemo dokazati, a iz kojih sledi da važi (8).

$$E\left|S_{m,2n}\right|^r \leq 2a_n + 2^{l+1}\left(E\left|S_{m,n}\right|^{\rho}\left|S_{m+n,n}\right|^{l} + E\left|S_{m,n}\right|^{l}\left|S_{m+n,n}\right|^{\rho}\right) \tag{9}$$

$$E\left|S_{m,n}\right|^{\rho}\left|S_{m+n,n}\right|^{l} \leq {a_n}^{1-\rho}\left(E\left|S_{m,n}\right|\left|S_{m+n,n}\right|^{l-1+\rho}\right)^{\rho}$$

$$E\left|S_{m,n}\right|^{l}\left|S_{m+n,n}\right|^{\rho} \leq {a_n}^{1-\rho}\left(E\left|S_{m,n}\right|^{l-1+\rho}\left|S_{m+n,n}\right|\right)^{\rho} \tag{10}$$

$$E\left|S_{m,n}\right|\left|S_{m+n,n}\right|^{l-1+\rho} \leq \left|Cov\left(\left|S_{m,n}\right|, \left|S_{m+n,n}\right|^{l-1+\rho}\right)\right| + C_2 n^{r/2}$$

$$E\left|S_{m,n}\right|^{l-1+\rho}\left|S_{m+n,n}\right| \leq \left|Cov\left(\left|S_{m,n}\right|^{l-1+\rho}, \left|S_{m+n,n}\right|\right)\right| + C_2 n^{r/2} \tag{11}$$

$$\left|Cov\left(\left|S_{m,n}\right|, \left|S_{m+n,n}\right|^{l-1+\rho}\right)\right| \leq C_3 {a_n}^{1-\gamma} n^{\gamma r/2}$$

$$\left|Cov\left(\left|S_{m,n}\right|^{l-1+\rho}, \left|S_{m+n,n}\right|\right)\right| \leq C_3 {a_n}^{1-\gamma} n^{\gamma r/2} \tag{12}$$

, gde je $\gamma = (r - 2 + \delta)/s$, a $s = \delta + (r-2)(r+\delta)$. Dobićemo da važi (8) iz nejednakosti $(9) - (12)$, ako uzmemo da je $\varepsilon = \rho\gamma$.

Prvo ćemo dokazati nejednakost (9) na sledeći način:

$$E\left|S_{m,2n}\right|^{r} = E\left|S_{m,n} + S_{m+n,n}\right|^{l+\rho}$$

$$\leq 2a_n + \sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}\left(E\left|S_{m,n}\right|^{l-j+\rho}\left|S_{m+n,n}\right|^{j} + E\left|S_{m,n}\right|^{j}\left|S_{m+n,n}\right|^{l-j+\rho}\right)$$

$$\leq 2a_n + 2\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}\left(E\left|S_{m,n}\right|^{\rho}\left|S_{m+n,n}\right|^{l} + E\left|S_{m,n}\right|^{l}\left|S_{m+n,n}\right|^{\rho}\right)$$

$$\leq 2a_n + 2^{l+1}\left(E\left|S_{m,n}\right|^{\rho}\left|S_{m+n,n}\right|^{l} + E\left|S_{m,n}\right|^{l}\left|S_{m+n,n}\right|^{\rho}\right).$$

Ovim smo dokazali (9).

Sad prelazimo na dokaz nejednakosti (10). Dokazaćemo samo prvu nejednakost, druga se dokazuje analogno. Bez gubitka opštosti pretpostavićemo da je $\rho \in (0,1)$. Na osnovu Holderove nejednakosti imamo da je

$$E\left|S_{m,n}\right|^{\rho}\left|S_{m+n,n}\right|^{l} \leq \left(E\left|S_{m,n}\right|\left|S_{m+n,n}\right|^{l-1+\rho}\right)^{\rho}\left(E\left|S_{m+n,n}\right|^{(l-\rho(l-1+\rho))/(1-\rho)}\right)^{1-\rho}$$

$$\leq {a_n}^{1-\rho}\left(E\left|S_{m,n}\right|\left|S_{m+n,n}\right|^{l-1+\rho}\right)^{\rho}.$$

Ovim je dokazano (10).

Prelazimo na dokaz nejednakosti (11) i kao i u prethodnom slučaju dokazaćemo samo prvu nejednakost, druga se dokazuje analogno.

Imamo sledeće

$$E\left|S_{m,n}\right|\left|S_{m+n,n}\right|^{l-1+\rho} \leq \left|Cov\left(\left|S_{m,n}\right|, \left|S_{m+n,n}\right|^{l-1+\rho}\right)\right| + \left(ES_{m,n}^{2}\right)^{1/2}E\left|S_{m+n,n}\right|^{l-1+\rho} \quad (13)$$

Na osnovu pretpostavki imamo da je $u(0) < \infty$ i prema definiciji $u(0)$ sledi

$$ES_{m,n}^{2} \leq u(0)n\,,$$

$$ES_{m+n,n}^{2} \leq u(0) \quad (14)$$

Ako je $l = 2$ nejednakost (11) sledi iz (13), (14) i Holderove nejednakosti. Ako je $l > 2$ možemo pretpostaviti da važi

$$E\left|S_{m+n,n}\right|^{l-1+\rho} \leq C_4 n^{(l-1+\rho)/2}.$$

Tada na osnovu (13) i (14) sledi da važi (11).

Preostaje nam da dokažemo još nejednakost (12). Imamo sledeće:

$$\begin{aligned}
&\left|Cov\left(\left|S_{m,n}\right|, \left|S_{m+n,n}\right|^{l-1+\rho}\right)\right| = \left|Cov\left(\left|S_{m,n}\right|, \left|S_{m+n,n}\right|^{r-1}\right)\right| \\
&\leq \left|Cov\left(S_{m,n}^{+}, \left(S_{m+n,n}^{+}\right)^{r-1}\right)\right| + \left|Cov\left(S_{m,n}^{+}, \left(S_{m+n,n}^{-}\right)^{r-1}\right)\right| \\
&+ \left|Cov\left(S_{m,n}^{-}, \left(S_{m+n,n}^{+}\right)^{r-1}\right)\right| + \left|Cov\left(S_{m,n}^{-}, \left(S_{m+n,n}^{-}\right)^{r-1}\right)\right| \qquad (15)
\end{aligned}$$

Pošto su $S_{m,n}^{+}$ i $\left(S_{m+n,n}^{+}\right)^{r-1}$ neopadajuće i $S_{m,n}^{-}$ i $\left(S_{m+n,n}^{-}\right)^{r-1}$ nerastuće funkcije od $X_{m+1}, \dots, X_{m+2n}$, a $X_{m+1}, \dots, X_{m+2n}$ su asocirane sledi da važe sledeće nejednakosti

$$Cov\left(S_{m,n}^{+}, \left(S_{m+n,n}^{+}\right)^{r-1}\right) \geq 0,$$

$$Cov\left(S_{m,n}^{+}, \left(S_{m+n,n}^{-}\right)^{r-1}\right) \geq 0,$$

$$Cov\left(S_{m,n}^{-}, \left(S_{m+n,n}^{+}\right)^{r-1}\right) \leq 0,$$

$$Cov\left(S_{m,n}^{-}, \left(S_{m+n,n}^{-}\right)^{r-1}\right) \leq 0.$$

Na osnovu (15) sledi

$$\begin{aligned}
&\left|Cov\left(\left|S_{m,n}\right|, \left|S_{m+n,n}\right|^{l-1+\rho}\right)\right| \\
&\leq \sum_{j=m+1}^{m+n} Cov\left(X_j, \left(S_{m+n,n}^{+}\right)^{r-1}\right) + \sum_{j=m+1}^{m+n} Cov\left(-X_j, \left(S_{m+n,n}^{-}\right)^{r-1}\right) \qquad (16)
\end{aligned}$$

S obzirom da su neopadajuće (nerastuće) funkcije asociranih slučajnih veličina takođe asocirane slučajne veličine imamo da su X_j i $S_{m+n,n}$, X_j i $S_{m+n,n}^{+}$, $-X_j$ i $S_{m+n,n}^{-}$ asocirane slučajne veličine za svako $j \in \{m+1, \dots, m+n\}$. Primenjujući *lemu1.6.2.*(d)) ($\rho = r - 2, X_1 = S_{m+n,n}^{+}\left(S_{m+n,n}^{-}\right)$ i $X_2 = X_j(-X_j)$), *lemu1.6.1.*(b)) i pretpostavke teoreme dobijamo iz (16) sledeće

$$\left|Cov\left(\left|S_{m,n}\right|,\left|S_{m+n,n}\right|^{l-1+\rho}\right)\right|$$

$$\leq 2(r+1)sup_{i\,\epsilon\,N}\left(E|X_i|^{r+\delta}\right)^{(r-2)/s}a_n^{1-\gamma}\sum_{j=m+1}^{m+n}\left(Cov(X_j,S_{m+n,n})\right)^{\delta/s}$$

$$\leq C_5 a_n^{1-\gamma}\sum_{j=1}^{n}u(j)^{\delta/s}j^{(r-2)(r+\delta)/2s}j^{-(r-2)(r+\delta)/2s}$$

$$\leq C_6 a_n^{1-\gamma}\sum_{j=1}^{n}j^{-(r-2)(r+\delta)/2s}$$

$$\leq C_7 a_n^{1-\gamma}n^{\gamma r/2}.$$

Ovim je završen dokaz nejednakosti (12), a samim tim i dokaz teoreme.

Ako su X_j uniformno ograničene imamo sledeću teoremu:

<u>Teorema 1.6.2.</u> *Neka su* $X_1, X_2, \ldots$ *asocirane slučajne veličine koje zadovoljavaju uslove*

$$E\left(X_j\right) = 0$$

$$\left|X_j\right| \leq C < \infty, \quad \text{za } j\,\epsilon\,N.$$

Pretpostavimo da važi sledeće:

$$u(n) = O\left(n^{-(r-2)/2}\right). \tag{17}$$

Tada važi (7).

Sada ćemo navesti sa dokazom posledicu teoreme 1.6.1.

<u>Posledica 1.6.1.</u> *Neka su* $X_1, X_2, \ldots$ *asocirane slučajne veličine za koje važi* $E\left(X_j\right) = 0$. *Pretpostavimo još da važe sledeća dva uslova:*

$$sup_{j\epsilon N}E\left|X_j\right|^s < \infty \quad \text{za neko } s > 2 \tag{18}$$

$$u(n) = O(n^{-\rho}) \quad \text{za neko } \rho > 0. \tag{19}$$

Tada postoji $r > 2$ *takvo da važi (3).*

Dokaz. Uzećemo $r = 2s(1+\rho)/(s+2\rho)$, $\delta = s - r$. Tada imamo $r > 2$, $\delta > 0$ i

$\rho = (r-2)(r+\delta)/2\delta$. Kada iskoristimo uslove (18) i (19) i *teoremu 1.6.1*. dobijamo da važi (7).

2. ASOCIRANE SLUČAJNE VELIČINE-PRIMENE

Kao što smo naveli u uvodu rada deo vezan za primene će biti baziran na teorijskim činjenicama navedenim u prvom delu rada i biće prikazane različite teorijske i praktične primene asociranih slučajnih veličina. Najvažnije oblasti u kojima se slučajne veličine koje su tema ovog rada primenjuju su teorija verovatnoće i matematička statistika. Najveći deo u ovom delu rada biće posvećen eksponencijalnim nejednakostima za asocirane slučajne veličine. Prvo će biti navedene različite posledice koje su primena teorema i svojstava navedenih u teorijskom delu, a nakon toga će biti navedena eksponencijalna nejednakost za asocirane veličine koja će biti detaljno objašnjena.

2.1 PRIMENE U TEORIJI VEROVATNOĆE I MATEMATIČKOJ STATISTICI

U prvom delu rada naveli smo *teoremu 1.5.5.* za koju smo napomenuli da je interesantna jer iz nje proističu posledice koje su primene u teoriji verovatnoće i matematičkoj statistici. Sada ćemo i navesti koji su to delovi verovatnoće i statistike u kojima se može upravo pomenuta teorema iskoristiti.

1) **PARCIJALNE SUME**
2) **STATISTIKE PORETKA**
3) **VIŠEDIMENZIONALNA EKSPONENCIJALNA RASPODELA**
4) **DISPERZIONA ANALIZA**

Sada ćemo navesti i na koji način se može primeniti *teorema 1.5.5.* u gore navedenim oblastima.

1) Parcijalne sume

Posledica 2.1.1. *Neka su* $T_1, \dots, T_n$ *nezavisne slučajne veličine i* $S_i \equiv \sum_{j=1}^{i} T_j, i = 1, \dots, n$. *Tada važi:*

$$P[S_1 \leq s_1, \dots, S_n \leq s_n] \geq \prod_{i=1}^{n} P[S_i \leq s_i]$$

za sve $s_1, \dots, s_k$.

Dokaz. Ova nejednakost sledi direktno iz *teoreme 1.5.5.* ako uočimo da su nezavisne slučajne veličine asocirane i da je svaka S_i neopadajuća za $T_1, \dots, T_n$.

2) Statistike poretka

Posledica 2.1.2. *Neka su $S_1, \dots, S_n$ statistike poretka u uzorku $T_1, \dots, T_n$. Tada važi:*

$$P[S_{i_1} \le s_{i_1}, \dots, S_{i_k} \le s_{i_k}] \ge \prod_{i=1}^{n} P[S_i \le s_i]$$

za svaki izbor $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ *i* $s_{i_1} < \cdots < s_{i_k}$.

Dokaz. Ova nejednakost važi jer se može primetiti da ja svaka S_i neopadajuća funkcija nezavisnih slučajnih veličina $T_1, \dots, T_n$.

3) Višedimenzionalna eksponencijalna raspodela

Posledica 2.1.3. *Ako slučajne veličine $S_1, \dots, S_m$ imaju funkciju raspodele*

$$F(s_1, \dots, s_m) = 1 - exp\,[-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i s_i - \sum_{i<j} \lambda_{ij}\, max(s_i, s_j) - \sum_{i<j<k} \lambda_{ijk} max\,(s_i, s_j, s_k) - \cdots - \lambda_{12\cdots m} max\,(s_1, s_2, \dots, s_m)]$$

, tada postoje nezavisne eksponencijalne slučajne veličine $T_1, \dots, T_n$ gde je $S_j = min\,(T_i\,;\ i \in A_j)$, $A_j \subset \{1, \dots, n\}$.

Dokaz. Ovde nećemo izvoditi ceo dokaz, samo ćemo naznačiti kako se koristi *teorema 1.5.5* u dokazu. S obzirom da su $T_1, \dots, T_n$ nezavisne i svaka S_j neopadajuća funkcija od $T_1, \dots, T_n$ na osnovu *teoreme 1.5.5.* možemo zaključiti da važe sledeće nejednakosti:

$$F(s_1, \dots, s_m) \ge \prod_{i=1}^{m} F_i(s_i)$$

$$1 - F(s_1, \dots, s_m) \ge \prod_{i=1}^{m} [1 - F_i(s_i)]$$

, gde je F_i marginalna raspodela za S_i.

4) Disperziona analiza

Ovde nećemo navoditi konkretnu posledicu i njen dokaz već ćemo objasniti gde se primenjuje *teorema 1.5.5*. U slučaju testiranja dve hipoteze koristeći test statistike

$$F_1 = \frac{\frac{q_1}{n_1}}{\frac{q_3}{n_3}} \quad \text{i} \quad F_2 = \frac{\frac{q_2}{n_2}}{\frac{q_3}{n_3}}$$

, gde su q_1, q_2, q_3 nezavisne kvadratne forme sa χ^2 raspodelom sa redom n_1, n_2, n_3 stepeni slobode dobija se da je verovatnoća da se ne napravi greška prve vrste veća kad se posmatraju zajedno eksperimenti nego odvojeno. Ovde se primenjuje test faktora rizika na kolone i redove (q_1, q_2). Nejednakost koja proističe iz *teoreme 1.5.5.* je sledeća:

$$P[F_1 < F_{1\alpha},\ \ F_2 < F_{2\alpha}] > P[F_1 < F_{1\alpha}]P[F_2 < F_{2\alpha}]$$

2.2 EKSPONENCIJALNA NEJEDNAKOST ZA ASOCIRANE VELIČINE

U ovom delu rada ćemo, kao što smo već napomenuli u uvodu o primenama, dokazati eksponencijalnu nejednakost za pozitivne asocirane slučajne veličine koje ispunjavaju uslov stacionarnosti. U nekim naučnim radovima ovo je dokazano koristeći uslov ograničenosti. Mi ćemo ovu nejednakost dokazati zamenjujući pretpostavku o ograničenosti sa Laplasovom transformacijom. U dokazu će se koristiti metoda skraćivanja (*truncation technique)* zajedno sa dekompozicijom suma da bi bilo moguće uraditi određene aproksimacije. Nakon toga će biti pokazano da su ovi uslovi ispunjeni za geometrijski opadajuće kovarijacije i moći ćemo da utvrdimo brzinu konvergencije za jaki zakon velikih brojeva.

Prvo ćemo navesti sve neophodne teoreme i leme, a nakon svega toga biće formulisana teorema čiji će dokaz proisteći iz teorema i lema koje će sad biti navedene. Neke od njih će biti sa detaljnim dokazom, a neke će biti samo navedene bez dokaza ili uz kratka objašnjenja. Krenućemo od dve leme i uvođenja notacije koja će biti korišćena u dokazu.

Lema 2.2.1. *Neka su* $T_1, \dots, T_n$ *asocirane slučajne veličine ograničene konstantom M. Tada za svako* $\theta > 0$ *važi:*

$$\left|E\left(e^{\theta \sum_{i=1}^{n} T_i}\right) - \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{\theta T_i}\right)\right| \leq \theta^2 e^{n\theta M} \sum_{1 \leq i < j \leq n} Cov(T_i, T_j).$$

Lema 2.2.2. *Neka je* T *centrirana slučajna veličina. Ako postoje* $a, b \in R$*, takvi da važi* $P(a \leq T \leq b) = 1$*, za svako* $\lambda > 0$*, tada važi sledeća nejednakost:*

$$E\left(e^{\lambda T}\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2 (b-a)^2}{8}\right)$$

Primena ovih lema biće vidljiva u daljem toku rada.

Sada ćemo navesti notaciju koju ćemo koristiti u dokazu. Neka je $c_n, n \geq 1$ niz nenegativnih realnih brojeva, takav da $c_n \to +\infty$ i neka su $X_n, n \geq 1$ slučajne veličine. Definisaćemo za svako $i, n \geq 1$ sledeće:

$$X_{1,i,n} = -c_n I_{(-\infty,-c_n)}(X_i) + X_i I_{[-c_n,c_n]}(X_i) + c_n I_{(c_n,+\infty)}(X_i),$$

$$X_{2,i,n} = (X_i - c_n) I_{(c_n,+\infty)}(X_i),$$

$$X_{3,i,n} = (X_i + c_n) I_{(-\infty,-c_n)}(X_i), \tag{1}$$

gde I_A predstavlja karakterističnu funkciju skupa A. Za svako fiksirano $n \geq 1$ slučajne veličine $X_{1,1,n}, \dots, X_{1,n,n}$ su uniformno ograničene da bi mogla da se primeni na njima *lema 2.2.1.* Takođe, može se uočiti da su ove slučajne veličine nastale monotonim transformacijama početnih slučajnih veličina X_n što znači da pretpostavka o asociranosti važi i nakon ove transformacije. Ovo što smo upravo naveli je način na koji je primenjena metoda skraćivanja.

Pored ovog postupka koristiće se i blokovska dekompozicija suma jer je ona potrebna za aproksimaciju postupka nezavisnosti skraćenih veličina. Za repove ćemo direktno primeniti Laplasovu transformaciju.

Sada uvodimo još dodatne notacije. Posmatraćemo niz prirodnih brojeva p_n takav da važi za svako $n \geq 1$, $p_n < n/2$. Dalje, definisaćemo r_n kao najveći ceo broj koji je manji ili jednak od $n/2\, p_n$. Sada ćemo za $q = 1, 2, 3$ i $j = 1, \dots, 2r_n$ definisati sledeće:

$$Y_{q,j,n} = \sum_{l=(j-1)p_n+1}^{jp_n} \left(X_{q,l,n} - E\left(X_{q,l,n}\right)\right) \tag{2}$$

Ostaje nam još da definišemo za svako $q = 1, 2, 3$ i $n \geq 1$ sledeće :

$$Z_{q,n,od} = \sum_{j=1}^{r_n} Y_{q,2j-1,n} \quad Z_{q,n,ev} = \sum_{j=1}^{r_n} Y_{q,2j,n}$$

$$R_{q,n} = \sum_{l=2r_n p_n+1}^{n} \left(X_{q,l,n} - E\left(X_{q,l,n}\right)\right) \tag{3}$$

Na ovaj način smo dobili da će dokaz eksponencijalne nejednakosti biti podeljen u dva dela, deo koji se odnosi na kontrolu ograničenih delova koji odgovaraju indeksu $q = 1$ i na deo koji se bavi kontrolom neograničenih delova koji odgovaraju indeksima $q = 2, 3$.

Sada ćemo se pozabaviti kontrolom ograničenih delova. Može se na osnovu (1) i (2) primetiti da važi $|Y_{1,j,n}| \leq 2p_n c_n,\ j = 1, \dots, r_n$ što omogućava da se primeni *lema 2.2.2* za kontrolu Laplasove transformacije ovih veličina. Navešćemo lemu iz koje se dobijaju gornja ograničenja.

Lema 2.2.3. *Neka su $X_1, X_2, \dots$ slučajne veličine. Ako su $Y_{1,j,n}$, $j = 1, \dots, 2r_n$ definisane pod (2) tada za svako $\lambda > 0$ važi :*

$$\prod_{j=1}^{r_n} E(e^{\lambda Y_{1,2j-1,n}}) \leq \exp\,(\lambda^2 n p_n c_n^2)$$

i

$$\prod_{j=1}^{r_n} E(e^{\lambda Y_{1,2j,n}}) \leq \exp\,(\lambda^2 n p_n c_n^2)$$

Mi ćemo ovde biti zainteresovani za kontrolisanje razlike Laplasove transformacije sume veličina i šta bi imali da su veličine nezavisne. Ta kontrola se postiže sumiranjem po parnim i neparnim indeksima kao što se može videti kad se pogledaju leve strane nejednakosti koje su navedene u prethodnoj lemi.

Lema 2.2.4. *Neka su $X_1, X_2, \dots$ strogo stacionarne i asocirane slučajne veličine. Koristeći (1), (2) i (3) imamo da za svako $\lambda > 0$ važi:*

$$\left| E\left(e^{\lambda Z_{1,n,od}}\right) - \prod_{j=1}^{r_n} E(e^{\lambda Y_{1,2j-1,n}}) \right| \leq \frac{\lambda^2 n}{2} e^{\lambda n c_n} \sum_{j=p_n+2}^{(2r_n-1)p_n} Cov(X_1, X_j) \qquad (4)$$

Analogno važi i za $Z_{1,n,ev}$.

Napomena: Oznaka za indekse od i ev su skraćenice od engleskih reči odd (neparan) i even (paran).

Dokaz. Na osnovu činjenice da su veličine definisane sa (1) asocirane i prema (3) možemo uočiti da primenom leme 2.2.1 dobijamo sledeću nejednakost:

$$\left| E\left(e^{\lambda Z_{1,n,od}}\right) - \prod_{j=1}^{r_n} E\left(e^{\lambda Y_{1,2j-1,n}}\right) \right| \leq \lambda^2 r_n p_n e^{2\lambda r_n p_n} \sum_{1\leq j<j'\leq r_n} Cov\left(Y_{1,2j-1,n}, Y_{1,2j'-1,n}\right) \qquad (5)$$

Ispred sume imamo eksponent koji je ograničen na osnovu (4) i faktor $2r_n p_n \leq n$ tako da nam preostaje da rešimo deo vezan za kovarijaciju. Za to ćemo iskoristiti stacionarnost slučajnih veličina:

$$\sum_{1\leq j<j'\leq r_n} Cov\left(Y_{1,2j-1,n}, Y_{1,2j'-1,n}\right) = \sum_{j=1}^{r_n-1} (r_n - 1) Cov(Y_{1,1,n}, Y_{1,2j-1,n})$$

Dalje imamo na osnovu stacionarnosti i sledeće:

$$\begin{aligned} Cov\left(Y_{1,1,n}, Y_{1,2j-1,n}\right) &= \sum_{l=0}^{p_n-1} (p_n - l) Cov(X_{1,1,n}, X_{1,2jp_n+l+1,n}) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{p_n-1} (p_n - l) Cov(X_{1,l+1,n}, X_{1,2jp_n+1,n}) \\ &\leq p_n \sum_{l=(2j-1)p_n}^{(2j+1)p_n} Cov(X_{1,1,n}, X_{1,l,n}) \end{aligned}$$

Za dalje razmatranje kovarijacije iskoristićemo Hefdingovu formulu:

$$Cov\left(X_{1,i,n}, X_{1,j,n}\right) = \int_{R^2} P\left(X_{1,i,n} > u, X_{1,j,n} > v\right) - P\left(X_{1,i,n} > u\right) P(X_{1,j,n} > v)\, du dv \quad (7)$$

Na osnovu onoga što je urađeno u (1) može se zaključiti da funkcija pod integralom ne postoji van $[-c_n, +c_n]^2$. Umesto $u, v \in [-c_n, +c_n]$ možemo da zapišemo veličine $X_{1,i,n}$ i $X_{1,j,n}$. Zbog lakšeg zapisa pisaćemo X_i i X_j .

$$Cov(X_{1,i,n}, X_{1,j,n}) = \int_{[-c_n,+c_n]^2} P(X_i > u, X_j > v) - P(X_i > u)P(X_j > v)dudv$$

$$\leq \int_{R^2} P(X_i > u, X_j > v) - P(X_i > u)P(X_j > v)dudv = Cov(X_i, X_j)$$

Kada se ovo ubaci u nejednakosti (5) i (6) dokaz leme je završen.

Sada kada smo i ovu lemu dokazali možemo da dokažemo eksponencijalnu nejednakost za sumu po parnim ili neparnim indeksima definisanih veličina. To ćemo pokazati u narednoj lemi.

<u>Lema 2.2.5.</u> *Neka su* $X_1, X_2, \ldots$ *strogo stacionarne i asocirane slučajne veličine. Pretpostavimo da važi*

$$\frac{n}{p_n^2 c_n^4} exp\left(\frac{n}{p_n c_n}\right) \sum_{j=p_n+2}^{\infty} Cov(X_1, X_j) \leq C_0 < \infty \tag{8}$$

Tada za svako $\varepsilon \in (0,1)$ *važi:*

$$P\left(\frac{1}{n}|Z_{1,n,od}| > \frac{\varepsilon}{9}\right) \leq (1 + 36C_0)\, exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{162 p_n c_n^2}\right) \tag{9}$$

Analogno važi i za $Z_{1,n,ev}$.

<u>Dokaz.</u> Primenom Markovljeve nejednakosti i prethodno dokazane leme imamo da za svako $\lambda > 0$ važi:

$$P\left(\frac{1}{n}|Z_{1,n,od}| > \frac{\varepsilon}{9}\right)$$
$$\leq \frac{\lambda^2 n}{2} \exp\left(\lambda n c_n - \lambda n \frac{\varepsilon}{9}\right) \sum_{j=p_n+2}^{(2r_n-1)p_n} Cov(X_1, X_j) + exp\left(\lambda^2 n p_n c_n^2 - \lambda n \frac{\varepsilon}{9}\right) \tag{10}$$

Za optimizaciju eksponenta drugog sabirka sa desne strane uzećemo da je $\lambda = \varepsilon/18 p_n c_n^2$, kada to zamenimo dobijamo da je eksponent jednak $-n\varepsilon^2/162 p_n c_n^2$. Kada zamenimo λ i u prvi sabirak nejednakosti sa desne strane dobijamo sledeće:

$$P\left(\frac{1}{n}\left|Z_{1,n,od}\right| > \frac{\varepsilon}{9}\right) \leq 36C_0 \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{18p_n c_n^2}\right) + \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{162p_n c_n^2}\right)$$

$$\leq (1 + 36C_0) \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{162p_n c_n^2}\right)$$

Ovim je dokaz ove leme završen.

Još nam preostaje, što se tiče ograničenih delova, da proverimo kontrolu suma koje odgovaraju indeksima $2r_n p_n$, a to je $R_{1,n}$.

<u>Lema2.2.6.</u> *Neka su $X_1, X_2, \ldots$ strogo stacionarne i asocirane slučajne veličine.Pretpostavimo još da važi*

$$\frac{n}{c_n} \to +\infty \tag{11}$$

Tada, na osnovu (3), za dovoljno veliko n i za svako $\varepsilon > 0$, imamo da je

$$P\left(\left|R_{1,n}\right| > n\varepsilon\right) = 0$$

<u>Dokaz.</u> S obzirom da je $R_{1,n} = \sum_{l=2r_n p_{n+1}}^{n} \left(X_{1,l,n} - E\left(X_{1,l,n}\right)\right)$ sledi da je

$$\left|R_{1,n}\right| \leq 2(n - 2r_n p_n)c_n \leq 2c_n,$$

na osnovu konstrukcije nizova r_n i p_n. Dalje imamo da je

$$P\left(\left|R_{1,n}\right| > n\varepsilon\right) \leq P(2 > n\varepsilon/c_n)$$

Kada iskoristimo (11) dobijamo da je desna strana poslednje nejednakosti jednaka 0 za dovoljno veliko n, što je i trebalo dokazati.

Da bismo odredili brzinu konvergencije i skoro sigurnu konvergenciju od $1/n \sum_{i=1}^{n} \left(X_{1,i,n} - E\left(X_{1,i,n}\right)\right)$ dozvolićemo da ε iz prethodne leme zavisi od n. Za narednu lemu uzećemo da ε_n ima sledeću vrednost:

$$\varepsilon_n = 9\sqrt{2}\left(\frac{\alpha p_n \log n}{n}\right)^{1/2} c_n \tag{12}$$

Kada ovu vrednost zamenimo optimalno λ iz prethodne leme će imati vrednost $1/\sqrt{2}c_n(\alpha \log n/np_n)^{1/2}$.

<u>Lema 2.2.7.</u> *Neka su $X_1, X_2, \ldots$ strogo stacionarne i asocirane slučajne veličine. Pretpostavimo da za neko $\alpha > 0$ važi:*

$$\frac{\log n}{p_n c_n^2} \exp\left(\left(\frac{\alpha n \log n}{2p_n}\right)^{1/2}\right) \sum_{j=p_n+2}^{\infty} Cov(X_1, X_j) \leq C_0 < \infty \tag{13}$$

Tada za ε_n koje ima vrednost definisanu u (12) imamo da važi sledeća nejednakost:

$$P\left(\frac{1}{n}|Z_{1,n,od}| > \frac{\varepsilon_n}{9}\right) \leq \left(1 + \frac{4}{\alpha}C_0\right) \exp(-\alpha \log n) \tag{14}$$

Analogno važi i za $Z_{1,n,ev}$.

Sada ćemo navesti jednu teoremu u kojoj ćemo objediniti rezultate prethodnih lema koje smo naveli.

<u>Teorema2.2.1.</u> *Neka su $X_1, X_2, \ldots$ strogo stacionarne i asocirane slučajne veličine koje zadovoljavaju (13) za neko $\alpha > 0$. Na osnovu (1), (2) i (3) sledi da za svako ε_n čija je vrednost definisana u (12) i za dovoljno veliko n važi sledeća nejednakost:*

$$P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(X_{1,i,n} - E(X_{1,i,n})\right)\right| > \frac{\varepsilon_n}{3}\right) \leq 2\left(1 + \frac{4}{\alpha}C_0\right) \exp(-\alpha \, log \, n) \tag{15}$$

<u>Dokaz.</u> Ovde ćemo napisati jednu nejednakost koja se transformiše u traženu nejednakost primenom prethodno navedenih i dokazanih lema.Ta nejednakost je sledećeg oblika:

$$P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(X_{1,i,n} - E(X_{1,i,n})\right)\right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\frac{1}{n}|Z_{1,n,od}| > \frac{\varepsilon}{3}\right) + P\left(\frac{1}{n}|Z_{1,n,ev}| > \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

$$+P\left(|R_{1,n}| > \frac{n\varepsilon}{3}\right)$$

Pošto smo završili sa kontrolom veličinama koje su ograničene, preostaje nam da za veličine koje su asocirane, ali ne i ograničene, kao što su $X_{2,i,n}$ i $X_{3,i,n}$, uradimo isto što i za ograničene veličine, ali primenjujući drugi postupak. Iskoristićemo činjenicu da ove veličine zavise samo od repova raspodele početnih veličina. Prvo ćemo navesti jednu nejednakost, a nakon toga i lemu u kojoj će se koristiti pomenuta nejednakost i konačno kompletirati sve potrebno za definisanje glavne teoreme koja se odnosi na eksponencijalnu nejednakost za asocirane slučajne veličine.

Nejednakost koja važi za $q = 2, 3$ je sledećeg oblika:

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\left(X_{q,i,n} - E\left(X_{q,i,n}\right)\right)\right| > n\varepsilon\right) \leq nP\left(\left|X_{q,l,n} - E\left(X_{q,l,n}\right)\right| > \varepsilon\right)$$

$$\leq \frac{n}{\varepsilon^2} D\left(X_{q,l,n}\right)$$

$$\leq \frac{n}{\varepsilon^2} E\left(X_{q,l,n}^2\right)$$

<u>Lema2.2.8.</u> *Neka su* $X_1, X_2, \ldots$ *strogo stacionarne i asocirane slučajne veličine takve da postoji* $\delta > 0$ *koje zadovoljava* $sup_{|t|\leq\delta} E(e^{tX_1}) \leq M_\delta < +\infty$. *Tada na osnovu* (1) *za* $t \in (0, \delta]$ *važi:*

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\left(X_{q,i,n} - E\left(X_{q,i,n}\right)\right)\right| > n\varepsilon\right) \leq \frac{2M_\delta n e^{-tc_n}}{t^2\varepsilon^2}, \quad q = 2, 3 \qquad (16)$$

<u>Dokaz.</u> Na osnovu nejednakosti koju smo naveli pre leme može se uočiti da nam preostaje samo da ograničimo $E\left(X_{q,l,n}^2\right)$. Pretpostavićemo da je $q = 2$, za $q = 3$ sve analogno važi. Uzećemo da je $\bar{F}(x) = P(X_1 > x)$ i primenjujući Markovu nejednakost sledi da je za $t \in (0, \delta)$ $\bar{F}(x) \leq e^{-tx} E(e^{tX_1}) \leq M_\delta e^{-tx}$. Kada matematičko očekivanje napišemo kao integral dobijamo sledeće:

$$E\left(X_{q,l,n}^2\right) = -\int_{c_n}^{+\infty} (x - c_n)^2 \, \bar{F}(dx) = \int_{c_n}^{+\infty} 2(x - c_n) \, \bar{F}(x) dx \leq 2M_\delta \frac{e^{-tc_n}}{t^2}$$

, čime je dokaz ove leme završen.

Konačno dolazimo do formulacije i dokaza eksponencijalne nejednakosti koje zbog koje smo navodili i dokazivali sve prethodne leme i koja je jedna od najbitnijih delova ovoga rada.

Teorema 2.2.2. *Neka su* $X_1, X_2, \ldots$ *strogo stacionarne i asocirane slučajne veličine koje zadovoljavaju* (13) *za neko* $\alpha > 0$. *Pretpostavimo da* ε_n *ima vrednost definisanu u* (12) *i da postoji* $\delta > 0$ *koje zadovoljava* $sup_{|t|\leq\delta} E(e^{tX_1}) \leq M_\delta < +\infty$. *Tada na osnovu* (1), (2) *i* (3) *za dovoljno veliko* n *važi sledeća nejednakost:*

$$P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - E(X_i)\right)\right| > \varepsilon\right) \leq \left(2\left(1 + \frac{4}{\alpha}C_0\right) + \frac{2M_\delta n^2}{9\alpha^3 p_n \log^3 n}\right) exp(-\alpha \log n) \qquad (17)$$

Dokaz. Sumu s leve strane nejednakosti (17) ćemo podeliti na tri dela i primeniti (15) i (16) uzimajući $\varepsilon_n/3$ za vrednost ε. Nakon toga ćemo u (16) uzeti $t = \alpha$ i $c_n = \log n$ da bismo izjednačili eksponente i izračunati vrednost za ε_n kada je $c_n = \log n$. Ovim je teorema dokazana.

ZAKLJUČAK

U radu su, kao što je u uvodu navedeno, pokazana svojstva i osobine asociranih slučajnih veličina. Nakon toga je u delu sa primenama pokazano kako se teorijske karakteristike mogu primeniti u teoriji verovatnoće i statistici. Takođe je u delu sa primenama dokazana i eksponencijalna nejednakost za asocirane slučajne veličine. Na osnovu svega pokazanog dolazi se do zaključka da su asocirane slučajne veličine jako korisne u određenim oblastima matematike i da su zanimljive zato što ostavljaju prostor za dalje istraživanje jer je to oblast u kojoj i dalje mogu da se usavršavaju i na nove načine pokazuju do sada već dokazane teoreme.

LITERATURA

Pavle Mladenović, *Verovatnoća i statistika*, Matematički fakultet, Beograd 2008.

M. Jevtić, M.Mateljević, I. Jovanović, *Matematička analiza 2*, Matematički fakultet, Beograd 2008.

J.D.Esarz, F.Proschan, D.W.Walkup, *Association of random variables with applications*, Institute of mathematical statistics 1967.

Thomas Birkel, *Moment bounds for associated sequences*, Institute of mathematical statistics 1988.

D.A.Ioannides, G.G.Roussas, *Exponential inequality for associated random variables*, University of Macedonia, Thesaaloniki, Greece, University of California, Division of statistics 1998.

Paulo Eduardo Oliveira, *An exponential inequality for associated variables*, University Coimbra, Portugal 2004.