Универзитет у Београду

Математички факултет

Мастер рад

Еквивалентни облици аксиоме непрекидности скупа реалних бројева

Студент:
Марко Станковић

Ментор:
Проф. др Зоран Каделбург

Београд, 2012.

Садржај

1 Увод

„Недостојан је човекова имена ко не зна да дијагонала квадрата није самерљива с његовом страницом.”

Платон[1]

Још од памтивека људи су сретали разне проблеме одређивања дужина, површина и запремина, то јест уопште мерења величина. По правилу, извесна величина је бирана за *мерну јединицу* и мерење се тада састојало у одређивању *колико пута* се тако одабрана јединица садржи у величини коју меримо. Такав приступ проблему мерења, а питање је да ли је могућ икакав друкчији, неопходно је поступно доводио до све боље и боље представе *реалних (стварних) бројева*[2], тј. до настанка савремене теорије тих бројева.

Ако, на пример, нека дуж садржи пет пута неку другу дуж, однос између прве и друге дужи изражен је целим бројем 5. Ако ту другу дуж сматрамо јединицом, 5 је дужина прве дужи измерене другом дужи као јединицом. Лако наилазимо и на дужи чији је однос изражен разломљеним бројем, на пример $\frac{3}{2}$. У том случају се дужине ових дужи односе као $3 : 2$. Но, исто тако лако долазимо и до двеју дужи чији однос није изражен ни целим ни разломљеним бројем. Такве дужи су, на пример, страна и дијагонала неког квадрата. Данас нам је и такав однос јасан - дијагонала се односи према страни као $\sqrt{2} : 1$. Тај однос је, дакле, *ирационалан*.

У доказу користимо идеју *reductio ad absurdum* (свођења на противречност). Претпоставимо, противно ономе што треба да докажемо, да је $\sqrt{2}$ рационалан. Тада би постојала два цела броја m и n таква да је

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Претпоставимо још да је овај разломак написан у свом најпростијем облику, тј. да се m и n не могу даље скраћивати. Непосредно добијамо

$$m^2 = 2n^2$$

па, дакле, број m^2 мора бити паран. Одатле закључујемо да је и m паран, будући да је квадрат непарног броја увек непаран. Значи, m је облика $2k$, где је k неки цео број. Заменом m са $2k$ у $m^2 = 2n^2$, након скраћивања са 2, настаје једнакост $n^2 = 2k^2$, па је, дакле, и број n^2 паран. Одатле следи да је и n паран број. На такав начин стигли смо до закључка да су оба броја m и n парна што је супротно полазној претпоставци. Добијеном противречношћу се завршава доказ.[3]

Дакле, уочени недостатак структуре рационалних бројева $\mathbb{Q}$ има одлучујућу улогу у изградњи структуре $\mathbb{R}$. Наиме, та структура, може се тако рећи, отклања тај недостатак и уз то настаје минималном надградњом структуре $\mathbb{Q}$.

Већ Лежандр[4] у *Елементима геометрије*, чије је прво издање штампано 1794. године, „аритметизује” геометријске величине:

[1] Платон (427-347. п.н.е), старогрчки филозоф и беседник, оснивач Академије у Атини.

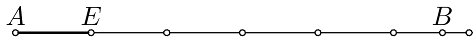
[2] Назив *реални (стварни)* бројеви потиче од Декарта (1637), као противтежа „имагинарним” бројевима који су се појавили у рачунању са квадратним коренима негативних бројева.

[3] Занимљиво је да је наведени доказ у историји математике био први доказ коришћењем идеје reductio ad absurdum и да потиче од Питагорејаца (VI век пре наше ере).

[4] Adrien-Marie Legendre (1752-1833), француски математичар.

Ако су A, B, C, D четири дужи, може се замислити да нека од њих или пета, ако неко жели, служи као заједничка мера и стога може бити узета за јединичну. Тада свака од дужи A, B, C, D представља одређени број јединица, цео или разломљен, самерљив или несамерљив, и тада размера дужи A, B, C, D постаје размера бројева.

Претпоставимо да желимо да дату дуж AB измеримо помоћу дужи AE, узете за јединичну дуж.



Слика 1: Мерење дужи

Уобичајеним поступком преношења јединичне дужи, као и преношењем разних њених делова, рецимо, десетих, па потом стотих итд., можемо доћи до разних бројева који представљају мање приближне вредности тражене дужине $\overline{AB}$. Означимо са S уопште скуп свих бројева који су мање приближне вредности те дужине, тј. који су мањи од ње. Рецимо, према слици (1), број 5 припада скупу S. Он је мања приближна вредност дужине $\overline{AB}$ *на једно цело.*

Скуп S свих тих мањих приближних вредности је, што је очигледно, ограничен са горње стране. Рецимо, у уоченом примеру једно *горње ограничење*[5] је број 7. И број 6 је горње ограничење, можемо рећи *финије* од претходног. Прецизирамо, да се уопште за неки број g каже да је горње ограничење скупа S уколико ниједан члан тог скупа не премашује број g, тј. ма који члан x из S задовољава услов $x \leqslant g$.

Потпуно је јасно да горња ограничења скупа S такође представљају приближне вредности дужине $\overline{AB}$, ближе речено то су веће приближне вредности. Да ли је можда неко од горњих ограничења једнако управо дужини $\overline{AB}$? Одговор је потпуно очигледан: *то је управо најмање горње ограничење.* Међутим, на основу чега је јасно да такво најмање горње ограничење, каже се и *горња међа* или *супремум* скупа S, уопште постоји? То питање одвајамо посебно и исказујемо овако:

Да ли сваки скуп S бројева који је ограничен одозго има најмање горње ограничење, тј. $\sup S$*?*

При грађењу реалних бројева трудимо се да одговор на то питање, а оно је како смо видели у уској вези са питањем мерења дужи, буде потврдан. Управо с тим у вези као једна од аксиома структуре $\mathbb{R}$ може се узети следећа тзв. *аксиома супремума:*

Сваки непразан одозго ограничен скуп има супремум.

Природно се намеће питање да ли се ова аксиома може заменити неком другом аксиомом. Овај рад ће дати одговор на постављено питање.

[5]Поред назива горње ограничење, користи се и назив *мајоранта*. Слично, *миноранта* и *доње ограничење* (неког скупа S) јесу синоними.

2 Реални бројеви

„Целе бројеве створио је господ Бог, све остало је дело људских руку."

Л. Кронекер[6]

2.1 Уређено поље

Дефиниција 2.1. *Уређени скуп* је структура $\langle P, \leqslant \rangle$ у којој је $\leqslant$ бинарна релација у скупу P, таква да за све $x, y, z \in P$ важи:

(1) Ако је $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, онда је $x \leqslant z$;

(2) Ако је $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, онда је $x = y$;

(3) $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$.

Ако је у уређеном скупу $x \leqslant y$ и $x \neq y$, онда се пише $x < y$.

Пример 2.1. Ако је $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ скуп природних бројева, $+$ стандардна операција сабирања природних бројева и $\leqslant$ релација дефинисана са $x \leq y \Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{N})\ x + z = y$, онда је $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ уређени скуп.

Дефиниција 2.2. *Уређена група* је структура $\mathbb{P} = \langle P, +, \leqslant, 0 \rangle$ за коју су испуњени следећи услови:

(1) $\langle P, +, 0 \rangle$ је Абелова[7] група;

(2) $\langle P, \leqslant \rangle$ је уређен скуп;

(3) За свака три елемента x, y, z из P, из $x \leqslant y$ следи $x + z \leqslant y + z$.

Пример 2.2. Ако је $\mathbb{Z}$ скуп целих бројева, $+$ операција сабирања на $\mathbb{Z}$ и $\leqslant$ стандардни поредак на $\mathbb{Z}$, онда је структура $\langle \mathbb{Z}, +, \leqslant, 0 \rangle$ уређена група.

Следећа дефиниција је централна у овом параграфу.

Дефиниција 2.3. *Уређено поље* је структура $\langle P, +, \cdot, \leqslant, 0, 1 \rangle$ таква да су за све $x, y, z \in P$ испуњени услови:

(1) $\langle P, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ је поље;

(2) $\langle P, \leqslant \rangle$ је уређен скуп;

(3) Ако је $x \leqslant y$, онда је $x + z \leqslant y + z$;

(4) Ако је $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y$, онда је $0 \leqslant x \cdot y$.

У дефиницији уређеног поља $\langle P, +, \cdot, \leqslant, 0, 1 \rangle$ са $+$ и $\cdot$ означене су бинарне операције, $\leqslant$ је бинарна релација на P док су 0 и 1 елементи (константе) скупа P. Детаљним исписивањем услова (1) и (2), претходна дефиниција уређеног поља добија следећи облик:

[6]Leopold Kronecker (1823-1891), немачки математичар.
[7]Niels Henrik Abel (1802-1829), норвешки математичар.

Дефиниција 2.4. За структуру $\mathbb{P} = \langle P, +, \cdot, \leqslant, 0, 1\rangle$ у којој је P скуп, $+$ и $\cdot$ бинарне операције у P, $\leqslant$ бинарна релација у P, а 0 и 1 елементи скупа P, каже се да је *уређено поље*, ако су за све $x, y, z \in P$ испуњени следећи услови:

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(2) $x + 0 = 0 + x = x$;

(3) Постоји $u \in P$, такво да је $x + u = 0$;

(4) $x + y = y + x$;

(5) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

(6) $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$;

(7) Ако је $x \neq 0$, онда постоји $u \in P$, такво да је $x \cdot u = 1$;

(8) $x \cdot y = y \cdot x$;

(9) $(x + y)z = xz + yz$;

(10) $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$;

(11) Ако је $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, онда је $x = y$;

(12) Ако је $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, онда је $x \leqslant z$;

(13) Ако је $x \leqslant y$, онда је $x + z \leqslant y + z$;

(14) Ако је $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y$, онда је $0 \leqslant x \cdot y$.

За услове (1)-(14) кажемо да су *аксиоме уређеног поља.*

У општем случају, *структуру* чини четворка $\langle P, F, R, C\rangle$, где је $P \neq \emptyset$ *домен структуре*, F *скуп операција*, R *скуп релација* и C *скуп константи* скупа P.

Ако структура $\langle P, +, 0\rangle$ задовољава услове (1)-(3) из дефиниције (2.4), онда се за ту структуру каже да је *група*. Уколико је за ту групу испуњен и услов (4), онда се каже да је то *комутативна* или *Абелова група*. Ако структура $\langle P, +, \cdot, 0\rangle$ која задовољава услове (1)-(5), услов (9) и ако је $z(x + y) = zx + zy$ за све $x, y, z \in P$, онда се за ту структуру каже да је *прстен*. *Комутативни прстен* је прстен који задовољава услов (8), док се за структуру $\langle P, +, \cdot, 0, 1\rangle$ која задовољава услове (1)-(6), (9)-(10) и услов $z(x + y) = zx + zy$ каже да је *прстен са јединицом.* Прстен са јединицом који задовољава услов (7) назива се *телом*, док се тело које задовољава услов (8) назива *пољем.*

Пример 2.3. Поље $\mathbb{Q}$ рационалних бројева са стандардном релацијом поретка је уређено поље.

Постоје поља која нису уређена. Прецизније, у неким пољима није могуће дефинисати бинарну релацију $\leqslant$, такву да буду задовољени услови (10)-(14) из дефиниције уређеног поља.

Пример 2.4.

а) Свако уређено поље са бар два елемента је бесконачно.

Заиста, ако је $\mathbb{P}$ уређено поље, онда из $0, 1 \in P$, аксиоме (13) и релације $0 < 1$ следи да је

$$\sum_{i=1}^{n} 1 < \sum_{i=1}^{n+1} 1$$

за сваки природан број n. Одавде следи да је скуп P бесконачан.

б) Постоје поља која нису бесконачна. Нпр. ако је p прост број, $P = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, а $+$ и $\cdot$ операције сабирања и множења по модулу p, онда је $\mathbb{P} = \langle P, +, \cdot, 0, 1\rangle$ поље. У њему није могуће дефинисати уређење сагласно са операцијама сабирања и множења.

Нека је $\mathbb{P} = \langle P, +, \cdot, 0, 1\rangle$ уређено поље и $K \subseteq P$, при чему је:

(1) $x + y \in K$, $x \cdot y \in K$ за све $x, y \in K$;

(2) $K \cap (-K) = \emptyset$;

(3) $P = K \cup (-K) \cup \{0\}$.

За скуп K који задовољава услове (1), (2) и (3) каже се да је *позитивни конус* у уређеном пољу $\mathbb{P}$. Важи следеће тврђење:

Поредак у пољу може се задати ако и само ако се у њему може дефинисати позитивни конус.

Ако тај конус означимо са K, онда су K, $\{0\}$ и $-K$ у паровима дисјунктни скупови чија је унија скуп P.

Постоје бесконачна поља на којима није могуће дефинисати поредак сагласан са операцијама. Следећи пример то потврђује.

Пример 2.5. Нека је $\mathbb{P} = \langle P, +, \cdot, 0, 1\rangle$ поље и нека су на скупу P^2 уређених парова скупа P, операције дефинисане на следећи начин:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Лако се проверава да је $\langle P^2, +, \cdot, \leqslant, 0, 1\rangle$ поље са нула елементом $(0, 0)$ и јединичним елементом $(1, 0)$.

Докажимо да на P^2 није могуће дефинисати релацију $\leqslant$, такву да је структура $\langle P^2, +, \cdot, \leqslant, 0, 1\rangle$ уређено поље.

Претпоставимо супротно, да је $\leqslant$ релација на P^2, таква да за поље $\mathbb{P}^2$ важе аксиоме (10) – (14). Нека је $K = \{x \in P^2 : 0 < x\}$. Тада за $a = (0, 1)$ важи: или $a \in K$ или $a \in -K$, тј. $-a = (0, -1) \in K$. Одавде следи да $a^2 + a^4 = (0, 0) = 0 \in K$, што је немогуће, јер је и $a^2 > 0$ и $a^4 > 0$. На сличан начин негира се и могућност $-a \in K$.

Одавде специјално следи да поље $\mathbb{C}$ комплексних бројева није уређено, тј. на скупу C комплексних бројева није могуће дефинисати поредак, такав да $\mathbb{C}$ буде уређено поље.

У примеру (2.4) доказали смо да је свако уређено поље бесконачно. Занимљиво је да свако нетривијално уређено поље садржи потпоље које је изоморфно са пољем рационалних бројева.

2.2 Аксиоме реалних бројева

Постоји више начина за увођење реалних бројева. Могу се поделити на конструктивне - код којих се, полазећи од већ уведеног скупа рационалних бројева, ефективно конструишу реални бројеви - и аксиоматске. У вези са аксиоматским конструкцијама реалних бројева, најпре, истакнимо да уопште не знамо да ли оне имају икакав модел, то јест да ли су непротивуречне. Одговор је потврдан, чак су такве реализације реалних бројева **изоморфне**.

Дефиниција 2.5. Поље реалних бројева је скуп $\mathbb{R}$ у коме су дефинисане две бинарне операције, **сабирање** (ознака $+$) и **множење** (ознака $\cdot$), и једна бинарна релација, **мање или једнако** (ознака $\leqslant$), тако да су испуњена следећа својства:

(1) својства сабирања:

- (1.1) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x$ (комутативност сабирања),
- (1.2) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x + y) + z = x + (y + z)$ (асоцијативност сабирања),
- (1.3) постоји елемент $0 \in \mathbb{R}$, такав да је $x + 0 = 0 + x = x$ за све $x \in \mathbb{R}$ (егзистенција нуле),
- (1.4) за сваки елемент $x \in \mathbb{R}$ постоји елемент $-x \in \mathbb{R}$, тако да је $x + (-x) = 0$ (егзистенција инверзног елемента за сабирање);

(2) својства множења:

- (2.1) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = y \cdot x$ (комутативност множења),
- (2.2) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (асоцијативност множења),
- (2.3) постоји елемент $1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, тако да је $x \cdot 1 = x$ за све $x \in \mathbb{R}$ (егзистенција јединице),
- (2.4) за сваки $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ постоји елемент $x^{-1} \in \mathbb{R}$, тако да је $x \cdot x^{-1} = 1$ (егзистенција инверзног елемента за множење),
- (2.5) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (дистрибутивност множења према сабирању);

(3) својства релације $\leqslant$:

- (3.1) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x \leqslant x$ (рефлексивност релације $\leqslant$),
- (3.2) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ (x \leqslant y, y \leqslant x \ \Rightarrow\ x = y)$ (антисиметричност релације $\leqslant$),
- (3.3) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x \leqslant y, y \leqslant z \ \Rightarrow\ x \leqslant z)$ (транзитивност релације $\leqslant$),
- (3.4) за свака два елемента $x, y \in \mathbb{R}$ важи $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ (упоредивост),
- (3.5) ако је $x \leqslant y$ и z произвољан елемент из $\mathbb{R}$, важи $x + z \leqslant y + z$ (компатибилност релације $\leqslant$ према сабирању),
- (3.6) ако је $0 \leqslant x$ и $0 \leqslant y$, онда је $0 \leqslant x \cdot y$ (компатибилност релације $\leqslant$ према множењу);

(4) Ако су A и B непразни подскупови скупа $\mathbb{R}$, такви да је $x \leqslant y$ за све $x \in A$, $y \in B$, тада постоји елемент $z \in \mathbb{R}$, такав да је $x \leqslant z \leqslant y$ за све $x \in A$, $y \in B$.

Елементи скупа $\mathbb{R}$ зову се **реални бројеви**.

Особине (1.1)-(1.4) говоре да у односу на сабирање скуп $\mathbb{R}$ има особине **Абелове групе**. Заједно са њима, аксиоме (2.1)-(2.5) означавају да је $\mathbb{R}$ у односу на сабирање и множење **поље**. Најзад, релација тоталног уређења $\leqslant$, на основу (3.5)-(3.6), слаже се са операцијама $+$ и $\cdot$, те такво поље зовемо **уређеним пољем**. Заједно, аксиоме (1.1)-(3.6) зовемо **алгебарским аксиомама** скупа $\mathbb{R}$.

Аксиома (4) је најважнија за увођење основних појмова анализе. Називамо је **аксиомом потпуности** или **аксиомом непрекидности**. Наравно, за разлику од алгебарских аксиома, за њу се не би могло рећи да представља својство скупа $\mathbb{R}$ које је „очигледно" и „уобичајено" у раду са реалним бројевима. Но, она је неопходна за анализу, а не може се извести из алгебарских аксиома; једино је могуће да се она замени неким њој еквивалентним исказом.

2.3 Последице алгебарских аксиома

Из аксиома реалних бројева (1.1)-(3.6) могу се доказати сва уобичајена правила за рачунање с реалним бројевима. Доказаћемо нека од тих правила.

Став 2.1.
1° Неутрални елемент сабирања 0 јединствено је одређен.
2° За сваки реалан број x супротни елемент $-x$ јединствено је одређен.
3° За свака два реална броја a, b једначина $a + x = b$ има јединствено решење.

Доказ.
1° Ако би 0_1 и 0_2 била два неутрална елемента сабирања имали бисмо

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

2° Ако би x_1 и x_2 била два супротна елемента елементу x, имали бисмо

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0 + x_2 = x_2.$$

3° Покажимо да $x = b + (-a)$ задовољава једначину $a + x = b$. Заиста,

$$a + (b + (-a)) = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b.$$

Да и обратно, из $a + x = b$ следи $x = b + (-a)$, видимо из следећег низа импликација

$$a + x = b \Rightarrow (a + x) + (-a) = b + (-a) \Rightarrow x = b + (-a).$$

□

Број $x = b + (-a)$ конструисан у претходном доказу означаваћемо са $b - a$. Тиме је у скупу $\mathbb{R}$ уведена операција **одузимања** са уобичајеним својствима.

Став 2.2.
1° Јединични елемент множења 1 јединствено је одређен.
2° За сваки реалан број $x \neq 0$ инверзни елемент x^{-1} јединствено је одређен.
3° За свака два реална броја a, b ($a \neq 0$) једначина $ax = b$ има јединствено решење.

Доказ је потпуно аналоган доказу претходног става.

Аналогно одузимању уводи се **дељење** реалних бројева помоћу $b \cdot a^{-1} = b/a$ за $a \neq 0$.

3 Еквиваленти и последице аксиоме непрекидности

„Ако простор уопште постоји, он не мора неопходно бити непрекидан, чак и ако извесно утврдимо да је он дисконтинуалан, ништа нас не може спречити да, ако то желимо, попунимо празнине и начинимо га непрекидним.”

Р. Дедекинд[8]

3.1 Супремум, инфимум

Користећи постојање алгебарских операција, за карактеризацију супремума у скупу $\mathbb{R}$ можемо узети конјункцију следећих услова:

$$x = \sup A \iff \begin{cases} 1^\circ & (\forall a \in A) \quad a \leqslant x, \\ 2^\circ & (\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A) \quad a > x - \varepsilon. \end{cases}$$

На аналоган начин се карактерише инфимум неког подскупа скупа $\mathbb{R}$.

$$x = \inf A \iff \begin{cases} 1^\circ & (\forall a \in A) \quad a \geqslant x, \\ 2^\circ & (\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A) \quad a < x + \varepsilon. \end{cases}$$

Егзистенција супремума неког скупа, чак ни оног који је ограничен одозго (тј. има мајоранте), није унапред обезбеђена у произвољном уређеном скупу. То је повезано са чињеницом да произвољан подскуп уређеног скупа, па самим тим ни скуп мајораната датог подскупа, не мора имати минимум. Међутим, у уређеном пољу $\mathbb{R}$ које задовољава аксиому (4) обезбеђена је егзистенција супремума одозго ограниченог скупа.

Ако скуп A у уређеном пољу $\mathbb{P}$ није одозго ограничен, онда у том пољу не постоји $\sup A$. Следећи пример доказује да постоје уређена поља и у њима одозго ограничени скупови који немају супремум у том пољу.

Пример 3.1. Скуп $A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x, x^2 < 2\}$ је ограничен, јер је $0 \leqslant x \leqslant 3/2$ за свако $x \in A$, али у пољу $\mathbb{Q}$ не постоји $\sup A$.

Претпоставимо супротно, да је $b \in \mathbb{Q}$ супремум скупа A у пољу $\mathbb{Q}$. Тада је, очигледно, $1 \leqslant b \leqslant 3/2$. Разликоваћемо две могућности.

а) Ако је $b^2 < 2$, онда постоји рационалан број h, такав да је

$$0 < h < \frac{2 - b^2}{2b + 1}, \qquad h < 1.$$

Тада је

$$(b + h)^2 = b^2 + h^2 + 2hb < b^2 + h(2b + 1) < b^2 + 2 - b^2 = 2.$$

То значи да $b + h \in A$, па b није супремум скупа A.

б) Ако је $b^2 > 2$, онда постоји рационалан број h, такав да је

$$0 < h < \frac{b^2 - 2}{2b}, \qquad h < 2.$$

Тада је

$$(b - h)^2 = b^2 + h^2 - 2bh > b^2 - 2bh > 2.$$

Стога и $b - h \in \mathbb{Q}$ је мајоранта скупа A, па b није супремум тог скупа у пољу рационалних бројева.

[8] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), немачки математичар.

Лако се конструише одоздо ограничен скуп у пољу рационалних бројева $\mathbb{Q}$ који нема инфимум.

Пример 3.2. У скупу $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ скуп $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$ ограничен је одозго, али нема супремума.

Теорема 3.1 (Теорема о супремуму)**.** *Сваки непразан, одозго ограничен подскуп скупа* $\mathbb{R}$ *има супремум у* $\mathbb{R}$.

Доказ. Означимо са $B = \{y \in \mathbb{R} \mid (\forall x \in A)\ x \leqslant y\}$ скуп свих мајораната непразног, одозго ограниченог скупа A. Према претпоставци, скупови A и B су непразни и важи $x \leqslant y$ за све $x \in A$, $y \in B$. Према аксиоми (4) постоји реалан број z, такав да је $x \leqslant z \leqslant y$ за све $x \in A$, $y \in B$. Тај број z је дакле и сам једна мајоранта скупа A и, истовремено, најмања од његових мајораната, тј. $z = \sup A$. $\square$

Из претходне теореме закључујемо да аксиома непрекидности имплицира теорему о супремуму. Међутим, теорема о супремуму је еквивалентна аксиоми непрекидности. То ћемо формулисати у следећој теореми.

Теорема 3.2. *Аксиома непрекидности је еквивалентна теореми о супремуму.*

Доказ. У претходној теореми доказан је један смер. Претпоставимо сад да важи тврђење о супремуму и докажимо аксиому непрекидности. Заиста, нека скупови A и B задовољавају услове из аксиоме непрекидности тј. скупови A и B су непразни подскупови скупа $\mathbb{R}$, такви да је $x \leqslant y$ за све $x \in A$ и све $y \in B$. Скуп A је ограничен одозго било којим елементом скупа B па на основу теореме о супремуму, постоји најмање горње ограничење $z = \sup A$. За свако $x \in A$ важи $x \leqslant z$, а, уз то, z је мање или једнако од сваког горњег ограничења тј. важи $z \leqslant y$ за све $y \in B$, чиме се завршава доказ. $\square$

Теорема 3.3 (Теорема о инфимуму)**.** *Сваки непразан, одоздо ограничен подскуп скупа* $\mathbb{R}$ *има инфимум у* $\mathbb{R}$.

Сада, теорему о инфимуму можемо доказати на два начина. Први доказ је аналоган доказу теореме о супремуму. (Аналогно, можемо доказати и да је теорема о инфимуму еквивалентна аксиоми непрекидности.) Међутим, доказаћемо да теорема о супремуму имплицира теорему о инфимуму и обратно.

Теорема 3.4. *Теорема о супремуму је еквивалентна теореми о инфимуму.*

Доказ. Претпоставимо да важи теорема о супремуму. Потребно је доказати да ако је $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ одоздо ограничен подскуп од $\mathbb{R}$, онда постоји $\inf A$.

Нека је $-A = \{-a : a \in A\} \subseteq \mathbb{R}$. Јасно је да је $-A \neq \emptyset$. Ако је m доње ограничење скупа A, тј. $(\forall a \in A)\ a \geqslant m$, онда је $(\forall a \in A)\ -a \leqslant -m$, одакле следи да је $-m$ горње ограничење скупа $-A$. Скуп $-A$ је, дакле, ограничен одозго па постоји $\mu = \sup(-A)$. За свако $a \in A$ је $\mu \geqslant -a$, па је

$$(\forall a \in A)\ a \geqslant -\mu. \tag{1}$$

Даље, ако је $\mu' \in \mathbb{R}$ и ако је $(\forall a \in A)\ \mu' \leqslant a$, онда је $(\forall a \in A)\ -\mu' \geqslant -a$, одакле следи да је $-\mu'$ горње ограничење скупа $-A$. Како је $\mu = \sup(-A)$, мора бити $\mu \leqslant -\mu'$ тј. $-\mu \geqslant \mu'$, па смо доказали

$$((\forall a \in A)\ a \geqslant \mu') \Rightarrow -\mu \geqslant \mu'. \tag{2}$$

(1) и (2) доказују да је $-\mu = \inf A$.

Други смер се доказује аналогно, заменом симбола $\leqslant$ симболом $\geqslant$ и заменом улога симбола inf и sup, горњег и доњег ограничења, итд... $\square$

Приметимо још да смо у доказу претходне теореме доказали да важи $\sup(-A) = -\inf A$ где је $-A = \{-a \mid a \in A\}$.

Дефинишимо сад максимум и минимум неког скупа.

Дефиниција 3.1. Мајоранта (миноранта) скупа A која припада том скупу (очигледно је да је она тада једнозначно одређена), назива се **максимумом (минимумом)** скупа А, тј.

$$x = \max A \Leftrightarrow (x \in A \text{ и } (\forall a \in A)\ a \leqslant x);$$

$$x = \min A \Leftrightarrow (x \in A \text{ и } (\forall a \in A)\ a \geqslant x).$$

Следећа теорема је још један од еквивалената аксиоме непрекидности.

Теорема 3.5. *За свака два непразна скупа $A \subseteq \mathbb{R}$ и $B \subseteq \mathbb{R}$, чија је унија $A \cup B = \mathbb{R}$, таква да је $x < y$ за свако $x \in A$ и $y \in B$, или у скупу A постоји највећи елемент или у скупу B постоји најмањи елемент.*

Доказ. На основу аксиоме непрекидности следи да постоји $z \in \mathbb{R}$ такав да је $x \leqslant z \leqslant y$ за све $x \in A$ и $y \in B$. Ако претпоставимо да z не припада ни скупу A ни скупу B, добијамо контрадикцију са полазном претпоставком да је $A \cup B = \mathbb{R}$. Дакле, или $z \in A$, или $z \in B$. Ако, $z \in A$ и $(\forall x \in A)\ x \leqslant z$ на основу дефиниције (3.1) следи да је $z = \max A$. Слично, ако, $z \in B$ и $(\forall y \in B)\ y \geqslant z$ на основу дефиниције (3.1) следи да је $z = \min B$.

Доказали смо да аксиома непрекидности имплицира ову теорему. Докажимо још и да је аксиома непрекидности последица ове теореме како би оправдали тврдњу да су оне међусобно еквивалентне.

Нека су скупови $X \subseteq \mathbb{R}$ и $Y \subseteq \mathbb{R}$, такви да је $x \leqslant y$ за свако $x \in X$ и $y \in Y$. Означимо са B скуп свих мајоранти скупа X и поставимо $A = \mathbb{R} \setminus B$. Очигледно је да су A и B дисјунктни непразни скупови. При томе је $Y \subseteq B$ и највише један елемент скупа X припада скупу B. Нека $x \in A$ и $y \in B$. Ако је $x \geqslant y$, онда је x мајоранта скупа X, па $x \in B$. Имамо контрадикцију, што значи да је $x < y$. Ако је a највећи елемент скупа A, онда a није мајоранта скупа X и постоји $x_0 \in X$, такво да је $a < x_0$. Интервал (a, x_0) је непразан. Ако $x_1 \in (a, x_0)$ онда је $x_1 > a$, па $x_1 \notin A$. Пошто је $x_1 < x_0 \in X$, x_1 није мајоранта скупа X, тј. $x_1 \notin B$. Добили смо контрадикцију, што значи да скуп B има најмањи елемент. Означимо га са z. Тада је $x \leqslant z \leqslant y$ за свако $x \in X$ и свако $y \in Y$. □

3.2 Архимедова аксиома

Дефиниција 3.2. Уређено поље $\mathbb{P}$ је *Архимедово*[9] *поље* ако у њему важи *Архимедова аксиома*[10]:

За произвољне позитивне бројеве $a, b \in \mathbb{P}$ постоји (и јединствено је одређен) природан број n, такав да је $(n-1)a \leqslant b < na$.

Може се показати да наведено тврђење остаје на снази и ако дозволимо да $b \in \mathbb{P}$ буде произвољног знака, с тим да број n у том случају бирамо из $\mathbb{Z}$ уместо из $\mathbb{N}$.

За уређено поље које није Архимедово каже се да је *неархимедово уређено поље*.

Пример 3.3. Поље $\mathbb{Q}$ рационалних бројева је Архимедово поље.

[9] Архимед (287-212. п.н.е.) грчки математичар, физичар и астроном из Сиракузе.

[10] Та аксиома је случајно названа Архимедова. Сам Архимед у својој *Квадратури параболе* истиче да су ту аксиому употребљавали и његови претходници. У литератури се понегде помиње и као *Еудокс-Архимедова аксиома о престиживости* по грчком математичару Еудоксу (око 408-355. п.н.е.) са Книда.

У формулацији Архимедове аксиоме не учествује операција множења јер је у ствари

$$na = \underbrace{a + \ldots + a}_{n}.$$

То значи да се за уређену групу $\langle P, +, \leqslant, 0\rangle$ може поставити питање да ли задовољава Архимедову аксиому, то јест да ли је то Архимедова или неархимедова група.

Постоје уређене неархимедове групе. Следећи занимљив пример то илуструје.

Пример 3.4. Означимо са $\mathbb{Q}[x]$ скуп полинома променљиве x са коефицијентима из поља $\mathbb{Q}$ рационалних бројева. Нека је

$$S[x] = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x], g(x) \neq 0 \right\}$$

скуп рационалних функција променљиве x. Релација ρ дефинисана формулом

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rho \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot g_1(x) = g(x) \cdot f_1(x)$$

је еквиваленција на $S[x]$. Свака класа еквиваленције у односу на релацију ρ садржи тачно једну рационалну функцију $f(x)/g(x) \in S[x]$ која задовољава следећа два услова:

- Полиноми $f(x)$ и $g(x)$ су релативно прости;
- Коефицијент $\nu(g(x))$ уз најмањи степен полинома $g(x)$ једнак је један.

Нека је

$$P = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : \mathrm{NZD}(f(x), g(x)) = 1, \nu(g(x)) = 1 \right\}.$$

Ако се сабирање и множење у скупу P дефинишу на природан начин, дакле тако што се операције реализују по стандардним алгоритмима за сабирање и множење рационалних функција, а затим (у $S[x]$) одреди рационална функција из скупа P која је, у односу на релацију ρ, еквивалентна резултату операције, онда је структура $\langle P, +, \cdot, 0, 1\rangle$ поље. Ако се још на P поредак $\leqslant$ дефинише помоћу позитивног конуса

$$K = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \in P : \nu(f(x)) > 0 \right\},$$

онда је

$$\mathbb{P} = \langle P, +, \cdot, \leqslant 0, 1\rangle$$

уређено поље. У уређеном пољу $\mathbb{P}$ рационална функција $f(x) = x$ припада позитивном конусу, али је $nx < 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$. То значи да је $\mathbb{P}$ неархимедово уређено поље.

У Архимедовом пољу из услова $0 \leqslant x$ и $nx < 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$, следи да је $x = 0$. Другим речима, у Архимедовом уређеном пољу не постоји $x > 0$, такво да је $nx < 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$. У неархимедовом пољу, такви елементи постоје.

Дефиниција 3.3. Елемент x из уређеног поља $\mathbb{P}$ је *бесконачно мали* (или *бесконачно мала величина* или *инфинитезимала*) ако је $n \cdot |x| < 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Елемент x из уређеног поља $\mathbb{P}$ је *бесконачно велики* (или *бесконачан*) ако је $|x| > n \cdot 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Дефиниција 3.4. За елемент уређеног поља који није бесконачан каже се да је *коначан* или да је *коначни елемент* тог поља.

Непосредно из дефиниције следи да су сви елементи Архимедовог уређеног поља коначни. С друге стране, у сваком неархимедовом пољу постоје и коначни и бесконачни елементи.

Поставља се природно питање да ли у уређеном пољу $\mathbb{R}$ важи Архимедово својство. Одговор је потврдан, тј. $\mathbb{R}$ је Архимедово поље. Ово својство не следи из алгебарских аксиома, већ је последица аксиоме непрекидности. Због важности овог својства даћемо му назив теореме.

Теорема 3.6. *За произвољне позитивне реалне бројеве a, b постоји (и јединствено је одређен) природан број n, такав да је $(n-1)a \leqslant b < na$.*

Доказ. Претпоставимо да број $n \in \mathbb{N}$, такав да је $b < na$, не постоји. Тада важи $na \leqslant b$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је скуп $A = \{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничен одозго. На основу теореме о супремуму постоји $\sup A = c$. Како је $a > 0$, то је $c - a < c$, што показује да број $c - a$ не може бити мајоранта скупа A. Дакле, постоји број $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да је $n_0 a > c - a$. Но, онда је $(n_0 + 1)a > c$, што је контрадикција са $c = \sup A$.

Дакле, мора постојати број $n \in \mathbb{N}$ за који је $b < na$. Међу свим таквим бројевима n постоји најмањи[11] - очигледно је да он задовољава $(n-1)a \leqslant b < na$. Јединственост тог броја је јасна. □

Слично као малопре, наведено тврђење остаје на снази и ако дозволимо да $b \in \mathbb{R}$ буде произвољног знака, с тим да број n у том случају бирамо из $\mathbb{Z}$ уместо из $\mathbb{N}$.

Доказ се ослања на теорему о супремуму (која је еквивалентна аксиоми непрекидности) што потврђује да је Архимедово својство последица аксиоме непрекидности. Да ли из Архимедовог својства следи аксиома непрекидности? Одговор је одричан. То потврђује пример (3.1) јер је поље $\mathbb{Q}$ Архимедово уређено поље у коме не важи теорема о супремуму. Дакле, Архимедово својство је логички слабије од аксиоме непрекидности.

Ево неколико једноставних, али важних, последица Архимедовог својства.

Последица 3.1.
1° За сваки позитиван број ε постоји природан број n, такав да је $0 < 1/n < \varepsilon$.
2° Ако је x ненегативан реалан број и за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $x < 1/n$, онда је $x = 0$.

Доказ.
1° Из Архимедовог својства следи да постоји $n \in \mathbb{N}$, такав да је $1 < \varepsilon n$.
2° следи из 1°. □

Последица 3.2. Ма какви били реални бројеви a и b за које је $a < b$ постоји рационалан број x, такав да је $a < x < b$.

Доказ. Нека је $h = b - a$ и $q \in \mathbb{N}$ такав да је $qh > 1$ (он постоји на основу последице (3.1)). Поново на основу Архимедовог својства закључујемо да постоји $p \in \mathbb{Z}$, такав да је $\dfrac{p-1}{p} \leqslant a < \dfrac{p}{q}$. При том је $\dfrac{p}{q} - a \leqslant \dfrac{1}{q} < b - a$, тако да је $\dfrac{p}{q} < b$. На тај начин, за $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ важи $a < x < b$. □

[11] Сваки непразан $A \subset \mathbb{N}$ има минимални елемент. Ово ће бити доказано касније.

Због својства рационалних бројева израженог овом последицом каже се да је скуп $\mathbb{Q}$ **густ** у скупу $\mathbb{R}$.

Иначе, напоменимо још и то, да је Архимедово својство уз аксиоме уређеног поља, логички еквивалентно сваком од ових тврђења:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

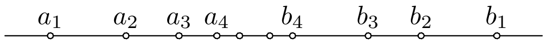
3.3 Канторова теорема о уметнутим одсечцима

Нека су $I_n=[a_n,b_n]$, $n\in\mathbb{N}$, одсечци реалне праве. Ако је испуњен услов

$$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n], \qquad \text{за све } n\in\mathbb{N},$$

казаћемо да је (I_n) **низ уметнутих одсечака.** Да ли сваки низ уметнутих одсечака на $\mathbb{R}$ има непразан пресек $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]$, тј. да ли постоји тачка $x\in\mathbb{R}$, таква да је $x\in[a_n,b_n]$ за свако $n\in\mathbb{N}$? Тај одговор је потврдан, а одговарајући став се приписује Кантору[12] и назива **принципом уметнутих одсечака.**

Теорема 3.7 (Канторова теорема)**.** *Сваки низ (I_n) уметнутих одсечака на реалној правој има непразан пресек.*



Слика 2: Уметнути одсечци

Доказ. Из претпоставке о низу (I_n) непосредно следи да је $a_m<b_n$ за све $m,n\in\mathbb{N}$. На тај начин је скуп $A=\{a_m \mid m\in\mathbb{N}\}$ ограничен одозго (било којим од бројева b_n), те према теореми о супремуму постоји $x=\sup A\in\mathbb{R}$. Докажимо да је управо тај x елемент који припада свим одсечцима (I_n). Како је x мајоранта скупа A, то је $a_n\leqslant x$ за свако $n\in\mathbb{N}$. Но и сваки b_n је мајоранта скупа A, па како је x најмања мајоранта, важи $x\leqslant b_n$ за све $n\in\mathbb{N}$. Дакле, $x\in I_n$ за свако $n\in\mathbb{N}$, што је и требало доказати. ☐

Допунску информацију о пресеку $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ даје следећа Коши[13]-Канторова теорема.

Теорема 3.8 (Коши-Канторова теорема)**.** *Ако низ (I_n) уметнутих одсечака на $\mathbb{R}$ има особину да за свако $\varepsilon>0$ постоји $n\in\mathbb{N}$, такво да је дужина $|I_n|=b_n-a_n$ одсечка I_n мања од ε, тада је $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ једночлан, тј. постоји тачно један $x\in\mathbb{R}$, такав да је $x\in I_n$ за све $n\in\mathbb{N}$.*

Доказ. Претпоставимо супротно тврђењу, да под датим условима постоје две разне тачке x и y које обе припадају $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Изаберимо $\varepsilon=|x-y|>0$. Ако је сада n такво да је $|I_n|<\varepsilon$, очигледно је да не може истовремено бити $x\in I_n$ и $y\in I_n$. Добијеном контрадикцијом завршавамо доказ. ☐

[12] Georg Cantor (1845-1918), немачки математичар.
[13] Augustin Louis Cauchy (1789-1857), француски математичар.

Канторова и Коши-Канторова теорема су формулисане за низ затворених уметнутих одсечака. Да ли је могуће тај услов ослабити и узети нпр. полузатворене или отворене интервале? Одговор је одричан што потврђује следећи пример.

Пример 3.5. Доказати да низ уметнутих полузатворених интервала $\left[a-\frac{1}{10^n},a\right)$, $n\in\mathbb{N}$, има празан пресек.

Доказ. Претпоставимо супротно, да постоји b такво да $b\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\left[a-\frac{1}{10^n},a\right)$. Јасно је да a не припада овом пресеку и да мора бити $a-\frac{1}{10^n}\leqslant b<a$ за свако $n\in\mathbb{N}$. Нека је $a-b=\varepsilon>0$. На основу Архимедовог својства, за неко $n_0\in\mathbb{N}$ важи $1/10^{n_0}<\varepsilon$ одакле следи да је $b<a-1/10^{n_0}$ за неко $n_0\in\mathbb{N}$. Овом контрадикцијом се завршава доказ. $\square$

Пример 3.6. Поље $\mathbb{Q}$ рационалних бројева задовољава Архимедово својство, али у њему не важи Канторов принцип уметнутих одсечака.

Доказ. Посматрајмо низове рационалних бројева $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ и $b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. За низ (a_n) важи $a_n<a_{n+1}$, док за низ (b_n) важи $b_n>b_{n+1}$ и $a_m<b_n$ за све $m,n\in\mathbb{N}$. Њихова заједничка гранична вредност је ирационални број e. Дакле, у пољу рационалних бројева $\mathbb{Q}$,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]=\emptyset.$$

$\square$

Следећи пример показује да постоје поља која нису Архимедова, али да у њима ипак важи Канторов принцип уметнутих одсечака.

Пример 3.7. Нека је $\mathbb{F}$ уређено Архимедово поље (на пример $\mathbb{F}=\mathbb{Q}$) и P скуп свих формалних (Лоранових[14]) редова над пољем $\mathbb{F}$ облика

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nt^n,$$

у којима је само коначно много коефицијената a_n са негативним индексом n различито од нуле. Једнакост чланова скупа P уводимо овако:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nt^n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_nt^n\Leftrightarrow(\forall k\in\mathbb{Z})\ a_k=b_k.$$

Очигледно, уведена једнакост је рефлексивна, симетрична и транзитивна релација.[15] Са 0 означимо ред чији је сваки коефицијент 0, а са 1 ред $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_nt^n$ у којем је $a_n=0$, $n\neq0$, $a_0=1$. Тада се сваки елемент $f\neq0$ скупа P може написати у облику

$$f=t^r(a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots),$$

где је $r\in\mathbb{Z}$ и $a_0\neq0$.

[14] Pierre Alphonse Laurent (1813-1854), француски математичар.
[15] Свака класа је једночлана, па је уведена једнакост, у ствари *поклапање* (члан по члан).

За $f = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n t^n \in P$ и $g = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} b_n t^n \in P$ поставимо

$$f + g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n + b_n) t^n,$$

$$f \cdot g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{r+s=n} a_s b_r t^n \right),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n t^n < \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n t^n \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})\ a_j = b_j \text{ за } j < k, \text{ и } a_k < b_k.$$

Тада је $\mathbb{P} = \langle P, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ уређено поље. Својства уређеног поља су или непосредне последице дефиниције операција $+$ и $\cdot$ и релације $\leqslant$ у скупу P или се проверавају једноставно.

Докажимо, на пример, да за свако $f \neq 0$ из скупа P постоји Лоранов ред $g = f^{-1} \in P$ такав да је $fg = 1$. Нека је $f = t^k(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots) \in P$, где је $a_0 \neq 0$ и k цео број. За ред $g = t^{-k}(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots) \in P$, чији се коефицијенти $b_i, i = 0, 1, \ldots$ сукцесивно (и једнозначно) одређују из једначина

$$a_0 b_0 = 1,\ a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0,\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0, \ldots,$$

важи: $fg = gf = 1$. То значи да постоји $f^{-1} = g \in P$.

Уређено поље $\mathbb{P}$ није Архимедово, јер $P \ni f = 1/t > 0$ а $n \cdot 1 < f$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Међутим, као што ћемо се даље уверити, у том пољу је задовољен Канторов принцип уметнутих одсечака.

Нека је

$$f_1 < f_2 < \ldots < g_2 < g_1,$$

где је

$$f_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{i_n} t^n \in P, \quad g_i = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{i_n} t^n \in P, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Нека је $k_i \in \mathbb{Z}$ такав да је $a_{i_n} = b_{i_n}$ за $n < k_i$, а $a_{i_{k_i}} < b_{i_{k_i}}$ иначе.

Приметимо да за $x = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n t^n \in P$, из $f_i < x < g_i$ следи $\xi_n = a_{i_n} = b_{i_n}$, за $n < k_i$, а $a_{i_n} \leqslant \xi_{k_i} \leqslant b_{i_n}$ иначе. Стога за $i \leqslant j$ важи $a_{j_n} = b_{j_n} = a_{i_n} = b_{i_n}$ за $n < k_i$ и $i < j$, а $a_{i_{k_i}} \leqslant a_{j_{k_i}} \leqslant b_{j_{k_i}} \leqslant b_{i_{k_i}}$ за $k_i \leqslant k_j$.

Разликујемо два случаја:

(i) скуп $\{k_1, k_2, \ldots\}$ је неограничен,

(ii) постоји i_0 такав да је $k_{i_0} = k_{i_0+1} = \ldots = k$.

Први случај. Посматрајмо $c = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n t^n \in P$, где је $\gamma_n = a_{i_n}$ за $k_{i-1} \leqslant n < k_i$, $i \in \mathbb{N}$ тако да важи $\gamma_n = a_{i_n}$ за $n < k_i$. Ако претпоставимо да је $\gamma_n = a_{i_n}$ за све $n \in \mathbb{N}$ добијамо контрадикцију са претпоставком да је скуп $\{k_1, k_2, \ldots\}$ неограничен. Дакле, за $(\forall j \in \mathbb{N})\ f_j \leqslant c \leqslant g_j$.

Други случај. Нека је $j \geqslant i_0$. Тада је $a_{j_n} = b_{j_n}$ за $n < k$, док је $a_{j_k} < b_{j_k}$. Сада је $[a_{j_k}, b_{j_k}]$, $j \geqslant i_0$, низ уметнутих одсечака на $\mathbb{R}$, па постоји

$$\gamma_k \in \bigcap_{j \geqslant i_0} [a_{j_k}, b_{j_k}].$$

Посматрајмо $c = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n t^n$, где је $\gamma_n = a_{i_{0_n}}$ за $n < k$, док су γ_n за $n > k$ произвољни реални бројеви. Тада је $a_j < c < b_j$ за сваки $j \geqslant i_0$.

На такав начин у потпуности смо доказали да је у пољу $\mathbb{P}$ Лоранових (формалних) редова задовољен Канторов принцип уметнутих одсечака. Уз то, доказали смо да у том пољу не важи Архимедово својство, па будући да је то својство последица аксиоме непрекидности, закључујемо да у пољу $\mathbb{P}$ није задовољена аксиома непрекидности.

Сада ћемо показати да је Архимедово својство узето заједно са Канторовим принципом уметнутих одсечака еквивалентно аксиоми непрекидности. Пре тога наводимо две леме неопходне за доказ овог тврђења.

Лема 3.1. *Сваки непразан подскуп $A \subset \mathbb{N}$ има минимум. Специјално,* $\min \mathbb{N} = 1$.

Доказ. Докажимо прво да је $\min \mathbb{N} = 1$, тј. да је $1 \leq n$ за све $n \in \mathbb{N}$. Нека је $S \subset \mathbb{N}$ скуп природних бројева за које важи $1 \leq n$. Тада је $1 \in S$. Ако је $n \in S$ важи $1 \leq n$. Сабирањем ове неједнакости и неједнакости $0 \leq 1$ добијамо $1 \leq n+1$, тј. $n+1 \in S$. На основу принципа индукције закључујемо $S = \mathbb{N}$, тј. $1 \leq n$ за сваки природан број n.

Претпоставимо сада да A нема минимум. Нека је $T = \{n \in \mathbb{N} \mid (\forall a \in A)\ n < a\}$. Пошто је $1 = \min \mathbb{N}$, а претпоставили смо да A нема минимум, следи да је $(\forall a \in A)\ 1 < a$, тј. $1 \in T$. Нека је $n \in T$. Докажимо да одатле следи $n+1 \in T$. Нека је $a \in A$. Из претпоставке да A нема минимум следи да постоји $a_1 \in A$ такво да је $a_1 < a$. Пошто је $n \in T$, важи

$$n < a_1.$$

Из $a - a_1 \in \mathbb{N}$ и $1 = \min \mathbb{N}$ следи $1 \leq a - a_1$, тј. $a_1 + 1 \leq a$. Одатле и из $n < a_1$ следи $n + 1 < a_1 + 1 \leq a$. На основу принципа индукције је $T = \mathbb{N}$. Пошто је $T \cap A = \emptyset$, што је у контрадикцији са претпоставком да је A непразан. ☐

Лема 3.2 (Бернулијева[16] неједнакост). *Нека је $\alpha \in (-1, +\infty)$ и $n \in \mathbb{N}$. Тада важи*

$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Једнакост $(1+\alpha)^n = 1 + n\alpha$ важи ако и само ако је $n = 1$ или $\alpha = 0$.

Доказ. За $n = 1$ тврђење је очигледно тачно. За $n = 2$ оно гласи $(1+\alpha)^2 \geq 1 + 2\alpha$, што је тачно јер је $(1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2$ и $\alpha^2 \geq 0$. Претпоставимо да оно важи за $n \in \mathbb{N}$, тј. да је $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$. Множењем обе стране ове неједнакости позитивним бројем $1 + \alpha$ добијамо

$$(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geq 1 + (n+1)\alpha,$$

чиме је, на основу принципа индукције, доказан први део тврђења. Други део тврђења следи из чињенице да се у случају да је $n > 1$ и $\alpha \neq 0$ у претходном доказу знак $\geq$ може заменити знаком $>$. ☐

[16] Jakob Bernoulli (1654-1705), швајцарски математичар.

Теорема 3.9. *Конјункција Архимедовог својства и Канторовог принципа уметнутих одсечака је еквивалентна теореми о супремуму.*

Доказ. Као што смо раније напоменули, Архимедово својство и Канторова теорема су непосредне последице теореме о супремуму.

Претпоставимо да важе Архимедово својство и Канторова теорема. Нека је $T \subset \mathbb{R}$ непразан и одозго ограничен скуп. Нека је $a_1 \in T$ произвољан елемент скупа T и b_1 његова произвољна горња граница. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Из Архимедовог својства и леме (3.1) следи да постоји најмањи природан број m_n за који је $b_n = a_1 + m_n 2^{-n}$ горња граница скупа T. Нека је $a_n = a_1 + (m_n - 1)2^{-n}$. Тада је $[a_n, b_n] \cap T \neq \emptyset$.

Доказаћемо да интервали $[a_n, b_n]$ задовољавају претпоставке Канторове теореме. Из $m_n 2^{-n} = 2m_n 2^{-(n+1)}$ следи да $a_1 + 2m_n 2^{-(n+1)}$ јесте, а $a_1 + (2m_n - 2)2^{-(n+1)}$ није горње ограничење скупа T. Одатле следи да важи или $m_{n+1} = 2m_n$ или $m_{n+1} = 2m_n - 1$. Сада се лако види да је $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ па на основу Канторове теореме следи $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Претпоставимо да скуп $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ садржи два елемента $a < b$. Тада би за свако $n \in \mathbb{N}$ важило $b - a \leq 2^{-n}$, тј. $2^n(b - a) \leq 1$. Пошто из Бернулијеве неједнакости следи $2^n \geq n$, добијамо да је $n(b-a) \leq 1$ за све природне бројеве n што је у контрадикцији са Архимедовим својством. Дакле, скуп $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ садржи тачно један елемент c. Докажимо да је $c = \sup T$.

Претпоставимо да c није горње ограничење скупа T. Тада је $t > c$ за неко $t \in T$. Резонујући као малопре, закључујемо да из Бернулијеве неједнакости и Архимедовог својства следи да постоји природан број n за који важи $t - c > 2^{-n}$. Одатле, пошто је $c \in [a_n, b_n]$, следи да је $a_1 + m_n 2^{-n} < t$. То је у контрадикцији са дефиницијом броја m_n.

Претпоставимо сада да постоји горње ограничење d скупа T, такво да је $d < c$. Тада, поново на основу Бернулијеве неједнакости и Архимедовог својства, за неко $n \in \mathbb{N}$ важи $c - d > 2^{-n}$. Тада би, пошто је $c \in [a_n, b_n]$, важило $a_1 + (m_n - 1)2^{-n} > d$ тако да би $a_1 + (m_n - 1)2^{-n}$ било горње ограничење скупа T, што је опет у контрадикцији са дефиницијом броја m_n. Следи да је $c = \sup T$. Овиме је доказано да Архимедово својство у конјункцији са Канторовом теоремом имплицира теорему о супремуму. ☐

Дакле, добили смо још два еквивалента аксиоме непрекидности:

- Архимедово својство у конјункцији са Канторовим принципом уметнутих одсечака;
- Архимедово својство у конјункцији са Коши-Канторовим принципом уметнутих одсечака.

Поставља се питање у каквом су односу Канторов принцип уметнутих одсечака и Коши-Канторов принцип уметнутих одсечака. Очигледно је да су у Архимедовом уређеном пољу ови принципи еквивалентни. Међутим, у неархимедовим уређеним пољима то не важи. Коши-Канторов принцип је последица Канторовог принципа о чему ће бити више речи касније.

3.4 Дедекиндов пресек

Тражећи начин да добро заснује уводни курс Calculus-а на Циришкој политехничкој школи, Дедекинд је, према сопственом сведочењу, 24. новембра 1858. године, за један дан, направио конструкцију реалних бројева. Основни проблем је био, како Дедекинд каже, да се прецизно формулише и дефинише једно својство реалних бројева засновано на њиховој геометријској интерпретацији - *својство непрекидности*. Пошто је описао конструкцију реалних бројева и дефинисао операцију сабирања, прелазећи на дефиниције операције множења Дедекинд је написао да ће се, после те дефиниције, моћи (први пут) прецизно формулисати и доказати разне теореме и као пример поменуо једнакост $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$.

У Дедекиндовој конструкцији поља реалних бројева налазе се (или математичари данас налазе) идеје из Еудоксове теорије сразмере (V књига Еуклидових[17] *Елемената*). Прецизно, упоређујући четири геометријске величине, Еудокс каже:

> *Сразмере A према A' и B према B', по дефиницији, једнаке су ако, за ма које природне бројеве m, m', неједнакост $mA < m'A'$ повлачи неједнакост $mB < m'B'$ и обрнуто, неједнакост $mB < m'B'$ повлачи неједнакост $mA < m'A'$.*

У овој дефиницији односа величина види се сличност са дефиницијом Дедекиндовог пресека у пољу рационалних бројева, у којој се ирационални број x дефинише тако што се одреди скуп рационалних бројева већих од x и скуп рационалних бројева мањих од x. Треба, међутим, истаћи да је Дедекиндов циљ био да на скупу конструисаних објеката дефинише аритметичке операције о којима у V књизи Елемената, ипак, нема ни речи.

Дедекинд је реалне бројеве дефинисао као пресеке у пољу рационалних бројева. Међутим, када се та конструкција боље упозна, постаје сасвим јасно да се Дедекиндови пресеци могу дефинисати у сваком уређеном скупу, па дакле и у сваком (другом) уређеном пољу.

Дефиниција 3.5. Нека је X уређен скуп. Пар (D_1, D_2) подскупова $D_1, D_2 \subset X$ назива се *Дедекиндовим пресеком* ако има следећа својства:

A) $D_1 \cup D_2 = X$

B) $D_1 \neq \emptyset, D_2 \neq \emptyset$

C) $\delta_1 \in D_1 \wedge \delta_2 \in D_2 \Rightarrow \delta_1 < \delta_2$.

За нас је овде од интереса случај $X = \mathbb{R}$. Следеће тврђење називамо и Дедекиндовом аксиомом.

> **Дедекиндова аксиома:** Ако су $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ такви да је (D_1, D_2), Дедекиндов пресек, онда постоји најмање горње ограничење $\sup D_1 \in \mathbb{R}$ скупа D_1.

Теорема 3.10. *Дедекиндова аксиома и аксиома непрекидности су еквивалентне.*

Доказ. Претпоставимо да важи аксиома непрекидности и нека је (D_1, D_2) Дедекиндов пресек у $\mathbb{R}$. Из дефиниције (3.5) следи да је скуп D_1 непразан и ограничен одозго. Заиста, $D_1 \neq \emptyset$ следи из (B), док из (C) следи да је сваки елемент скупа D_2 горње ограничење скупа D_1. На основу теореме о супремуму (њу смемо да користимо јер важи аксиома непрекидности) следи да постоји $\sup D_1$, што доказује импликацију да аксиома непрекидности повлачи Дедекиндову аксиому.

Претпоставимо сада да важи Дедекиндова аксиома и нека су T и S скупови са својствима као у аксиоми непрекидности. Нека је $D_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (\forall s \in S)\ x < s\}$ и $D_2 = \mathbb{R} \setminus D_1$.

[17] Еуклид, старогрчки математичар.

Тада је (D_1, D_2) Дедекиндов пресек. Заиста, (A) важи по дефиницији скупова D_1 и D_2. Нека је $\varepsilon > 0$ и

$$T_\varepsilon := \{t - \varepsilon \mid t \in T\}.$$

Очигледно је $S \subset D_2$ и $T_\varepsilon \subset D_1$, па пошто су, према претпоставци из аксиоме непрекидности S и T (а тиме и T_ε) непразни, следи да важи (B). Ако је $\delta_1 \in D_1$, онда је $\delta_1 < s$ за све $s \in S$. Нека је

$$\delta_2 \in D_2. \tag{3}$$

Ако би важило $\delta_2 \leqslant \delta_1$, тада би важило и $\delta_2 < s$ за све $s \in S$. То би, по дефиницији скупа D_1, значило да важи $\delta_2 \in D_1$ што заједно са (3) и (C) даје контрадикцију $\delta_2 < \delta_2$. Према томе, (D_1, D_2) је Дедекиндов пресек, па постоји $c = \sup D_1$. Из дефиниције супремума и $T_\varepsilon \subset D_1$ следи да је $t - \varepsilon \leqslant c$ за све $t \in T$ и све $\varepsilon > 0$. Одатле следи $t \leqslant c$ за свако $t \in T$. Заиста, ако би за неко $t_0 \in T$ било $t_0 > c$, онда би било $t_0 - \frac{1}{2}(t_0 - c) > c$, што је у супротности са $t_0 - \varepsilon < c$ за $\varepsilon = \frac{1}{2}(t_0 - c) > 0$.

Нека је $s \in S$. Из дефиниције скупа D_1 следи да је $\delta_1 \leqslant s$ за свако $\delta_1 \in D_1$, па је горње ограничење скупа D_1. Пошто је супремум најмање горње ограничење, следи да је $c \leqslant s$. Тиме је доказано да из Дедекиндове аксиоме следи аксиома непрекидности. ☐

3.5 Борел-Лебегова и Болцано-Вајерштрасова теорема

Дефиниција 3.6. Фамилија $\mathcal{J}$ скупова се назива *покривањем* скупа A ако је $A \subset \cup_{J \subset \mathcal{J}} J$. *Потпокривање* покривања $\mathcal{J}$ скупа A је фамилија $\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}$ која је и сама покривање скупа A. Покривање скупа отвореним интервалима назива се његовим *отвореним покривањем.* Покривање називамо *коначним* ако се фамилија $\mathcal{J}$ састоји од коначног броја скупова.

Теорема 3.11 (Борел[18]-Лебегова[19] теорема)**.** *Свако отворено покривање $\mathcal{J}$ сегмента $[a, b]$ има коначно потпокривање.*

Доказ. Нека је $\mathcal{J}$ отворено покривање сегмента $I_1 = [a, b]$ из којег се не може издвојити коначно потпокривање. Поделимо интервал I на два интервала

$$[a, (a + b)/2], [(a + b)/2, b];$$

тада се бар један од њих не може покрити коначном фамилијом интервала из $\mathcal{J}$. Означимо тај сегмент са I_1 и поновимо поступак.

Тако добијамо низ сегмената $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ који не допуштају коначно покривање скуповима фамилије $\mathcal{J}$. По Канторовој теореми постоји број c који припада сваком од тих одсечака I_n. Број c свакако припада и неком отвореном интервалу $(\lambda, \mu) \in \mathcal{J}$. Нека је $\delta = \min\{d(c, \lambda), d(c, \mu)\}$ растојање тачке c до ближег краја интервала (λ, μ) тако да је

$$(c - \delta, c + \delta) \subset (\lambda, \mu). \tag{4}$$

Приметимо да је интервал I_n конструисан дељењем интервала I_1 дужине $b-a$ на два дела n пута, па је његова дужина једнака $2^{-n}(b - a)$. За довољно велико n важи $2^{-n}(b - a) < \delta$. Пошто је $c \in I_n$ следи да је

$$I_n \subset (c - \delta, c + \delta). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следи да је $I_n \subset (\lambda, \mu)$, што је у супротности са претпоставком да се I_n не може покрити коначним бројем интервала из $\mathcal{J}$. ☐

[18]Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956), француски математичар и политичар.
[19]Henri Léon Lebesgue (1875-1941), француски математичар.

Дефиниција 3.7. За тачку $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) кажемо да је тачка нагомилавања скупа $A \subset \mathbb{R}$ ако у свакој околини тачке a постоји бесконачно много тачака скупа A, или, еквивалентно, ако у свакој околини тачке a постоји бар једна тачка скупа A различита од саме тачке a.

Теорема 3.12 (Болцано[20]-Вајерштрасова[21] теорема)**.** *Сваки бесконачан ограничен подскуп $A \subset \mathbb{R}$ има бар једну тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$.*

Доказ. Пошто је A ограничен, постоји позитиван реалан број ρ такав да је $A \subset [-\rho, \rho]$. Претпоставимо да ниједна тачка интервала $[-\rho, \rho]$ није тачка нагомилавања скупа A. Тада за сваку тачку $x \in [-\rho, \rho]$ постоји ε-околина $U(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ која садржи највише коначно много тачака скупа A. Фамилија ових ε-околина покрива сегмент $[-\rho, \rho]$ па из теореме (3.11) следи да постоји коначна фамилија $U(x_1), \ldots, U(x_n)$ која покрива $[-\rho, \rho]$, а тиме и A. Пошто се у сваком од ових скупова налази највише коначно много тачака скупа A, одатле следи да је A коначна унија коначних скупова, што је у противречности да је A бесконачан. $\square$

Теорема важи и у следећем случају: Сваки бесконачан скуп у $\mathbb{R}$ има бар једну тачку нагомилавања у $\overline{\mathbb{R}}$. Доказ је једноставан. Нека је A произвољан бесконачан скуп у $\mathbb{R}$. Ако је он ограничен постојање његове тачке нагомилавања управо је доказано. Ако је пак неограничен, то, према дефиницији $+\infty$ и $-\infty$, значи да је бар једна од тих тачака његова тачка нагомилавања.

Анализирајмо детаљније доказе теореме (3.11) и теореме (3.12). Видимо да смо теорему (3.11) извели као последицу теореме о супремуму, а теорему (3.12) као последицу теореме (3.11). Тако смо добили ланац импликација

Теорема о супремуму $\Rightarrow$ Борел-Лебегова теорема $\Rightarrow$ Болцано-Вајерштрасова теорема

Неопходно је доказати да Болцано-Вајерштрасова теорема имплицира (или да је њему еквивалентна) неки од већ доказаних еквивалената аксиоме непрекидности.

Теорема 3.13. *Болцано-Вајерштрасова теорема имплицира и Архимедово својство и Канторову теорему.*

Доказ. За $a > 0$ скуп $\{na \mid n \in \mathbb{N}\}$ нема тачку нагомилавања, па не може бити ограничен, одакле следи Архимедово својство. За доказ Канторове теореме посматрајмо скупове $\{a_1, a_2, \ldots\}$ и $\{b_1, b_2, \ldots\}$ из формулације Канторове теореме. Они су ограничени (јер су подскупови сегмента $[a_1, b_1]$), па имају тачке нагомилавања a и b. Сасвим је јасно да важи
$$[a, b] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n].$$
Иако се то не захтева, докажимо да Архимедово својство у конјункцији са Канторовом теоремом имплицира Болцано-Вајерштрасову теорему.

Нека је скуп $A \subset \mathbb{R}$ бесконачан и ограничен, дакле $A \subset I_0$ за неки одсечак $I_0 = [a, b]$. Посматрајмо делове на које средиште $(a+b)/2$ одсечка I_0 дели тај одсечак. Јасно је да скуп A бар у једном од тих делова мора имати бесконачно много елемената - означимо тај део са $I_1 = [a_1, b_1]$. Понављајући тај поступак добијамо одсечак I_2 и затим низ (I_n) одсечака, од којих сваки садржи бесконачно много елемената скупа A. Према

[20]Bernard Bolzano (1781-1848), чешки математичар италијанског порекла.
[21]Karl Theodor Wilhelm Weierstras (1815-1897), немачки математичар.

Канторовој теореми тај низ одсечака има непразан пресек - нека је x тачка за коју важи $x \in I_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Нека је $U(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ произвољна ε-околина те тачке ($\varepsilon > 0$). Како је дужина одсечка I_n једнака $(b-a)/2^n$, то се n према Архимедовом својству, може изабрати тако да та дужина буде мања од ε, чиме је (због $x \in I_n$) обезбеђено да буде $I_n \subset U$. Но, према начину избора одсечака I_n, одатле следи да околина U тачке x садржи бесконачно много тачака скупа A. На тај начин је постојање тачке нагомилавања скупа A доказано. □

Овиме смо у потпуности доказали да су Борел-Лебегова и Болцано-Вајерштрасова теорема еквивалентне аксиоми непрекидности.

3.6 Болцано-Вајерштрасова теорема за низове

Дефиниција 3.8. Под **низом** елемената скупа A подразумевамо сваку функцију $a : \mathbb{N} \to A$. Вредност $a(n)$ функције a у тачки $n \in \mathbb{N}$ означавамо са a_n и зовемо n**-тим чланом** тог низа, а сам низ означавамо са $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ или (a_n).

Дефиниција 3.9. За тачку $a \in \overline{\mathbb{R}}$ кажемо да је **лимес** или **гранична вредност** низа (a_n) реалних бројева и пишемо $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ако за сваку околину U тачке a постоји природан број n_0, такав да је $a_n \in U$ за све природне бројеве n веће од n_0. Дакле,

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \iff (\forall U)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \ \Rightarrow \ a_n \in U).$$

У том случају још кажемо да низ (a_n) **тежи ка** a **кад** n **тежи** ∞ и пишемо $a_n \to a$ ($n \to \infty$). У случају кад је a коначан број, за низ (a_n) кажемо да је **конвергентан** (или да **конвергира ка** a), а у случају када је $a = \pm\infty$ или да гранична вредност не постоји, кажемо да низ (a_n) **дивергира**.

Узимајући у обзир дефиниције околина коначних и бесконачних елемената скупа $\overline{\mathbb{R}}$, услов дат у дефиницији може се протумачити и на следеће начине.

Ако је $a \in \mathbb{R}$, тада

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \ \Rightarrow \ |a_n - a| < \varepsilon).$$

Дакле, низ (a_n) тежи ка a ако су му чланови a_n „произвољно близу” броју a чим је n „довољно велико”. Још се каже да се у том случају у свакој околини тачке a налазе *сви чланови низа почев од неког* или *скоро сви* чланови низа (тј. сви осим њих коначно много).

Ако је $a = +\infty$, тада

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff (\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \ \Rightarrow \ a_n > M).$$

Слично се може „дешифровати” и услов $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Лема 3.3. *Сваки конвергентан низ је ограничен.*

Доказ. По дефиницији, конвергентан низ (a_n) има коначну граничну вредност a. За произвољно $\varepsilon > 0$ изаберимо $n_0 \in \mathbb{N}$, тако да важи $|a_n - a| < \varepsilon$ за све $n > n_0$. Међу коначно много бројева

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}, a+\varepsilon, a-\varepsilon$$

изаберимо онај који има највећу апсолутну вредност M. Тада је $|a_n| \leqslant M$ за све $n \in \mathbb{N}$, тј. низ (a_n) је ограничен. □

Дефиниција 3.10. Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, кажемо да је (x_n) **нула-низ.**

Дефиниција 3.11. За тачку $a \in \overline{\mathbb{R}}$ кажемо да је **тачка нагомилавања** низа реалних бројева (a_n) ако постоји подниз (a_{n_k}) тог низа који тежи ка a кад $k \to \infty$.

Теорема 3.14 (Болцано-Вајерштрасова теорема за низове)**.** *Сваки ограничен низ реалних бројева* (a_n) *има бар једну тачку нагомилавања у* $\mathbb{R}$.

Доказ. Нека је низ (a_n) ограничен. Ако је $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ коначан, тада постоји елемент a тог скупа, такав да је $a_n = a$ за бесконачно много вредности $n = n_1, n_2, \ldots$. Очигледно је да подниз (a_{n_k}) тежи ка a. Ако је $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ бесконачан он према теореми (3.12) има тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$. Јасно је да је она тачка нагомилавања низа (a_n). $\square$

Слично, ова теорема важи и у скупу $\overline{\mathbb{R}}$. Сваки низ реалних бројева има бар једну тачку нагомилавања у $\overline{\mathbb{R}}$. Размотримо случај кад је низ (a_n) неограничен одозго, тј. нека у свакој околини U тачке $+\infty$ могу да се нађу чланови a_n датог низа. Аналогно се разматра и случај кад је низ (a_n) неограничен одоздо. Ако $a_{n_k} \to a$ $(k \to +\infty)$, тада је за све k почев од неког испуњено $a_{n_k} \in U$. Но, како је (n_k) строго растући низ природних бројева, то ће за свако унапред изабрано $n \in \mathbb{N}$ бити $n_k > n$ за погодно k, чиме је доказано да постоји $r > n$ за које је $a_r \in U$. Дакле, $+\infty$ је у том случају тачка нагомилавања датог низа.

Ако детаљније анализирамо доказ Болцано-Вајерштрасове теореме за низове, видимо да је она последица Болцано-Вајерштрасове теореме. Докажимо да су ове две теореме еквивалентне. Остаје још да докажемо импликацију: Болцано-Вајерштрасова теорема за низове $\Rightarrow$ Болцано-Вајерштрасова теорема.

Нека важи Болцано-Вајерштрасова теорема за низове и нека је A бесконачан ограничен подскуп скупа $\mathbb{R}$. Докажимо да он има тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$. Примењујемо исти поступак као када смо доказивали да из коњункције Архимедовог својства и Канторове теореме следи Болцано-Вајерштрасова теорема. Дакле, тада постоји интервал $I_0 = [a, b]$ такав да је $A \subset I_0$. Поделимо интервал I_0 на два интервала $[a, (a + b)/2], [(a + b)/2, b]$; тада се у бар једном од њих налази бесконачно много елемената скупа A - означимо тај део са $I_1 = [a_1, b_1]$. Понављајући тај поступак, добијамо одсечак I_2 и затим низ (I_n) одсечака, од којих сваки садржи бесконачно много елемената скупа A. На основу Болцано-Вајерштрасове теореме за низове, низови (a_n) и (b_n) су ограничени па самим тим имају бар једну тачку нагомилавања. Ако је a тачка нагомилавања низа (a_n), онда она према начину избора a_n припада свим одсечцима I_n. Дакле, у ε-околини тачке a налази се и бесконачно много елеменената скупа A.

Претходним разматрањем у потпуности је доказана следећа теорема:

Теорема 3.15. *Аксиома непрекидности је еквивалентна Болцано-Вајерштрасовој теореми за низове.*

У складу са дефиницијом тачке нагомилавања, Болцано-Вајерштрасову теорему за низове можемо и овако формулисати: *Сваки ограничени низ реалних бројева, садржи конвергентан подниз.*

3.7 Вајерштрасова теорема

Дефиниција 3.12. Нека је (a_n) низ у $\mathbb{R}$.
Низ (a_n) је растући ако $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant a_{n+1}$.
Низ (a_n) је строго растући ако $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1}$.
Низ (a_n) је опадајући ако $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant a_{n+1}$.
Низ (a_n) је строго опадајући ако $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > a_{n+1}$.

Теорема 3.16 (Вајерштрасова теорема)**.** *Нека је (a_n) растући низ реалних бројева. Тада је (a_n) конвергентан (коначној граници) ако и само ако је ограничен одозго.*

Доказ. На основу леме (3.3) довољно је доказати да растући и одозго ограничен низ има (коначну) граничну вредност. Према теореми о супремуму постоји $s = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} < +\infty$. На основу карактеризације супремума, за свако $\varepsilon > 0$ може се наћи $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $s - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant s$. Због монотоније низа (a_n), такође је $s - \varepsilon < a_n \leqslant s$ за $n > n_0$, тј. $|a_n - s| < \varepsilon$ за $n > n_0$. Дакле, $s = \lim\limits_{n\to\infty} = a_n$. □

Слично се формулише и доказује Вајерштрасова теорема када је низ (a_n) опадајући и ограничен одоздо. Дакле, сваки монотон и ограничен низ је конвергентан.

Теорема 3.17. *Аксиома непрекидности је еквивалентна Вајерштрасовој теореми.*

Доказ. Вајерштрасова теорема је непосредна последица теореме о супремуму. Сада ћемо доказати да Вајерштрасова теорема имплицира Архимедово својство и Коши-Канторов принцип уметнутих одсечака.

Уочимо низ (a_n), где је $a_n = n$. Тај низ је растући, јер $(\forall n \in \mathbb{N})\ n + 1 > n$. Докажимо да (a_n) не може бити ограничен низ. Заиста, у противном случају би постојао $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ рецимо. У његовој околини $(a - 1/3, a + 1/3)$, дужине мање од 1, тада би се налазила бар нека два члана n_1, n_2, где $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \neq n_2$, што очигледно није могуће. будући да: $n_1 \neq n_2 \Rightarrow |n_1 - n_2| \geqslant 1$. Значи низ (n) мора бити неограничен, тј.

$$(\forall x > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\ n > x.$$

Добијена формула је управо једна од формулација Архимедове аксиоме. Изведимо још и Коши-Канторов принцип уметнутих одсечака. Нека су

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n], \ldots$$

међусобно уметнути одсечци. Низ (a_n) је растући и ограничен. Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тада је очигледно $a_n \leqslant a \leqslant b_n$, за све $n \in \mathbb{N}$, па $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ заиста није празан. С друге стране, уколико је $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$, такође, очигледно, тај пресек мора бити једночлан. □

3.8 Кошијеви низови

Дефиниција 3.13. За низ реалних бројева (a_n) кажемо да је **Кошијев** (или фундаменталан) ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји индекс $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да је $|a_m - a_n| < \varepsilon$ чим су индекси m и n већи од n_0. Дакле,

$$(a_n) \text{ је Кошијев } \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_m - a_n| < \varepsilon).$$

Описно бисмо могли рећи: низ (a_n) је Кошијев ако су му чланови са довољно великим индексима произвољно близу један другом.

Услов $|a_m - a_n| < \varepsilon$ за свако $m, n > n_0$ може се, очигледно, заменити са $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ за свако $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$ и свако $p \in \mathbb{N}$.

Следећа лема даје неке основне особине Кошијевих низова.

Лема 3.4. *Особине Кошијевих низова:*

1) Сваки конвергентан низ је Кошијев.

2) Сваки Кошијев низ је ограничен.

3) Ако Кошијев низ има конвергентан подниз, он је и сам конвергентан.

Доказ.

1) Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ произвољно. Нека је $n_0 \in \mathbb{N}$ изабрано тако да је $|a_n - a| < \varepsilon/2$ за $n > n_0$. Тада је за све $m, n > n_0$

$$|a_m - a_n| \leqslant |a_m - a| + |a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2,$$

па је низ (a_n) Кошијев.

2) Нека је (a_n) Кошијев низ и за неко $\varepsilon > 0$ нека је n_0 изабрано тако да је $|a_m - a_n| < \varepsilon$ чим је $m, n > n_0$. Ако фиксирамо $m > n_0$, то значи да су сви чланови низа (a_n) за $n > n_0$ у ε-околини тачке a_m. Повећавајући ε може се постићи да ε-околина тачке a_m обухвати и све остале чланове низа (има их коначно много!).

3) Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно и $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $|a_m - a_n| < \varepsilon/2$ за $m, n > n_0$. Нека подниз (a_{n_k}) низа (a_n) има коначан лимес a. Изаберимо $k \in \mathbb{N}$ тако да је $|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2$; при том се може претпоставити да је $n_k > n_0$. Сада за $n > n_0$ важи

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

Теорема 3.18. *Сваки Кошијев низ у $\mathbb{R}$ је конвергентан.*

Доказ. Нека је (a_n) Кошијев низ у $\mathbb{R}$. Према делу (2) претходне леме он је ограничен. Из Болцано-Вајерштрасове теореме за низове следи да постоји подниз (a_{n_k}) тог низа који је конвергентан. На основу дела (3) претходне леме добијамо да је и низ (a_n) конвергентан. □

Сасвим је јасно да се дефиниција Кошијевог низа не мора везати за реалне бројеве. На пример, дефиниција фундаменталног низа се, без било каквих измена, може пренети у произвољно уређено поље. При томе, постоје поља у којима неки Кошијеви низови нису конвергентни. Такво је, на пример, поље рационалних бројева што илуструје следећи пример.

Пример 3.8. Нека је

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \qquad c_n = a_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Низ (a_n) је, очигледно, растући, док је низ (c_n) опадајући:

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= a_{n+1} - a_n + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{1}{n!}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right] \\ &= \frac{1}{n!}\frac{n^2+n+n-n^2-2n-1}{n(n+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

Нека је $m > n, m, n \in \mathbb{N}$. Тада је $a_n < a_m < c_m < c_n$, одакле следи да је $a_k < c_l$ за свако $k, l \in \mathbb{N}$. Докажимо да су (a_n) и (c_n) Кошијеви низови. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада постоји број $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да је $1/n_0! < \varepsilon$. За природне бројеве $n > n_0$ и p важи:

$$|a_{n+p} - a_n| = a_{n+p} - a_n \leqslant c_n - a_n = \frac{1}{n \cdot n!} < \frac{1}{n_0!} < \varepsilon.$$

Слично се доказује да је и (c_n) Кошијев низ.

Претпоставимо да низ (a_n) конвергира у пољу $\mathbb{Q}$. Нека је $x = p/q = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Тада је и $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = x$. Даље, због строге монотоности низова (a_n) и (c_n), имамо да је $a_n < x < c_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, то јест

$$a_n < x < a_n + \frac{1}{n! \cdot n}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Следи да је

$$x = a_n + \frac{\theta(n)}{n! \cdot n},$$

где је $0 < \theta(n) < 1$, $\theta(n) \in \mathbb{Q}$. Специјално, за $n = q$, имамо да је

$$\frac{p}{q} = a_q + \frac{\theta(q)}{q!}.$$

Множећи ову једнакост са $q!$ добијамо да је

$$(0,1) \ni \theta(q) = q!\frac{p}{q} - a_q \cdot q! \in \mathbb{Z},$$

што није могуће. То значи да низови (a_n) и (c_n) не конвергирају у пољу $\mathbb{Q}$ рационалних бројева.

Пре него што кренемо даље, погледајмо неке особине низова у пољу $\mathbb{P}$ формалних Лоранових редова из примера (3.7).

Пример 3.9. Опишимо најпре класу низова у пољу $\mathbb{P}$ формалних Лоранових редова који конвергирају ка нули. Нека је

$$x_n = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_{n_i} t^i$$

низ из $\mathbb{P}$, такав да је $x_n \geqslant 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Претпоставимо да низ (x_n) конвергира ка нули. Ако је k произвољан цели број и $\varepsilon = \varepsilon_{k+1}t^{k+1}$, $\varepsilon_{k+1} > 0$, онда је $\varepsilon > 0$, па постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такво да је $x_n < \varepsilon$ за свако $n > n_0$. То значи да је $x_{n_i} = 0$ за свако $n > n_0$ и за свако $i \leqslant k$. Обрнуто, нека је (x_n) низ у $\mathbb{P}$, такав да је $x_n \geqslant 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и нека за сваки цели број k постоји природни број n_0, такав да је $x_{n_i} = 0$ за свако $n > n_0$ и свако $i \leqslant k$. Нека је $\varepsilon_l \neq 0$ и $\varepsilon = \varepsilon_l t^l + \varepsilon_{l+1}t^{l+1} + \ldots > 0$. Тада је $\varepsilon_l > 0$. Ако је $k = l$, онда постоји природни број n_0, такав да је $x_{n_i} = 0$ за свако $n > n_0$ и $i \leqslant k$. Одавде следи да је $x_n < \varepsilon$ за свако $n > n_0$, што значи да низ (x_n) конвергира ка нули.

Закључујемо да низ (x_n) у пољу $\mathbb{P}$ формалних Лоранових редова конвергира ка нули ако и само ако за сваки цели број k постоји природни број $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да је $x_{n_i} = 0$ за свако $n \geqslant n_0$ и свако $i \leqslant k$.

На пример низ $x_1 = t, x_2 = 2t^2, \ldots, x_n = nt^n, \ldots$ конвергира ка нули, док низ $x_n = 1/n$ не конвергира ка нули (иако је монотон и ограничен).

Опишимо сад класу конвергентних низова. Низ (x_n) је конвергентан ако и само ако постоји $a = \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} a_i t^i \in \mathbb{P}$, такав да за сваки цели број k постоји природни број $n_0 \in \mathbb{N}$, такви да је $x_{n_i} = a_i$ за свако $n > n_0$ и свако $i \leqslant k$.

Пример 3.10. Докажимо да је у пољу $\mathbb{P}$ Лоранових редова над Архимедовим пољем $\mathbb{F}$ (пример (3.7)), низ (x_n), $x_n = \sum x_{n_i} t^i$ фундаменталан низ ако и само ако за сваки цео број k постоји природни број n_0, такав да је $x_{m_i} = x_{n_i}$ за свако $m, n > n_0, m, n \in \mathbb{N}$ и свако $i \leqslant k$.

Нека је (x_n), $x_n = \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} x_i t^i$ Кошијев низ у пољу $\mathbb{P}$, k цео број и $\varepsilon = \varepsilon_k t^k$ где је $\varepsilon_k \in \mathbb{F}$, $\varepsilon_k > 0$. Тада постоји природни број n_0, такав да је $-\varepsilon < x_m - x_n < \varepsilon$ за све природне бројеве $m, n > n_0$. То значи да је $x_{m_i} - x_{n_i} = 0$ за $i \leqslant k$. Обрнуто, претпоставимо да за сваки цео број k постоји природни број n_0, такав да је $x_{m_i} = x_{n_i}$ за све природне бројеве $n, m > n_0$ и свако $i \leqslant k$. Нека је $\varepsilon = \varepsilon_l t^l + \varepsilon_{l+1}t^{l+1} + \ldots$, $\varepsilon \in \mathbb{F}, \varepsilon_l > 0$. Изаберимо $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да за свако $n, m > n_0$, $n, m \in \mathbb{N}$ и свако $i \leqslant l$ важи: $x_{m_i} - x_{n_i} = 0$. Прва координата низа $x_n - x_m$ која је различита од нуле је координата са индексом $j > l$. Следи да је $x_n - x_m < \varepsilon$. Слично се доказује да је $x_m - x_n < \varepsilon$. То значи да је $x_m - x_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ за све природне бројеве $n, m > n_0$, па је (x_n) Кошијев низ у $\mathbb{P}$.

Класу конвергентних низова у уређеном пољу $\mathbb{P}$ означимо са $C(\mathbb{P})$ а класу Кошијевих низова са $F(\mathbb{P})$. Тада је $C(\mathbb{P}) \subseteq F(\mathbb{P})$. У пољу $\mathbb{Q}$ та инклузија је строга, како то доказује пример (3.8). Занимљиво је да се у пољу $\mathbb{P}$ Лоранових редова (пример (3.7)) над Архимедовим пољем $\mathbb{F}$ ове две класе поклапају.

Видимо да је Кошијев принцип конвергенције последица аксиоме непрекидности. Следећа теорема говори више о логичком односу између ова два тврђења.

Теорема 3.19. *Постоји уређено поље у коме важи Кошијев принцип конвергенције, али не важи аксиома непрекидности.*

Доказ. Користићемо поље $\mathbb{P}$ објашњено у примеру (3.7). Као што смо већ доказали, то уређено поље не задовољава аксиому непрекидности јер не задовољава Архимедово својство. Међутим, поље $\mathbb{P}$ задовољава Кошијев принцип конвергенције, као што ћемо доказати.

Нека је (x_n), $(x_n) = \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} x_i t^i$ неки Кошијев низ у пољу $\mathbb{P}$ и (k_n) строго растући низ целих бројева. Тада постоји природни број n_1, такав да је $x_{m_i} = x_{n_i}$ за све природне бројеве n и m веће од n_1 и свако $i \leqslant k_1$. Поставимо $a_i = x_{n_i}$ за $i \leqslant k_1$, $n = n_1 + 1$. Претпоставимо да су за $i \leqslant k_r$ одређени чланови a_i низа $(a_l : l \in \mathbb{Z})$. За $k = k_{r+1}$ постоји природни број n_{r+1}, такав да је $x_{n_i} = x_{m_i}$ за свако $m > n > n_{r+1}, m, n \in \mathbb{N}$, и $i \leqslant k_{r+1}$. Поставимо $a_i = x_{n_i}$ за $k_r < i \leqslant k_{r+1}$, $n = n_{r+1} + 1$. За тако дефинисан низ $(a_l : l \in \mathbb{Z})$ у пољу $\mathbb{F}$, означимо са a Лоранов ред $\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} a_i t^i \in \mathbb{P}$. Нека је $\varepsilon = \varepsilon_p t^p + \varepsilon_{p+1} t^{p+1} + \ldots, \varepsilon \in \mathbb{F}, \varepsilon_p > 0$. Тада постоји природан број n_0, такав да је $x_{n_i} = a_i$ за свако $n > n_0$ и $i \leqslant p$. Одавде следи да је $x_n - a < \varepsilon$ и $a - x_n < \varepsilon$, то јест $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ за свако $n > n_0$. То значи да низ (x_n) конвергира ка a.

Напомена. У вези са позитивним члановима поља $\mathbb{P}$ добро је имати на уму овај ланац неједнакости

$$\ldots > t^{-3} > t^{-2} > t^{-1} > 1 > t^1 > t^2 > t^3 > \ldots > 0$$

Даље, рецимо, између t и t^{-1} поред неких других чланова налазе се и сви позитивни реални бројеви, тј. чланови облика $a + 0t + 0t^2 + \ldots$, где је $a > 0$. $\square$

Теорема 3.20. *Аксиома непрекидности је еквивалентна Архимедовом својству у конјункцији са Кошијевим принципом конвергенције.*

Доказ. Већ смо доказали да аксиома непрекидности имплицира Архимедово својство и Кошијев принцип конвергенције. Докажимо и други смер.

Претпоставимо да је S непразан, одозго ограничен подскуп уређеног поља $\mathbb{F}$, које је Архимедово и чији сваки Кошијев низ конвергира. Дакле, за неке a, b имамо $a \in S$, $b \geqslant S$. На основу Архимедове аксиоме, постоје два цела броја p, q, таква да $p < a$, $q > b$. У наставку уочимо „мрежу” узастопних целих бројева од p до q:

$$p, p+1, p+2, \ldots, q$$

Будући да q јесте а p није горње ограничење, у том коначном низу постоји тачно један цео број, рецимо, означен са c_0, који испуњава овај услов

$$c_0 \text{ није, } c_0 + 1 \text{ јесте горње ограничење од } S$$

У наредном кораку уочимо „мрежу”

$$c_0 + \frac{0}{10}, c_0 + \frac{1}{10}, \ldots, c_0 + \frac{10}{10} \qquad \left(\text{размак је } \frac{1}{10}\right)$$

између бројева c_0 и $c_0 + 1$. Слично претходном, у том коначном низу постоји тачно један члан, у ознаци $c_0 + \frac{c_1}{10}$, рецимо, тако да важи овај услов

$$c_0 + \frac{c_1}{10} \text{ није, } c_0 + \frac{c_1 + 1}{10} \text{ јесте горње ограничење од } S$$

И даље настављамо да расуђујемо на сличан начин. Тако, за сада, имамо овај закључак: Постоји низ (c_n), где $c_0 \in \mathbb{Z}$, $c_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ $i = 1, 2, \ldots, n$, тако да x_n није, а x'_n јесте горње ограничење од S, где

$$x_n = c_0 + \frac{c_1}{10} + \ldots \frac{c_n}{10^n}, \quad x'_n = x_n + \frac{1}{10^n}.$$

На основу Архимедове аксиоме, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n}$, оба низа (x_n) и (x'_n) су Кошијева. Дакле, они конвергирају, рецимо ка c_1 и c_2. Из $\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n - x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$ следи да је $c_1 = c_2$. Одатле следи да за сваки $n \in \mathbb{N}_0$ важи неједнакост

$$x_n \leqslant c_1 \leqslant x'_n$$

чиме се завршава доказ. □

Дакле, следећа тврђења су еквивалентна:

- Архимедово својство + Канторов принцип уметнутих одсечака;
- Архимедово својство + Коши-Канторов принцип уметнутих одсечака;
- Архимедово својство + Кошијев принцип конвергенције.

Да ли су и у неархимедовим пољима Канторов принцип уметнутих одсечака, Коши-Канторов принцип уметнутих одсечака и Кошијев принцип конвергенције међусобно еквивалентни? Размотримо мало боље њихов логички однос.

Теорема 3.21. *Коши-Канторов принцип уметнутих одсечака је еквивалентан Кошијевом принципу конвергенције.*

Доказ. Претпоставимо да важи Коши-Канторов принцип уметнутих одсечака. Дакле, нека је $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ чије дужине конвергирају ка нули. Имамо следећи низ неједнакости:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant c \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$$

за неко $c \in [a_n, b_n]$. Низови (a_n) и (b_n) конвергирају ка c. Докажимо да су Кошијеви низови. Нека је $\varepsilon > 0$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ важи $a_n \leqslant a_{n+p} \leqslant a$. За довољно велико n важи $|a - a_n| < \varepsilon/2$ и $|a_{n+p} - a| < \varepsilon/2$ па је:

$$|a_{n+p} - a_n| = |a_{n+p} - a + a - a_n| \leqslant |a_{n+p} - a| + |a - a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

па је низ (a_n) Кошијев. Слично закључујемо да је низ (b_n) Кошијев.

Нека сада важи Кошијев принцип конвергенције и нека је $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ чије дужине конвергирају ка нули. Тада је

$$0 \leqslant a_{n+p} - a_n \leqslant b_n - a_n \text{ и } a_n - b_n \leqslant b_{n+p} - b_n \leqslant 0$$

за свако $n, p \in \mathbb{N}$. Одавде следи да су (a_n) и (b_n) Кошијеви низови. Према претпоставци, они су конвергентни, а због услова $b_n - a_n \to 0$, они конвергирају ка истом броју. Означимо тај број са c. Тада је $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па тада важи Коши-Канторов принцип уметнутих одсечака. □

Јасно је да из Канторовог принципа уметнутих одсечака следи Коши-Канторов принцип. Следећи пример показује да из Коши-Канторовог принципа уметнутих одсечака у неархимедовим пољима не следи Канторов принцип уметнутих одсечака.

Пример 3.11. Уређено поље $\mathbb{P}$ формалних Лоранових редова над произвољним Архимедовим пољем $\mathbb{F}$ (види пример (3.7) и теорему (3.19)) није Архимедово, али у њему сваки Кошијев низ конвергира, па је пресек сваког опадајућег низа затворених ограничених интервала у $\mathbb{P}$, чији дијаметри конвергирају ка нули, једночлани скуп. Приметимо да је, у овом пољу $0 < nt < 1/n \leqslant 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Низ (nt) је растући, док је низ $(1/n)$ опадајући. Одавде следи да је низ затворених интервала $I_n = [nt, 1/n]$ опадајући, то јест $I_{n+1} \subseteq I_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Претпоставимо да тачка $z \in \mathbb{P}$ припада пресеку $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Тада је $0 < nt \leqslant z \leqslant 1/n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Следи да је $z = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots, a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{F}$, при чему је $0 \leqslant a_0 \leqslant 1/n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Одавде, пошто је $\mathbb{F}$ Архимедово поље, следи да је $a_0 = 0$. Тада је $\mathbb{F} \ni a_1 \geqslant n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, што је немогуће, опет због претпоставке да је $\mathbb{F}$ Архимедово поље. То значи да је пресек $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ празан, то јест у пољу $\mathbb{P}$ Лоранових редова над Архимедовим пољем није испуњен Канторов принцип уметнутих одсечака.

Дакле, у неархимедовим пољима важи следеће:

Канторов принцип уметнутих одсечака

$\Downarrow$

Коши-Канторов принцип уметнутих одсечака

$\Updownarrow$

Кошијев принцип конвергенције

3.9 Закључак

Као што је већ речено, постоји више начина за увођење реалних бројева. За рационалне бројеве можемо рећи да настају од бројева 0 и 1 применом четири основне рачунске операције. Допунски, за реалне бројеве можемо рећи да настају од истих бројева 0 и 1 применом пет операција: четири основне рачунске и операције супремума. Та мисао, имплицитно подразумева да се операција супремум, тј. прелаз облика $S \to \sup S$ (ако је S непразан, одозго ограничен скуп) обавља једино у случају *рационалних* скупова S. Одмах се поставља питање да ли је такво слабљење досега супремума дозвољено. Одговор је потврдан.

Природно се појављује помисао да ли уместо операције супремум смемо користити операцију *лимес*. Одговор је и сада потврдан, јер је теорема о супремуму еквивалентна са теоремом да је *сваки монотон и ограничен низ конвергентан*. Ово важи чак и за Кошијеве низове, то јест: *Сваки реалан број је изразив као гранична вредност неког Кошијевог низа рационалних бројева.*

Дакле, наведене операције, надограђују структуру $\mathbb{Q}$ до структуре $\mathbb{R}$.

За крај наводимо све еквивалентне облике аксиоме непрекидности оним редом како су доказивани у овом раду.

1) (Аксиома непрекидности) Ако су A и B непразни подскупови скупа $\mathbb{R}$, такви да је $x \leqslant y$ за све $x \in A$, $y \in B$, тада постоји елемент $z \in \mathbb{R}$, такав да је $x \leqslant z \leqslant y$ за све $x \in A$, $y \in B$.

2) (Теорема о супремуму) Сваки непразан, одозго ограничен подскуп скупа $\mathbb{R}$ има супремум у $\mathbb{R}$.

3) (Теорема о инфимуму) Сваки непразан, одоздо ограничен подскуп скупа $\mathbb{R}$ има инфимум у $\mathbb{R}$.

4) За свака два непразна непразна скупа $A \subseteq \mathbb{R}$ и $B \subseteq \mathbb{R}$ чија је унија $A \cup B = \mathbb{R}$, таква да је $x < y$ за свако $x \in A$ и $y \in B$, или у скупу A постоји највећи елемент, или у скупу B постоји најмањи елемент.

5) а) (Архимедово својство) За произвољне позитивне реалне бројеве a, b постоји (и јединствено је одређен) природан број n, такав да је $(n-1)a \leqslant b < n$.

   б) (Канторов принцип уметнутих одсечака) Сваки низ (I_n) уметнутих одсечака на реалној правој има непразан пресек.

6) а) (Архимедово својство) За произвољне позитивне реалне бројеве a, b постоји (и јединствено је одређен) природан број n, такав да је $(n-1)a \leqslant b < n$.

   б) (Коши-Канторов принцип уметнутих одсечака) Ако низ (I_n) уметнутих одсечака на $\mathbb{R}$ има особину да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n \in \mathbb{N}$, такво да је дужина $|I_n| = b_n - a_n$ одсечка I_n мања од ε, тада је $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$ једночлан, тј. постоји тачно један $x \in \mathbb{R}$, такав да је $x \in I_n$ за све $n \in \mathbb{N}$.

7) (Дедекиндова аксиома) Ако су $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ такви да је (D_1, D_2), Дедекиндов пресек, онда постоји најмање горње ограничење $\sup D_1 \in \mathbb{R}$ скупа D_1.

8) (Борел-Лебегова теорема) Свако отворено покривање $\mathcal{J}$ сегмента $[a, b]$ има коначно потпокривање.

9) (Болцано-Вајерштрасова теорема) Сваки бесконачан ограничен подскуп $A \subset \mathbb{R}$ има бар једну тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$.

10) (Болцано-Вајерштрасова теорема за низове) Сваки ограничен низ реалних бројева (a_n) има бар једну тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$.

11) (Вајерштрасова теорема) Нека је (a_n) растући низ реалних бројева. Тада је (a_n) конвергентан (коначној граници) ако и само ако је ограничен одозго.

12) (Вајерштрасова теорема) Нека је (a_n) опадајући низ реалних бројева. Тада је (a_n) конвергентан (коначној граници) ако и само ако је ограничен одоздо.

13) а) (Архимедово својство) За произвољне позитивне реалне бројеве a, b постоји (и јединствено је одређен) природан број n, такав да је $(n-1)a \leqslant b < n$.

   б) (Кошијево својство) Сваки Кошијев низ у пољу $\mathbb{R}$ конвергира.

4 Геометријска непрекидност

„Не постоји краљевски пут у геометрију”.[22]

Еуклид

4.1 Историјски развој

Од самих почетака геометрије па све до краја деветнаестог столећа геометријска непрекидност се подразумевала прећутно, као нешто је јасно по себи. Тврђење према којем круг који има тачака са разних страна неке праве, ту праву и сече, није доказивано већ се претпостављало као јасна геометријска чињеница која не захтева никакву потврду. Већ у првом ставу прве књиге својих *Елемената* Еуклид, доказујући да постоји правилан троугао коме су задата темена A и B, конструише кругове $k(A, AB)$ и $k(B, BA)$ и, без доказа, закључује да они имају заједничких тачака. Слично, у дванаестом ставу прве књиге, конструишући управну из задате тачке A на правој p, Еуклид претпоставља да сваки круг са средиштем A, који има тачака са оне стране праве p са које није A, сече праву p у двема тачкама. Потреба да се оваква тврђења докажу није исказивана све до друге половине прошлог века када је Паш[23] 1882. године, у својој *Новијој геометрији*, истакао неопходност заснивања геометријске непрекидности полазећи од засебних аксиома.

Архимед је приметио неке недостатке Еуклидове аксиоматике. У циљу заснивања теорије мерења геометријских фигура он је у свом делу *О ваљку и лопти*, употпунио Еуклидове аксиоме, између осталог, и Еудоксовом аксиомом престиживости на којој почива тзв. геометријска непрекидност „у великом”. Према тој аксиоми коначним бројем „преношења” задате дужи на задату праву може се „стићи и престићи” свака тачка те праве. Непрекидност „у малом” која омогућава да се докажу ставови о пресеку праве и круга и о пресеку двају кругова почива на Канторовој аксиоми према којој је, грубо речено, права „густо испуњена” тачкама. Напоменимо и да се „непрекидност у малом” и непрекидност „у великом” могу исказати само једном аксиомом, тзв. Дедекиндовом аксиомом непрекидности. У својим *Основама геометрије* Хилберт[24] је, уз Архимедову, претпоставио и тзв. аксиому потпуности која је еквивалентна Канторовој аксиоми.

Истакнимо да је геометријска непрекидност претпоставка теорије мерења равних и просторних геометријских ликова те да, захваљујући њој, геометрија може да испуни захтеве које пред њу поставља само њено име у којем се сугерише да је геометрија „наука о мерењу”. Тек после увођења аксиома непрекидности могуће је доказати да права која садржи тачку унутар неког круга, са њим има заједничких тачака, тј. да га сече у двема тачкама и, такође, да два круга од којих сваки има тачака унутар другог, имају заједничких тачака. Непрекидност у геометрији има за последицу тврдњу да је еуклидски простор метрички, а и увођење појма *сличности* подразумева познавање непрекидности.

[22]За овај цитат се везује занимљива анегдота. Наиме, Прокле, византијски филозоф из V века н.е., је писао да када је Птоломеј запитао да ли можда постоји неки лакши начин за учење геометрије, Еуклид му је одговорио: „Господару, не постоји краљевски пут у геометрију”.

[23]Moritz Pasch (1843-1930), немачки математичар.

[24]David Hilbert (1862-1943), немачки математичар.

4.2 Аксиоме непрекидности

Релацију $\mathcal{B}$ зваћемо релацијом *између* или *релацијом поретка тачака на правој*, а формулу $\mathcal{B}(A, B, C)$ читаћемо: тачка B је између тачака A и C.

Релацију $\mathcal{C}$ зваћемо релацијом *подударности*, а формулу $\mathcal{C}(A, B, C, D)$ читаћемо: пар тачака (A, B) је подударан пару тачака (C, D). Уместо $\mathcal{C}(A, B, C, D)$ користићемо и ознаку $(A, B) \cong (C, D)$

Основне ставове (или аксиоме) геометрије сврставамо у пет група. Прву групу којом се изражавају скуповни односи међу тачкама, правама и равнима називамо *аксиомама припадања* или *аксиомама инциденције*. Основне особине релације $\mathcal{B}$ изражавају се другом групом аксиома, *аксиомама распореда*. Аксиоме треће групе се тичу релације $\mathcal{C}$ и називамо их *аксиомама подударности*. *Аксиоме непрекидности* сачињавају четврту групу, а пета група аксиома се састоји само од само једне аксиоме, *аксиоме паралелности*.

Геометријска теорија непрекидности се темељи на двема аксиомама четврте групе од којих се прва назива *Архимедовом* или *Архимед-Еудоксовом*, а друга *Канторовом*. Наведимо најпре те две аксиоме.

A 1. Ако су AB и CD две произвољне дужи, тада на полуправој AB постоји коначан низ тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таквих да је $\mathcal{B}(A, A_1, \ldots, A_n)$, при чему је свака од дужи AA_1,A_1A_2,…, $A_{n-1}A_n$ подударна дужи CD и $\mathcal{B}(A, B, A_n)$.

A 2. Ако је $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n, \ldots$ низ затворених дужи неке праве, таквих да свака од тих дужи садржи следећу, тада постоји тачка X која припада свакој дужи тога низа.

Геометрију засновану на прве четири групе аксиома, дакле, на аскиомама припадања, распореда, подударности и непрекидности, називамо *апсолутном геометријом*. Простор који задовољава те аксиоме називамо *апсолутним простором*, а сваку његову раван *апсолутном равни*.

Последице Архимедове аксиоме. Наведимо најпре две последице Архимед-Еудоксове аксиоме од којих је прва толико једноставна да је нећемо ни доказивати.

Теорема 4.1. *Ако је дуж a мања од дужи b, тада постоји природан број n такав да је*

$$(n-1)a \leq b < na.$$

□

Теорема 4.2. *Ако је дуж a мања од дужи b, онда за сваку дуж c постоје природни бројеви m и n такви да је*

$$a < \frac{m}{2^n}c < b.$$

Доказ. Како је $a < b$, на основу Архимедове аксиоме постоји природан број n такав да је

$$c < 2^n(b-a), \quad \text{тј.} \ \frac{1}{2^n}c < b - a.$$

Ако је $\frac{1}{2^n}c > a$, онда је

$$a < \frac{1}{2^n}c < b - a < b$$

па је теорема доказана ($m = 1$).

Ако је $\frac{1}{2^n}c < a$, онда, на основу претходне теореме, постоји број m такав да је

$$(m-1)\frac{1}{2^n}c \leq a < m\frac{1}{2^n}c.$$

Тада је

$$a < \frac{m}{2^n}c = \frac{1}{2^n}c + \frac{m-1}{2^n}c < (b-a) + a = b.$$

□

Канторов низ. Пре него што докажемо још неколико важних последица аксиома непрекидности уведимо појам Канторовог низа. Низ дужи A_1B_1,A_2B_2,$\dots$, A_nB_n,$\dots$ који задовољава аксиому (2), такав да не постоји дуж која је садржана у свим дужима тога низа зваћемо *Канторовим низом.* Следећу теорему зваћемо *Канторовом теоремом.*

Теорема 4.3 (Канторова теорема)**.** *Постоји јединствена тачка која припада Канторовом низу.*

Доказ. Ако би поред тачке X чије постојање је претпостављено Канторовом аксиомом, постојала и нека друга тачка Y која припада свакој од дужи датог низа, онда би свака тачка Z дужи XY такође припадала свакој од дужи тог низа. Тада би дуж XY припадала свакој дужи Канторовог низа што није у складу са његовом дефиницијом. Стога је тачка X јединствена. □

Теорема 4.4. *Не постоји дуж која би била мања од сваке дужи Канторовог низа.*

Доказ. Нека је X једина тачка садржана у свим дужима неког Канторовог низа дужи $[A_kB_k]_{k=1,2,\dots}$ на правој p. Како су за свако k, A_k и B_k са разних страна тачке X можемо претпоставити да су све тачке A_k са једне, а све тачке B_k са друге стране тачке X. Будући да је дуж A_kB_k унија дужи A_kX и XB_k, а садржи дуж $A_{k+1}B_{k+1}$, тачка A_{k+1} припада дужи A_kX, а тачка B_{k+1} дужи XB_k.

Ако је x произвољна дуж, на правој p постоји тачка A са оне стране X са које су и све тачке A_k, и тачка B са оне стране X са које су и све тачке B_k таква да је X средиште AB која је подударна датој дужи x. Када на дужи AX не би било ни једне од тачака A_k, било би за свако k, $\mathcal{B}(A_k, A, X)$, па би дуж AX припадала свакој од дужи Канторовог низа. Дакле, за довољно велико n све тачке A_k, $k > n$, су између A и X. На исти начин, за довољно велико n све тачке B_k, $k > n$, су између X и B па, за довољно велико n, дуж AB садржи сваку од дужи A_nB_n. Стога је $A_nB_n < AB = x$. □

Дакле, за довољно велико n, дужи XA_n и XB_n су мање од било које унапред задате дужи.

Теореме аналогне последицама Архимедове аксиоме и Канторове теореме могу се показати и за углове.

Дедекиндова теорема. Следеће тврђење које се назива *Дедекиндовом теоремом*, значајна је последица аксиома непрекидности:

Теорема 4.5 (Дедекиндова теорема за праву)**.** *Ако су све тачке неке праве p подељене у два скупа $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, таква да:*

(1) свака тачка праве p припада само једном од скупова $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$,

(2) скупови $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ су непразни,

(3) између било којих двеју тачака једног од тих скупова нема тачака које припадају другом,

тада постоји јединствена тачка X на правој p таква да су све остале тачке скупа $\mathcal{M}$ са једне стране те тачке, а остале тачке скупа $\mathcal{N}$ са друге.

Доказ. Како су скупови $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ непразни, постоје тачке M_1 и N_1 које, редом, припадају тим двама скуповима. Нека је S_1 средиште дужи M_1N_1. Тачка S_1 припада правој p, на основу услова (1), припада тачно једном од скупова $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Ако тачка S_1 припада скупу $\mathcal{M}$, обележићемо је са M_2, а тачку N_1 са N_2, а ако S_1 припада скупу $\mathcal{N}$, обележићемо је са N_2, а M_1 са M_2. Нека је S_2 средиште дужи M_2N_2. Понављајући започети поступак одредићемо тачке M_3 и N_3, итд. На тај начин конструисаћемо низ $[M_kN_k]_{k=1,2,\ldots}$ затворених дужи од којих свака дуж садржи следећу у том низу. Такав низ зваћемо *низом половина дужи*.

Докажимо да не постоји дуж која је садржана у свим дужима конструисаног низа половина. Ако би, напротив, постојала таква дуж x, онда би за свако k било $x < M_kN_k$, а како је, према конструкцији тога низа, $M_kN_k = (1/2^{k-1})M_1N_1$, било би $x < (1/2^{k-1})M_1N_1$, тј. $2^{k-1}x < M_1N_1$, за свако k, што противречи Архимедовој аксиоми. Дакле, низ $[M_kN_k]_{k=1,2,\ldots}$ је Канторов, па постоји јединствена тачка X која припада свакој дужи низа половина дужи.

Из конструкције низа половина дужи следи да су све тачке низа $(M_k)_{k=1,2,\ldots}$ са једне стране тачке X, а све тачке низа $(N_k)_{k=1,2,\ldots}$, са друге. Докажимо да су и све остале тачке скупа $\mathcal{M}$ са једне стране тачке X, а све остале тачке скупа $\mathcal{N}$, са друге. Тачка X припада само једном од скупова $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, рецимо скупу $\mathcal{N}$. Ако је N произвољна тачка скупа $\mathcal{N}$ различита од X, тада је она са оне стране X са које су и тачке низа $(N_k)_{k=1,2,\ldots}$. Заиста, ако би било $\mathcal{B}(N, X, N_k)$, тачка N би била са оне стране X са које су и тачке низа $(M_k)_{k=1,2,\ldots}$, па би, за довољно велико k, тачка M_k била између N и X. Дакле, постојала би тачка скупа $\mathcal{M}$ између двеју тачака скупа $\mathcal{N}$.

Ако је пак, M произвољна тачка скупа $\mathcal{M}$, тада не може бити $\mathcal{B}(M_k, X, M)$ јер би постојала тачка скупа $\mathcal{N}$ између двеју тачака скупа $\mathcal{M}$. Дакле, постоји јединствена тачка X таква да су све остале тачке скупа $\mathcal{M}$ са једне стране тачке X, а све остале тачке скупа $\mathcal{N}$, са друге. □

За тачку X ћемо рећи да *раздваја* скупове $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$.

Слично се доказује да важи и *Дедекиндова теорема за полуправу*, и *Дедекиндова теорема за дуж*. Штавише, ако се претпостави да уз аксиоме прве три групе важи и Дедекиндова теорема за дужи, тада важе и Архимедова и Канторова аксиома.

Теорема 4.6. *Ако уз аксиоме прве три групе важи и Дедекиндова теорема за дужи, тада важе и Архимедова и Канторова аксиома.*

Доказ. Ако претпоставимо да постоје дужи AB и CD и низ тачака A_1,A_2,..., A_n,... на полуправој AB таквих да је $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots)$, а све дужи AA_1, A_1A_2,...,$A_{n-1}A_n$,... су подударне дужи CD и садржане су у дужи $[AB]$, тада скуп тачака дужи $[AB]$ можемо поделити у два подскупа $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ таква да су у скупу $\mathcal{M}$ све тачке које придадају дужима $[AA_1), [A_1A_2), \ldots, [A_{n-1}A_n), \ldots$, а у скупу $\mathcal{N}$ све остале тачке дужи $[AB]$. Како скупови $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ задовољавају скупове Дедекиндове теореме за дужи, постојаће тачка X која раздваја скупове $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Ако је Y тачка праве AB са оне стране тачке X са које је A, таква да је $XY \cong CD$, тада је тачка Y у скупу $\mathcal{M}$, па припада некој дужи $[AA_1), [A_1A_2), \ldots, [A_{n-1}A_n), \ldots$, на пример дужи $A_{i-1}A_i$, што је немогуће јер тада тачке A_i и A_{i+1} припадају отвореној дужи XY, а $XY \cong CD \cong A_iA_{i+1}$. Тиме је доказана Архимедова аксиома. Докажимо и Канторову.

У том циљу претпоставимо да је $[A_1B_1], [A_2B_2], \ldots, [A_nB_n], \ldots$, низ затворених дужи неке праве таквих да свака од тих дужи садржи следећу. Будући да можемо претпоставити да је $\mathcal{B}(A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, B_n, \ldots, B_2, B_1)$, скуп тачака дужи $[A_1B_1]$ можемо поделити у два подскупа $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ таква да су у скупу $\mathcal{M}$ све тачке које припадају дужима $[A_1A_2), \ldots, [A_{n-1}A_n), \ldots$, а у скупу $\mathcal{N}$ све остале тачке дужи $[A_1B_1]$. Како скупови $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ задовољавају услове Дедекиндове теореме за дужи, постојаће тачка X која раздваја скупове $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Како је, за свако i, X између тачака A_i и B_i, тачка X припада свакој дужи низа $[A_1B_1], [A_2B_2], \ldots, [A_nB_n], \ldots$ Тиме је доказано да су и Архимедова и Канторова аксиома последице Дедекиндове теореме. □

Аксиоме (1) и (2) могу се увести и за углове. Може се доказати и Канторова теорема за углове, аналогна теореми (4.3).

4.3 Последице аксиома непрекидности

Многе теореме које су наизглед очигледне не могу се доказати без примене аксиома непрекидности. Наведимо неколико примера таквих теорема.

Теорема 4.7. *Ако је дат круг $k(O, r)$ и тачка P унутар круга k тада произвољна права l у равни круга k која садржи тачку P има са кругом k две заједничке тачке.*

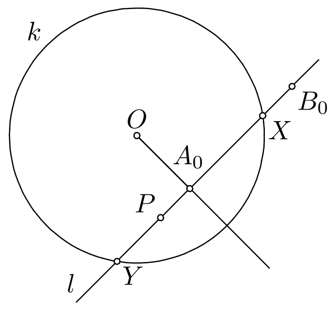
Доказ. Могу наступити два случаја:

(i) права l садржи средиште O круга k,

(ii) права l не садржи средиште O круга k.

Први случај. Нека тачка O припада правој l. Тада постоје тачке X и Y на правој l са разних страна тачке O такве да је $OX \cong r$ и $OY \cong r$, па права l има са кругом $k(O, r)$ две заједничке тачке X и Y.

Други случај. Нека сада тачка O не припада правој l (слика (3)). Означимо са A_0 подножје нормале из тачке O на правој l. Тада ће бити $OA_0 \leq OP$. Како је тачка P унутар круга k биће $OP < r$, те је и $OA_0 < r$. Одредимо на правој l са било које стране тачке A_0 тачку B_0 такву да је $A_0B_0 \cong r$. У правоуглом троуглу OA_0B_0 хипотенуза OB_0 је већа од катете A_0B_0 па је $OB_0 > r$, тј. тачка B_0 је ван круга k. Нека је C_0 средиште дужи A_0B_0. У том случају за тачку C_0 могу наступити три могућности: $OC_0 \cong r$, $OC_0 < r$ и $OC_0 > r$.



Слика 3: Пресеци праве и круга

Ако је $OC_0 \cong r$ тврђење следи непосредно. Ако је тачка C_0 унутар круга k означимо са A_1 тачку C_0 а са B_1 тачку B_0. Ако је тачка C_0 изван круга k означимо A_1 тачку A_0, а са B_1 тачку C_0. У оба случаја је $OA_1 < r$ и $OB_1 > r$, дуж A_1B_1 је једнака половини дужи A_0B_0 и садржана је у њој. Означимо са C_1 средиште дужи A_1B_1. За тачку C_1 имамо следеће могућности: $OC_1 \cong r$, $OC_1 < r$ или $OC_1 > r$. Ако је $OC_1 \cong r$ обележимо са A_2 тачку A_1 а са B_2 тачку C_1, а ако је $OC_1 < r$ онда означимо са A_2 тачку C_1 а са B_2 тачку B_1. У оба случаја је $OA_2 < r$, $OB_2 > r$, дуж A_2B_2 једнака је половини дужи A_1B_1 и садржана је у њој.

Настављајући тај поступак после n корака добијамо да је

$$OA_n < r, \quad OB_n > r, \quad A_nB_n = \frac{1}{2^n}A_0B_0, \quad [A_nB_n] \subset [A_{n-1}B_{n-1}].$$

Према томе, добили смо низ затворених дужи $[A_nB_n]$ за који је испуњена аксиома (2) и не постоји дуж садржана у свим дужима тог низа.

Заиста, јер ако би постојала таква дуж d која би припадала свим дужима тог низа дужи, тада број n можемо изабрати тако да дуж $[A_nB_n]$ буде мања од било које унапред задате дужи, па и од дужи d, па би већа дуж d била садржана у мањој дужи A_nB_n, што је немогуће.

Дакле, низ (A_nB_n) је Канторов низ, па на основу теореме (4.3) постоји јединствена тачка X која припада свим дужима тог низа дужи. Докажимо да тачка X припада кругу k, тј. да је једна од пресечних тачака праве l и круга k. Довољно је да докажемо да је $OX \cong r$. За дужи OX и r важи тачно једна од следеће три могућности: $OX < r$, $OX > r$ и $OX \cong r$.

Нека је $OX < r$. Тада постоји нека дуж ε таква да је $OX = r - \varepsilon$. Из троугла OXB_n имамо $OB_n < OX + XB_n$. Тачка X припада дужи $[A_nB_n]$, па је $XB_n < A_nB_n$. Можемо изабрати довољно велики број n такав да дуж $[A_nB_n]$ буде мања од било које унапред задате дужи ε. Тада је $XB_n < \varepsilon$ па је $OB_n < r-\varepsilon+\varepsilon = r$. Дакле, добили смо да тачка B_n припада унутрашњости круга што представља контрадикцију. Према томе није $OX < r$.

Аналогно се доказује да није $OX > r$.

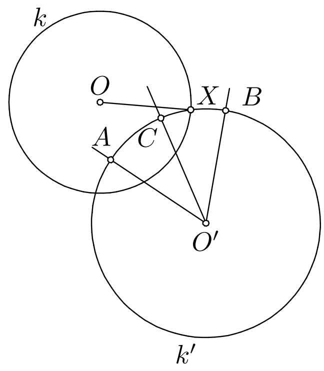
Значи, мора бити $OX \cong r$, тј. тачка X припада кругу k.

За тачку Y праве l симетричну тачки X у односу на тачку A_0 непосредно се добија да припада кругу k. Дакле, права l и круг k имају две заједничке тачке X и Y. Није тешко закључити да осим ових двеју тачака круг k и права l немају других заједничких тачака. □

Теорема 4.8. *Ако два круга k и k' припадају једној равни и ако један од та два круга, нпр. k' садржи неку тачку A која се налази унутар круга k и неку тачку B ван круга k, тада кругови k и k' имају две заједничке тачке.*

Доказ. Нека су O и O' (слика (4)) средишта а r и r' полупречници редом кругова k и k'. Означимо са s медијатрису једног од углова $\measuredangle AO'B$. Полуправа s има са кругом k' једну заједничку тачку, означимо је са C. При томе је или $OC \cong r$ или $OC < r$ или $OC > r$. Ако је $OC \cong r$ тада је тачка C једна заједничка тачка кругова k и k'. Ако је $OC < r$ обележимо са A_1 тачку C а са B_1 тачку B. Ако је пак $OC > r$ обележимо са A_1 тачку A а са B_1 тачку C. У оба случаја је $OA_1 < r$, $OB_1 > r$ и $\measuredangle A_1O'B_1 = \frac{1}{2}\measuredangle AO'B$

Конструишимо медијатрису угла $A_1O'B_1$ и означимо је са C_1 заједничку тачку медијатрисе s_1 и круга k'. За тачку C_1 постоје три могућности: $OC_1 \cong r$, $OC_1 < r$ или $OC_1 > r$. Ако је $OC_1 \cong r$ тада је тачка C_1 заједничка тачка кругова k и k'. Ако је



Слика 4: Пресеци два круга

$OC_1 < r$ означимо са A_2 тачку C_1 а са B_2 тачку B_1, а ако је пак $OC_1 > r$ онда означимо са A_2 тачку A_1 а са B_2 тачку C_1. Тада је у оба случаја $OA_2 < r$, $OB_2 > r$ и $\measuredangle A_2O'B_2 = \frac{1}{2^2}\measuredangle AO'B$.

Настављајући тај поступак добијамо тачке A_n и B_n такве да је $OA_n < r$, $OB_n > r$ и $\measuredangle A_nO'B_n = \frac{1}{2^n}\measuredangle AO'B$. На тај начин је добијен неограничен низ затворених углова

$$[\measuredangle AO'B], [\measuredangle A_1O'B_1], \ldots, [\measuredangle A_nO'B_n], \ldots$$

који задовољава аналогну аксиому аксиоми (2) за углове и не постоји угао садржан у свим угловима тога низа.

Тада, према Канторовој теореми за углове следи да постоји јединствена полуправа s' садржана у свим угловима тог низа. Означимо са X тачку те полуправе такву да је $O'X \cong r'$, односно то јест тачку у којој полуправа s' сече круг k'. Докажимо да тачка X припада и кругу k. У том случају за тачку X могу наступити три могућности: $OX < r$, $OX > r$ или $OX \cong r$.

Нека је $OX < r$. У том случају постоји нека дуж ε таква да је $OX = r - \varepsilon$. У троуглу OXB_n је $OB_n < OX + XB_n$. Број n можемо изабрати тако да тетива A_nB_n буде мања од било које унапред задате дужи ε. Како је тачка X унутрашња тачка дужи $[A_nB_n]$ то је $XB_n < A_nB_n$ па је $XB_n < \varepsilon$. Према томе имамо да је $OB_n < r - \varepsilon + \varepsilon = r$, па је B_n унутрашња тачка круга k што је у контрадикцији са конструкцијом низа тачака B_0, B_1, $B_2, \ldots$ Дакле није $OX < r$.

На потпуно исти начин и претпоставка $OX > r$ доводи до контрадикције.

Према томе мора бити $OX \cong r$, тј. тачка X припада кругу k.

Разматрањем другог угла $AO'B$ аналогним поступком добијамо другу пресечну тачку Y кругова k и k'. $\square$

Докази ових теорема не могу се извести без употребе аксиома непрекидности.

Индекс

Литература

[1] Д. АДНАЂЕВИЋ, З. КАДЕЛБУРГ: *Математичка анализа I*, Математички факултет, Београд, 2004.

[2] С. АЉАНЧИЋ: *Увод у реалну и функционалну анализу*, Грађевинска књига, Београд, 1968.

[3] R. DEDEKIND: *Theory of numbers*, Dover publications, inc. New York, 1963.

[4] М. ЈАЋИМОВИЋ, П. ОБРАДОВИЋ: *Реални бројеви*, ЦИД, Цетиње, 2001.

[5] З. ЛУЧИЋ: *Еуклидска и хиперболичка геометрија*, Математички факултет, Београд, 1997.

[6] З. ЛУЧИЋ: *Огледи из историје античке геометрије*, Службени гласник, Београд, 2009.

[7] С. МАРДЕШИЋ: *Математичка анализа у n-димензионалном реалном простору*, школска књига, Загреб, 1974.

[8] Д. МИЛИНКОВИЋ: *Математичка анализа 1*, www.matf.bg.ac.rs/~milinko, Новембар 2011.

[9] С. ПРЕШИЋ: *Реални бројеви*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1985.

[10] М. РАДОЈЧИЋ: *Општа математика*, Научна књига, Београд, 1950.

[11] М. СТАНКОВИЋ: *Основи геометрије*, Природно математички факултет, Ниш, Ниш, 2006.