

Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

**Примена тригонометрије у
природним наукама - методички и
историјски осврт**

Ментор: Професор Др Милош Арсеновић
Кандидат: Снежана Китановић, дипл.мат.

Београд, 2013.

Чланови комисије:
Професор Др Милош Арсеновић, ментор
Професор Др Драгољуб Ј. Кечкић
Маша Вуковић, асистент

Садржај

1	Предговор	3
2	Увод	4
3	Историјски осврт	5
3.1	Зачеци тригонометрије у Старом свету	5
3.2	Индијска достигнућа	6
3.3	Арапска цивилизација	8
3.4	Модерна тригонометрија	9
4	Тригонометрија у настави математике	11
4.1	Начини дефинисања тригонометријских функција	11
4.2	Адиционе формуле	13
4.3	Инверзне тригонометријске функције	15
4.4	Графици функција косеканс и секанс	16
4.5	Синусна и косинусна теорема	17
5	Неке примене у разним областима математике	19
5.1	Тригонометрија у геометрији	19
5.2	Тригонометријски облик комплексног броја и поларне координате	20
5.3	Тригонометријски Фуријеови редови	24
5.3.1	Тригонометријски ред	24
5.3.2	Фуријеов ред	24
6	Аспекти тригонометрије кроз поједине специфичне појаве у природи и техници	25
6.1	Примене у физици	26
6.1.1	Таласи	26
6.1.2	Осцилаторни модели	29
6.2	Фуријеова трансформација (ФТ) сигнала у медицини и техници	30
6.3	Примена у хемији	34
6.3.1	Брагов закон	34
6.3.2	Спектроскопија	36
7	Задаци из тригонометрије на такмичењима	37
8	Закључак	43

1 Предговор

Користим ову прилику да се захвалим свом ментору, др Милошу Арсенићу, на саветима, сугестијама и подршци коју сам имала током израде овог рада.

Захваљујем се члановима комисије, професору др Драгољубу Кечкићу и асистенту Маши Вуковић, који су детаљно прочитали рад и својим сугестијама допринели његовом завршном изгледу.

2 Увод

Што се чешће сусрећемо са разним математичким садржајима постаје неизбежно питање њихове примене у стварном животу. Како је математика један од најзаступљенијих и најважнијих предмета у школству, обесхрабрује чињеница да је млади невољно уче сматрајући је неинтересантном и сувопарном. Још када по први пут на табли угледамо \sin и \cos , ствари већ постају застрашујуће, како се број неразумљивих формула повећава. Један од разлога за недостатак ентузијазма лежи управо у тој сталној, недокучивој потреби за проналажењем њених последица свуда око нас. А зашто уопште бавити се тиме, када је математика сама себи довољна, себи и онима који је воле. Само треба повремено завирити у њену душу, упознати се са њеном историјом и замршеним коренима који су је неумољиво водили ка резултатима и успесима. Кроз ово излагање открићемо њену другу страну коју можда нисте довољно познавали, која прожима природне науке и господари у свету технике.

Овај рад има за циљ да представи једну сферу математике која може бити и те како важна у нашим животима. Претпостављате да је реч о тригонометрији. На наредним страницама посвећена је пажња применама тригонометрије у појединим областима физике, хемије и медицине. Обрађени су само неки аспекти, с обзиром да су извори у којима фигуришу закони ове гране математике неисцрпни. Како су се уздизале цивилизације, тако се упоредо развијала тригонометрија.

На почетку је изложено како се концепт тригонометрије постепено формирао у истраживачком духу древних народа црећи њихове свакодневне потребе за новим знањима.

Свакако да је настава математике главни посредник задужен за први контакт младих генерација са тригонометријом. Тако се у школи уводи дефиниција преко правоуглог троугла. Ми ћемо се овом приликом упознати са једним несвакидашњим начином дефинисања тригонометријских функција преко E - пресликавања.

Занимљиво је да се тригонометрија јавља и у другим областима математике као што су геометрија, алгебра и математичка анализа. Зато сам сматрала да је важно издвојити посебно поглавље у коме фигуришу комплексни бројеви, познате формуле за израчунавање површине троугла, поларне координате тачке у равни, Фуријеови редови.

Ако нисте знали да тригонометрија и те како учествује и на Олимпијадама, овде ћете имати прилике да се дружите и са њеним такмичарским духом. За крај је приказано неколико необичних такмичарских задатака.

Такође бих напоменула да су сви геометријски цртежи урађени у програмском пакету Geogebra Tube, док су извор за приказане графике функција били интерактивни материјали Geogebra Tube.

3 Историјски осврт

Реч тригонометрија се први пут појавила као наслов књиге „*Trigonometria*“ (мерење троугла), објављене од стране *Bartolomea Pitiskusa*¹ 1595. године. Сложеница је састављена од грчких речи троугао и мера, што наговештава да се ова област у почетку бавила проблемом мерења троугла.

Како се у овом раду дотиче и тема наставе математике, природно се поставља питање када је тригонометрија заживела у Србији и да ли постоје неки писани извори који су служили у раном периоду развоја математике у школству. Може се рећи да је први уџбеник из математике са насловом „**Тригонометрија**“, који је обимније обухватао знања из ове области, објављен у Србији 1875. године. Овај уџбеник и низ других који су се деценијама користили дело су аутора *Димитрија Нешића*². Овом приликом је важно истаћи да је први савремени уџбеник из математике „**Алгебра-устројена за употребљење слушаатеља философије у Лицеуму Књажевства Србије**“ аутора *Атанасија Николића*³, објављен још 1839. године. Веома је занимљиво да је Николић у својим делима математичке формуле писао ћирилицом, у шта се можемо уверити ако погледамо следећи карактеристични запис који представља адициону формулу:

$$\text{њд}(a+b) = \text{њд } a \text{ сон } b + \text{њд } b \text{ сон } a$$

Синус је звао *недриште*, а косинус *сонедриште*.

3.1 Зачеци тригонометрије у Старом свету

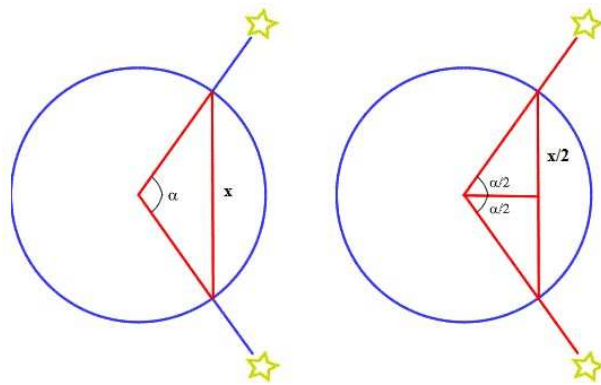
Иако данашња предавања из тригонометрије обично почињу троугловима у равни, њени почеци леже у свету астрономије и сферних троуглова. Још су Сумери, проучавајући звезде и планете покушали да открију њихове положаје, за шта је било неопходно примењивати концепте које данас зовемо тригонометрија. Први записи пронађени у Египту и Месопотамији сведоче о дубоким коренима тригонометрије који задиру скоро 4000 година у прошлост. Помиње се да су Египћани за одређивање нагиба при грађењу пирамида, при мерењу удаљености брода на пучини или премеравањем земљишта у сливу реке Нила, користили величину која је вероватно била *косинус*.

У Античкој Грчкој систематски се прикупљају знања и откривају нове чињенице и методе. Око 140. п.н.е. грчки астроном и математичар *Хипарх* користи имагинарни систем троуглова, како би открио кретање небеских тела. Направио је и прву познату таблицу тетива круга, пошто су прве примене биле везане за тетиве. Тако је дужина тетиве разапете над датим углом α била једнака $x = \frac{2\alpha}{2}$, тј. у данашњој терминологији $x = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Погледати слику 2.1.1.

¹ Bartholomaeus Pitiscus (1561.-1613.), немачки математичар, астроном и теолог. Прославио се делом „*Trigonometria*“ у пет томова, чији је превод са латинског допринео да се реч тригонометрија уведе у француски и енглески језик.

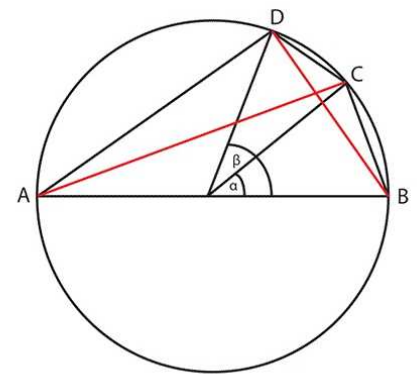
² Димитрије Нешић (1836.-1904.), прослављени професор математике Велике школе и Лицеја крајем 19. века, дуго година једини на катедри за математику, увео модерну наставу свог предмета, пишући сопствене уџбенике, сматрајући да без добрих уџбеника нема ни добрих студената.

³ Атанасије Николић (1803.-1882.), просветни и књижевни радник, професор и први ректор Лицеја. Био је сарадник кнеза Михаила Обреновића. Предавао је математику на Лицеју. Има велике заслуге и за почетке математике у Србији.



Слика 2.1.1: Тетива над углом

Птоломеј прави нову таблицу тетива конструишући серије правилних полигона уписаних у круг. Странице су представљале тетиве које су одговарале централним угловима од 120° , 90° , 72° , 60° и 10° . Користећи оно што данас зовемо **Птоломејева теорема** (ова особина четвороугла била је позната раније) поставио је систем у коме је једна страна четвороугла пречник круга, што је омогућило рачун са сумама тетива. Погледајмо слику 2.1.2. Птоломеј јој је придружио следећи запис:



Слика 2.1.2: Птоломејев систем

$$\text{chord}\beta \times \text{chord}(180 - \alpha) = 180 \times \text{chord}(\beta - \alpha) + \text{chord}(180 - \beta) \times \text{chord}\alpha.$$

Овај запис са тетивама може се заменити производима дијагонала и одговарајућих страница уписаног четвороугла: $DB \times AC = (AB \times DC) + (AD \times BC)$. Ако овај израз представимо у модерној нотацији за $x = \frac{\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha}{2}$, $\text{chord} = \sin$, гласиће:

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

Слично се добија: $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

Претходне две формуле, које је Птоломеј добио, заправо су адиционе формуле, о којима ће бити више речи касније.

Птоломеј⁴ је извео и једну од формула за косинус двоструког угла:

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x.$$

3.2 Индијска достигнућа

У Индији су се у раном периоду (од праисторије до 18. века) проучавали негативни бројеви, аритметика, алгебра и тригонометрија (пре и више него код Хелена). Тако да је тада развијен децимални систем какав данас познајемо, као и модерне дефиниције синуса и косинуса. Постигли су и да два века пре Европе дефинишу степени ред.

⁴ Claudius Ptolemy (85.-165.н.е.), грчко-римски астроном, географ и математичар из Александрије.

У Керали, месту у Јужној Индији, где је основана школа астрономије око 1300. године, настала су завидна математичка достигнућа из области тригонометрије, као што су формуле за аркус тангенс угла - дело индијског астронома *Мадахава*, које гласе:

$$r\theta = \frac{r \sin \theta}{\cos \theta} - \frac{1}{3}r \frac{\sin^3 \theta}{\cos^3 \theta} + \frac{1}{5}r \frac{\sin^5 \theta}{\cos^5 \theta} \dots,$$

односно

$$\theta = \tan \theta - \frac{1}{3}\tan^3 \theta + \frac{1}{5}\tan^5 \theta \dots$$

Такође се јавља и бесконачни низ за вредност π : $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$

Као и трансформација: $\pi = \sqrt{12} (1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots)$.

Формула тригонометријске функције \sin у први мах изгледа овако:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

У свим овим формулама примењивани су њихови принципи који уствари представљају данашњу основу анализе, конкретније, основни облик *Тејлоровог*⁵ реда, лимеса и извода функције.

Направимо сада једну дигресију и подсетимо се данашње формулације Тејлоровог реда.

Дефиниција 1. Нека функција f има у тачки $x = a$ коначан n -ти извод $f^{(n)}(x)$ за сваки природан број n . Бесконачан ред

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

зове се **Тејлоров ред** који одговара функцији f у тачки a .

Развојем функције у околини тачке $x = 0$ добија *Маклоренов*⁶ ред. Ако одредимо изводе основних тригонометријских функција у околини тачке 0 добићемо њихове Маклоренове редове:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Прикажимо и Маклоренове развоје инверзних тригонометријских функција:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1},$$

$$\operatorname{arcsin} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots + \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1) x^{2n+1}} + o(x^{2n+2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!! x^{2n+1}}{(2n)!! (2n+1)},$$

$$\operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsin} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \dots - \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1) x^{2n+1}} + o(x^{2n+2}),$$

где је $o(x^{2n+2})$ облик остатка Тејлорове формуле⁷.

⁵ Brook Taylor (1685.-1731.), био је енглески математичар, најпознатији по Тејлоровој теорему и Тејлоровом реду.

⁶ Colin Maclaurin (1698.-1746.), био је шкотски математичар. Прве чланове реда названог по њему још је раније, за неке тригонометријске функције дао *Мадахава* из Сангамаграме у 14. веку у Индији.

⁷ Тејлорова формула гласи: $f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$, где је $T_{n,a}(x)$ Тејлоров полином у тачки a , а $R_{n,a}(x)$ је остатак или грешка апроксимације функције f овим полиномом. Ово се може доказати у оквиру Тејлорове теореме, под одређеним условима.

Класични период (400.-1200.н.е.), познат је као Златни период индијске математике. У древним рукописима пронађене су основе модерне тригонометрије, где се помињу функције синус, косинус, тангенс, ... Тригонометријски рачун, доста је 1716. године проширио *Varahamira*, који је дао неке основне тригонометријске идентитете, као што су:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \frac{1 - \cos 2x}{2} = \sin^2 x$$

Више о математици класичног периода у [14].

Функције *секанс* и *косеканс* су изведене из таблица које су користили поморци у 15. веку.

3.3 Арапска цивилизација

С индијским појмом синусне функције бивају упознати Арапи током 8. века н.е. Било је потребно око 400 година да се тригонометрија развије као независна наука у Арапској цивилизацији. Индијска дела су превеђена на арапски.

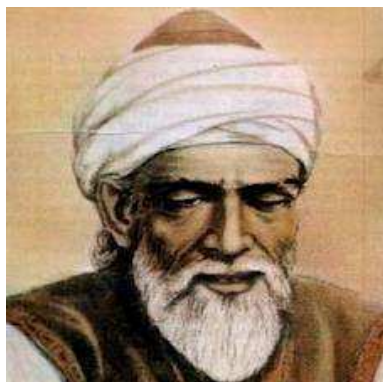
*Al-Khwarizmi*⁸ је користио синусне функције и развијао методе за израчунавање тангенса и котангенса како би решио неке проблеме у астрономији.

*Abul-al-Wafa al-Buzjani*⁹, значајно је допринео развоју математике, пошто се сматра да је први систематски изучавао идентитете. Први је формирао везе између шест основних тригонометријских функција и примењивао нове начине мерења растојања између звезда уз помоћ новог система функција. Такође је вршио истраживања посматрајући круг полупречника $R = 1$, што је била претеча тригонометријског круга. Извео је велики број нових идентитета:

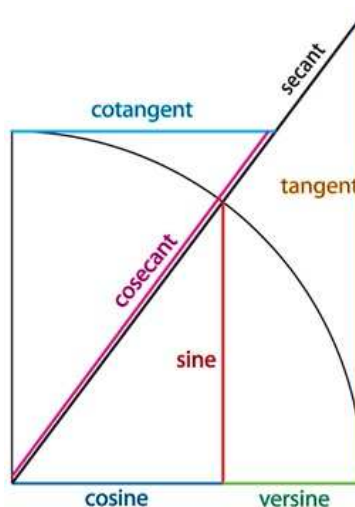
$$\sec^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta$$

$$\vdots$$

$$\operatorname{csc}^2 \theta = 1 + \operatorname{ctg}^2 \theta.$$



Слика 2.3.1: Abul Wafa



Слика 2.3.2: На кругу

*Al-Biruni*¹⁰ је ширећи знања из тригонометрије, међу многим теоремама, демонстрирао и формулу за тангенс.

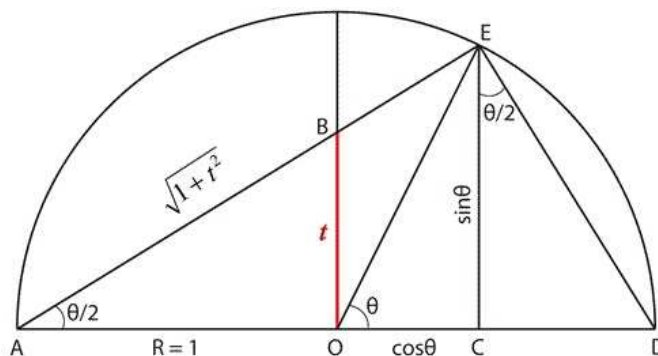
⁸ Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780.-850.н.е.), персијски математичар, астроном и географ.

⁹ Abul-al-Wafa al-Buzjani (940.-998.н.е.), персијски математичар, астроном из Багдада, познат по значајним достигнућима из сферне тригонометрије и аритметике.

¹⁰ Abu al-Rayhan Muhammad ibn Ahmad Al-Biruni (973.-1048.), био је изврстан научник, написао је преко 100 дела из астрономије, математике, историје и филозофије.



Al-Biruni (973-1048)



Слика 2.3.4: Бирунијев дијаграм

Са дијаграма 2.3.4, O је центар полукруга, AED је правоугли троугао са висином EC . Троуглови AEC и EDC су слични. Важи да су следећи углови једнаки као *углови са нормалним крацима*:

$$\sphericalangle EOD = 2\sphericalangle EAD, \quad \sphericalangle EAC = \sphericalangle DAC.$$

Ако је $R = 1$, биће $EC = \sin \theta$ и $OC = \cos \theta$. Тако да је:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{EC}{AC} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}, \quad \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{DC}{EC} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}.$$

Одавде се могу извести формуле за полуугао и двоструки угао.

*Jabir ibn Aflah*¹¹ допринео је ширењу тригонометрије у Европи у 13. веку.

*Al-Tusi*¹² је имао потпуно другачији приступ тригонометрији независно од астрономије. У његовим делима пронађена је формулација *синусне теореме* која се и данас користи:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

где су a, b, c дужине страница произвољног троугла, а A, B, C представљају одговарајуће наспрамне углове. Затим су многа поглавља посвећена тригонометрији правоуглог троугла и основним тригонометријским функцијама. Детаљније о историји у Старом веку и Арапским достигнућима у прилогу [9].

3.4 Модерна тригонометрија

У 16. веку тригонометрија почиње да мења свој карактер од чисто геометријске до алгебарско аналитичке дисциплине. Два догађаја изазвала су ову трансформацију:

1. Успон алгебре (*Francois Viete*¹³),
2. Проналазак аналитичке геометрије (*Pierre de Fermat*¹⁴ и *Rene Descartes*¹⁵).

¹¹ Abu Muhammad Jabir ibn Aflah (1100.-1160.н.е.), вероватно је радио у Севиљи током прве половине 12. века. Значајан критичар Птоломејеве астрономије.

¹² Nasir al-Din al-Tusi (1201.-1274.н.е.), писац, архитекта, астроном, биолог, хемичар, математичар, филозоф, лекар, физичар. Оригинално је писао на персијском, па су касније преводом добијане арапске верзије.

¹³ Francois Viete (1540.-1603.), био је чувени француски математичар, прослављен по многим достигнућима из области анализе и алгебре.

¹⁴ Pierre de Fermat (1607.-1665.), био је француски адвокат и аматер математичар. Бавио се теоријом бројева и диференцијалним рачуном, открио је оригиналан метод за одређивање најмање и највеће координате криве линије.

¹⁵ Rene Descartes (1596.-1650.), француски математичар, писац и филозоф, творац истоименог координатног система.

Виете је показао да се решења многих алгебарских једначина могу представити тригонометријским изразима, што је било велико иновативно достигнуће. На пример, једначина $x^3 = 1$ има три решења:

- $x = 1$,
- $\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,
- $\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Виете је једном приликом, искористио ово своје откриће решавања алгебарских једначина, када су се сусрели француски краљ *Хенри IV* и холандски амбасадор, који је говорио о лошем квалитету француских математичара изазвао краља. Требало је решити једну алгебарску једначину степена 45, што би био велики проблем да није Виете притекао у помоћ, одмах нашавши једно решење, док је следећег дана приложио још 22.

Такође је први увео бесконачне процесе у математику тог времена. Открио је бесконачни производ 1593. године

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots,$$

који се сматра једном од најлепших формула у математици због свог рекурзивног облика. π се може јако прецизно апроксимирати, израчунавањем што већег броја чинилаца.

*James Gregory*¹⁶ проналази 1671. ред за инверзну функцију arctg . Замењујући променљиву x ($x = 1$), добија бесконачну суму за $\frac{\pi}{4}$, која демонстрира значајну везу између једног трансцендентног броја и рационалних бројева. Ускоро и *Isaac Newton* објављује своје откриће којим се и функције \sin и \cos могу представити као суме рационалних сабирака. Тада још увек није било познато да се један индијски астроном (3.2) још пре 2 века бавио развојем функција у ред.

Постепено уједињење тригонометрије и алгебре, а нарочито притом коришћење комплексних бројева у тригонометријским изразима, достигло је свој максимум у 18. веку. *Abraham de Moivre*¹⁷, извео је у имплицитном облику 1722. чувену формулу

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

која омогућава да се нађе n -ти корен комплексног броја. *Leonhard Euler*¹⁸ заслужан је за потпуну интеграцију комплексних бројева у тригонометрију. *Ојлерова формула* $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, где је $e \approx 2.71828$ база природног логаритма, појавила се 1748. у његовом великом делу „*Introductio in analysin infinitorum*“, мада је *Roger Cotes*¹⁹ још 1714. знао инверзну формулу $\theta i = \log(\cos \theta + i \sin \theta)$. Ако θ узме вредност π добија се

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0i = -1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Комбиновањем своје формуле са инверзном формулом свог пријатеља

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta),$$

Ојлер добија изразе

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

¹⁶ James Gregory (1638.-1675.), шкотски математичар и астроном, знатно допринео развоју тригонометрије.

¹⁷ Abraham de Moivre (1667.1754.), био је француски математичар познат по **Моавровој формули** која повезује комплексне бројеве и тригонометрију.

¹⁸ Leonhard Euler (1707.1783.), француски математичар

¹⁹ Roger Cotes (1682.-1716.), енглески математичар, познат по блиској сарадњи са Исаком Њутном. Први је увео Ојлерову формулу.

који су основа модерне аналитичке тригонометрије. Детаљније у енциклопедији [13].

Поменућу овом приликом још једног научника који је дао велике резултате у овој области. Руђер Бошковић²⁰ поставио је темеље тригонометрије и самим тим дао овој области математике велики допринос. За време професорског стажа у Риму извео је четири главне једначине сферне тригонометрије (1770.). Ради истраживања у области геодезије и астрономије Бошковић је увео четири главне диференцијалне једначине тригонометрије. У свом делу „*Елементи свеукупне математике*“²¹ (Рим 1754.), у трећем тому даје знатан број теорема из тригонометрије.

4 Тригонометрија у настави математике

У овом поглављу ћемо навести неке карактеристичне доказе са којима би се ретко када сусрели на часу у средњој школи. Такође ћемо наше интересовање усмерити ка инверзним тригонометријским функцијама, за чију обраду недостаје времена у школама. А на универзитетима се свакако претпоставља да се те функције уче у школи. Зато ћемо кроз ово излагање покушати да поупуно празнину која остаје после изостављања *инверзних функција*, као и функција *секанс* и *косеканс*.

4.1 Начини дефинисања тригонометријских функција

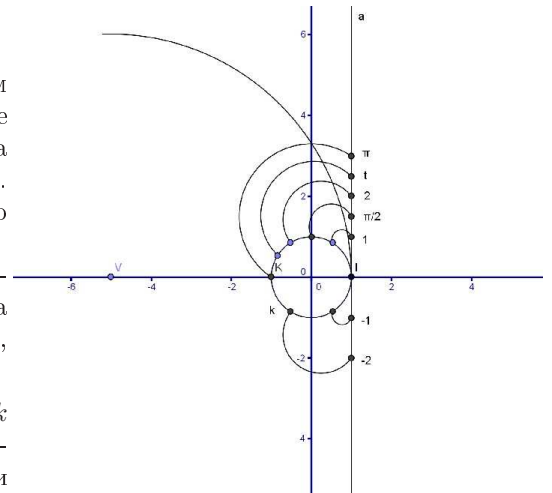
Савремена тригонометрија се више бави тригонометријским функцијама бројева, а мање функцијама углова. Стога ћемо најпре поменути тригонометријске функције бројева, где ћемо наше функције дефинисати преко E - пресликавања, а везу са угловима ћемо успоставити касније када будемо показали да се углови могу мерити бројевима. Када се већ дотичемо наставе математике, овде је згодно поменути професора Слободана Вујића, који је пре 30 година користио функцију E и њену инверзну у настави ЕТШ Никола Тесла у Београду. Није познато да ли је још неко користио у школској настави.

Пресликавање $E: \mathbb{R} \rightarrow k$.

Сваком реалном броју $t \neq 0$, придружимо на јединичном кругу k путању позитивне оријентације за $t > 0$, а негативне за $t < 0$, којој је почетна тачка $I(1, 0)$, а дужина једнака $|t|$ (Сл.3.1.1). Крајњу тачку те путање означимо са $E(t)$. Уколико ставимо $E(0) = I(1, 0)$, имамо коректно дефинисано пресликавање $E: \mathbb{R} \rightarrow k$.

Геометријски говорећи, ово пресликавање настаје обавијањем бројевне праве око јединичног круга (без истезања или скупљања). При томе је, на пример: $E(\frac{\pi}{2}) = J(0, 1)$, $E(\pi) = K(-1, 0)$, $E(\frac{3\pi}{2}) = L(0, -1)$.

Функција E пресликава реалне бројеве на круг k . Круг k на кога су посредством пресликавања E нанети реални бројеви зовемо **тригонометријски круг**. Он ће нам послужити за дефинисање тригонометријских функција.

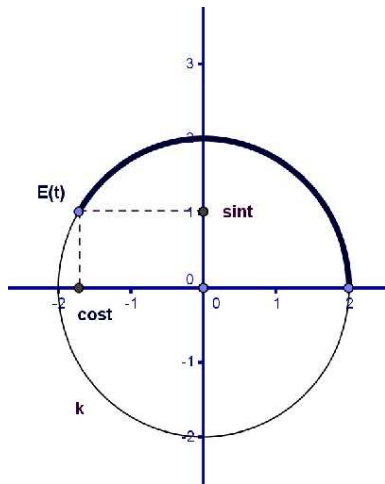


Слика 3.1.1: E пресликавање

Дефиниција 2. Нека је t реалан број. Апсциса тачке $E(t)$ зове се **косинус** броја t и означава се са $\cos t$. Ордината тачке $E(t)$ зове се **синус** броја t и означава се са $\sin t$.

²⁰ Бошковић Руђер Јосип (1711.-1787.), један је од најзначајнијих научника 18. века. Био је математичар, астроном, геодега, физичар и филозоф.

²¹ lat. Elementa matheseos universae



Слика 3.1.2: $E(t) = (\sin t, \cos t)$

Функције $t \rightarrow \cos t$ и $t \rightarrow \sin t$ из \mathbb{R} у \mathbb{R} , зовемо косинус и синус. Поред њих, у употреби су још две тригонометријске функције $t \rightarrow \operatorname{tg} t$ (*тангенс*) и $t \rightarrow \operatorname{ctg} t$ (*котангенс*) које се дефинишу као количници

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \text{под условима да је } \cos t \neq 0,$$

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} \quad \text{под условима да је } \sin t \neq 0.$$

С обзиром да $E(t) = (\cos t, \sin t)$ припада кругу k , за сваки број $t \in \mathbb{R}$ важи: $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. За сваку тачку (x, y) са јединичног круга, тј. за њене координате важи $x^2 + y^2 = 1$. Из ове такозване *основне тригонометријске идентичности*, непосредно следи ограниченост косинуса и синуса:

$$-1 \leq \cos t \leq 1, \quad -1 \leq \sin t \leq 1.$$

Из дефиниције тангенса и котангенса види се да вреди $\operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t = 1$.

Тригонометријске функције углава

Тригонометријске функције углава дефинишемо као одговарајуће функције њихове радијанске мере.²² Израчунавање тригонометријских функција углава своди се на израчунавање тригонометријских функција оштрих углава. Зато је значајна следећа теорема:

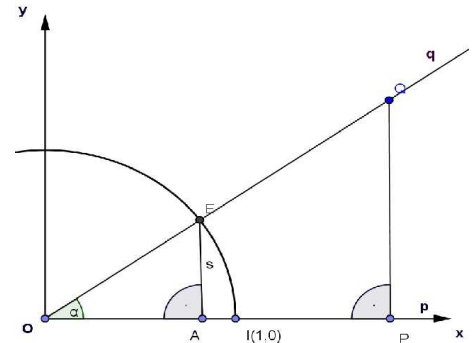
Теорема 1. Нека је $\alpha = \angle POQ$ оштар угао, Q произвољна тачка на краку q (различита од O) и P њена управна пројекција на крак p . Тада је:

$$\cos \alpha = \frac{OP}{OQ},$$

$$\sin \alpha = \frac{QP}{OQ},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{QP}{OP},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{OP}{QP}.$$



Слика 3.1.3: Дефиниција

Доказ. Нека је Oxy правоугли координатни систем коме је x -оса права OP , а y -оса има смер такав да је тачка Q у првом квадранту (Сл.3.1.3). Нека је IE лук дужине s добијен пресеком тригонометријског круга k и угла α (I је тачка на x -оси са координатама $(1,0)$). Означимо са A управну пројекцију тачке E на x -осу. Тачка E има координате $(\cos s, \sin s) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$.

²²Радијанска мера угла је дужина лука јединичног полупречника који одговара произвољном углу. Угао радијанске мере 1 зове се радијан и означава са *Rad*. 1° вреди $\frac{\pi}{180}$ Rad, како је то 360-ти део пуног круга-њему одговара лук дужине $\frac{2\pi}{360}$.

Из сличности троуглова OAE и OPQ следи:

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OP}{OQ}.$$

Како је $OA = \cos \alpha$, $OE = 1$, биће $\cos \alpha = \frac{OP}{OQ}$. Слично се изводе и друге релације. \square

Доказану теорему можемо интерпретирати и на начин, који се обично и презентује у средњој школи. Тригонометријске функције оштрог угла α добијамо из правоуглог троугла коме је α један угао ($\triangle OPQ$), као односе његових страна и то:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\text{налегла катета}}{\text{хипотенуза}} & \sin \alpha &= \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{хипотенуза}} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{налегла катета}} & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\text{налегла катета}}{\text{наспрамна катета}} \end{aligned}$$

Важно је истаћи да су тригонометријске функције **независне** од дужина ивица троугла, пошто су оне уствари односи одговарајућих дужина.

4.2 Адicione формуле

Тригонометријске функције од $s + t$ могу се изразити преко тригонометријских функција од s и t . Одговарајуће формуле зову се **адicione формуле**. За њихово извођење користимо следећу теорему:

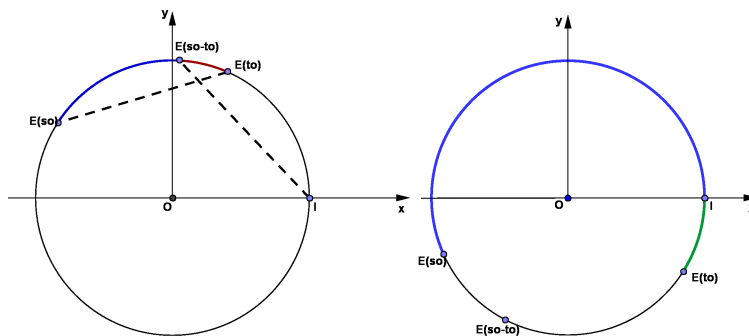
Теорема 2. Нека су s и t произвољни реални бројеви. Тада су оријентисани лукови $+E(t)E(s)$ и $+E(0)E(s-t)$ једнаки.

Доказ. Бројеве s и t могуће је на јединствен начин представити у облику

$$s = 2m\pi + s_0, s_0 \in [0, 2\pi) \quad t = 2n\pi + t_0, t_0 \in [0, 2\pi).$$

На основу својства периодичности пресликавања E , биће $E(s) = E(s_0)$, $E(t) = E(t_0)$ и $E(s-t) = E[2\pi(m-n) + s_0 - t_0] = E(s_0 - t_0)$, па треба доказати да је $+E(t_0)E(s_0) = +E(0)E(s_0 - t_0)$. Разликујемо два могућа случаја: 1) $s_0 \geq t_0$; 2) $s_0 < t_0$.

У првом случају, дужина лука $+E(t_0)E(s_0)$ је $s_0 - t_0$, колика је дужина лука $+E(0)E(s_0 - t_0)$, па су они једнаки. У другом случају дужина оба ова лука је $2\pi - (t_0 - s_0)$, па су опет једнаки (Сл.3.2.1). Тиме је теорема доказана. \square



Слика 3.2.1: Оријентисани лукови

Покажимо сада адicione формулу за косинус!

Теорема 3 (Адициона формула за косинус). *За произвољне реалне бројеве s и t важи:*

$$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t$$

Доказ. Ако у исказу теореме 2 заменимо t са $-t$ добијамо да су лукови $+E(-t)E(s)$ и $+E(0)E(s+t)$ једнаки. Стога су и њима припадне тетиве $E(-t)E(s)$ и $E(0)E(s+t)$ једнаке. Ако ставимо да је $E(s) = (a, b)$, $E(t) = (c, d)$ и $E(s+t) = (x, y)$, биће $E(-t) = (c, -d)$, па користећи формулу за растојање тачака у координатној равни, из $E(-t)E(s) = E(0)E(s+t)$ добијамо

$$\sqrt{(a-c)^2 + (b+d)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

Одавде је $a^2 - 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$, одакле, због $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = x^2 + y^2 = 1$, следи $x = ac - bd$. Када уместо x, a, c, b, d заменимо одговарајуће координате, изведена формула постаје управо адициона формула за косинус. \square

Применом адиционе формуле за косинус, можемо извести следеће формуле свођења на први квадрант:

$$\cos\left(s + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin s \quad \cos\left(s - \frac{\pi}{2}\right) = \sin s$$

Искористимо претходне формуле за извођење адиционе формуле за синус.

Теорема 4 (Адициона формула за синус). *За произвољне реалне бројеве s и t важи:*

$$\sin(s + t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t$$

Доказ. Користећи формуле свођења и адициону формулу за косинус добијамо

$$\begin{aligned} \sin(s + t) &= \cos\left(s + t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\left(s - \frac{\pi}{2}\right) + t\right] = \cos\left(s - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos t - \sin\left(s - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin t \\ &= \sin s \cos t + \cos\left[\left(s - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \cdot \sin t = \sin s \cos t + \cos s \sin t. \end{aligned}$$

\square

Теорема 5 (Адициона формула за тангенс). *Ако су s, t и $s + t$ у домену тангенса, онда је*

$$\operatorname{tg}(s + t) = \frac{\operatorname{tg} s + \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} s \cdot \operatorname{tg} t}$$

Доказ. Под условом да је $\cos s \neq 0$ и $\cos t \neq 0$, растављајући синус и косинус збира добијамо

$$\operatorname{tg}(s + t) = \frac{\sin(s + t)}{\cos(s + t)} = \frac{(\sin s \cdot \cos t + \cos s \cdot \sin t) : (\cos s \cdot \cos t)}{(\cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t) : (\cos s \cdot \cos t)} = \frac{\operatorname{tg} s + \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} s \cdot \operatorname{tg} t}$$

\square

Преузето из књиге [1].

4.3 Инверзне тригонометријске функције

Функција *синус*, посматрана на свом природном домену, тј. функција $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ није бијективна - она није ни „1 – 1“, ни „на“. Да бисмо добили функције које јесу бијекције, морамо на погодан начин да изаберемо њихове домене и кодомене.

Нека је f функција са доменом $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и кодоменом $[-1, 1]$, тј. $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$, дата формулом $f(x) = \sin x$. На основу познатих особина тригонометријских функција закључујемо да је та функција „на“, а такође и да је строго растућа (па је и непрекидна). Самим тим она је и „1 – 1“. Дакле та функција је бијективна, па има инверзну функцију $g : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Вредност функције g у некој тачки $y \in [-1, 1]$, означавамо са $\arcsin y$, тј. узимамо да је $y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$ за $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \in [-1, 1]$.

На други начин то можемо записати овако:

$$\arcsin \sin x = x, \quad \text{за } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad (1)$$

$$\sin \arcsin y = y, \quad \text{за } -1 \leq y \leq 1. \quad (2)$$

Да бисмо конструисали график новодобијене функције \arcsin , извршимо замену слова, тј. посматрамо функцију $y = \arcsin x$ за $x \in [-1, 1]$. Како нам је познат график синусне функције и како је наша функција строго растућа, једноставно добијамо њен график на слици 3.3.1.

Сличан поступак може се спровести и за функцију $y = \cos x$. Треба је посматрати као функцију са доменом $[0, \pi]$ и кодоменом $[-1, 1]$. Одговарајућа инверзна функција је $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. Важиће: $y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$, за $x \in [0, \pi], y \in [-1, 1]$.

График функције $y = \arccos x$ дат је на слици 3.3.3.

Посматрајмо сада функцију $f(x) = \operatorname{tg} x$. За њу је погодно изабрати домен $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а кодомен \mathbb{R} . Тако добијамо бијективну функцију чију инверзну функцију означимо као arctg . Дакле, $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и важи:

$$y = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} y, \quad \text{за } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Функција $y = \operatorname{arctg} x$ је непарна, строго растућа и ограничена ($|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$) (Сл.3.3.2). Има тачно једну нулу - тачку $x = 0$.

Пример 1. Доказати да за свако $x, y \in \mathbb{R}$ за које је $xy < 1$ важи $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.

Решење:

У познатој формули $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ ставимо $\alpha = \operatorname{arctg} x, \beta = \operatorname{arctg} y$ (што је дозвољено за $xy \neq 1$), па добијамо

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{x+y}{1-xy}.$$

Ако је при том и $-\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ (што је испуњено за $xy < 1$), одатле следи наша формула.

Пример 2. Доказати да је $\arcsin(\sin x) = \pi - x$, за $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

Решење:

Тврђење следи на основу познате особине синуса $\sin(\pi - x) = \sin x$, ако се примети да је за $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, испуњено $-\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}$.

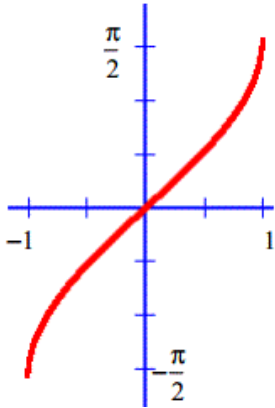
Напомена: Уочити да једнакост (1) важи само у одређеном распону. Упоредити са претходним примером.

Пример 3. Доказати да је $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ за $|x| \leq 1$.

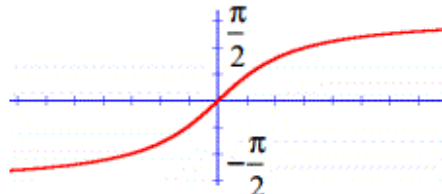
Решење:

На основу познате релације $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$, следи да је $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos(\sin \alpha)$. Сменом $\sin \alpha = x$ добијамо да је $\alpha = \arcsin x$. Ако вратимо смену, добијамо нашу једнакост.

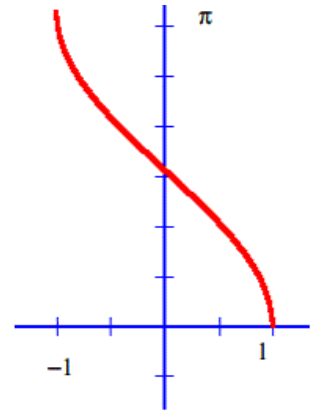
Више примера можете наћи у прилогу [3].



Слика 3.3.1: $y = \arcsin x$



Слика 3.3.2: $y = \operatorname{arctg} x$



Слика 3.3.3: $y = \arccos x$

4.4 Графици функција косеканс и секанс

Навешћу још две тригонометријске функције које су ређе у употреби. Реч је о функцијама *секанс* и *косеканс*. Да би нацртали њихове графике, важно је знати следеће једнакости:

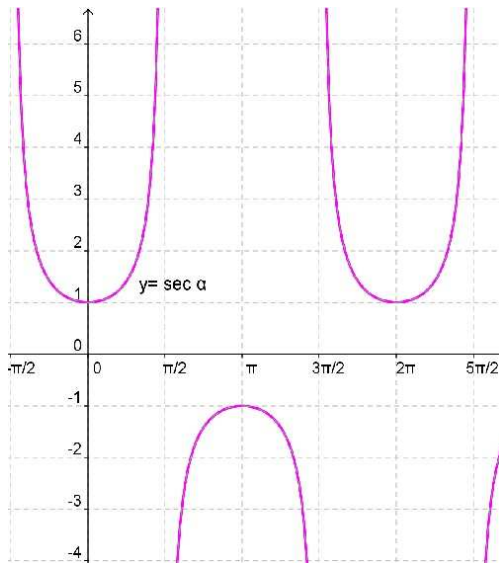
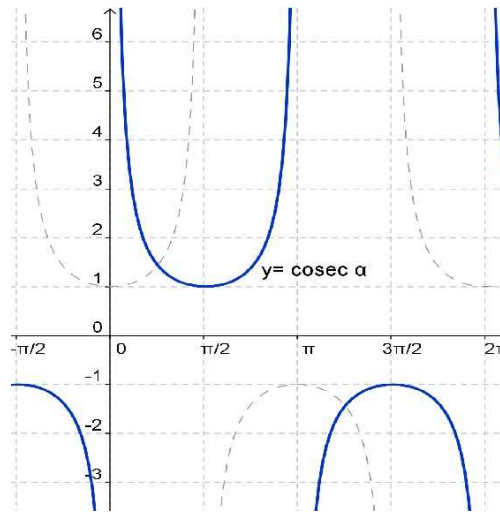
$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Почнимо са функцијом $y = \sec \alpha$. Ако посматрамо табелу у којој се смењују приближне вредности y -она за различите углове α , лако је скицирати одговарајући графички приказ (Сл.3.4.1). Такође је погодно користити правила свођења на први квадрант приликом одређивања приближних вредности за y , где је: $\cos(n \cdot 90^\circ \pm \alpha) = \pm \sin \alpha$.

α	-90°	-45°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°
y	$\pm \infty$	1.41	1	1.15	1.41	2	$\pm \infty$	-2	-1.41

Слика 3.4.1: Табеларни приказ вредности функције $y = \sec \alpha$

Сличан поступак можемо спровести и за функцију $\csc \alpha$, као што се може видети у књизи [2].

Слика 3.4.2: График функције $y = \sec \alpha$ Слика 3.4.3: График функције $y = \csc \alpha$

На дијаграму 3.4.3 испрекидане линије представљају положај графика функције $y = \sec \alpha$. Тако можемо видети да се графици функција косеканс и секанс разликују у фазном помаку за 90° . Вредност 1 функције $y = \sec \alpha$ је 90° улево у односу на вредност функције $y = \csc \alpha$. Графике наведених функција, као и многих других можете наћи у материјалима Геогebra центра [6].

Подсетимо се у следећих пар редова, на примеру функције $y = a \sin(bx + c)$, значења фазног помака и осталих параметара који учествују у формирању графика тригонометријске функције у општем облику. Циљ ове дигресије је да се нагласи да функције са дијаграма 3.4.2 и 3.4.3 могу мењати своје положаје ширећи се и скупљајући се хоризонтално, као и померајући се вертикално у оба смера. На те промене утичу параметри a, b и c . Ако напишемо дату функцију у мало другачијем облику $y = a \sin b(x + \frac{c}{b})$, можемо одредити *амплитуду* a , као највеће одстојање од x осе, затим *учесталост* или *фреквенцију* b која одређује колико пута се основни хармоник садржи у основном интервалу од 2π ($[0, 2\pi]$). Количник $\frac{c}{b}$ представља *фазни помак*, односно једноставно говорећи, тачку на x оси одакле креће функција.

4.5 Синусна и косинусна теорема

Класична примена тригонометрије састоји се у израчунавању елемената троугла. Она у многа почета на следећој теорему, која описује односе између страница и углова троугла.

Теорема 6. Нека је ABC произвољни троугао. Означимо са a, b, c дужине његових страница, а са α, β, γ њима одговарајуће углове троугла. Тада важи:

1. (синусна теорема):

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

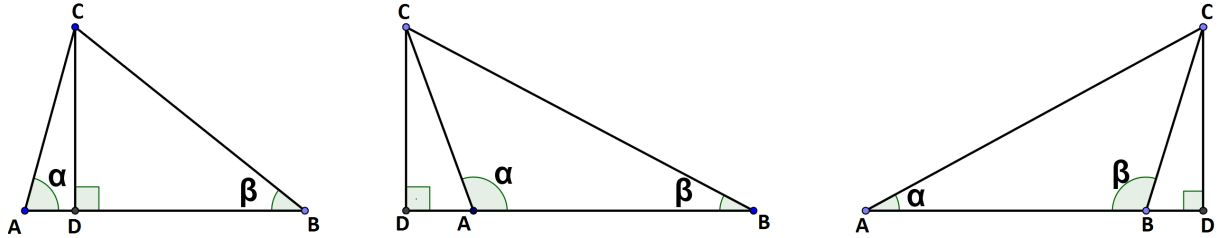
2. (косинусна теорема):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

3. (теорема о пројекцијама):

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta \quad b = a \cos \gamma + c \cos \alpha \quad c = a \cos \beta + b \cos \alpha$$

Доказ. Означимо са D управну пројекцију тачке C на праву AB . Могућа су три распореда тачака: $A - D - B$, $D - A - B$, $A - B - D$ (Сл.3.5.1).



Слика 3.5.1:Распореди тачака на основици у произвољном троуглу

Из правоуглих троуглова ACD и BCD имамо у првом случају:

$$\frac{CD}{AC} = \sin \alpha, \quad \frac{AD}{AC} = \cos \alpha, \quad \frac{CD}{BC} = \sin \beta, \quad \frac{BD}{BC} = \cos \beta$$

па је $CD = b \sin \alpha = a \sin \beta$, $AB = AD + DB$ одакле следи

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \quad (4)$$

а такође

$$c = b \cos \alpha + a \cos \beta. \quad (5)$$

У другом случају је

$$\frac{CD}{AC} = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \frac{AD}{AC} = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\frac{CD}{BC} = \sin \beta, \quad \frac{BD}{BC} = \cos \beta, \quad AB = BD - AD,$$

одакле поново следе формуле (4) и (5). \square

Овако су доказани делови синусне теореме и теореме о пројекцијама. На сличан начин, када користимо висину из темена B , која одговара страници AC , добијамо $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$. Синусна теорема се може доказати и на други начин, тј. може се доказати да је коефицијент пропорционалности односа странице троугла према синусу наспрамног угла једнак пречнику описаног круга:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Косинусну теорему ћемо доказати на два начина [17].

(I) Претпоставимо да је распоред тачака на основици $A - D - B$. По Питагориној теореме²³ из правоуглог $\triangle ADC$ следи $CD^2 = b^2 - AD^2$, а из $\triangle DBC$ $CD^2 = a^2 - BD^2 = a^2 - (c - AD)^2 = a^2 - c^2 + 2c \cdot AD - AD^2$. Изједначимо ове две једнакости:

$$a^2 - c^2 + 2c \cdot AD - AD^2 = b^2 - AD^2 \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot AD$$

Како је $\cos \alpha = \frac{AD}{b} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$. Остале две једнакости се добијају цикличном изменом ознака страница и углова троугла.

²³Питагора са Самоса (570.-495.п.н.е), грчки математичар и филозоф.

(II) Косинусна теорема такође је и последица теореме о пројекцијама, са којом су синусна и косинусна теорема у тесној вези. Теорема о пројекцијама је *теорема о пројекцијама страна*. Ако помножимо једнакости у тој теореме редом са $a, -b, -c$ и сабирајући добијене леве и десне стране добићемо

$$a^2 - b^2 - c^2 = a \cdot (b \cos \gamma + c \cos \beta) - b \cdot (a \cos \gamma + c \cos \alpha) - c \cdot (b \cos \alpha + a \cos \beta) = -2 \cdot b \cdot c \cos \alpha,$$

чиме је доказана прва једнакост косинусне теореме.

Косинусна теорема се може назвати и *уопштена Питагорина теорема*, наиме када је један угао у троуглу прав, биће косинус овог угла нула, па добијемо Питагорину теорему као специјалан случај косинусне теореме. У изворима се може наћи да се ова теорема често назива и Карнотова (Carnot) теорема.

У зависности од тога који су елементи троугла познати, синусна и косинусна теорема често се наизменично примењују код проблема **решавања троугла**, тј. израчунавања дужина страница и углова троугла [1].

5 Неке примене у разним областима математике

Тригонометрија, наравно, има велику примену кроз разне области математике, али нарочито је њена примена повећана од када се математика користи у многим природним и друштвеним наукама. Описаћемо поједине примене у математичкој анализи, геометрији и алгебри.

5.1 Тригонометрија у геометрији

Чувену математичку формулу за израчунавање површине троугла, *Херонов образац*²⁴, добијемо користећи *косинусну теорему* и *трансформације*. У теореме која следи биће приказана још једна формула за израчунавање површине троугла која садржи синусну функцију.

Теорема 7. Нека су a, b, c странице, α, β, γ њима одговарајући углови неког троугла ABC , чији је полубим $s = \frac{a+b+c}{2}$, површина P и полупречник описаног круга R . Тада важи:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\text{Херонов образац})$$

$$P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha \quad R = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot P}$$

Доказ. Означимо са h висину троугла ABC која одговара страници c . Тада је $P = \frac{1}{2} c \cdot h$. Како је (без обзира да ли је угао α оштар или не) $h = b \cdot \sin \alpha$ добијемо другу од наведених формула за површину: $P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$.

Херонов образац добијемо на следећи начин:

$$P = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 (1 - \cos^2 \alpha)} = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \right)^2} =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 2s \cdot (2s-2c) \cdot (2s-2b) \cdot (2s-2a)} =$$

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

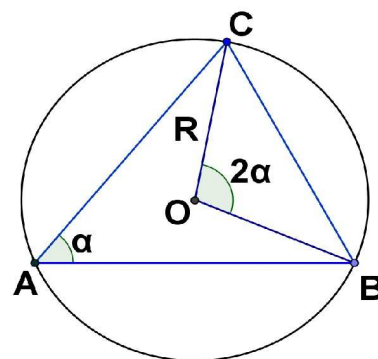
Сада још остаје формула за пречник.

²⁴Формула се приписује Херону из Александрије (I век н.е.), а доказ се може наћи у његовој књизи „Метрика“. Био је грчки математичар и инжењер.

Посматрајмо круг са центром O , који је описан око произвољног троугла ABC (Сл.4.1.1). Централни угао BOC једнак је 2α . Применом косинусне теореме (2) на $\triangle BOC$ добијамо

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 2\alpha = 2 \cdot R^2(1 - \cos 2\alpha) = 4 \cdot R^2 \sin^2 \alpha$$

одакле је кореновањем (због $\sin \alpha \geq 0$) $R = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin \alpha}$, што је и требало доказати. Стављајући овде да је $\sin \alpha = \frac{2P}{bc}$ добијамо $R = \frac{abc}{4 \cdot P}$.



Слика 4.1.1: Описани круг

□

Сада решавамо један геометријски задатак помоћу тригонометрије.

Пример 4. Израчунати дужине дијагонала тетивног четвороугла преко његових страница. Одавде се може извести **Птоломејева теорема**: производ дијагонала тетивног четвороугла једнак је збиру производа наспрамних страница.

Решење:

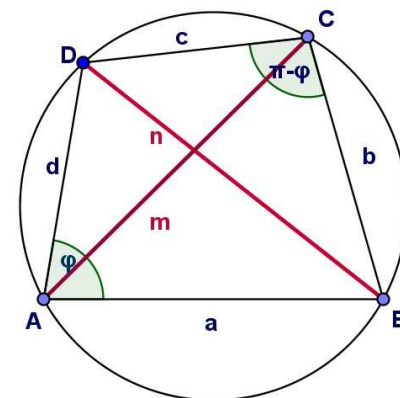
Нека су a, b, c, d странице, а m, n дијагонале тетивног четвороугла (Сл.4.1.2). Применом теореме (2) на $\triangle ABD$ добијамо да је $n^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi$. Из $\triangle BCD$ применом исте теореме следи $n^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\pi - \varphi)$, па је $n^2(bc + ad) = bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)$ одакле је

$$n^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{bc + ad}$$

Аналогно се добија

$$m^2 = \frac{(bc + ad)(ac + bd)}{ab + cd}$$

Множењем последње две релације добија се Птоломејева теорема $mn = ac + bd$.



Слика 4.1.2: Тетивни четвороугао

Напомена: Ако тетивни четвороугао заменимо правоугаоником, применом Птоломејеве теореме добићемо Питагорину теорему. Како су тада дијагонале једнаке дужине, имамо $c^2 = a^2 + b^2$. Ово је још један случај уопштења, што се већ раније јављало код косинусне теореме.

5.2 Тригонометријски облик комплексног броја и поларне координате

Подсетимо се да је комплексан број z дефинисан као уређени пар реалних бројева $z = (a, b)$. На основу важећих операција са комплексним бројевима, стандардни запис комплексног броја је

$$z = (a, b) = a + bi,$$

при чему је i имагинарна јединица и има својство $i^2 = -1$.

Комплексан број z представљамо тачком (a, b) у координатној равни. Њену ординатну осу зовемо *имагинарна оса*, а саму раван *комплексна раван*. Растојање тачке z од координатног почетка зовемо *модуо комплексног броја* z и означавамо са $r = |z|$. Очигледно је $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Уколико је $r \neq 0$, тачка $(\frac{a}{r}, \frac{b}{r})$ припада тригонометријском кругу. Зато постоји јединствени број $\theta \in [0, 2\pi)$ такав да је

$$\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right) = (\cos \theta, \sin \theta).$$

Број θ зове се *аргумент комплексног броја z* и означава са $\arg z$. С обзиром да је $a = r \cos \theta$ и $b = r \sin \theta$, добијамо

$$z = a + bi = r \cos \theta + (r \sin \theta)i = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Последњи израз називамо *тригонометријски облик комплексног броја z* .

Теорема 8 (Моаврова формула). *За сваки природан број n и свако $\theta \in \mathbb{R}$ важи*

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Доказ. Тврђење ћемо доказати математичком индукцијом. Тачно је за $n = 1$. Претпоставимо да је тачно за неко $n \in \mathbb{N}$. Тада је

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} &= (\cos \theta + i \sin \theta)^n (\cos \theta + i \sin \theta) = (\cos n\theta + i \sin n\theta)(\cos \theta + i \sin \theta) = \\ &= \cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta. \end{aligned}$$

Дакле тврђење важи и за $n+1$. Према принципу математичке индукције, важи за сваки природан број n . \square

Теорема 9. *Нека је $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ произвољни комплексан број различит од нуле. Тада постоји тачно n различитих комплексних бројева чији је n -ти степен једнак z . То су бројеви*

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Доказ. Сваки број w такав да је $w^n = z$, зваћемо n -ти корен из z . Ако такав w постоји, може се представити у облику $w = s(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ и на основу (8) биће $w^n = s^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Одавде следи $s^n = r$, па је $s = \sqrt[n]{r}$. Из исте једнакости следи и

$$\cos n\alpha = \cos \theta \quad \text{и} \quad \sin n\alpha = \sin \theta.$$

Зато се $n\alpha$ и θ разликују за целобројни умножак од 2π , тј. $n\alpha = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Одавде је

$$\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Узимајући $k = 0, 1, \dots, n-1$ добијамо n различитих комплексних бројева w чији је n -ти степен једнак z . За остале вредности k понављају се већ добијени комплексни бројеви. Није тешко видети да добијени n -ти корени из z , представљају *темена правилног n -тоугла*, чији је центар координатни почетак комплексне равни. \square

Пример 5. Наћи све четврте корене из -1 .

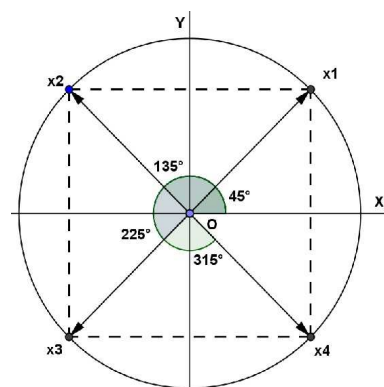
Решење:

Најпре $z = -1$ треба представити у тригонометријском облику. Како је модуо $r = 1$, $\cos \theta = -1$, $\sin \theta = 0$, лако је закључити да аргумент θ има вредност од 180° . Тада је

$$-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$$

Према теорему (9), тражени четврти корени из -1 су

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right), \text{ где је } k = 0, 1, 2, 3.$$



Слика 4.2.1: Квадратни корени

За $k = 0$, $\omega_1 = 1 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \cos 45^\circ + i \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

За $k = 1$, $\omega_2 = 1 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \cos 135^\circ + i \sin 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

За $k = 2$, $\omega_3 = 1 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \cos 225^\circ + i \sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

За $k = 3$, $\omega_4 = 1 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \cos 315^\circ + i \sin 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

У овом случају сви корени $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ су симетрични у односу на координатни систем и представљају **темена квадрата** (Сл.4.2.1).

Пример 6. Наћи сва три кубна корена из $3 - 4i$.

Решење:

Одредићемо најпре модуо датог комплексног броја: $r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$. Аргумент ћемо израчунати помоћу функције \arctg : $\alpha = \arctg \frac{-4}{3} \approx -53^\circ 8'$. Записаћемо број у тригонометријском облику

$$3 - 4i \approx 5(\cos(-53^\circ 8') + i \sin(-53^\circ 8')).$$

Према теорему (9), тражени кубни корени нашег комплексног броја су

$$\sqrt[3]{3 - 4i} \approx \sqrt[3]{5} \left(\cos \frac{-53^\circ 8' + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{-53^\circ 8' + 2k\pi}{3} \right), \text{ где је } k = 0, 1, 2.$$

За вредности $k = 0, 1, 2$ сукцесивно добијамо корене z_1, z_2, z_3 :

$$z_1 \approx \sqrt[3]{5} (\cos(-17^\circ 48') + i \sin(-17^\circ 48')),$$

$$z_2 \approx \sqrt[3]{5} (\cos 102^\circ 12' + i \sin 102^\circ 12'),$$

$$z_3 \approx \sqrt[3]{5} (\cos 222^\circ 12' + i \sin 222^\circ 12').$$

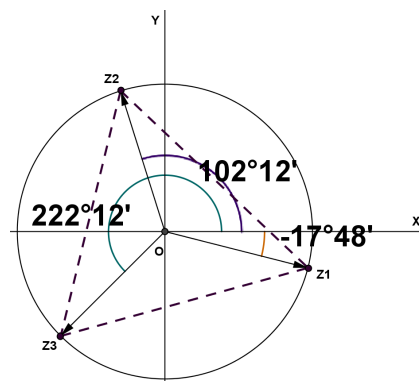
Свођењем на први квадрант и уз помоћ калкулатора добијамо следеће вредности:

$$\cos(-17^\circ 48') \approx 0.9521, \quad \sin(-17^\circ 48') \approx -0.3057,$$

$$\cos 102^\circ 12' = -\sin 12^\circ 12' \approx -0.2113, \quad \sin 102^\circ 12' =$$

$$\cos 12^\circ 12' \approx 0.9774, \quad \cos 222^\circ 12' = -\cos 42^\circ 12' \approx -0.7408,$$

$$\sin 222^\circ 12' = -\sin 42^\circ 12' \approx -0.6717, \quad \sqrt[3]{5} \approx 1.71.$$



Слика 4.2.2: Кубни корени

Тада су наша коначна решења:

$$z_1 \approx 1.6281 - 0.5227i, \quad z_2 \approx -0.3613 + 1.6713i, \quad z_3 \approx -1.2668 - 1.1486i.$$

Тачке z_1, z_2, z_3 представљају **темена једнакостраничног троугла** у комплексној равни (Сл.4.2.2). Пример се може наћи у [2].

Постоји и један други начин представљања координата тачака у равни. Свака тачка се под одређеним условима може написати у **поларним координатама**. Помоћу поларних координата могу се задавати криве у равни. Такође се може успоставити веза са тригонометријским обликом комплексног броја.

За сваку тачку $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ за коју је $x^2 + y^2 \neq 0$ важи

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

Одатле се може извести да постоји и да је јединствено одређен број $\varphi \in [0, 2\pi)$, такав да је

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

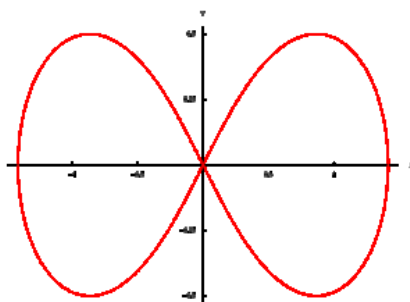
Напомена: Уместо интервала $[0, 2\pi)$ може се узети било који други полузатворени интервал дужине 2π , на пример $(-\pi, \pi]$.

Тако уведени број φ зовемо **поларним углом** тачке (x, y) , а број $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ зовемо **поларним радијусом**. Бројеви r и φ називају се **поларним координатама** те тачке и једнозначно је одређују. Важи:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Нека је сада $z = x + iy \neq 0$ комплексан број. Поларне координате r и φ тачке (x, y) комплексне равни несумњиво су **модул** и **аргумент** броја z . Тада је $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, одакле следи запис броја z у тригонометријском облику (5.2).

Једначина $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ у координатама (x, y) правоуглог координатног система, после прелаза на поларне координате r и φ добија облик $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ и представља **Бернулијеву лемнискату** (Сл.4.2.3). Због захтева да је $\cos 2\varphi > 0$, угао φ може узимати само вредности у једном од интервала $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ или $\left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$, што одређује део равни где се крива налази. Преузето из књиге [16].



Слика 4.2.3: Бернулијева лемниската

²⁴Бернулијева лемниската је алгебарска крива у облику положене осмице, описана картезијанском једначином. График ове једначине даје криву сличну симболу за бесконачност. Сам овај симбол се понекад назива лемнискатом. Ову криву, први је описао Јакоб Бернули, 1694. године, као модификацију елипсе.

5.3 Тригонометријски Фуријеови редови

5.3.1 Тригонометријски ред

Функционални ред облика

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (6)$$

где $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$), назива се **тригонометријским редом**, а парцијална сума тог реда по дефиницији

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (7)$$

зове се **тригонометријски полином** поретка n .

Дакле, тригонометријски ред је базиран на тригонометријском систему функција

$$T = 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots, \text{ које су } 2\pi \text{ периодичне.}$$

Ако ред (6) конвергира на скупу \mathbb{R} ка својој суми $f = f(x)$, онда је функција f периодична, са основним периодом 2π . Зато се проблем разлагања у тригонометријски ред реалних функција које су дефинисане на реалној правој прво решава у класи 2π -периодичних функција. Овај проблем је од великог значаја. Периодичне природне појаве описују се помоћу периодичних функција. Најпростија нетривијална периодична функција је синусна функција $u(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (4.4), помоћу које се описују проста периодична кретања - хармонијске осцилације. С обзиром да се функције по дефиницији

$$u_k(x) = a_k(x) \cos kx + b_k(x) \sin kx, \quad (k \in \mathbb{N}),$$

могу представити у облику $A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k)$, могућност разлагања 2π -периодичне функције f у тригонометријски ред (6) значи да се сложено осцилаторно кретање, моделирано функцијом f , може описати помоћу много једноставнијих хармонијских осцилација.

Питање о могућности разлагања неке функције у тригонометријски ред поставља се и у случају када та функција није периодична или није дефинисана на целој реалној правој. Такве ситуације се јављају, на пример, у теорији диференцијалних једначина²⁵.

5.3.2 Фуријеов ред

Дефиниција 4. Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -периодична, интегрална функција. Бесконача сума

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

је **Фуријеов ред**²⁶ од функције f на интервалу $[-\pi, \pi]$.

25

Дефиниција 3. Једнакост $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) = 0$ у којој је са x означена реална независно променљива, са $y = y(x)$ реална функција, а са $y'(x), \dots, y^n(x)$ изводи функције $y(x)$, назива се обичном диференцијалном једначином n -тог реда општег облика.

²⁶ Joseph Fourier (1768.-1830.), био је француски математичар и физичар. Увео је Фуријеове редове у сврху решавања топлотне једначине у металној плочи, што је довело до револуције у математици. До тада је топлотна једначина као парцијална диференцијална једначина била нерешива.

Бројеви

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 0, 1, \dots \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

се називају **Фуријеовим коефицијентима** од f . Суму можемо и другачије записати користећи период T , где је фреквенција $\frac{2\pi}{T}$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right].$$

Такође, можемо користити и *Ојлерову*²⁷ формулу:

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx, \quad \text{где је } i \text{ имагинарна јединица,}$$

уз помоћ које се тригонометријске функције могу заменити комплексним облицима (3.4). Тако сређивањем добијамо концизнији израз:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[a_n (e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{1}{i} b_n (e^{inx} - e^{-inx}) \right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} [a_n (e^{inx} + e^{-inx}) - i b_n (e^{inx} - e^{-inx})] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} [(a_n + i b_n) e^{inx} + (a_n - i b_n) e^{-inx}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \end{aligned}$$

Реалне коефицијенте заменили смо комплексним: $c_0 = a_0$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n + i b_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - i b_n) = \overline{c_n}$, где је $\overline{c_n}$ коњуговани облик.

Фуријеови коефицијенти a_n, b_n, c_n повезани су преко израза $a_n = c_n + c_{-n}$ за $n = 0, 1, 2, \dots$ и $b_n = i(c_n - c_{-n})$ за $n = 1, 2, \dots$. Уобичајено је да се коефицијенти c_n замене прилагођеним обликом F . Одатле имамо:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[n] e^{inx}$$

У инжењерству, где променљива x обично представља време, низ коефицијената $F[n]$ се односи на фреквентни домен. Дакле важно је разликовати оригиналан или временски домен од фреквентног домена, о чему ће бити више речи у поглављу о *Фуријеовој трансформацији*. Материјал овог поглавља преузет је из књиге [15], као и из прилога [11].

6 Аспекти тригонометрије кроз поједине специфичне појаве у природи и техници

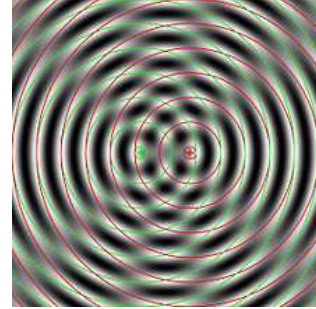
Тригонометријске функције су база за описивање многих појава и процеса у савременој науци и техници. Аналитички заснована тригонометрија током 19. века има широку примену у механици, физици, техници, нарочито у проучавању осцилаторног кретања (таласна кретања у акустици, оптици и електромагнетици). Доказано је да се свако периодично кретање може са довољном тачношћу представити у виду збира простих хармонијских осцилација, тј. осцилација које се математички изражавају формулом $y = a \sin (bx + c)$. Параметре овакве синусне функције објаснили смо у поглављу (4.4).

²⁷ Leonhard Paul Euler (1707.-1783.), био је швајцарски математичар и физичар. Живео је и радио у Берлину и Санкт Петербургу. Дошао је до великих открића у области математичке анализе и теорије графова.

6.1 Примене у физици

6.1.1 Таласи

У природи је велики број процеса који се могу сврстати у таласе: механичке или електромагнетне. Приликом формирања механичких таласа дешавају се померања делића материјалне средине око њихових равнотежних положаја, при чему се преноси енергија кроз средину. Ту спадају акустички (звучни) таласи. Када је реч о електромагнетним таласима (видљива светлост, радио таласи, X-зраци), њима за настанак и простирање није потребна материјална средина. У њиховом случају се ради о осциловању електричног и магнетног поља које се преноси кроз простор. Дакле, процес простирања осцилација кроз простор назива се *талас*. Више о природи таласа у прилогу [4].



Слика 5.1.1.1: Интерференција

Талас који је изазван простим хармонијским осциловањем из једног извора има **синусоидни облик**. Када два или више таласа захвате исти део средине, долази до њиховог слагања у истом делу простора. Ова типична таласна појава карактеристична за свако таласно кретање назива се **интерференција**. У наставку ћемо показати да су у њеној основи тригонометријске функције. Претходно уведемо неке појмове који ће се јављати као параметри у основној једначини таласа:

- *Елонгација* је растојање осцилујуће честице од равнотежног положаја. Зависи од тренутка t и од положаја честице дуж x - осе или у простору. Најчешће се означава грчком словом ψ .
- *Амплитуда кретања* представља највеће растојање честице²⁸ од равнотежног положаја.
- $\omega = 2\pi f$, је *кружна учестаност* и одређује се на основу фреквенције осциловања.
- *Таласна дужина* λ је растојање које пређе талас у току једне осцилације (Сл.5.1.1.5).
- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ је *таласни број* и представља промену фазе таласа по јединици дужине.
- α је *почетна фаза* осциловања.

Наћи ћемо сада једначину таласа који се креће у позитивном смеру x - осе и чија елонгација има синусну или косинусну зависност од времена. Ако посматрамо осциловање честице на месту $x = 0$, оно се може представити изразом

$$\psi(0, t) = \psi_0 \sin(\omega t + \alpha). \quad (8)$$

Осциловање честице погођене истим таласом на неком месту x се може у односу на време t' протекло од почетка осциловања те честице представити у облику:

$$\psi(x, t') = \psi_0 \sin(\omega t' + \alpha). \quad (9)$$

Како је до почетка осциловања честице на месту x дошло после протеклог времена $\frac{x}{c}$ (c брзина таласа), у односу на почетак осциловања у $x = 0$, време t и t' повезани су на следећи начин: $t = t' + \frac{x}{c}$. Ако се t' напише преко t у изразу (9), добија се израз за елонгацију таласа на месту x и у неком тренутку t као

$$\psi(x, t') = \psi_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha\right) = \psi_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi f x}{c} + \alpha\right) = \psi_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \alpha\right) =$$

²⁸Представља део материјалне средине на који делује талас. Када се ради о осцилаторном кретању, онда говоримо о неком телу одређене масе.

$$\psi_0 \sin(\omega t - kx + \alpha),$$

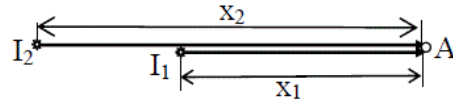
где је $\omega t - kx + \alpha$ фаза таласа, која у општем случају има три дела. Када проучавамо простирање једног таласа, тачку $x = 0$ и тренутак $t = 0$ бирамо тако да је почетна фаза таласа једнака нули, тј. $\alpha = 0$, па је најчешће коришћени облик једначине таласа

$$\psi(x, t) = \psi_0 \sin(\omega t - kx), \quad \text{ако се креће у позитивном смеру } x \text{ - осе,}$$

$$\psi(x, t) = \psi_0 \sin(\omega t + kx), \quad \text{ако се креће у негативном смеру } x \text{ - осе.}$$

Посматрајмо случај интерференције два таласа који крећу из два извора ка некој тачки у истом смеру (Сл.5.1.1.2). Препоставља се да таласи имају исте амплитуде ψ_0 , исте фреквенције и таласне дужине, као и исте почетне фазе 0, али су до места сабирања прешли различите путање. Из извора I_1 талас до тачке сабирања таласа, A , прелази пут x_1 , па је елонгација честице у тачки A у тренутку t под дејством овог таласа једнака

$$\psi_1(x_1, t) = \psi_0 \sin(\omega t - kx_1).$$



Слика 5.1.1.2: Слагање таласа у тачки A

Из извора I_2 талас је до тачке A прешао пут x_2 , па је елонгација честице у тачки A у тренутку t под дејством овог таласа једнака

$$\psi_2(x_2, t) = \psi_0 \sin(\omega t - kx_2).$$

Резултујућа елонгација, пошто се таласи крећу у истом смеру једнака је збиру елонгација ψ_1 и ψ_2 , тј.

$$\psi_{rez} = \psi_1(x_1, t) + \psi_2(x_2, t) = \psi_0 \sin(\omega t - kx_1) + \psi_0 \sin(\omega t - kx_2) = \psi_0 (\sin(\omega t - kx_1) + \sin(\omega t - kx_2))$$

Ако применимо формулу трансформација збир у производ и регрупишемо чланове добијамо

$$\psi_{rez} = 2\psi_0 \sin\left(\frac{2\omega t - kx_1 - kx_2}{2}\right) \cos\left(\frac{kx_2 - kx_1}{2}\right) = 2\psi_0 \cos\left(\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{k(x_2 + x_1)}{2}\right)$$

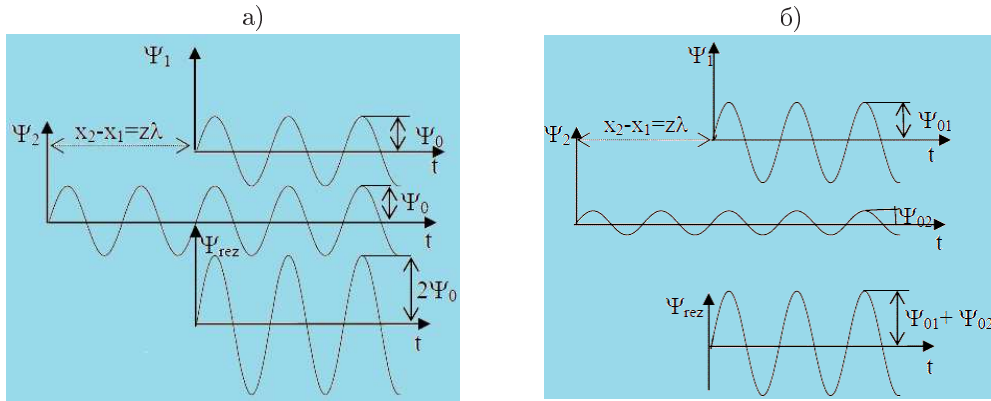
Фаза резултујућег таласа једнака је $\varphi_{rez} = \omega t - \frac{k(x_2 + x_1)}{2}$, а амплитуда је $A = 2\psi_0 \cos\left(\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right)$. Уочимо да амплитуда зависи од разлике пређених путева таласа до места сусрета. С обзиром да је функција $\cos\left(\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right)$ ограничена и има вредности између -1 и $+1$, амплитуда A може имати вредности у интервалу $-2\psi_0 \leq A \leq 2\psi_0$. Кратко ћемо размотрити два случаја:

1. Када је амплитуда резултујућег таласа $|A| = 2\psi_0$ (Сл.5.1.1.3). У овом случају је $A = \pm 2\psi_0$, па је $\cos\left(\frac{k(x_2 - x_1)}{2}\right) = \pm 1$. Функција $\cos \alpha$ је ± 1 , када је $\alpha = z\pi$, где је $z \in \mathbb{Z}$. На основу овога је

$$\frac{k(x_2 - x_1)}{2} = \frac{k\Delta x}{2} = z\pi \quad \Rightarrow \quad k\Delta x = 2z\pi \Rightarrow \Delta x = z \frac{2\pi}{k} = z\lambda.$$

Ако је разлика пређених путева таласа који интерферирају на описани начин једнака цео број таласних дужина таласа, настаје талас максимално повећане амплитуде (слика а)), па се ова интерференција назива **конструктивна интерференција**, јер се таласи међусобно појачавају. Тада је једначина резултујућег таласа $\psi_{rez} = 2\psi_0 \sin\left(\omega t - \frac{k(x_2 + x_1)}{2}\right)$.

Такође долази до конструктивне интерференције, у случају да се слажу два таласа различитих амплитуда (слика б)).



Слика 5.1.1.3: Конструктивна интерференција

2. Када је амплитуда резултујућег таласа $A = 0$ (сл.5.1.1.4). У том случају је $\cos \frac{k(x_2 - x_1)}{2} = 0$. Знамо да је функција $\cos \alpha$ једнака 0, када је $\alpha = (2z + 1)\frac{\pi}{2}$, где је $z \in \mathbb{Z}$. На основу овога се добија

$$\frac{k(x_2 - x_1)}{2} = \frac{k\Delta x}{2} = (2z + 1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow k\Delta x = (2z + 1)\pi \Rightarrow \Delta x = \frac{(2z + 1)}{2} \cdot \frac{2\pi}{k} = (2z + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

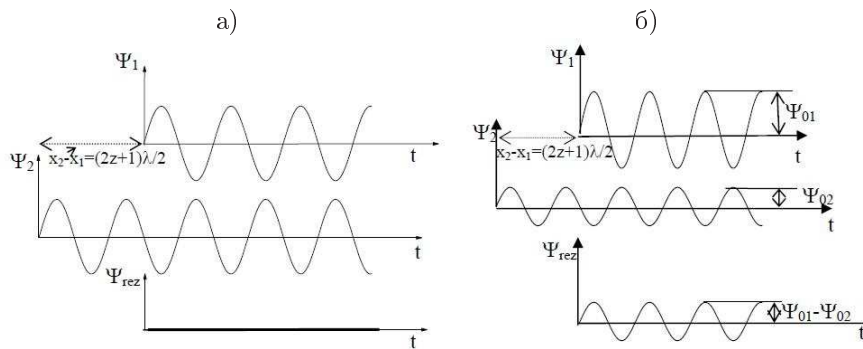
Када је разлика пређених путева таласа једнака непаран број половина таласних дужина, таласи се међусобно поништавају (слика а)), па се ова интерференција назива **деструктивном**.

Ако таласи који деструктивно интерферирају имају различите амплитуде, тада је амплитуда резултујућег таласа једнака разлици амплитуда таласа, што значи да не долази до поништавања, што се може видети на слици б). Ако је елонгација првог таласа дата изразом $\psi_1(x_1, t) = \psi_{01} \sin(\omega t - kx_1)$, а другог $\psi_2(x_2, t) = \psi_{02} \sin(\omega t - kx_2)$, и ако је $x_2 - x_1 = (2z + 1)\frac{\lambda}{2}$, елонгација резултујућег таласа једнака је

$$\begin{aligned} \psi_{rez} &= \psi_1(x_1, t) + \psi_2(x_2, t) = \psi_{01} \sin(\omega t - kx_1) + \psi_{02} \sin\left(\omega t - k\left(x_1 + (2z + 1)\frac{\lambda}{2}\right)\right) = \\ &= \psi_{01} \sin(\omega t - kx_1) + \psi_{02} \sin(\omega t - kx_1 - (2z + 1)\pi) = \psi_{01} \sin(\omega t - kx_1) - \psi_{02} \sin(\omega t - kx_1) \\ &= (\psi_{01} - \psi_{02}) \sin(\omega t - kx_1). \end{aligned}$$

Напомена: Једнакост $\psi_{02} \sin(\omega t - kx_1 - (2z + 1)\pi) = \psi_{02} \sin(\omega t - kx_1)$, добили смо, тако што смо искористили периодичност и свођење на први квадрант, пошто је $(2z + 1)\pi = 2z\pi + \pi$.

Детаљније о интерференцији таласа у прилогу [5].



Слика 5.1.1.4: Деструктивна интерференција

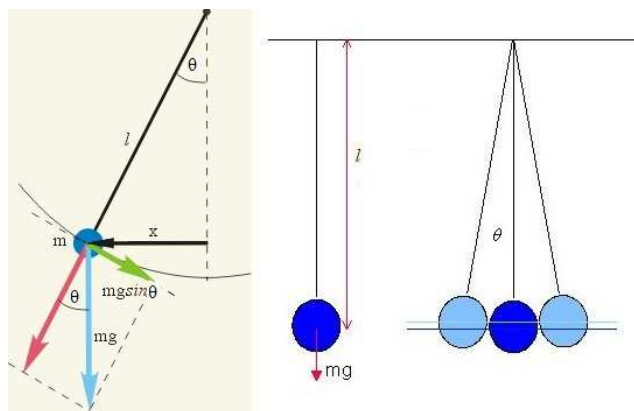
6.1.2 Осцилаторни модели

Веома специфична врста кретања се дешава када на тело делује сила увек усмерена ка равнотежном положају, где се успоставља осциловање или вибрирање око тог положаја. Примери такве врсте кретања у свакодневном животу су: љуљање на љуљашци, кретање клатна сата, вибрирање жица музичких инструмената, ... Осим ових примера, постоји низ примера система који се крећу периодично: молекули у телу чврстог агрегатног стања око чвора кристалне решетке, електромагнетни таласи (светлост, радио таласи), коло наизменичне струје (јачина струје и напон варирају периодично с временом). При овом простом хармонијском кретању положај тела јесте **синусна функција времена**, тј. једначина описаног кретања се може представити помоћу синусне функције.

Објашњења појмова које користимо у овом поглављу:

- Поље Земљине теже - гравитационо поље (простор) око Земље, где на сва тела делује привлачна сила коју називамо гравитационом.
- Други Њутнов закон гласи: „Сила која делује на тело једнака је производу масе и убрзања“. То значи да је интензитет гравитационог поља Земље бројно једнак убрзању које тело добија услед привлачне силе Земље. Ово убрзање зовемо убрзање Земљине теже и означавамо словом g .
- Општи облик диференцијалне једначине осцилаторног кретања тела масе m на које делује сила усмерена ка равнотежном положају је: $m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x$ (x - елонгација из равнотежног положаја).

Размотримо један механички систем који се креће на периодичан начин у пољу Земљине теже.



Слика 5.1.2.1: Математичко клатно

Математичко клатно се састоји од тела масе m (које сматрамо материјалном тачком) окаченог о танку и неистегљиву нит, дужине l , у пољу Земљине теже (Сл.5.1.2). Кретање овог тела, које се одвија у вертикалној равни, након извођења из равнотежног положаја, на даље се одвија под дејством силе гравитације mg и силе затезања F_z . Тангенцијална компонента силе Земљине теже $mg \sin \theta$, увек је усмерена ка равнотежном положају, $\theta = 0$, односно супротно од вектора помераја. Други Њутнов закон за кретање по тангенти гласи

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta,$$

где је s део лука који је прешло тело масе m , а знак $-$ показује да је тангенцијална сила усмерена ка равнотежном положају. Како је дужина кружног лука $s = l\theta$, та једначина постаје

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta.$$

Како смо претпоставили да је угао отклона мали, $\sin \theta$ се може апроксимирати са θ ($\sin \theta \approx \theta$), тако да једначина кретања математичког клатна добија облик

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta.$$

Како ова једначина има форму једначине која описује кретање линеарног хармонијског осцилатора, закључујемо да се, за мале углове отклона (амплитуде), кретање клатна, своди на линеарно хармонијско осциловање. Навели смо већ једначину хармонијског осциловања у (6.1.2). Опште решење θ , може се записати као збир линеарно независних партикуларних решења

$$\theta = c_1 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t + c_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

У складу са тим, решење последње диференцијалне једначине је

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \varphi), \text{ где је } \theta_{max} \text{ максимална угаона елонгација.}$$

Детаљније о осцилаторним моделима у прилогу [4].

6.2 Фуријеова трансформација (ФТ) сигнала у медицини и техници

Рачунари користе тригонометрију да утврде боје и нијансе слике на екрану. Процес којим се ово остварује има значајне користи у медицини. Машине за МРИ²⁹, током скенирања вашег тела, одашиљу магнетне импулсе и затим се обрадом у рачунару, претварањем у дигитални облик, приказују слике у боји на екрану. Медицински стручњаци користе резултате у циљу одређивања узрока и локација многих болести.

Поступак конверзије сигнала (магнетних импулса) током процеса магнетне резонанце у графички приказ Фуријеовом трансформацијом, веома је комплексан. У поглављу (5.3.1) описани су Фуријеови редови.

Фуријеова трансформација је генерализација Фуријеовог реда, која се може применити у обради сигнала³⁰. Ова трансформација се може извести из Фуријеовог реда, посматрајући произвољну функцију $\chi(t)$ као периодичан сигнал са периодом $T = \infty$ тј. $\chi(t) = \chi(t + T)$. У оваквој репрезентацији, угаона фреквенција основног хармоника $\omega_o = \frac{2\pi}{T}$ у Фуријеовом реду тежи инфинитезимално малој величини $d\omega$, тј. $\omega_o = \frac{2\pi}{T} \mapsto d\omega$, док дискретна угаона фреквенција $n\omega_o$, n -цео

²⁹ eng. Magnetic Resonance Imaging

³⁰ Сигнал садржи информацију (податак) који описује посматрану електромагнетну или магнетну појаву.

број, тежи континуалној фреквенцији ω , тј. $n\omega_o \mapsto \omega$. Тада експоненцијални облик Фуријеовог реда добија облик:

$$\chi(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(f) e^{-in\omega_o f} df \right] e^{in\omega_o t} \right\},$$

или пошто је $T = \frac{2\pi}{d\omega}$ и $n\omega_o \mapsto \omega$,

$$\chi(t) = \lim_{n\omega_o \rightarrow \omega} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \chi(f) e^{-in\omega_o f} df \right] \frac{d\omega}{2\pi} e^{in\omega_o t} \right\}.$$

Имајући у виду да бесконачна сума у граничном поступку конвергира ка одговарајућем одређеном интегралу, последњи израз се своди на

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \chi(f) e^{-i\omega f} \right] e^{i\omega t} d\omega.$$

Израз у средњој загради дефинише Фуријеову трансформацију континуалног сигнала³¹ $\chi(t)$, која представља функцију угаоне фреквенције ω , што се симболично може записати као:

$$X(\omega) = F \{ \chi(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{дефиниција}).$$

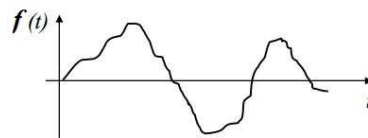
Функција $X(\omega)$ представља сигнал у фреквентном домену. Сигнал $\chi(t)$ може се реконструисати из његове Фуријеове трансформације у оригиналан, временски домен инверзном операцијом, која се назива **инверзна Фуријеова трансформација**

$$\chi(t) = F^{-1} \{ X(\omega) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Уобичајено се каже да сигнали $\chi(t)$ и $X(\omega)$ представљају Фуријеов трансформациони пар, што се симболички означава $\chi(t) \longleftrightarrow X(\omega)$. Више о Фуријеовој анализи у прилогу [10].

Надаље ћемо описати како се одвија процес трансформације сигнала из аналогног у дигитални облик и која је улога Фуријеове трансформације. Преузето из научно-популарног часописа [8].

Важно је направити разлику између аналогног и дигиталног сигнала. Аналогни сигнал представља запис неке физичке појаве у криволинијском облику. Звук се може представити као осцилирајућа крива. Различитим звуцима одговарају различити облици крива. На пример, звук који се преноси вибрирањем ваздуха, може се записати на видео траци у аналогном облику, померањем специјалне игле, која описује таласasti облик. Да ту криву прецртамо на неки папир, поново бисмо добили аналогни сигнал.



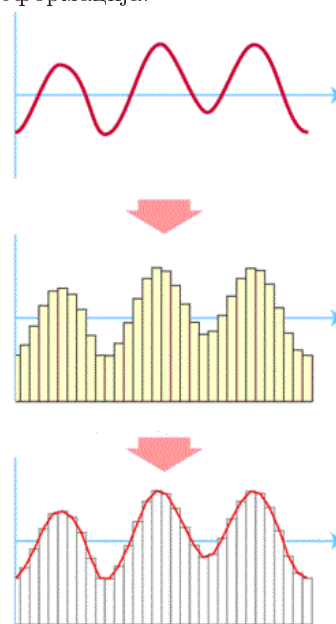
Слика 5.2.1: Неправилан облик

Дигитални сигнал увек представља низ бројева, без обзира да ли су то бројеви на папиру или у рачунару. Дигитални сигнал може постојати и на траци, ако је одговарајуће наелектришемо и намагнетишемо. Тамо где су позитивне вредности, писаћемо јединице, а тамо где су негативне нуле. Поменути криву могли бисмо претворити у дигитални сигнал тако што бисмо премеравали висину таласних брегова (амплитуде) у што краћим временским размацама и сваки пут бележили добијену бројевну вредност. Поставља се питање колико бисмо често морали да меримо

³¹Континуални сигнали су доступни и мерљиви у сваком временском тренутку, за разлику од дискретних сигнала који су дефинисани само у дискретним временским тренуцима.

висину криве, како бисмо најбоље описали сигнал низом бројева. Претпоставимо да је та крива нека мелодија коју бисмо волели да снимимо на рачунар или стерео уређај. Да бисмо могли да је слушамо на рачунару, посебан аналогно-дигитални конвертер, смештен у микрофону, претвара долазећи аналогни сигнал (звук) у дигитални облик (низови бројева). Ово подразумева узимање узорка висине напона звучних таласа. Једну секунду протеклог аналогног таласа, конвертер описује помоћу 44.000 бројева³². Када, обрнуто, музика из стерео уређаја путује према звучницима, ради се о електронској верзији звука, таласању напона. Помоћу магнета и електромагнета, који су у звучнику повезани мембраном која може да се покреће, поново се добија звук, који је таквог квалитета да га људско ухо неће разликовати од оригинала. Добијена крива која представља добијени звук је степенастог облика. Овакав поступак би захтевао велики простор за смештај података. Такви музички фајлови били би превелики да би се у разумном времену размењивали преко Интернета. Ове недостатке превазилази Фуријеова трансформација.

Како сигнал, често има произвољни таласни облик који није једноставно математички описати (Сл.5.2.1), ФТ разлаже криву, као низ синусних и косинусних функција. Ма како да је неправилног таласастог облика крива се веома прецизно апроксимира коначним бројем сабирака, што је графички приказано на слици 5.2.2. Бројевне вредности које би представљале криву би у овом случају били Фуријеови коефицијенти, где a_n , b_n имају улогу амплитуде, а јачине фреквенција би одређивале добијене вредности у аргументу поменутих тригонометријских функција. Приликом конверзије у дигитални сигнал, одређеном фреквенцијом узимају се узорци аналогног сигнала и изражавају у дигиталном облику. Конкретно, у случају магнетне резонанце, сигнали се одашиљу као последица магнетног поља које делује током скенирања. У процесу генерисања МРИ слике, Фуријеова трансформација кодира дискретан узорак аналогних МРИ сигнала из временског домена у фреквентни - издвајају се и групишу појединачне фреквенције и амплитуде сигнала по интензитетима.



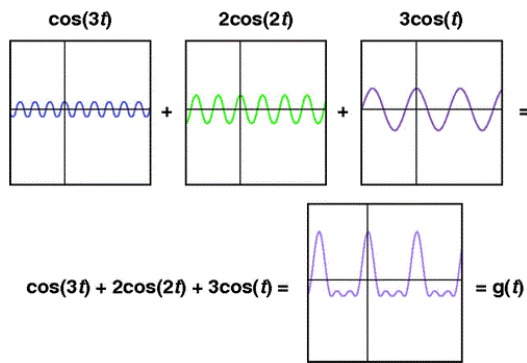
Слика 5.2.2: Апроксимација

Кодирани МРИ сигнали, складиште се у такозвани k -простор³³, где се представљају низом бројева у дигиталном запису, чиме се остварује дигитализација. Затим се такви дигитални сигнали посебним програмом шаљу на монитор, који поседује чип направљен да препозна вредности наших коефицијената и изврши инверзну Фуријеову трансформацију. Њима се придружују пиксели различитих осветљености и боја, како је свака боја низ бројева у бинарном запису. Дакле, може се рећи да је 2Д Инверзна Фуријеова трансформација k -простора МРИ слика коју видимо.

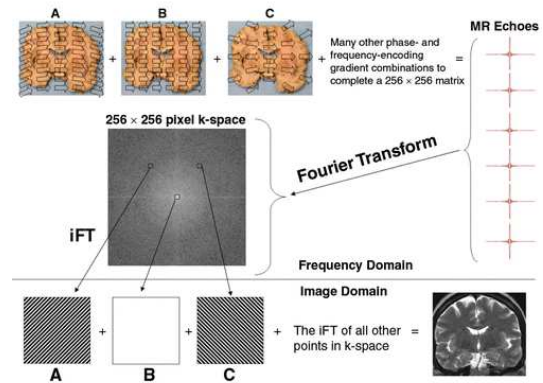
Интуитивно, инверзну Фуријеову трансформацију можемо да посматрамо као средство које омогућава прецизну реконструкцију оригиналног сигнала, на основу познатих фреквенција издвојених компонената (Сл.5.2.6).

³²У теорији акустике постоји теорема која говори о семпловању узорка аналогних сигнала највишим фреквенцијама (до 20000Hz - праг чујности људског уха), што се остварује премеравањем висина напона до 40000 пута у секунди. Како бисмо се осигурали да ћемо у обрнутом процесу конвертовања из дигиталног облика, добити најпрецизнији могући звук, могуће је у још краћим временским интервалима обрађивати посматрани опсег фреквенција. Тада би се учесталост мерења повећала до још 4000 пута.

³³Простор у меморији где су смештени кодирани интензитети фреквенција у дигиталном облику, који апроксимирају сложене сигнале.

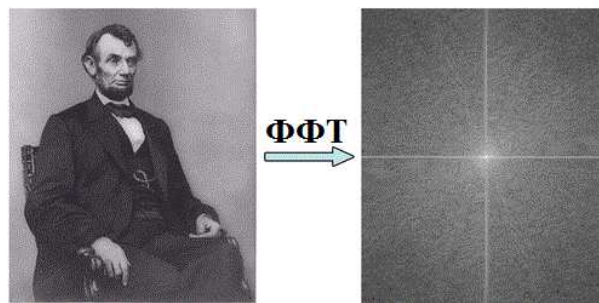


Слика 5.2.3: Разлагање сигнала



Слика 5.2.4: МРИ процес

Како је ФТ универзалан метод у обради сигнала, може се искористити и приликом **компресије слика** или **дигиталног аудио записа**. Тајна лежи у алгоритму који називамо брза ФТ³⁴ или ФФТ³⁵, који омогућава бржи рачун ФТ [12]. На овај начин уређаји, као што је *smartphone*, бежичним путем емитују видео материјал, а да им тај процес не исцрпи скоро сву енергију из батерија или да не потроше месечни проток Интернета за много краће време. Дакле, шта се дешава?



Слика 5.2.5: Компресија слике

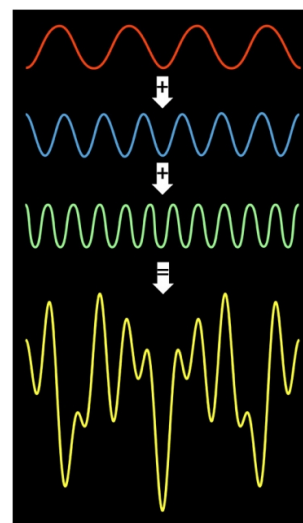
Рецимо да имамо дигитални сигнал, на пример звук произвољног музичког инструмента. Алгоритам постојећи сигнал са одређеним бројем сигнала изражава као суму тежинских фреквенција. Компресија дигиталног видео записа одвија се тако што ФТ препознаје тежину највиших фреквенција у сигналу. Испоставља се да многе фреквенције имају занемарљиви удео у коначном резултату, па их слободно можемо одбацити. Ово је један од разлога што се сложени сигнал може представити као сума коначног броја компонената. У Фуријеовом реду чланови су све мањи и мањи како се нижу у бесконачност. Реконструисани сигнал се најбоље апроксимира бесконачним бројем компонената, тачније крива ће имати облики облик. Како људско ухо у теорији, после одређене границе не прави разлику у квалитету, можемо се задржати на произвољно коначном броју.

³⁴ Аутори су професори Katabi и Piotr Indyk, обоје са MIT одсека, који се бави рачунарством и вештачком интелигенцијом. Метода је развијена шездесетих година 20. века.

³⁵ eng. Fast Fourier transformation

Узмимо сада један пример који ће нам приближити процес компресије слике. Замислимо блок од 8×8 пиксела (слику формира мрежа пиксела на екрану). Можемо га посматрати као сигнал од 64 података или као суму од 64 различите фреквенције. Међутим, емпиријска истраживања показују да, у просеку можемо занемарити 57 од тих 64 фреквенција. Са друге стране, губитак квалитета слике је минималан.

Како ФТ издваја фреквенцију највишег интензитета? Фреквенције се могу посматрати као ситна таласања, што значи да се могу разматрати као осцилације. Обрадом истог дела опсега фреквенција, али у различитим временским тренуцима, истраживачи могу установити која је фреквенција доминантна у одређеном циклусу осцилације. Што су краћи временски интервали у којима се врши обрада сигнала, то су забележене висине фреквенција верније. Детаљније у [18].



Слика 5.2.6: Реконструкција

6.3 Примена у хемији

С обзиром да се процеси у хемији могу одвијати у три димензије (хомогене реакције по целој запремини), није изненађујуће што хемичари користе тригонометријске функције, како би прецизно одредили, углове који се стварају када се атоми везују заједно да формирају молекуле, растојања између равни кристалне решетке, таласне дужине електромагнетних таласа.

Интеракција X - зрака³⁶ и наелектрисаних честица у атому кристалне решетке може се представити помоћу синусне функције, што условљава такозвани **Брагов закон**³⁷. Брагов закон изражава услове који морају бити испуњени [20], да би рефлектовани таласи X - зрака били међусобно у фази (конструктивна интерференција) (1). Такође не треба изоставити ни спектроскопију, као једну од најважнијих алатки приликом изучавања структуре атома и молекула.

6.3.1 Брагов закон

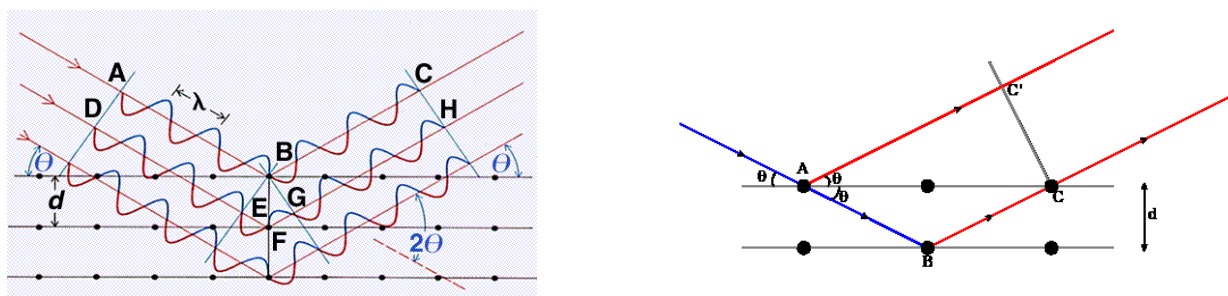
Ово је један од најзаступљенијих хемијских закона који укључује тригонометријске функције. Начин на који се X - зраци таласне дужине λ преламају са површине кристала у коме су кристалне равни на растојању d , описан је помоћу *Брагове једначине*. Утврђено је да се у овом случају одбијени зрак појављује под само одређеним угловима θ_n . Први одбијени зрак означен је целобројном вредношћу $n = 1$, следећи као други одбијени са $n = 2$, и тако сукцесивно. Једначина која регулише ово понашање гласи:

$$n\lambda = 2d \sin \theta_n.$$

Понашање X зрака представљено је дијаграмом на слици 5.3.1.

³⁶ X - зраци или рендгенски зраци, подручје су електромагнетног зрачења између ултраљубичастог и гама зрачења. Wilhelm Conrad Rontgen објављује 1895. откриће невидљивих зрака који изазивају флуоресценцију. Назвао их је X због њихове непознате природе. Касније се показало да је Никола Тесла већ уочио поменуто зраке.

³⁷ Sir William Lawrence Bragg (1890.-1971.), аустралијанац по рођењу, био је британски физичар и проналазач важног закона за одређивање структуре кристала, који је по њему и добио име. Најмлађи је добитник Нобелове награде за физику (1915.), коју је добио у сарадњи са оцем са својих непуних 25 година.



Слика 5.3.1: Преламање X - зрака

Брагов закон се може извести коришћењем једноставне геометрије и разматрањем растојања која пређу два паралелна X - зрака који се рефлектују од суседних равни.

Извођење Браговог закона:

Претпоставимо да имамо један упадни зрак, под углом θ на хоризонталним кристалним равнима, које су на међусобном одстојању d . Тачке A и C су у једној равни, а тачка B у другој испод, што се може видети са графичког приказа (Сл.5.3.1). X - зрак који удари у доњу раван мора путовати екстра растојање AB и BC . Разлика између путања зрака који се одбија дуж AC' и зрака који се преноси дуж AB , затим одбија дуж BC је :

$$(AB + BC) - (AC')$$
(10)

Два одвојена зрака стићи ће у тачку са истом фазом и интерферираће конструктивно, ако и само ако, је разлика њихових путања једнака целобројном броју таласних дужина:

$$(AB + BC) - (AC') = n\lambda.$$
(11)

Напомена: Како су зраци BC и AC' одбијени са кристалне површи паралелни, може се јавити недоумица о њиховој интерференцији. Али, како је растојање d између паралелних кристалних равни довољно мало, зраци ће се сусрести у једном тренутку. Неопходно је да буду испуњени услови о целобројном умношкуну таласних дужина, у супротном ће деструктивна интерференција редуковати рефлектовани интензитет на нулу.

У наставку, такође је

$$AB = BC = \frac{d}{\sin \theta} \quad \text{и} \quad AC' = \frac{2d}{\tan \theta}.$$
(12)

Ако посматрамо и $\triangle ACC'$, на основу претходног важи да је

$$AC' = AC \cos \theta = \frac{2d}{\tan \theta} \cos \theta = \left(\frac{2d}{\sin \theta} \cos \theta \right) \cos \theta = \frac{2d}{\sin \theta} \cos^2 \theta$$
(13)

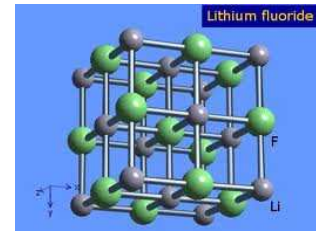
Заменујући све у једначину (11), добијамо

$$n\lambda = \frac{2d}{\sin \theta} (1 - \cos^2 \theta) = \frac{2d}{\sin \theta} \sin^2 \theta$$

Скраћивањем синуса долазимо до наше једнакости!

Поступак доступан у [11].

Пример 7. У кристалу литијум-флуорида скуп кристалних решетки је на удаљености од 201 pm. Први одбијени зрак ($n = 1$) се појављује под углом од $34,68^\circ$. Одредити таласне дужине λ X-зрака.



Напомена: Пикометар (симбол: pm) је јединица за дужину: $1\text{pm} = 10^{-12}\text{m}$.

Решење:

Израчунаћемо λ на основу Брагове једначине:

$$\lambda = \frac{2d}{n} \sin \theta = \frac{2 \cdot 201}{1} \sin 34,68^\circ = 402 \cdot 0,569 = 229\text{pm}.$$

Такође можемо пронаћи угао θ под којим се зраци преламају. Узмимо други пример, кристал натријум хлорида, где је $d = 2,82 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Ако је $\lambda = 7,071 \cdot 10^{-11} \text{ m}$, применом претходне једначине добијамо

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{2d} = \frac{2 \cdot 7,071 \cdot 10^{-11}}{2 \cdot 2,82 \cdot 10^{-10}} = 0,251, \quad \text{за други одбијени зрак } (n = 2).$$

Као што се и очекивало добили смо да је вредност синусне функције мања од 1. Сада ћемо користећи инверзну функцију arcsin наћи тражени резултат:

$$\sin \theta = 0,251 \Rightarrow \theta = \arcsin 0,251 = 14,5^\circ \quad \text{или} \quad 14,5^\circ = 14,5 \cdot \frac{\pi}{180} \text{rad} = 0,254\text{rad}.$$

Добијамо да је угао θ под којим се зраци одбијају приликом преламања на кристалу једнак $0,254\text{rad}$.

6.3.2 Спектроскопија

Изненађујуће је откриће да синусна функција има важну улогу у једном од начина испитивања зрачења молекула, које настаје као резултат промене енергије атома или молекула, услед њихових унутрашњих кретања проузрокованих спољашњим извором зрачења. Разлог ове примене је заправо због периодичне природе синусне функције, што се поистовећује са понашањем електрона у молекулу.

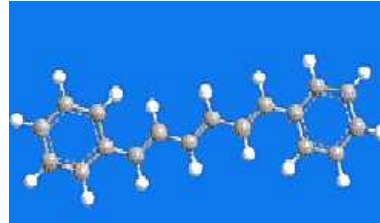
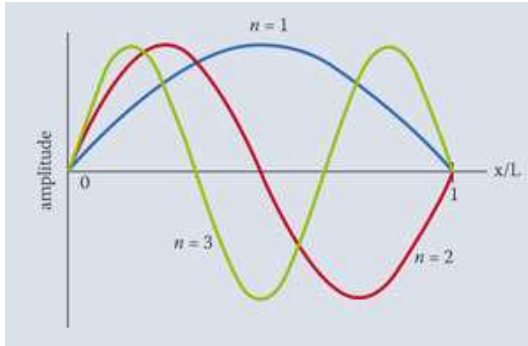
Спектроскопија је једна од главних експерименталних метода која проучава интеракцију електромагнетног зрачења и материје. Тако се могу добити информације о грађи, температури и саставу атома и молекула. Са врстама ове аналитичке методе можете се боље упознати у [19].

Спектралном анализом се може утврдити да молекула хексатрина има специфичан распоред спектралних линија³⁸. Претпоставићемо да су електрони у молекулу хексатрина принуђени да се крећу у једној кутији димензија $7,3 \cdot 10^{-10}$. Развијањем теорије може се утврдити да ће шест издвојених електрона заузимати само неколико дискретних енергетских нивоа. Понашање побуђених електрона у било ком молекулу, па и нашем молекулу хексатрина, описано је једначином облика:

$$\psi = N \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right),$$

³⁸Спектар представља распоред интензитета зрачења наелектрисаних честица по енергетским нивоима, молекула или атома неке материје.

где је ψ елонгација (6.1.1), N константа, $L = 7.3 \cdot 10^{-10}$, n редни број енергетског нивоа и x позиција електрона. Прилично је једноставно представити ове функције графички, узимајући вредности количника $\frac{x}{L}$ од 0 до 1. Графици функција на слици 5.3.2.1 илустрју кретање електрона на прва три енергетска нивоа, односно њихове путање.



Слика 5.3.2.1: Понашање електрона у молекулу хексатрина

Општи принцип спектроскопије.

Као резултат спектроскопског истраживања добија се *спектар*. За свако снимање спектра неке материје, потребно је имати: извор зрачења, узорак, оптички уређај и детектор. Спектрална анализа проучава ефекте проузроковане променом електронске структуре молекула, услед побуђивања електрона дејством спољашњег зрачења. Електромагнетно зрачење се из извора усмерава на узорак, који га може апсорбовати, емитовати или рефлектовати. Уколико узорак емитује зрачење, извор зрачења је сам узорак. Зрачење са узорка се води до оптичког уређаја, који пропушта, једну или више таласних дужина ка детектору. Детектор примљено зрачење претвара у *сигнал*, који се може описати као *спектар*. Овај спектар је у временском домену, па се применом математичког поступка, **Фуријеове трансформације**, тај спектар претвара у спектар фреквенцијског домена (спектар фреквенција електромагнетног поља). О овој теми смо говорили у претходном поглављу.

7 Задаци из тригонометрије на такмичењима

Колико задаци из тригонометрије могу бити истовремено необични, занимљиви и захтевни илустрју следећи примери.

1. Израчунати: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n})$.
2. Нека је P_1 површина троугла који образују три тангенте круга k , а P површина троугла ABC , где су A , B и C тачке додира тих тангенти. Израчунати граничну вредност количника $\frac{P_1}{P}$ кад тачка C тежи тачки A , а B стално остаје између A и C .
3. Нека су комплексни бројеви z_1 , z_2 , z_3 темена позитивно оријентисаног троугла који садржи координатни почетак. Доказати да је површина овог троугла једнака $\frac{1}{2} \text{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_1)$.
4. Доказати да је $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

5. Дат је правоугли троугао ABC , чија је хипотенуза $BC = a$ подељена на n једнаких делова (n је непаран број). Нека је α угао под којим се из тачке A види онај од једнаких одсецака који садржи средину хипотенузе. Доказати да је $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a}$, где је h висина која одговара хипотенузи BC .
6. У паралелограму $ABCD$ троугао ABD је оштроугли. Нека је $AB = a$, $AD = 1$, $\sphericalangle BAD = \alpha$. Доказати да кругови k_A, k_B, k_C и k_D полупречника 1, са центрима A, B, C и D покривају паралелограм ако и само ако важи $a \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha$.
7. Доказати да постоји тачно један троугао чије су странице узастопни цели бројеви, а један од углова два пута већи од једног од друга два угла.

Решења:

1. Важи да је:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} &= 2 \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4} \\ &\dots \\ \sin \frac{\alpha}{2^{n-1}} &= 2 \sin \frac{\alpha}{2^n} \cos \frac{\alpha}{2^n} \end{aligned}$$

Множењем ових неједнакости добијамо:

$$\sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \dots \sin \frac{\alpha}{2^{n-1}} = 2^n \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{4} \dots \sin \frac{\alpha}{2^n} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n},$$

а после скраћивања :

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}.$$

Тражи се следећи лимес:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}.$$

Приметимо да је то карактеристични лимес облика $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. У нашем конкретном случају $\frac{\alpha}{2^n} \rightarrow 0$. Написаћемо другачије израз у оквиру лимеса, тако што ћемо у именилац додати једно α и истовремено ћемо помножити једним α . Како је $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ константа, може да пређе испред лимеса. Тако да једноставно добијамо коначно решење:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n} \cdot \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\alpha}{2^n}}{\sin \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

2. Нека је $A_1B_1C_1$ троугао одређен тангентама у тачкама A, B и C и нека су 2α и 2β централни углови над тетивама AB и BC (Сл.б.1), при чему је $\alpha \neq \beta$ и тачке O, B_1, B неколинеарне. Такође $P = P_{\triangle ABC}$, $P_1 = P_{\triangle A_1B_1C_1}$.

Искористићемо једнакости парова тангентних дужи, као и одговарајуће подударне троуглове који произилазе из те чињенице. Дакле, једнаке су следеће дужи: $B_1A = B_1C$, $AC_1 = C_1B$, $BA_1 = A_1C$. На основу става подударности CYC подударни су троуглови: $\triangle AB_1O \cong \triangle B_1OC \Rightarrow \sphericalangle B_1OA = \sphericalangle B_1OC = \alpha + \beta$. Слично је: $\sphericalangle C_1OA = \alpha$, $\sphericalangle COA_1 = \beta$. Тада је из правоуглих троуглова, после примене адиционе формуле за синус угла:

$$B_1C_1 = B_1A - C_1A = r \operatorname{tg}(\alpha + \beta) - r \operatorname{tg} \alpha = r(\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha) = r \left(\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) =$$

$$r \frac{\sin \beta}{\cos(\alpha + \beta) \cos \alpha}.$$

Аналогно је и $B_1A_1 = r \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha + \beta) \cos \beta}$.

У једнакокраном $\triangle AB_1C$ (тангентне дужи B_1A , B_1C) важи да је $\sphericalangle B_1AC = \alpha + \beta$, пошто је то угао између тангенте у тачки A и тетиве AC . Како је збир унутрашњих углова троугла π , закључујемо да је $\sphericalangle C_1B_1A_1 = \pi - 2(\alpha + \beta)$. Површина $\triangle A_1B_1C_1(\gamma)$ је

$$P_1 = \frac{1}{2} B_1C_1 \cdot B_1A_1 \sin 2(\alpha + \beta) = r^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}(\alpha + \beta).$$

Како је $AB = 2r \sin \alpha$, $BC = 2r \sin \beta$ и $\sphericalangle ABC = \pi - (\alpha + \beta)$ (као периферијски над тетивом AC), биће

$$P = \frac{1}{2} BC \cdot BA \sin(\alpha + \beta) = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin(\alpha + \beta)$$

Након сређивања количник $\frac{P_1}{P}$ постаје:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{1}{2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta)}.$$

Према томе тражена гранична вредност је

$$\frac{P_1}{P} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{када } \alpha \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \beta \rightarrow 0.$$

Напомена: Важи следећа теорема - Угао између тетиве и тангенте у тачки круга једнак је периферном углу над том тетивом.

Овде ћемо кратко приказати како смо дошли до израза за површину P_1 .

$$P_1 = \frac{1}{2} B_1C_1 \cdot B_1A_1 \sin 2(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} r \frac{\sin \beta}{\cos(\alpha + \beta) \cos \alpha} r \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha + \beta) \cos \beta} 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta)$$

У претходном изразу по формули је $\sin 2(\alpha + \beta) = 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta)$.

3. Нека је $z_i = r_i(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. По формули за површину троугла (Сл.6.2)

$$P_{Oz_1z_2} = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Значи потребно је повезати непознате $r_1, r_2, \varphi_2, \varphi_1$ са датим променљивама z_1, z_2, z_3 . Тригонометријски облици комплексних тачака z_1, z_2 су:

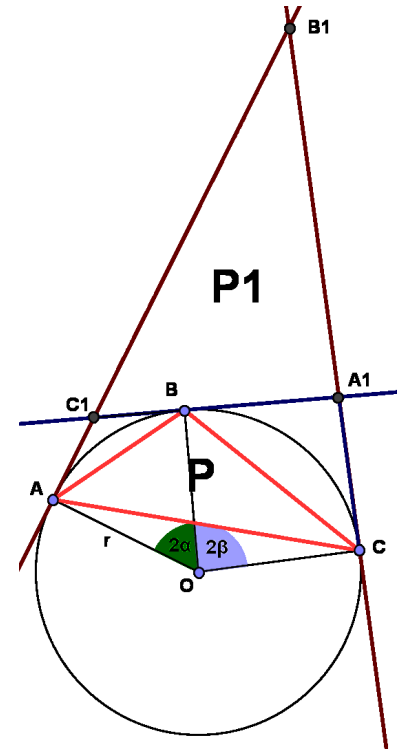
$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Одговарајући коњуговани облик комплексног броја z_1 : $\bar{z}_1 = r_1(\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1)$. Тада је по правилима производа два комплексна броја у тригонометријском облику

$$\bar{z}_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i \sin(\varphi_2 - \varphi_1)).$$

Имагинарни део израчунатог комплексног производа:

$$\operatorname{Im} \bar{z}_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

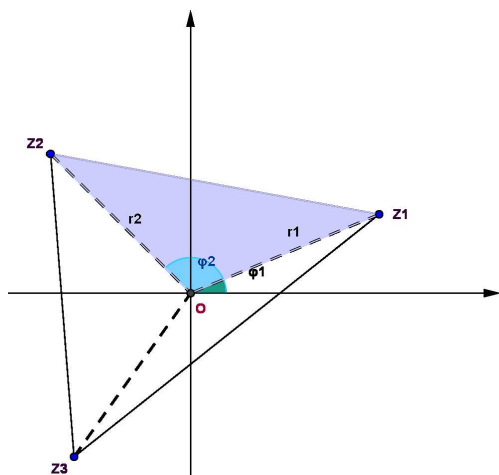


Слика 6.1: Однос троуглова

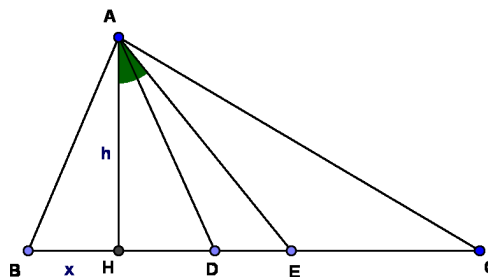
Дакле, можемо закључити да је $P_{Oz_1z_2} = \frac{1}{2} \text{Im } \overline{z_1} \cdot z_2$.

На исти начин се доказује да је $P_{Oz_2z_3} = \frac{1}{2} \text{Im } \overline{z_2} \cdot z_3$, $P_{Oz_3z_1} = \frac{1}{2} \text{Im } \overline{z_3} \cdot z_1$. Сабирањем ових једнакости добија се површина целог троугла

$$P_{z_1z_2z_3} = \frac{1}{2} \text{Im } (\overline{z_1} \cdot z_2 + \overline{z_2} \cdot z_3 + \overline{z_3} \cdot z_1).$$



Слика 6.2: Троугао у комплексној равни



Слика 6.3: n делова

4. Дати тригонометријски израз треба помножити на одговарајући начин, тако да се могу применити формуле трансформација производа у збир. Дакле, урадићемо следеће:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} &= \frac{2 \cos \frac{\pi}{14} \left(\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \right)}{2 \cos \frac{\pi}{14}} = \\ &= \frac{2 \cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{\pi}{7} - 2 \cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{3\pi}{7}}{2 \cos \frac{\pi}{14}} = \\ &= \frac{\cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{14} - \cos \frac{5\pi}{14} - \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14}}{2 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{\cos \frac{\pi}{14}}{2 \cos \frac{\pi}{14}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. Нека је H подножје висине из тачке A на основу BC , DE одсечак који садржи средину хипотенузе. Како је DE један од n једнаких одсецака, биће $DE = \frac{a}{n}$. Нека је $BH = x$ (Сл.6.3). Како су троуглови $\triangle ABH$ и $\triangle ACH$ правоугли, важи да је

$$x(a-x) = h^2. \quad (14)$$

Означимо углове: $\angle DAH = \beta$, $\angle DAE = \alpha$. Тада је $\angle EAH = \alpha + \beta$. Из правоуглог $\triangle AHE$ је $\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{HE}{AH}$. Међутим

$$HE = HD + DE, \quad HD = BD - BH, \quad \text{и} \quad BD = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \frac{a}{n} = \frac{(n-1)a}{2n},$$

како је половина основице на средини дужи DE . На основу претходних једнакости

$$HE = \frac{a}{2} - x - \frac{a}{2n} + \frac{a}{n} = \frac{(n+1)a}{2n} - x, \quad HD = HE - DE = \frac{(n+1)a}{2n} - x - \frac{a}{n} = \frac{(n-1)a}{2n} - x.$$

Дакле, из правоуглих троуглова $\triangle AHE$ и $\triangle AHD$, имамо релације

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{(n+1)a}{2n} - x}{h}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{HD}{AH} = \frac{\frac{(n-1)a}{2n} - x}{h}.$$

Одавде можемо израчунати $\operatorname{tg} \alpha$, како нам је позната адicione формула за тангенс збира два угла:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \beta} = \\ &= \frac{\frac{\frac{(n+1)a}{2n} - x - \left(\frac{(n-1)a}{2n} - x\right)}{h}}{1 + \frac{\left(\frac{(n+1)a}{2n} - x\right)\left(\frac{(n-1)a}{2n} - x\right)}{h^2}} = \frac{\frac{ah}{n}}{h^2 + \frac{n^2-1}{4n^2}a^2 - x(a-x)}. \end{aligned}$$

На основу једначине (14), сређивањем израза добијамо тражени облик тангенса угла:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a}.$$

6. Центри S и T кругова описаних око оштроуглих троуглова ABD и BCD налазе се у тим троугловима. Ако су M, N, P, Q редом средишта страница AB, BC, CD и DA паралелограма $ABCD$ (Сл.б.4), онда је за произвољну тачку x из паралелограма најближе теме: теме A , ако $x \in AMSQ$; теме B , ако $x \in BNTSM$; теме C , ако $x \in CPTN$; и теме D , ако $x \in DQSTP$.

Дакле, кругови K_A, K_B, K_C, K_D покривају паралелограм ако и само ако K_A покрива $AMSQ$, K_B покрива $BNTSM$ итд., а то ће бити ако и само ако је $R \leq 1$, где је R полупречник круга описаног око $\triangle ABD$, односно $\triangle BCD$. Пошто је $AD = 1$, $AB = a$, $\angle BAD = \alpha$, применом косинусне теореме (6) на $\triangle ABD$, добијамо $BD = \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \alpha}$. На основу синусне теореме добијамо:

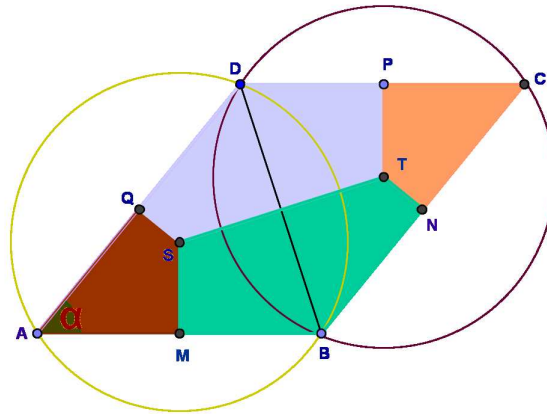
$$R = \frac{BD}{2 \sin \alpha} = \frac{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}.$$

Неједначина

$$\frac{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \alpha}}{2 \sin \alpha} \leq 1,$$

после квадрирања постаје $a^2 - 2a \cos \alpha + 1 - 4 \sin^2 \alpha \leq 0$ и има решења у интервалу $\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha \leq a \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha$. Међутим лева страна је увек тачна (јер је $\cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha < \alpha$, а $a = AB > BD \cos \alpha = \cos \alpha$ важи, како је $\triangle ABD$ оштроугли). Да је $\triangle ABD$ правоугли, важила би једнакост $AB = BD \cos \alpha$.

Дакле, четири круга покривају паралелограм ако и само ако је $R \leq 1$, а то је испуњено ако и само ако је $a \leq \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha$.



Слика 6.4: Паралелограм и кругови

7. Нека су странице троугла $a = n - 1$, $b = n$, $c = n + 1$ узастопни цели бројеви. Како не постоји троугао чије су дужине страница 1, 2, 3, мора да важи услов ($n \geq 3$). Пошто је $\alpha < \beta < \gamma$, разматраћемо три могућности: $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 2\alpha$ и $\gamma = 2\beta$.

1° Ако је $\beta = 2\alpha$, онда је $\gamma = \pi - 3\alpha$, па према синусној теореми(6) важе следеће једнакости:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{n}{n-1}, \quad \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{n+1}{n-1}$$

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\pi - 3\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}.$$

Познато нам је такође од раније да се наспрам већег угла налази већа страница (тачно је и обратно). У конкретном случају наспрам највећег угла γ је најдужа страница $n + 1$. Адитионом формулом (2) за збир два угла $3\alpha = \alpha + 2\alpha$ долазимо до једнакости $\sin 3\alpha = \sin \alpha(4\cos^2 \alpha - 1) = 4\sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha$. Даљим трансформацијама (уз помоћ формуле за синус двоструког угла) добијамо

$$2 \sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{2 \sin 2\alpha \cos \alpha \sin \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha = \frac{\sin^2 2\alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha.$$

. Тако се друга једнакост своди на

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \left(\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}\right)^2 - 1 = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 - 1.$$

Једначина $\frac{n+1}{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 - 1$ има решења $n = 0$ и $n = 2$.

2° Ако је $\gamma = 2\alpha$, онда је $\beta = \pi - 3\alpha$ и важе једнакости

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{n+1}{n-1}, \quad \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{n}{n-1}.$$

Слично као у 1° добијамо израз по n : $\frac{n}{n-1} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 - 1$, чија су решења $n = 0$ и $n = 5$.

3° Ако је $\gamma = 2\beta$, онда из одговарајућих једнакости

$$\frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} = \frac{n+1}{n}, \quad \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} = \frac{n-1}{n},$$

добијамо као у претходном случају једначину $\frac{n-1}{n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 - 1$, која нема целобројних решења.

Из 1° – 3° закључујемо да је једини троугао који може да задовољава услове задатка онај са дужинама страницама 4, 5, 6.

8 Закључак

Упоредо са развојем науке и технологије, тригонометрија све више добија на значају у савременом начину живота. На претходним страницама тригонометрија је приказана свуда око нас, са намером да увери читаоце да је она и у компјутерима, мобилним телефонима, чак и код лекара у ординацији, да није само обичан скуп формула. Млади људи који скидају музику са Интернета вероватно никада нису чули за Жозефа Фуријеа. Ипак, захваљујући његовом пионирском раду још из 19. века, данас не само да слушамо музику, већ обрађујемо бујице података при дигиталном медицинском снимању, на WI - FI рутерима, 4G мобилним мрежама. . .

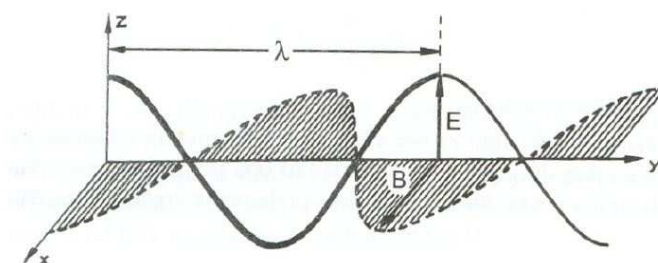
Кроз овај рад можемо видети како нам ова математичка грана помаже у премеравању и одређивању различитих величина, које фигуришу кроз многе аспекте у природи и техници. Сама структура тригонометрије лежи у основи дигитализације, која је незаменљива у процесима компјутерске графике и многим медицинским техникама. Рачунар очигледно не може да чује и разуме музичке тонове, што изискује да се звук представи као серија таласа у тригонометријском режиму, специјалним дигиталним записом. Компјутерска обрада је само једна у низу техника која примењује концепт тригонометрије. Процеси који укључују преламање X-зрака, структуру молекула и количину ослобођеног електромагнетног зрачења нераскидиво су повезане синусним и косинусним функцијама, што је приказано у претходним поглављима. Такође је утврђено и да је свако хармонијско осциловање или кретање синусоидно, што нам указује на постојање многих система у природи који интерагују на описани начин.

Ако погледамо начин на који су дефинисане тригонометријске функције, можемо закључити да је доста компликованији од стандардног, који се примењује у школама. Ученици се на часу први пут упознају са овим необичним математичким записима преко правоуглог троугла, што и сматрам да је приближније њиховом узрасту. Једино може доћи до конфузије када те дефинисане функције треба повезати са кругом. Са друге стране Е-пресликавање директно и веома концизно уводи функције као координате тачке пресликане на круг. На овом месту се може јавити питање дужине лука додељеног некој вредности са реалне осе. Треба приметити да ту постоји мала недоследност, пошто не можемо одредити прецизну меру лука, због трансцендентности броја π .

Како је цео рад написан са тежњом приближавања тригонометрије широј публици, имала сам прилике да одржим један експериментални час мултимедијалног карактера одељењу другог разреда у 14. гимназији. Приказана им је презентација која на сликовит начин илуструје решавање неких занимљивих проблема у природи употребом тригонометрије. Час је одржан са циљем да се код ученика пробуди интересовање и да се наведено градиво представи у другачијем светлу, када учење одступа од традиционалног начина рада. Свакако да се постиже веће ангажовање на часу и марљивост приликом решавања задатака, где преовлађују основне тригонометријске функције и имагинарни систем троуглова. Такође један од циљева је да се настава обогати приступачнијим садржајима, који би можда створили већу симпатију према тригонометрији. Резултати су испунили очекивања. Анкета о утисцима са часа и примени математике у реалном животу, спроведена након презентације, довела нас је до закључка да разумевањем математичких проблема постајемо способнији и прилагођенији у комплексним животним ситуацијама. Несумњиво је да математика доприноси формирању позитивног приступа у животним околностима које нас окружују. Уопштено гледано, све ово нас наводи на дубокоумнији закључак који наговештава, да циљ наставе математике није да се примењује, већ да подстакне развијање логичког мишљења, као и индуктивног, дедуктивног и асоцијативног закључивања.

Литература

- [1] Др Дугошија Ђ., Др Милин Л., ИвановићЖ., Тригонометрија, Научна књига, Београд, 1989.
- [2] Klaf A.A., Trigonometry refresher for technical men, Dower publications, New York, 1946.
- [3] Професор Др Зоран Каделбург - прилог о инверзним функцијама
<http://elib.mi.sanu.ac.rs>, Математички факултет, Београд
- [4] Таласи и осцилације - пдф материјали <http://tesla.pmf.ni.ac.rs>, Математички факултет, Ниш
- [5] Интерференција таласа <http://www.grf.rs/mm/files/learnmat/>, Грађевински факултет, Београд
- [6] Геогebra - интерактивни материјали <http://www.geogebra.org>
- [7] Фуријеов тригонометријски ред <http://www.tehnikum.edu.rs/predmeti/0003/Predavanje08.pdf>, Висока инжењерска школа струкованих студија, Београд
- [8] Чланци научних часописа о медицинској дијагностици и радиологији, доступни на <http://www.ajronline.org/>
- [9] Историја тригонометрије <http://www.nrich.maths.org>, University of Cambridge
- [10] Фуријеова анализа <http://automatika.etf.bg.ac.rs>, Електротехнички факултет, Београд
- [11] Брагов закон, Фуријеов ред <http://en.wikipedia.org/wiki/>
- [12] Научни портал - Фуријеова трансформација <http://nauka.rs/brza-furijeova-transformacija-je-postala-jos-brza>
- [13] Encyclopedia Britannica - Modern trigonometry <http://www.britannica.com>
- [14] Индијска математика http://en.wikipedia.org/wiki/Indian_mathematics
- [15] Др Лажетић Н., Математика II/2, Научна књига, Београд, 1994.
- [16] Др Каделбург З., Др Аднађевић Д., Математичка анализа I, Математички факултет, Београд, 2008.
- [17] Синусна и косинусна теорема са применом <http://www.scribd.com/doc/>
- [18] Концепт и терминологија сигнала <http://tnt.etf.rs/>
- [19] Спектроскопија <http://hr.wikipedia.org/wiki/>
- [20] Дифракција X - зрака на кристалима www.pmf.unsa.ba/



Слика 6.2: Електромагнетни талас