Математички факултет
Универзитет у Београду

Зорица Лукић

Приступ решавању комбинаторних задатака у школи применом основних принципа енумеративне комбинаторике

Мастер рад

Ментор: проф. др Зоран Петровић

Београд,
2013.

Симболи

$\lvert X \rvert$	број елемената скупа X
$[n]$	скуп $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$
$\left(\begin{array}{c} S \\ k \end{array} \right)$	сви k-члани подскупови скупа S
$\mathcal{P}(\mathcal{S})$	партитивни скуп од S
$\emptyset$	празан скуп
$\mathbb{N}$	скуп природних бројева
$n!$	математичка функција којом се израчунава производ природних бројева од 1 до неког природног броја n

Садржај

1 УВОД

1.1 Појам комбинаторике

Комбинаторика је грана математике чије прве идеје потичу још из времена настанка математике као науке, из времена Старих Грка. Док је комбинаторика као математичка дисциплина утемељена 1666. године, са Лајбницовим[1] радом „Dissertatio de arte combinatoria“.

Реч *комбинаторика* долази од латинске речи combinare што значи слагати. Комбинаторика је јако повезана са практичним потребама савременог живота. Примењује се и у теорији вероватноће, статистици, економији, физици, хемији, биологији, психологији, и многим другим наукама. Примена комбинаторике се среће и у радовима Тартаље[2], Паскала[3], Ојлера[4]...
У средњем веку, један задатак из комбинаторике је имао и лековита својства. Сматрало се да „Ко прочита на све могуће начине реч $ABRACADABRA$“, у доњој шеми идући навише и удесно, „Сигурно мора да оздрави од тродневне грознице“.
Средњовековни рецепт против грознице:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A & B & R & A & C & A & D & A & B & R & A \\
 & A & B & R & A & C & A & D & A & B & R \\
 & & A & B & R & A & C & A & D & A & B \\
 & & & A & B & R & A & C & A & D & A \\
 & & & & A & B & R & A & C & A & D \\
 & & & & & A & B & R & A & C & A \\
 & & & & & & A & B & R & A & C \\
 & & & & & & & A & B & R & A \\
 & & & & & & & & A & B & R \\
 & & & & & & & & & A & B \\
 & & & & & & & & & & A
\end{array}$$

Комбинаторика је грана математике која се налази у многим другим областима математике, и због тога ју је тешко дефинисати. Мада, постоји једна кратка и доста тачна дефиниција комбинаторике

„Комбинаторика проучава распоређивања елемената у скуповима.“

При решавању комбинаторних задатака први од њих је да се испита да ли постоји, или не постоји, дати распоред (*проблем егзистенције*), док је

[1] Lajbnic Gotfrid Vilhelm (Gottfreid Wilhelm Leibniz)(1646-1716), немачки филозоф и математичар

[2] Nikolo Fontana Tartelja (Niccolo Fontana Tartaglia)(1499-1557), математичар, инжињер и истраживач из Републике Венеције, која данас припада Италији

[3] Blez Paskal (Blaise Pascal)(19.06.1623.-19.08.1662.), француски математичар, физичар, писац и филозоф

[4] Leonard Paul Ojler (Leonhard Paul Euler)(1707-1783), швајцарски математичар и физичар

други задатак наћи број неких распореда према датим особинама (*проблем пребројавања*). А ево и неких примера који описују наведене проблеме:

Пример 1.1. *Са шаховске табле исечено је по једно поље из два супротна угла. Имамо* 31 *домину, од којих свака може да прекрије тачно два поља шаховске табле. Да ли са тих* 31 *домину можемо да прекријемо остатак шаховске табле?*

Решење. Како се не зна да ли постоји, или не, неко овакво прекривање, можемо да закључимо да је у питању *проблем постојања.* Из услова задатка, свака домина прекрива тачно два поља, и то једно црно и једно бело поље. Када из два супротна угла шаховске табле исечемо по једно поље (а она су исте боје, или црна или бела), и извршимо прекривање преосталих поља, остају нам два бела или два црна поља. Како ни један део домине не сме прекривати површину ван шаховске табле, закључујемо да овакво прекривање није могуће. $\diamondsuit$

Пример 1.2. *Дата нам је шаховска табла и* 32 *домине, од којих свака домина прекрива тачно два поља шаховске табле. На колико начина можемо прекрити шаховску таблу датим доминама?*

Решење. Како је у поставци задатка постављено питање „На колико начина можемо прекрити шаховску таблу датим доминама?“, закључујемо да такво прекривање постоји и да је у питању *проблем пребројавања.* $\diamondsuit$

Причу о пребројавању, као и начинима пребројавања ћемо наставити у следећим поглављима.

2 ПРИНЦИПИ ПРЕБРОЈАВАЊА

2.1 Принцип суме

Принцип суме је веома једноставан и коришћен је при пребројавању још од прадавних времена.
Покушаћемо да га објаснимо следећим примером.

Пример 2.1. *Бацају се две коцке истовремено. На колико начина се може добити број* 7 *или број* 12*?*

Решење. Број 7 можемо добити на један од следећих начина:

$$(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1).$$

Први број у загради означава број на првој коцки, а други број означава број на другој коцки.
Док број 12 можемо добити само у једном бацању, и то $(6, 6)$ када при бацању добијемо број 6 на обе коцке. Укупан број тражених начина добијамо сабирањем броја начина на које можемо добити број 7 (има их 6) и броја начина на које можемо добити број 12 (има само 1 начин), тј. $6 + 1 = 7$. $\Diamond$

Формулисаћемо *принцип суме* прецизније следећом теоремом.

Теорема 1. (Принцип суме). *Нека су $D_1, D_2, \ldots, D_n$ коначни скупови који су у паровима дисјунктни, тј. за све $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ важи $D_i \cap D_j = \emptyset$. Тада је:*

$$|D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n| = |D_1| + |D_2| + \cdots + |D_n|. \tag{1}$$

Пример 2.2. *Студент може да изабере испитно питање из једне од три дисјунктне групе. Ове групе садрже* 17, 23, *и* 19 *питања, редом. Колико има различитих питања која студент може да изабере?*

Решење. Нека су скупови прве, друге и треће групе питања означени (редом) са A, B и C. Из текста задатка видимо да су ти скупови и дисјунктни. Студент бира питање из скупа $A \cup B \cup C$, који по *принципу суме* има

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| = 17 + 23 + 19 = 59$$

различитих питања. $\Diamond$

Пример 2.3. *На неком такмичењу из математике било је* 5 *задатака различите тежине, па никоја два нису носила исти број бодова, али је сваки носио број бодова који је природан број. Ако се за два урађена најлакша задатка добијало* 10 *бодова, а за два урађена најтежа задатка* 18 *бодова, колико бодова се добијало за свих* 5 *урађених задатака?(Окружно такмичење из математике ученика првог разреда средњих школа у Србији,* 2012*, задатак* 5*)*

Решење. Ако се за два урађена најлакша задатка добијало 10 бодова, а никоја два нису носила исти број бодова то ће и тежи од та два задатка да носи највише 6 бодова (уколико би тежи задатак носио више од 6 бодова у наредна три задатка би се појавила два која би носила исти број бодова). Ако се за два урађена најтежа задатка добијало 18 бодова, лакши од та два задатка ће носити највише 8 бодова. Како први задатак носи 4, други 6, четврти 8 и пети 10 бодова, закључујемо да трећи задатак мора да носи 7 бодова, као и да су скупови првог, другог, трећег, четвртог и петог задатка дисјунктни скупови. Применом *принципа суме* број бодова који се могао добити за свих 5 тачно урађених задатака је

$$4 + 6 + 7 + 8 + 10 = 35.$$

$\diamondsuit$

Пример 2.4. *На шаховском турниру учествује* 8 *играча. Свако игра са сваким по једну партију. У свакој партији победник добија* 1 *поен, поражени добија* 0 *поена, а при нерешеном исходу оба играча добијају* $0,5$ *поена. На крају турнира сви играчи су освојили различит број поена. Ако је петопласирани играч освојио* $2,5$ *поена, ако постоји играч који је освојио* $3,5$ *поена, и ако другопласирани има мање поена од збира поена четвртог, седмог и осмог, који је број поена првопласираног и другопласираног?(Припреме за пријемни испит из математике, Математички факултет у Београду,* 2007*, задатак* 811*)*

Решење. Ако је петопласирани играч освојио $2,5$ поена, и ако је сваки играч освојио различит број поена, максималан број поена који је освојио шестопласирани играч је 2, седмопласирани играч $1,5$ и осмопласирани играч 1 поен. Играч који је освојио $3,5$ поена може бити или трећепласирани или четвртопласирани. Ако је трећепласирани играч освојио $3,5$, онда је четвртопласирани освојио 3 поена. Применом *принципа суме* број поена који су освојили четвртопласирани, седмопласирани и осмопласирани је

$$3 + 1,5 + 1 = 5,5$$

а како је број поена другопласираног мањи од овог збира, значи да је другопласирани играч освојио 5 поена.
Укупан број поена на шаховском турниру је 28, што значи да је првопласирани играч освојио

$$28 - (5 + 3,5 + 3 + 2,5 + 2 + 1,5 + 1) = 9,5$$

а то није могуће (ако је играч са сваким играо по једну партију, и ако је победио у свакој партији, максималан број поена који је могао да освоји је 8).
Закључујемо да је четвртопласирани освојио $3,5$ поена, самим тим како другопласирани играч има мање од збира поена четвртог, седмог и осмог, максималан број поена другопласираног играча је $5,5$. Максималан број

поена трећепласираног је 5. Применом *принципа суме* број поена који су освојили другопласирани, трећепласирани, четвртопласирани, петопласирани, шестопласирани, седмопласирани и осмопласирани је

$$5,5+5+3,5+2,5+2+1,5+1=21$$

док је број поена који је освоио првопласирани играч

$$28-21=7.$$

$\Diamond$

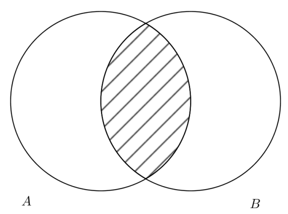
2.2 Принцип укључења - искључења

На основу *принципа суме* знамо да је

$$|A\cup B|=|A|+|B|$$

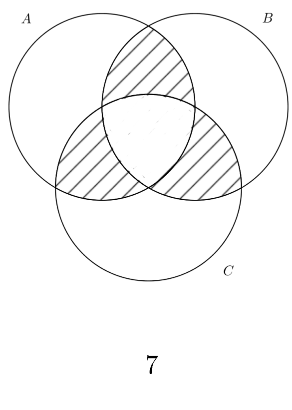
када су A и B дисјунктни скупови. Уколико скупови A и B нису дисјунктни, сабирањем $|A|$ и $|B|$, елементе пресека $|A\cap B|$ бројимо два пута. У том случају, да би смо добили праву вредност $|A\cup B|$ морамо одузети $|A\cap B|$, тј.

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$



У случају када имамо три скупа A,B,C, и када сабирамо $|A|,|B|,|C|$, елементе пресека $|A\cap B|,|A\cap C|$ и $|B\cap C|$ бројимо два пута (уколико нису у пресеку сва три скупа). Да не би дошло до тога, одузећемо $|A\cap B|,|A\cap C|$ и $|B\cap C|$. Али сада смо елементе $|A\cap B\cap C|$, које смо бројали три пута када смо сабирали елементе скупова $|A|,|B|,|C|$, одузели три пута. Да би смо дошли до праве вредности $|A\cup B\cup C|$, морамо додати $|A\cap B\cap C|$, тј.

$$|A\cup B\cup C|=(|A|+|B|+|C|)-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)+|A\cap B\cap C|.$$



Теорема 2. (Принцип укључења - искључења). *За коначне скупове* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *важи*

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \Big|\bigcap_{i \in I} A_i\Big|. \tag{2}$$

Доказ. Ову теорему ћемо доказати индукцијом.

Индукција је по броју скупова n, за базу индукције ћемо користити да је $n = 2$. Већ је познато да једначина (2) важи за два скупа. Претпоставићемо да она важи и за преосталих $n-1$ коначних скупова. Имамо да је

$$\begin{aligned}
\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| &= \Big|\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \cup A_n\Big| \\
&\overset{(a)}{=} \Big|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big| + |A_n| - \Big|\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big) \cap A_n\Big| \\
&\overset{(b)}{=} \Big|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big| + |A_n| - \Big|\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\Big| \\
&\overset{(c)}{=} \Big(\sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n-1]} (-1)^{|I|-1} \Big|\bigcap_{i \in I} A_i\Big|\Big) + |A_n| - \\
&\quad -\Big(\sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n-1]} (-1)^{|I|-1} \Big|\bigcap_{i \in I \cup \{n\}} A_i\Big|\Big)
\end{aligned}$$

У једнакости (a) смо користили *принцип укључења- искључења* за два скупа, тј. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ са $A = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ и $B = A_n$. У једнакости (b) смо користили дистрибутивност пресека, тј. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. И на крају у једнакости (c) смо користили индуктивну претпоставку два пута, једном за $\Big|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\Big|$ и једном за $\Big|\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\Big|$.

У првој суми сабирамо величине свих пресека скупова који не укључују скуп A_n. У другој суми се појављују величине свих пресека k скупова који укључују скуп A_n са знаком $-(-1)^{k-1} = (-1)^k$. Друга сума не укључује $|A_n|$, али се тај сабирак појављује између две суме. Величина пресека било којих k скупова између $A_1, \dots, A_n$ појављује се тачно једном у изразу са знаком $(-1)^{k-1}$, што се слаже са једнакошћу (2). □

Пример 2.5. *У разреду са* 30 *ученика,* 12 *њих воли математику,* 14 *воли физику,* 13 *хемију,* 5 *ученика воли и математику и физику,* 7 *воли и физику и хемију, а* 4 *воли математику и хемију. Три ученика воле сва три предмета. Колико ученика не воли ни један од ових предмета?*

Решење. Означићемо са M скуп ученика који воле математику, са F скуп ученика који воле физику, и са H скуп ученика који воле хемију. Из услова задатка имамо да је

$$|M| + |F| + |H| = 12 + 14 + 13 = 39$$

$$|M \cap F| + |F \cap H| + |H \cap M| = 5 + 7 + 4 = 16$$

$$|M \cap F \cap H| = 3$$

Користећи *принцип укључења - искључења* имамо да је

$$\begin{aligned}|M \cup F \cup H| &= (|M| + |F| + |H|) - (|M \cap F| + |F \cap H| + |H \cap M|) + \\ &\quad (|M \cap F \cap H|) = 39 - 16 + 3 = 26\end{aligned}$$

па је број ученика који не воле ни један од ових предмета једнак

$$30 - 26 = 4.$$

◊

Пример 2.6. *Од ученика из претходног примера, колико њих воли тачно један предмет? А колико њих воли бар два предмета?*

Решење. Означићемо скупове на следећи начин:

MFH - скуп који садржи елементе пресека скупова M, F, H
$MF\overline{H}$ - скуп који садржи елементе пресека скупова M и F, који нису у H
$M\overline{F}H$ - скуп који садржи елементе пресека скупова M и H, који нису у F
$\overline{M}FH$ - скуп који садржи елементе пресека скупова F и H, који нису у M
$M\overline{F}\overline{H}$ - скуп који садржи елементе скупа M који нису ни у F, ни у H
$\overline{M}F\overline{H}$ - скуп који садржи елементе скупа F који нису ни у M, ни у H
$\overline{M}\overline{F}H$ - скуп који садржи елементе скупа H који нису ни у M, ни у F
$\overline{M}\overline{F}\overline{H}$ - скуп који садржи елементе који нису ни у M, ни у F, ни у H

Сада ћемо одредити колико сваки од ових скупова има елемената.

$|MFH| = 3$

$|MF\overline{H}| = |MF \backslash MFH| = |MF| - |MFH| = 5 - 3 = 2$

$|M\overline{F}H| = |MH \backslash MFH| = |MH| - |MFH| = 4 - 3 = 1$

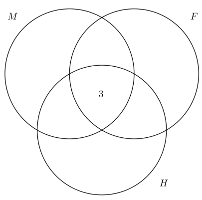
$|\overline{M}FH| = |FH \backslash MFH| = |FH| - |MFH| = 7 - 3 = 4$

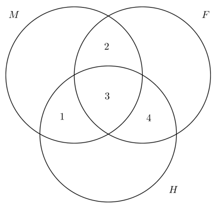
$|M\overline{F}\overline{H}| = |M \backslash MFH \cup MF\overline{H} \cup M\overline{F}H| = |M| - (|MFH| + |MF\overline{H}| + |M\overline{F}H|) = 12 - 6 = 6$

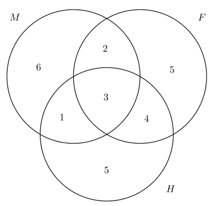
$|\overline{M}F\overline{H}| = |F \backslash MFH \cup MF\overline{H} \cup \overline{M}FH| = |F| - (|MFH| + |MF\overline{H}| + |\overline{M}FH|) = 14 - 9 = 5$

$|\overline{M}\overline{F}H| = |H \backslash MFH \cup M\overline{F}H \cup \overline{M}FH| = |H| - (|MFH| + |M\overline{F}H| + |\overline{M}FH|) = 13 - 8 = 5$

Одређивање броја ученика у појединим деловима Венеовог дијаграма су приказани на слици:







Добијамо да је број ученика који воле тачно један предмет једнак

$$|M\overline{F}\overline{H}| + |\overline{M}F\overline{H}| + |\overline{M}\overline{F}H| = 6 + 5 + 5 = 16,$$

док је број ученика који воле бар два предмета једнак

$$|MF\overline{H} \cup M\overline{F}H \cup \overline{M}FH \cup MFH| = 2 + 1 + 4 + 3 = 10.$$

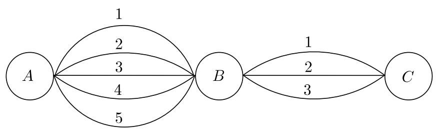
$\diamondsuit$

2.3 Принцип производа

Следећим примером ћемо покушати да објаснимо и други принципа пребројавања, *принцип производа.*

Пример 2.7. *Из града A у град B води пет путева, а из града B у град C води три пута. Из града A у град C може се стићи само ако се пролази кроз град B. На колико различитих начина може да се путује из града A у град C?*

Решење. Да би смо пребројали све те путеве користићемо и следећу слику.



Ако из града A желимо да стигнемо у град B можемо изабрати један од датих пет путева $(1, 2, 3, 4, 5)$. Ако нпр. изаберемо да из града A у град B кренемо путем 1, да бисмо из града B стигли до града C имамо три пута $(1, 2, 3)$. Ако би из града B до града C наставили путем који је означен са 1, пут од града A до града C ћемо означити са $1, 1$. Ако би из града B до града C наставили путем који је означен са 2, пут од града A до града C ћемо означити са $1, 2$. Од града A до града C имамо 15 путева, и то:

$$1, 1; 1, 2; 1, 3; 1, 4; 1, 5;$$

$$2, 1; 2, 2; 2, 3; 2, 4; 2, 5;$$

$$3, 1; 3, 2; 3, 3; 3, 4; 3, 5.$$

Нашли смо да из града A до града C има укупно $5 \cdot 3$ путева. $\diamondsuit$

Формулисаћемо *принцип производа* прецизније следећом теоремом.

Теорема 3. (Принцип производа)**.** *Нека су $D_1, D_2, \ldots, D_n$ коначни скупови. Директан производ тих скупова има $|D_1| \cdot |D_2| \cdots |D_n|$ елемената, односно*

$$|D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n| = |D_1| \cdot |D_2| \cdots |D_n|. \tag{3}$$

Пример 2.8. *Колико постоји различитих низова битова* 0 *и* 1 *дужине* 8*?*

Решење. Пошто се сваки од осам битова може изабрати на два начина (или 0 или 1), означићемо са $A_1, A_2, \ldots, A_8$ скупове чији су елементи $\{0,1\}$, тј. $A_1 = A_2 = \ldots = A_8 = \{0,1\}$. Користећи *принцип производа* постоји укупно

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_8| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_8| =$$
$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$$

различитих низова битова дужине 8. ♢

НАПОМЕНА. Низ битова дужине 8 се назива *бајт*.

Пример 2.9. *На колико начина се пет ученика може разместити на пет столица?*

Решење. На прву столицу можемо сместити једног од пет ученика, на другу столицу можемо сместити једног од преостала четири ученика, на трећу столицу можемо сместити једног од преостала три ученика, на четврту столицу можемо сместити једног од преостала два ученика, и на пету столицу можемо сместити једног преосталог ученика. Користећи *принцип производа* постоји

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

начина на које можемо разместити пет ученика на пет столица. ♢

Пример 2.10. *На колико начина можемо поставити фигуру краља на једно поље шаховске табле* 8×8*, а затим одиграти потез?*

Решење. Познато нам је да се краљем на шаховској табли можемо померити са једног поља на друго само ако је то поље до поља са кога вршимо померање. На основу тога, краљем се из сваког угаоног поља (имамо их 4) може одиграти 3 потеза, из сваког од преостала 24 поља која се налазе на рубу табле може се одиграти 5 потеза, док се са преосталих 36 поља може одиграти 8 потеза. Користећи *принцип суме* и *принцип производа*, добијамо да је тражени број потеза

$$4 \cdot 3 + 24 \cdot 5 + 36 \cdot 8 = 12 + 120 + 288 = 420$$

♢

Пример 2.11. *Сваки студент неког факултета има шифру, која је дугачка од шест до осам знакова и где је сваки знак или велико слово енглеске азбуке или цифра. Свака шифра мора да садржи бар једну цифру. Колико могућих шифри постоји?*

Решење. Означићемо са X укупан број могућих шифри, док ћемо са X_6, X_7 и X_8 означити бројеве могућих шифри са $6, 7$ и 8 знакова, редом. Применом *принципа суме* укупан број могућих шифри је

$$X = X_6 + X_7 + X_8.$$

Број могућих шифри које имају 6 знакова ћемо добити тако што најпре израчунамо број шифри које садрже и слова енглеске азбуке и цифре, како енглеска азбука има 26 слова и имамо 10 цифара, на сваком месту шифре може се наћи један од 36 знака. Применом *принципа производа* број могућих шифри које имају 6 знакова је

$$36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = 36^6.$$

Од овог броја ћемо одузети број могућих шифри које не садрже цифре, тај број добијамо применом *принципа производа*

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^6.$$

Укупан број могућих шифри које имају 6 знакова, где је сваки знак или велико слово енглеске азбуке или цифра, и у којој се налази бар једна цифра, је

$$X_6 = 36^6 - 26^6 = 1867866560.$$

Слично добијамо X_7 и X_8, тј.

$$X_7 = 36^7 - 26^7 = 70332353920, \; X_8 = 36^8 - 26^8 = 2612282842880.$$

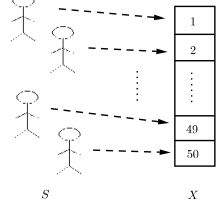
Укупан број могућих шифри, које задовољавају услове задатка, је

$$X = X_6 + X_7 + X_8 = 2684483063360.$$

$\Diamond$

2.4 Принцип бијекције

Ако би се нашли у биоскопској сали која има 50 места и запитате се „Колико има људи у сали?“, није потребно да бројите једну по једну особу, довољно је само да приметите да ли су сва места попуњена и долазите до жељеног одговора. Свакој особи из скупа S се придружи једно место из скупа X.



Долазимо и до трећег принципа пребројавања - *принцип једнакости* или *принцип бијекције.*

Теорема 4. (Принцип бијекције). *Ако између два коначна скупа* A *и* B *постоји бијекција, тада је* $|A| = |B|$.

Доказ. Означићемо са A и B та два коначна скупа. Због постојања бијекције између скупова A и B, ако је $A = \emptyset$ онда је и $B = \emptyset$, такође ако је $B = \emptyset$ онда је и $A = \emptyset$. Дакле, у оба случаја важи

$$| A |=| B |= 0.$$

Са друге стране, нека је $| A |= n$ и $| B |= m$, за неке природне бројеве n и m. Нека су

$$f : [n] \to A$$

$$g : [m] \to B$$

$$k : A \to B$$

бијекције.
Тада су бијекције и

$$g^{-1}kf : [n] \to [m] \ \text{ и } \ f^{-1}k^{-1}g : [m] \to [n].$$

Ако је $m < n$ тада је $g^{-1}kf$, која је бијекција, уједно и инјективна из $[n] \to [m]$, што је контрадикција (Теорема. Ако су m и n природни бројеви и $m < n$, тада не постоји инјекција из $[n]$ у $[m]$).
Са друге стране, ако је $m > n$ тада је $f^{-1}k^{-1}g$, која је бијекција, уједно и инјективна из $[m] \to [n]$, што је контрадикција (Теорема. Ако су m и n природни бројеви и $n < m$, тада не постоји инјекција из $[m]$ у $[n]$).

Према горе наведеном добијамо да је $m = n$, тј. $| A |=| B |$. □

Објаснићемо *принцип бијекције* једноставном, али у комбинаторици веома често коришћеном теоремом.

Теорема 5.. *Нека су* A *и* B *коначни скупови. Број свих функција са* A *у* B *је* $| B |^{|A|}$, *тј.*

$$| \{f \mid f : A \to B\} |=| B |^{|A|} . \tag{4}$$

Доказ. Нека је $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Свакој функцији $f : A \to B$ можемо доделити уређену $n-$ торку $\Phi(f)$ елемената из B:

$$\Phi(f) = (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)) \in \underbrace{B \times B \times \cdots \times B}_{n \text{ пута}}.$$

Није тешко проверити да је Φ бијекција између скупа свих функција са A у B и директног производа $n-$копија скупа B. Стога је, на основу *принципа бијекције* и *принципа производа*, број свих функција са A у B једнак

$$|\ \{f \mid f : A \to B\}\ |=|\ \underbrace{B \times B \times \cdots \times B}_{n\ \text{пута}}\ |=|\ B\ |^{|A|}\ .$$

□

Теорема 5. се често појављује у следећем облику:

Последица 2.1. *Нека је L скуп који садржи s симбола (слова). Број различитих речи (низова) дужине k које су састављене од симбола из L је s^k.*

Доказ. Реч $a = a_1a_2\ldots a_k$ идентификујемо са функцијом $a : [k] \to L$, где је $a(i) = a_i$. Лако се провери да је тиме описана бијекција између траженог скупа свих функција са $[k]$ у L. Из теореме 5. знамо да тих функција има s^k. □

Лепа илустрација *принципа бијекције* је и доказ следећег примера.

Пример 2.12. *Нека је S коначан скуп и нека је $|S| = n \in \mathbb{N}$. Доказати да је тада $|\mathcal{P}(\mathcal{S})|= 2^n$.*

Доказ. Ако је S празан скуп, тада је једини подскуп скупа S празан скуп

$$S = \{\} \Rightarrow |\mathcal{P}(\mathcal{S})| = \{\emptyset\}$$

тј.

$$|\mathcal{P}(\mathcal{S})|= 2^0 = 1.$$

Нека је сада

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, n \in \mathbb{N}.$$

Посматраћемо све бинарне низове дужине n, сваки од њих ће одређивати један подскуп скупа S. Ако је на i-том месту у низу број 1, члан a_i се налази у подскупу који је одређен тим низом. Ако је на i-том месту број 0, члан a_i се не налази у подскупу који је одређен тим низом. На овај начин ћемо да одредимо све подскупове скупа S, јер сваком подскупу одговара тачно један бинарни низ дужине n.

Како се на сваком месту у бинарном низу може наћи број 1 или 0 број таквих низова је 2^n. Према принципу бијекције добијамо да је $|\mathcal{P}(\mathcal{S})|= 2^n$. □

Пример 2.13. *На тикету спортске прогнозе налази се 12 сусрета.*

а) На колико начина можемо попунити колоне тикета?

б) На колико начина можемо попунити колоне тикета, ако је познато да седам сусрета неће бити нерешено?

Решење. а) Како за сваку утакмицу имамо три могућа исхода, и то $0, 1$ и 2, а укупно 12 мечева, на основу последице 2.1 број могућих начина да се попуне колоне тикета је

$$3^{12} = 531441.$$

б) Како је за седам мечева познато да исход неће бити нерешен, онда за те мечеве имамо две могућности, тј. или 1 или 2. Користећи последицу 2.1, број могућих начина да се попуне колоне тикета код којих сусрет није нерешен је 2^7. За сваку могућу попуњену колону, ових седам мечева, постоји број могућих исхода преосталих 5 мечева. Број могућих исхода за преосталих 5 мечева, такође користећи последицу 2.1, је 3^5. Укупан број начина попуњавања тикета спортске прогнозе, користећи *принцип производа*, је једнак

$$2^7 \cdot 3^5 = 128 \cdot 243 = 31104.$$

$\Diamond$

2.5 Метод двоструког пребројавања

Ако исти скуп нпр. X пребројимо на два различита начина, оба пута тачно, добићемо исти резултат. То је суштина *метода двоструког пребројавања.*

А сада ћемо прецизније формулисати *метод двоструког пребројавања* следећом теоремом.

Теорема 6. (Метод двоструког пребројавања)**.** *Нека су дати скупови $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ и нека је $S \subseteq A \times B$. Даље, нека је $x_i = \mid \{(x,y) \in S : x = a_i\} \mid$ за све $i = 1, 2, \dots, n$, односно $y_j = \mid \{(x,y) \in S : y = b_j\} \mid$ за све $j = 1, 2, \dots, m$. Тада је*

$$\mid S \mid = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{m} y_j. \tag{5}$$

Доказ. Уочимо следеће подскупове скупа S:

$$A_i = \{(x,y) \in S : x = a_i\} \text{ za } i = 1, 2, \dots, n$$

$$B_j = \{(x,y) \in S : y = b_j\} \text{ za } j = 1, 2, \dots, m.$$

Приметимо да за свако i и j важи $\mid A_i \mid = x_i$ односно $\mid B_j \mid = y_j$. Даље, из дефиниције скупова A_i (односно B_j) знамо да су у паровима дисјунктни и да је

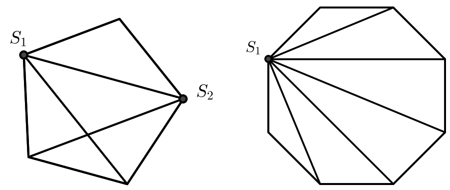
$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m.$$

Тврђење теореме следи на основу *принципа суме.* $\square$

Пример 2.14. *Колико дијагонала има n-тоугао?*

Решење. Означићемо са d_n тражени број дијагонала. Са S ћемо означити скуп темена и $|S| = n$, а са D ћемо означити скуп дијагонала па је $|D| = d_n$. Посматрајмо скуп

$$A = \{(s, d) | s \in S, d \in D, \text{ gde dijagonala } d \text{ sadrži teme } s\}.$$



На слици су приказана два правилна многоугла $n = 5$ и $n = 8$, са ње можемо приметити да ће свако теме правилног многоугла садржати $n - 3$ (тј. $5 - 3$ и $8 - 3$) дијагонале и да свака дијагонала садржи два темена.

Ако из $(s, d) \in A$ прво бирамо теме s, како је број темена n, број начина да то урадимо је једнак n. Ако затим из $(s, d) \in A$ бирамо дијагоналу d која садржи то теме s, како свако теме садржи $n - 3$ дијагонала, број могућих начина за то је $n - 3$. Користећи *принцип производа* број могућих начина за избор темена s и дијагонале d једнак

$$|A| = n \cdot (n - 3).$$

Ако би из $(s, d) \in A$ прво бирали дијагоналу d, за тај избор имамо d_n могућности, а затим и теме s које садржи ту дијагоналу (свака дијагонала садржи два темена). Користећи *принцип производа* имамо да је

$$|A| = 2 \cdot d_n.$$

Када изједначимо ове две стране, добијемо следећи израз

$$2 \cdot d_n = |A| = n \cdot (n - 3)$$

затим поделимо обе стране са 2, и добијемо да је број тражених дијагонала једнак

$$d_n = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}.$$

◊

2.6 Рекурзивне релације

Понекад је за одређивање експлицитне формуле за низ бројева нпр. a_n где је $n \in \mathbb{N}$, могуће (и корисно) наћи формулу помоћу које ћемо сваки члан тог низа изразити преко неколико претходних чланова. Та формула се назива *рекурзивна релација* (латински recurrere - вратиће се). А метод решавања задатака је *метод свођења на рекурзивне релације.*

Ако успемо да одредимо a_n, помоћу *метода за свођење на рекурзивне релације* задатак са n објеката сводимо на задатак са $n-1$ објеката, задатак са $n-1$ објеката на задатак са $n-2$ објеката, и тако све док се не дође до задатка који је лако решити.
У наставку ћемо урадити неколико примера на ову тему.

У делу *принцип бијекције* смо показали како можемо одредити број подскупова неког скупа од n елемената. Сад ћемо показати како се тај број одређује користећи *метод свођења на рекурзивне релације.*

Пример 2.15. *Колико подскупова има скуп од n елемената?*

Решење. Са A_n ћемо означити скуп свих подскупова скупа $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, за $n \in \mathbb{N}$, док ћемо са a_n означити број тих подскупова, тј. $a_n = |A_n|$. Подскупове скупа A_n ћемо поделити у две групе, у зависности од тога да ли садрже број n или не садрже.

а) Подскупови скупа $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ који не садрже број n су подскупови скупа
$\{1, 2, \ldots, n-1\}$, и таквих подскупова има $a_{n-1} = |A_{n-1}|$.

б) Пресликавање $X \mapsto X \backslash \{n\}$ је бијекција између подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који садрже број n и свих подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ који не садрже број n. На основу *принципа бијекције* број свих подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који садрже број n има a_{n-1}.

На основу *принципа суме* имамо да је и број свих подскупова скупа
$\{1, 2, \ldots, n\}$ једнак

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-1} = 2 \cdot a_{n-1}.$$

Применом рекурзивне релације довољан број пута добићемо да је

$$a_n = 2^{n-1} \cdot a_1.$$

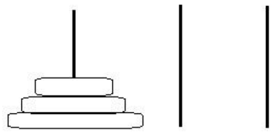
Како је $a_1 = 2$, број подскупова скупа од n елемената је

$$a_n = 2^n.$$

$\Diamond$

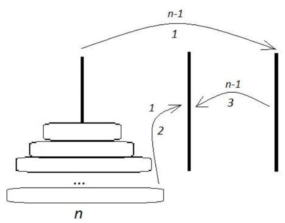
Пример 2.16. (Ханојски торњеви) *Нека је дато n колутова, различитих величина, који су наслагани на штапу, од највећег према најмањем, с тим да је највећи на дну. Нека су дата још два штапа, желимо све колутове са овог штапа пребацити на други штап, један по један, тако да колутови буду у истом распореду. Ни у једном тренутку ни један колут не сме бити смештен изнад мањег колута. Колико је корака потребно учинити да би смо дошли до решења?*

Решење. Модел Ханојских торњева за $n = 3$ можете видети на слици.



Означићемо са a_n тражени број корака за n колутова.
Очигледно је да је за $n = 1$ потребно учинити само један корак, па је у том случају $a_1 = 1$. Док је за $n = 2$ потребно учинити 3 корака, први корак је пребацити мањи колут на први слободан штап, затим већи колут пребацити на други слободан штап, па мањи колут пребацити на већи.

Ако је у питању n колутова, да би смо померили највећи колут потребан нам је један празан штап, што значи да смо свих $n-1$ колутова пребацили на други штап. Да би смо успели да тих $n-1$ колутова пребацимо на један штап, потребно нам је a_{n-1} корака. Затим пребацимо највећи колут на слободан штап, и учинимо још a_{n-1} корака да пребацимо преосталих $n-1$ колутова на највећи колут.



Користећи *принцип суме* имамо да је

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1.$$

На основу претходне једначине можемо написати и следећи члан у низу, тј.

$$a_{n+1} = 2a_n + 1.$$

Да би смо добили хомогену једначину одузећемо следеће једначине

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 \\ a_{n+1} &= 2a_n + 1 \end{aligned}$$

након чега добијамо

$$a_{n+1} - 3a_n + 2a_{n-1} = 0.$$

Карактеристична једначина је

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

ова једначина има два решења, и то

$$t_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$t_1 = 2 \text{ и } t_2 = 1$$

па је решење хомогеног дела

$$h_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 1^n.$$

Уз почетне услове $a_1 = 1, a_2 = 3$ наћи ћемо и константе C_1, C_2 (решавањем система линеарних једначина)

$$a_1 = 1 = C_1 \cdot 2^1 + C_2 \cdot 1^1$$
$$a_2 = 3 = C_1 \cdot 2^2 + C_2 \cdot 1^2$$

$$2C_1 + C_2 = 1$$
$$4C_1 + C_2 = 3$$

одузмемо прву једначину од друге и добијемо

$$-2C_1 = -2$$
$$C_1 = 1$$

уврстимо C_1 у једначину $2C_1 + C_2 = 1$ и добијемо да је $2 + C_2 = 1$

$$C_2 = -1$$

Општи члан низа добијамо када ове константе убацимо у опште решење, тј. број корака да би смо пребацили n колутова је

$$a_n = h_n = 1 \cdot 2^n - 1 \cdot 1^n = 2^n - 1.$$

$\Diamond$

Овај проблем је први објавио Француски математичар Edouard Lucas[5]. Проблем је повезан са легендом о вијетнамском или индијском храму у коме свештеници пребацују 64 златна диска са једног ступа на други, по горе описаним правилима. По легенди, када се заврши последњи корак доћи ће до смака света. Уз претпоставку да једно пребацивање траје једну секунду, за цео процес би им било потребно око 585 милијарди година.

Пример 2.17. *На колико начина можемо плочу* $1 \times n$ *поплочати плочицама које су димензија* 1×1 *и* 1×2*?*

Решење. Нека је a_n број могућих начина на које плочу $1 \times n$ можемо поплочати плочицама које су димензије 1×1 и 1×2. Посматрамо прву плочицу:

а) ако је плочица димензије 1×1 остатак плоче која је димензије $1 \times n$ можемо поплочати на a_{n-1} начина,

б) ако је плочица димензије 1×2 остатак плоче која је димензије $1 \times n$ можемо поплочати на a_{n-2} начина.

[5] Francois Edouard Antole Lucas(1842-1891), француски математичар

По принципу суме имамо да је

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Решићемо ову хомогену једначину, тако што ћемо најпре све пребацити на леву страну и изједначити са нулом

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0,$$

карактеристична једначина је

$$t^2 - t - 1 = 0.$$

Ово је квадратна једначина и она има два решења, и то

$$t_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

па је решење хомогеног дела

$$h_n = C_1 \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + C_2 \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n.$$

Уз почетне услове $a_0 = 0, a_1 = 1$ и $a_2 = 2$, наћи ћемо и константе C_1, C_2 (решавањем система линеарних једначина)

$$a_0 = 0 = C_1 \cdot (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^0 + C_2 \cdot (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^0$$
$$a_1 = 1 = C_1 \cdot (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^1 + C_2 \cdot (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^1$$

$$C_1 + C_2 = 0 \qquad / \cdot \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$C_1 \cdot (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}) + C_2 \cdot (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1$$

$$\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot C_1 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot C_2 = 0$$
$$C_1 \cdot (\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}) + C_2 \cdot (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1$$

одузмемо прву једначину од друге и добијемо

$$\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot C_2 - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}) \cdot C_2 = -1$$
$$C_2(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}) = -1$$
$$\sqrt{5} \cdot C_2 = -1$$
$$C_2 = \tfrac{-1}{\sqrt{5}}$$
$$C_2 = -C_1$$
$$C_1 = \tfrac{1}{\sqrt{5}}$$

И на крају добијамо општи члан низа када ове константе убацимо у опште решење, тј. добијамо број начина на које можемо поплочати плочу димензије $1 \times n$ са плочицама димезија 1×1 и 1×2

$$a_n = h_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$$

$\Diamond$

3 ДВЕ ВАЖНЕ ТЕОРЕМЕ

При решавању задатака из *енумеративне комбинаторике*, може се десити да је потребно дати одговор и на неко од следећих питања:

а) На колико начина можемо све елементе неког коначног скупа распоредити у низ?

б) На колико начина из неког коначног скупа можемо изабрати подскуп жељене величине?

У наставку су дате теореме које ће нам помоћи у проналажењу одговора на ова питања.

3.1 Пермутације

Дефиниција 3.1. *Бијективно пресликавање коначног скупа X на самог себе назива се* пермутација *скупа X.*

Теорема 1.. *Број пермутација скупа са n елемената је*

$$n! = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1. \tag{6}$$

Доказ. Нека је $X = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ скуп елемената које распоређујемо у низ. Претпоставимо да су места на која распоређујемо елементе из X означена бројевима из $[n]$. Предмет P_1 можемо поставити на било који од тих n места, рецимо на место $m_1 \in [n]$. Следећи предмет P_2 сада можемо поставити на $n-1$ преостало место из $[n]\backslash\{m_1\}$.

Када смо поставили предмете $P_1, P_2, \ldots, P_i$ заузето је тачно i места. Стога, предмет P_{i+1} можемо поставити на неку од преосталих $n-i$ позиција. На крају, за предмет P_n ће остати само једно место. На основу *принципа производа*, број распореда n предмета на n места је

$$n! = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.$$

□

Број $n!$ се чита *ен-факторијел.* Посебно за $n=0$ важи $0! = 1$.

НАПОМЕНА. Функција $n!$ јако брзо расте, брже од сваке експоненцијалне функције. За процену њене вредности користи се *Стирлингова формула* која тврди да за велико n важи

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n.$$

Ова процена је врло добра, нпр. већ за $n=8$ грешка је само $1,04\%$.

Пример 3.1. *На колико начина могу седам особа различите старости стати у врсту под условом да најстарији мора бити у средини?*

Решење. Када најстарију особу ставимо у средину, тј. на четврто место, остане нам још шест слободних места

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{*} & \underline{*} & \underline{*} & \underline{X} & \underline{*} & \underline{*} & \underline{*} \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

Како смо на четврто место поставили најстарију особу, остало нам је још шест особа које треба распоредити на основу њихове старости. С обзиром да не знамо која особа, од преосталих шест, је најстарија на прво место у овој врсти долазе у обзир све особе тј. њих шест. Број особа се смањује за један, па на друго место можемо поставити једну од преосталих пет особа, док на треће место можемо поставити једну од преосталих четири особе.

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{\ } & \underline{\ } & \underline{\ } & \underline{X} & \underline{*} & \underline{*} & \underline{*} \\ 6 & 5 & 4 & 1 & & & \end{array}$$

На четвртом месту је најстарија особа, тако да то место прескачемо, па на следеће пето место можемо поставити једну од преостале три особе, на шесто место постављамо једну од преостале две особе, и на седмо место постављамо једну преосталу и најмлађу особу у тој врсти.

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{\ } & \underline{\ } & \underline{\ } & \underline{X} & \underline{\ } & \underline{\ } & \underline{\ } \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

Број могућих начина на које можемо распоредити особе, на основу њихове старости је једнак

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot = 6! = 720.$$

$\Diamond$

Пример 3.2. *Која је* 1841. *пермутација у лексикографском поретку пермутација скупа* $\{a, b, c, d, e, f, g\}$*?*

Решење. Број пермутација, у лексикографском поретку пермутација скупа $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, у којима је први елемент слово a је $P_6 = 6! = 720$, у којима је први елемент слово b је $P_6 = 6! = 720$. Имамо да је $720 + 720 = 1440$. пермутација, у лексикографском поретку пермутација скупа $\{a, b, c, d, e, f, g\}$,

$$bgfedca.$$

До 1841. пермутације преостала је још 401 пермутација у лексикографском поретку пермутација скупа $\{a, b, c, d, e, f, g\}$. Како је број пермутација, у лексикографском поретку пермутација скупа $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, у којима је први елемент слово c $P_6 = 6! = 720$, то значи да први елемент тражене пермутације почиње словом c.

Број пермутација, у лексикографском поретку пермутација скупа $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, у којима су прва два елемента ca је $P_5 = 5! = 120$, слично и када су прва два елемента cb или cd. Добијамо да $1440 + 120 + 120 + 120 = 1800$ пермутација, у лексикографском поретку пермутација скупа $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, изгледа овако

$$cdgfeba.$$

Следећа пермутација, у лексикографском поретку пермутација скупа $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, почиње словима ce и има их $P_5 = 5! = 120$. Словима cea почиње $P_4 = 4! = 24$ пермутације. Словима $ceba$ и $cebd$ почиње по $P_3 = 3! = 6$ пермутација, па $1800 + 24 + 6 + 6 = 1836$ пермутација, у лексикографском поретку пермутација скупа $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, изгледа овако

$$cebdgfa.$$

Број пермутација, у лексикографском поретку пермутација скупа $\{a, b, c, d, e, f, g\}$, које почињу словима $cebf$ је $P_3 = 3! = 6$, и то су

$cebfadg$

$cebfagd$

$cebfdag$

$cebfdga$

$cebfgad$

$cebfgda$

Одавде видимо да је 1841. пермутација, у лексикографском поретку пермутација скупа $\{a, b, c, d, e, f, g\}$,

$$cebfgad.$$

$\Diamond$

Нека је X скуп од n елемената, и нека је $r \in \mathbb{N}$, тада је r-пермутација скупа X уређена r-торка $(P_1, P_2, \ldots, P_r)$, где су $P_1, P_2, \ldots, P_r$ међусобно различити елементи скупа X. Са $P(n, r)$ ћемо означити број свих r-пермутација скупа од n елемената.
Нпр. нека је $X = \{a, b, c, d\}$, тада су све 2-пермутације датог четворочланог скупа

$$(a, b); (a, c); (a, d); (b, a); (b, c); (b, d); (c, a); (c, b); (c, d); (d, a); (d, b); (d, c).$$

тј. $P(4, 3) = 12$.
Напоменућемо и то да се некад r-пермутација n-скупа зове још и *парцијална пермутација.*

Последица 3.1 (r-пермутације)**.** *Број свих r-пермутација у n-чланом скупу $X = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, где је $r \leqslant n$, је*

$$n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}. \tag{7}$$

Доказ. Први елемент P_{i_1} у уређеној r-торци можемо одабрати на n начина. Елемент P_{i_2} на другом месту може бити неки од преосталих $n-1$ елемената из X. Последњи елемент P_{i_r} је један од $n-r+1$ елемената из X који се нису појавили на првих $r-1$ места. Број свих r-пермутација скупа X добијемо применом *принципа производа.* $\square$

У случају када је $r = n$ број пермутација од n елемената је $P(n, n) = n!$.

Пример 3.3. *Колико се петоцифрених бројева може образовати од цифара* $0, 1, 2, 5, 7, 9$ *тако да се нула не налази ни на првом ни на последњем месту и да се ни једна цифра не понавља?*

Решење. Најпре ћемо израчунати колико се петоцифрених бројева може образовати од датих цифара $0, 1, 2, 5, 7, 9$ тако да се ни једна цифра не понавља. За избор прве цифре траженог петоцифреног броја постоји шест могућности, за избор друге цифре постоји пет могућности, за избор треће цифре постоје четири могућности, за избор четврте цифре постоје три могућности, и за избор пете цифре постоје две могућности.

$$\overline{6}\,\overline{5}\,\overline{4}\,\overline{3}\,\overline{2}$$

Број r-пермутација, где је $r = 5$ у шесточланом скупу, на основу претходне последице, је једнак

$$P(6, 5) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$$

или

$$P(6, 5) = \frac{6!}{(6-5)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 720.$$

Како у задатку имамо још један услов, и то, да се цифра 0 не налази ни на првом ни на последњем месту. Да би смо дошли до резултата потребно је да од добијеног броја $P(6, 5)$ одузмемо све петоцифрене бројеве код којих је цифра 0 на првом или на последњем месту.

Када је цифра 0 на првом месту, број r-пермутација у петочланом скупу $\{1, 2, 5, 7, 9\}$ где се цифре не понављају, је

$$P(5, 4) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

или

$$P(5, 4) = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 120.$$

Исто рачунамо и када је цифра 0 на последњем месту.

Број петоцифрених бројева који се могу образовати од цифара $0, 1, 2, 5, 7, 9$ тако да се нула не налази на првом ни на последњем месту и да се ни једна цифра не понавља, је

$$P(6, 5) - P(5, 4) = 720 - 2 \cdot 120 = 720 - 240 = 480.$$

$\Diamond$

3.2 Број k-чланих подскупова

Теорема 2. (Број k-чланих подскупова). *Број свих k-чланих подскупова скупа од n елемената је*

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{8}$$

Доказ. Нека је S произвољан скуп са n елемената. Скуп свих k-чланих подскупова од S означимо са $\binom{S}{k}$. Како сви n-члани скупови имају исти број k-чланих подскупова, тај број означимо са

$$\binom{n}{k} = \binom{|S|}{k} = \left|\binom{S}{k}\right|.$$

Празан скуп је једини подскуп од S који има 0 елемената, а цели скуп S је једини подскуп са n елемената. Зато је $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$.

Да бисмо одредили број $\binom{n}{k}$ за сваки k, посматрајмо скуп

$$P = \{(x, A) : A \in \binom{S}{k}, x \in A\}.$$

Број елемената у скупу P пребројимо на два начина:

1) Ако прво изаберемо $x \in S$ (то можемо урадити на n начина), скуп A који садржи x треба допунити са $k-1$ елементом од $n-1$ преосталих из $S\backslash\{x\}$. То можемо урадити на $\binom{n-1}{k-1}$ начин.

2) Ако прво бирамо скуп A, то можемо урадити на $\binom{n}{k}$ начина. Сада, један елемент $x \in A$ можемо изабрати на k начина.

Тако смо добили да је

$$n\binom{n-1}{k-1} = |P| = k\binom{n}{k},$$

па важи следећа рекурзивна релација:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Ако ову релацију применимо k пута, добијемо да је:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}\binom{n-k}{0} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

□

Пример 3.4. *Одредити све двочлане, као и све трочлане подскупове скупа* $A = \{a, b, c, d, e\}$.

Решење. Тражени двочлани подскупови скупа A (ради једноставности уместо $\{a, b\}$ писаћемо ab), су:

$$ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de.$$

Тражени трочлани подскупови скупа A (ради једноставности уместо $\{a, b, c\}$ писаћемо abc), су:

$$abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.$$

$\Diamond$

Пример 3.5. *Кошаркашки тим сачињавају* 5 *бекова,* 4 *центра, и* 3 *крила. На колико се начина од њих може саставити петорка, ако у њој морају да играју бар два бека и један центар?(Припреме за пријемни испит из математике, Математички факултет у Београду,* 2007*, задатак* 800*)*

Решење. Имамо следеће случајеве:

а) Прва петорка би могла да садржи 2 бека, 1 центар и 2 крила. Два бека можемо изабрати на $\binom{5}{2}$ начина, један центар можемо изабрати на $\binom{4}{1}$ начина, и два крила можемо изабрати на $\binom{3}{2}$ начина. На основу *принципа производа* број могућих начина за формирање петорке је
$$\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2}$$

б) Друга петорка би могла да садржи 2 бека, 2 центра и 1 крило. Два бека можемо изабрати на $\binom{5}{2}$ начина, два центра можемо изабрати на $\binom{4}{2}$ начина, и једно крило можемо изабрати на $\binom{3}{1}$ начина. На основу *принципа производа* број могућих начина за формирање петорке је
$$\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1}$$

в) Трећа петорка би могла да садржи 2 бека и 3 центра. Два бека можемо изабрати на $\binom{5}{2}$ начина, три центра можемо изабрати на $\binom{4}{3}$ начина. На основу *принципа производа* број могућих начина за формирање петорке је
$$\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{3}$$

г) Четврта петорка би могла да садржи 3 бека, 1 центар и 1 крило. Три бека можемо изабрати на $\binom{5}{3}$ начина, један центар можемо изабрати на $\binom{4}{1}$ начина, и једно крило можемо изабрати на $\binom{3}{1}$ начина. На основу *принципа производа* број могућих начина за формирање петорке је
$$\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1}$$

д) Пета петорка би могла да садржи 3 бека и 2 центра. Три бека можемо изабрати на $\binom{5}{3}$ начина, два центра можемо изабрати на $\binom{4}{2}$ начина. На основу *принципа производа* број могућих начина за формирање петорке је
$$\binom{5}{3} \cdot \binom{4}{2}$$

ђ) Шеста петорка би могла да садржи 4 бека и 1 центар. Четири бека можемо изабрати на $\binom{5}{4}$ начина, један центар можемо изабрати на $\binom{4}{1}$ начина. На основу *принципа производа* број могућих начина за формирање петорке је
$$\binom{5}{4} \cdot \binom{4}{1}$$

На основу *принципа суме* број начина да се састави петорка, тако да испуњава услове задатка, је
$$\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} + \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} + \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{3} +$$
$$+ \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} + \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{2} + \binom{5}{4} \cdot \binom{4}{1}.$$

$\Diamond$

3.2.1 Биномни коефицијенти

Ознаку $\binom{n}{k}$ први је употребио Андреас фон Етингшаусен[6], и бројеве $\binom{n}{k}$ називамо *биномни коефицијенти.* С тим у вези, доказаћемо и следећу теорему.

[6] Andreas Freiherr von Ettingshaussen(1796-1878), немачки физичар и математичар

Теорема 3.. *1) За произвољан природан број n важи*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n. \tag{9}$$

2) За све природне бројеве $n \geqslant k \geqslant 1$ је

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{10}$$

Решење. 1) Партитивни скуп од $[n]$ је дисјунктна унија скупова

$$\binom{[n]}{0}, \binom{[n]}{1}, \ldots, \binom{[n]}{n}$$

Тражена формула се добија помоћу *принципа суме* и тврђења из теорема 2. и пример 2.12.

2) Све k-члане подскупове од $[n]$ поделимо у две групе. Подскупови од $[n]$ који не садрже n су такође k-члани подскупови скупа $[n-1]$, и њих има $\binom{n-1}{k}$. Сада опишимо бијекцију између скупа свих $(k-1)$-чланих подскупова од $[n-1]$ и скупа k-чланих подскупова скупа $[n]$ који садрже број n. Та бијекција је „додавање“ броја n у $(k-1)$-чалне подскупове од $[n-1]$. Зато је број k-чланих подскупова од $[n]$ који садрже n једнак $\binom{n-1}{k-1}$. Формула коју желимо доказати се сада добија помоћу *принципа суме.*

$\Diamond$

Једнакост

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

се у страној литератури назива *Паскалов идентитет* (енг. Pascal's identity) и блиско је повезан са тзв. *Паскаловим троуглом*, који је приказан у табели

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1
–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Паскалов троугао представља бесконачан низ природних бројева. Крајњи бројеви су увек јединице. *Паскалов троугао* се конструише тако што се крене од 1, а нови број се добија сабирањем суседа из претходног реда. На овај начин можемо брзо доћи до *биномног коефицијента* без потребе да множимо и делимо.

Правила у Паскаловом троуглу:

1. Збир S_n бројева у n-тој врсти је два пута већи од збира S_{n-1} у $n-1$ врсти.

2. У свакој врсти два, од крајева једнако удаљена, члана су међусобно једнака.

3. Елемент који настаје сабирањем узастопних елемената a и b претходне врсте (a се налази лево, док b десно), једнак је збиру бројева на које се наилази пењући се од a по паралели леве странице троугла, или од b по паралели десне странице.

4. Уколико се приближавамо средини колоне, чланови написани у колонама расту.

5. У свакој врсти, збир елемената парних редних бројева и збир непарних редних бројева је једнак.

4 ЗАДАЦИ СА РЕШЕЊИМА

Пример 4.1. *У неком ресторану служе три врсте предјела, седам врста главних јела и пет врста колача. На колико начина се може изабрати комплетан оброк, тј. предјело, главно јело и десерт? На колико начина се може изабрати „јефтинији" оброк од само два дела, ако главно јело мора бити укључено?*

Решење. Означићемо скупове предјела, главног јела и колача, редом, са A, B, C. Коришћењем *принципа производа* избор комплетног оброка, тј. једног предјела, једног главног јела и једног десерта, је избор елемената из $A \times B \times C$, па је број начина да се то уради једнак

$$|A \times B \times C| = 3 \cdot 7 \cdot 5 = 105.$$

Избор „јефтинијег" оброка, тј. оброк од два јела тако да сваки оброк садржи главно јело, је избор елемената из скупа предјела и главног јела $A \times B$ и избор елемената из скупа главног јела и десерта $B \times C$. Комбинујући *принцип суме* и *принцип производа* јефтинији оброк можемо изабрати на

$$|A \times B| + |B \times C| = 3 \cdot 7 + 7 \cdot 5 = 56$$

начина. $\Diamond$

Пример 4.2. *За нумерацију страница једне књиге употребљене су* 2322 *цифре. Колико та књига има страница?(Припреме за пријемни испит из математике, Математички факултет у Београду,* 2007*, задатак* 783*)*

Решење. За странице које су нумерисане бројевима $1 - 9$ употребљено је 9 цифара. Странице које су нумерисане бројевима $10 - 99$ имају 90 бројева, и сваки од тих бројева садржи 2 цифре, за њихову нумерацију употребљено је $2 \cdot 90 = 180$ цифара.
Од странице која је нумерисана бројем 100 до странице која је нумерисана бројем 199 има 100 бројева, и сваки од тих бројева садржи 3 цифре, па је за нумерацију тих страница употребљено $3 \cdot 100 = 300$ цифара. Слично и за странице нумерисане бројевима $200 - 799$, оне садрже 600 бројева, сваки број садржи три цифре, па је укупан број цифара употребљен за те странице $3 \cdot 600 = 1800$. Укупан број употребљених цифара од странице 1 до странице 799, је

$$9 + 180 + 300 + 1800 = 2289.$$

Како је за нумерацију страница књиге употребљено 2322 цифре, преостало је још

$$2322 - 2289 = 33$$

цифре за нумерацију страница. Од странице $800 - 810$ има 11 бројева, и за њихову нумерацију потребне су $3 \cdot 11 = 33$ цифре. Укупан број употребљених цифара од странице 1 до странице 810, је

$$9 + 180 + 300 + 1800 + 33 = 2322.$$

тј. књига има 810 страница. $\Diamond$

Пример 4.3. *Колико има непарних природних бројева већих од* 1000 *а мањих од* 10000 *код којих су све цифре различите?*

Решење. Сви бројеви између 1000 и 10000 су четвороцифрени, а како у задатку није посебно наглашен скуп цифара, закључујемо да у обзир долази скуп

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

од десет елемената. С обзиром да се траже непарни природни бројеви, цифра јединица је један од бројева из скупа $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$$\underline{*}\,\underline{*}\,\underline{*}\,\underline{|A|}.$$

Цифра десетица и цифра стотина може бити један од бројева из скупа $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$\underline{*}\,\underline{|B|}\,\underline{|B|}\,\underline{|A|},$$

док цифра хиљада може бити број из скупа $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$\underline{|C|}\,\underline{|B|}\,\underline{|B|}\,\underline{|A|}.$$

Како је услов задатка да цифре морају бити различите, закључујемо да за избор цифре јединице постоји 5 могућности, за избор цифре десетице постоји 9 могућности, за избор цифре стотине постоји 8 могућности и за избор цифре хиљада постоји 7 могућности. На основу *принципа производа* имамо

$$5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2520$$

таквих бројева. Пошто смо овде рачунали и бројеве код којих је прва цифра 0, потребно је да све такве бројеве одузмемо од горе добијеног броја. Бројеве код којих је прва цифра 0 добићемо помоћу *принципа производа.* За избор цифре јединице постоји 5 могућности, за избор цифре десетице постоји 8 могућности, за избор цифре стотине постоји 7 могућности и на месту цифре хиљада може бити број 0. Број природних бројева код којих је прва цифра 0, који су непарни, и код којих су све цифре различите једнак

$$5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 280.$$

Док је број природних бројева између 1000 и 10000, код којих су све цифре различите једнак

$$5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot (9 - 1) = 2240.$$

$\Diamond$

Пример 4.4. *На колико различитих начина се могу поредати шест томова енциклопедије на полицу, тако да први том није ни први ни последњи у низу, други том се налази поред трећег тома, а пети и шести том се не налазе један поред другог?(Општинско такмичење из математике ученика четвртог разреда средњих школа у Србији,* 2008*, задатак* 5*)*

Решење. Најпре ћемо израчунати на колико различитих начина се може поредати шест томова енциклопедије на полицу, уз услове да први том није ни први ни последњи у низу, и да се други том налази поред трећег тома. С обзиром да се други и трећи том налазе један поред другог, посматраћемо их као један том, па налазимо број могућих различитих распореда за пет томова енциклопедије на полицу. На прво место можемо да поставимо један од томова $2-3, 4, 5, 6$ како ће се број томова смањити за 1 на последње место можемо поставити један од преостала три тома.

$$\underset{4}{\_}\ \overset{*}{\_}\ \overset{*}{\_}\ \overset{*}{\_}\ \underset{3}{\_}$$

Како се на преостала три места, друго, треће и четврто, може наћи и први том, посматраћемо скуп који садржи преостала два тома и први том. На друго место можемо поставити један од томова из тог скупа, на треће место можемо поставити један од преостала два тома, и на четврто место можемо поставити један преостали том.

$$\overline{4}\,\overline{3}\,\overline{2}\,\overline{1}\,\overline{3}$$

Користећи *принцип производа* број могућих начина да поставимо пет томова енциклопедије на полицу, уз услов да први том није ни први ни последњи у низу, је

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 4! \cdot 3.$$

Други и трећи том смо посматрали као један, па је потребно добијени број помножити са 2, из разлога што имамо распореде у којима је други том испред трећег и распореде у којима је други том иза трећег тома. Број могућих начина да поставимо шест томова енциклопедије на полицу, уз услове да први том није ни први ни последњи у низу и да се други том налази поред трећег тома, је

$$4! \cdot 3 \cdot 2 = 144.$$

Када смо распоређивали ових шест томова, нисмо пазили на услов да се пети и шести том не налазе један поред другог, тако да ћемо од добијеног броја распореда уз претходне услове одузети број распореда када су пети и шести том један поред другог. И у овом случају ћемо други и трећи том посматрати као један, као и пети и шести том, тако да је потребно да распоредимо четири тома $1, 2-3, 4, 5-6$ На прво место можемо да поставимо један од томова $2-3, 4, 5-6$ како ће се број томова смањити за 1 на последње место можемо поставити један од преостала два тома.

$$\underset{3}{\_}\ \overset{*}{\_}\ \overset{*}{\_}\ \underset{2}{\_}$$

Како се на преостала два места, друго и треће, може наћи и први том, посматраћемо скуп који садржи преостали један том и први том. На друго место можемо поставити један од томова из тог скупа, и на треће место можемо поставити један преостали том.

$$\overline{3}\,\overline{2}\,\overline{1}\,\overline{2}$$

Користећи *принцип производа* број могућих начина да поставимо четири тома енциклопедије на полицу, уз услов да први том није ни први ни последњи у низу, је

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 3! \cdot 2.$$

И овде смо други и трећи том посматрали као један, па је потребно добијени број помножити са 2, из разлога што имамо распореде у којима је други том испред трећег и распореде у којима је други том иза трећег тома, слично и за пети и шести том. Број могућих начина да поставимо шест томова енциклопедије на полицу, уз услове да први том није ни први ни последњи у низу, да се други том налази поред трећег тома, и пети и шести том се налазе један поред другог, је

$$3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48.$$

Одузимајући први добијени број распореда томова, уз услове да се први том не налази ни на првом ни на последњем месту и да се други том налази поред трећег тома, од другог добијеног броја, уз услове да се први том не налази ни на првом ни на последњем месту, да се други том налази поред трећег тома, и да се пети и шести том налазе један поред другог, добијамо и број могућих распореда томова уз услове дате у задатку, тј.

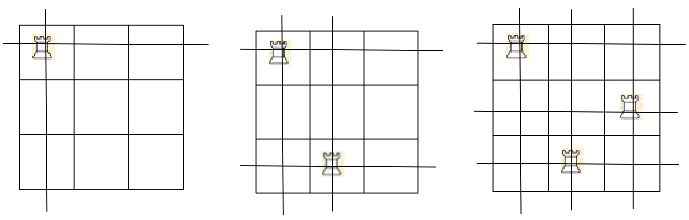
$$144 - 48 = 96.$$

$\Diamond$

Пример 4.5. *На колико начина се на таблу $n \times n$ може поставити k топова који су различите боје и који се не нападају? Шта ако су топови исте боје?*

Решење. Овај задатак ћемо урадити на два начина.

Први начин: Да би смо лакше урадили овај задатак за n ћемо узети вредност 3, значи $n = 3$. Имамо таблу $3{\times}3$, првог топа можемо поставити на било које место на табли (има их 9), услов задатка је да су топови различите боје и да се не нападају. Из ових услова знамо да где је постављен први топ не могу се наћи други топови, другог топа можемо поставити на неко од преостала 4 места. За трећег топа је преостало само једно место.



На основу *принципа производа* имамо да на таблу 3×3 можемо поставити 3 различита топа који се не нападају на

$$9 \cdot 4 \cdot 1 = 3^2 \cdot (3-1)^2 \cdot (3-2)^2$$

начина, или

$$9 \cdot 4 \cdot 1 = 3^2 \cdot (3-1)^2 \cdot (3-3+1)^2$$

начина. На основу горе добијеног резултата, на таблу $n \times n$ можемо поставити k различитих топова који се не нападају на

$$n^2 \cdot (n-1)^2 \cdots (n-k+1)^2$$

начина.

Други начин: Нека је $a(n,k)$ број размештаја k топова на таблу $n \times n$. Првог топа можемо поставити на n^2 начина, док преосталих $k-1$ топова, на таблу $(n-1) \times (n-1)$ можемо поставити на $a(n-1,k-1)$ начина. Па на основу *принципу производа* имамо да је

$$a(n,k) = n^2 \cdot a(n-1,k-1)$$

Како је $a(l,1) = l^2$, применом *рекурзивне релације* довољан број пута, добићемо

$$a(n,k) = n^2 \cdot (n-1)^2 \cdots (n-k+1)^2.$$

Број размештаја топова који су исте боје је $\frac{1}{k!}$-ти део добијеног броја $a(n,k)$, јер сваку пермутацију k топова видимо као исту, не разликујемо их, тј.

$$\frac{n^2 \cdot (n-1)^2 \cdots (n-k+1)^2}{k!}.$$

$\diamondsuit$

Пример 4.6. *Колико има низова* 0 *и* 1 *дужине* 10*, таквих да се међу свака три узастопна члана низа налази највише једна јединица?(Окружно такмичење из математике ученика четвртог разреда средњих школа у Србији,* 2008*, задатак* 5*)*

Решење. Да би услов дат у задатку био испуњен, иза сваке јединице морају бити две нуле, па ћемо на низ дужине 10 додати још две нуле, и посматрати низ дужине 12. Нека је k број јединица у низу, из услова задатка видимо да је $k \geqslant 0$. У случају када је $k = 0$ имамо само један низ који задовољава услове задатка, и то

000000000000.

Када је $k = 1$ имамо 10 места на које можемо поставити једну јединицу, тј. $\binom{10}{1}$ различитих низова 0 и 1. Када је $k = 2$ имамо 8 места на које можемо поставити две јединице, тако да се иза сваке јединице нађу две нуле, тј. имамо $\binom{8}{2}$ различитих низова 0 и 1 који испуњавају услов задатка. Када је $k = 3$ имамо 6 места на које можемо поставити три јединице, тј. $\binom{6}{3}$ различитих низова 0 и 1. Када је $k = 4$ имамо 4 места на која можемо поставити четири јединице, тј. $\binom{4}{4}$ различитих низова 0 и 1, и то низ

$$100100100100.$$

Када је $k = 5$, за низ код кога би иза сваке јединице биле две 0 потребно нам је десет 0, како је наш низ дужине 12, закључујемо да је $0 \leqslant k \leqslant 4$. На основу *принципа суме* број низова 0 и 1 дужине 10, таквих да се међу свака три узастопна члана низа налази највише једна јединица, је

$$1 + \binom{10}{1} + \binom{8}{2} + \binom{6}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 10 + 28 + 20 + 1 = 60.$$

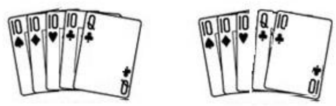
$\diamondsuit$

Пример 4.7. *Зашто број* $\binom{13}{1}\binom{51}{4}$ *није одговор на питање: На колико начина се може изабрати пет карата тако да бар једна карта буде треф?*
Одреди тачан одговор!

Решење. Уколико би резлутат овог задатка био

$$\binom{13}{1}\binom{51}{4}$$

дошло би до бројања неких решења више пута, нпр.



Тачно решење би било следеће:
из скупа од 52 карте изаберемо пет карти $\binom{52}{5}$. Пошто ће се у овим комбинацијама појавити и нека код које од тих пет карата ни једна неће бити треф, потребно је да од горе добијеног броја одузмемо све те комбинације. Број комбинација код којих ни једна карта није треф ћемо добити тако што

од 39 карата, међу којима ни једна није треф, изаберемо пет карата $\binom{39}{5}$.
Значи, пет карата тако да бар једна карта буде треф можемо изабрати на

$$\binom{52}{5} - \binom{39}{5}$$

начина. ♢

Пример 4.8. *У орману се налази* 10 *пари ципела. На колико начина се могу изабрати* 4 *ципеле тако да међу изабраним ципелама буде бар један пар исте врсте?(Припреме за пријемни испит из математике, Математички факултет у Београду,* 2007*, задатак* 802*)*

Решење. У орману се налази 10 пари ципела, што значи да има 20 ципела. Од 20 ципела 4 ципеле можемо изабрати на $\binom{20}{4}$ начина.
Како смо у овим комбинацијама рачунали и оне у којима међу изабраним ципелама нема ни један пар ципела исте врсте, потребно је да такве комбинације одузмемо од укупног броја комбинација. Број таквих комбинација, у којима нема ни један пар ципела исте врсте, добићемо тако што од 10 пари ципела изаберемо 4 пара и то можемо урадити на $\binom{10}{4}$ начина, а затим из сваког тог пара изаберемо по једну ципелу, то можемо урадити на 2^4 начина. Применом *принципа производа* број избора 4 ципеле међу којима нема ни један пар ципела исте врсте је

$$2^4 \cdot \binom{10}{4}.$$

Док је број начина на који можемо изабрати 4 ципеле тако да међу изабраним ципелама буде бар један пар исте врсте

$$\binom{20}{4} - 2^4 \cdot \binom{10}{4}.$$

♢

Пример 4.9. *Колико има бројева од* 1 *до* 10000 *у чијем се запису бар једном употреби цифра* 1*?*

Решење. Бројеве које треба да пребројимо могу да буду једноцифрени, двоцифрени, троцифрени, четвороцифрени и да у свом запису имају бар једну цифру 1. Ако број има, нпр. k ($k = 1, 2, 3, 4$) цифара, дописаћемо испред њега $4 - k$ нула. Овако добијених низова од 4 цифре у којима се јављају цифре $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, које могу бити поновљене, има

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$$

укључујући ту и низ 0000. Услов задатка је да у запису буде бар једна цифра 1, пошто смо у горе добијеном резултату рачунали и бројеве који не испуњавају тај услов, потребно је да све те бројеве одузмемо од 10^4. Број таквих комбинација ћемо добити тако што сада образујемо низове од четири цифре у којима се јављају цифре $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, значи нема цифре 1. Тако добијених низова има

$$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^4$$

укључујући ту и низ 0000.
Разлика

$$10^4 - 9^4$$

представља број природних бројева од 1 до 10000, у чијем се запису бар једном употреби цифра 1. $\Diamond$

Пример 4.10. *На колико начина шест парова може да седне у ред биоскопа који има* 20 *места, ако сваки пар жели да седне на суседна места?(Окружно такмичење из математике ученика првог разреда средњих школа у Србији,* 2010*, задатак* 5*)*

Решење. Из услова задатка видимо да ће сваки пар да седи на два суседна места, па ћемо та два места посматрати као једно. Када се сви парови сместе имаћемо 6 заузетих и 8 слободних места. Из скупа од 14 места (6 заузетих и 8 слободних) можемо распоредити 6 места на $\left(\begin{array}{c} 14 \\ 6 \end{array} \right)$ различитих начина. Сваком заузетом месту треба да придружимо парове. На прво заузето место можемо поставити један од шест парова, на друго место можемо поставити један од преосталих пет парова, на треће место можемо поставити један од преостала четири пара, на четврто место можемо поставити један од преосталих три пара, на пето место можемо поставити један од преостала два пара, и на шесто место можемо поставити један преостали пар

$$\overline{6}\,\overline{5}\,\overline{4}\,\overline{3}\,\overline{2}\,\overline{1}$$

Применом *принципа производа* парове можемо придружити заузетим местима на $6!$ начина. Сваки пар на заузето место може сести на два начина, па је број могућности за то 2^6.
Број начина на које шест парова може да седне у ред биоскопа који има 20 места, тако да сваки пар седи на суседним местима, је

$$2^6 \cdot \left(\begin{array}{c} 14 \\ 6 \end{array} \right) \cdot 6!$$

$\Diamond$

Пример 4.11. *Бацају се три различите коцкице за јамб. Докажи да је број различитих исхода код којих је збир бројева који су „пали“ на коцкицама мањи од* 11 *једнак половини броја свих могућих исхода!*

Решење. Означићемо са a, b, c редом бројеве које смо добили приликом бацања коцкица. На основу услова из задатка бројимо различите исходе код којих је
$$a+b+c<11.$$
Нека је
$$a+b+c=k,\ k=3,4,\ldots,18$$
пресликавање
$$(a,b,c) \quad \to \quad (7-a,7-b,7-c)$$
је бијекција, између скупа код којих је збир бројева који су „пали“ на коцкицама мањи од 11 и скупа код којих је збир бројева који су „пали“ на коцкицама већи од 11, тј.

$K_1=\{(a,b,c)|a+b+c<11\}$ и $K_2=\{(7-a,7-b,7-c)|7-a+7-b+7-c \geqslant 11\}$

и имамо да је
$$|K_1|=|K_2|=m_1=m_2.$$
Скупови K_1 и K_2 су дисјунктни, па је на основу *принципа суме*
$$\begin{aligned} |K_1|+|K_2| &= |K_1+K_2|=m \\ m_1+m_1 &= m \\ 2\cdot m_1 &= m \\ m_1 &= \tfrac{m}{2}. \end{aligned}$$

◊

Пример 4.12. *Два тима сваки са по* 6 *фудбалера, имају на располагању* 4 *шорца и* 4 *мајице, у свакој од следећих боја црвена, плава и бела. На колико начина фудбалери могу да се обуку за утакмицу тако да сваки фудбалер обуче шорц и мајицу, ако се зна да сваки тим мора да има своју карактеристичну боју?(Окружно такмичење из математике ученика четвртог разреда средњих школа у Србији,* 2009*, задатак* 5*)*

НАПОМЕНА. *Боја је карактеристична за тим ако сваки играч тог тима има бар један одевени предмет те боје, а да притом нико из супротног тима нема ни један одевени предмет те боје.*

Решење. У случају када би један тим имао две карактеристичне боје, како у трећој боји има 8 одевених предмета, а за облачење једног тима је потребно $6 \cdot 2$ (имамо 6 играча који треба да обуку шорц и мајицу) одевених предмета, играче из другог тима не би могли да обучемо. Закључујемо да један тим не може имати две карактеристичне боје.
Играчи једног тима морају обући свих 8 одевених предмета у својој карактеристичној боји, и преостала 4 одевена предмета ће бити на 4 различита играча у боји која није карактеристична за други тим.
Применом *принципа производа* број начина на које се може изабрати карактеристична боја за тим је $3 \cdot 2$ (имамо скуп од три боје и скуп који садржи два тима), тј.

$$\{cc, cc, cp, cp, pc, pc\}$$
$$\{bb, bb, bp, bp, pb, pb\}$$
$$\{cc, cc, cb, cb, bc, bc\}$$
$$\{pp, pp, pb, pb, bp, bp\}$$
$$\{bb, bb, bc, bc, cb, cb\}$$
$$\{pp, pp, pc, pc, cp, cp\}$$

Ако су играчи изабрали карактеристичну боју за свој тим, за облачење првог играча имамо 6 могућности, за другог играча имамо преосталих 5 могућности, за трећег играча имамо преосталих 4 могућности, за четвртог играча имамо преосталих 3 могућности, за петог играча имамо преостале две могућности, и за облачење шестог играча имамо једну преосталу комбинацију.

$$\overline{6}\,\overline{5}\,\overline{4}\,\overline{3}\,\overline{2}\,\overline{1}$$

Применом *принципа производа* имамо

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$$

начина за облачење играча. Сваку пермутацију играча који носе исте комбинације (нпр. два играча из истог тима имају црвену мајицу и црвени шорц, два играча имају црвену мајицу и плави шорц, и два играча имају плаву мајицу и црвени шорц) видимо као исту, играчи једног тима могу да се обуку на

$$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$$

начина. Како сваки тим може изабрати карактеристичну боју на 6 начина, то је и, применом *принципа производа*, број различитих облачења ова два тима једнак

$$6 \cdot \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}.$$

$\diamondsuit$

Пример 4.13. *Колико има уређених парова (m, n) природних бројева којима је најмањи заједнички садржалац $2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^3$?*

Решење. Да би дати број $2^5 \cdot 3^7 \cdot 5^3$ био најмањи заједнички садржалац бројева m и n, оба броја морају бити облика

$$\begin{array}{rcl} m & = & 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \\ n & = & 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} \end{array}$$

и при томе је:

$$\begin{array}{rcccl} 0 & \leqslant & a_1, b_1 & \leqslant & 5, \\ 0 & \leqslant & a_2, b_2 & \leqslant & 7, \\ 0 & \leqslant & a_3, b_3 & \leqslant & 3. \end{array}$$

Како је

$$NZS(2^{a_1}\cdot 3^{a_2}\cdot 5^{a_3}, 2^{b_1}\cdot 3^{b_2}\cdot 5^{b_3}) = 2^{max\{a_1,b_1\}}\cdot 3^{max\{a_2,b_2\}}\cdot 5^{max\{a_3,b_3\}}$$

то такође већи од бројева a_i, b_i мора бити једнак одговарајућем експоненту $5, 7$, или 3. Зато за избор (a_1, b_1) имамо $2\cdot 6-1$ могућности (један 6, други мањи од њега или оба 6), за (a_2, b_2) имамо $2\cdot 8-1$ могућности, и за (a_3, b_3) имамо $2\cdot 4-1$ могућности. На основу *принципа производа*, тражени број парова је

$$11\cdot 15\cdot 7 = 1155.$$

◊

Пример 4.14. *Колико има уређених парова скупа* (A, B) *таквих да је* $A\subseteq B\subseteq [n]$*?*

Решење. Уочимо произвољан подскуп B скупа $[n]$ који има k елемената. Тада је број скупова A који задовољавају $A\subseteq B$ једнак 2^k. Ово важи за сваки подскуп $B\subseteq [n]$, $|B| = k$, а број оваквих B-ова је $\binom{n}{k}$ (број избора k-точланог подскупа n-точланог скупа). Дакле,

$$\binom{n}{k}\cdot 2^k$$

представља број парова $A, B, A\subseteq B$ таквих да је $|B| = k$. Како је $0\leqslant k\leqslant n$, то је укупан број оваквих парова

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k\cdot 1^{n-k} \overset{\text{(Биномна формула)}}{=} (1+2)^n = 3^n.$$

◊

Пример 4.15. *Да ли је могуће да у неком друштву број људи са непарним бројем познаника буде непаран?*

Решење. Посматрајмо скуп

$$A = \{(x, \{x, y\}) | x \text{ i } y \text{ su ljudi iz tog društva koji se poznaju}\}$$

Нека је m број неуређених парова у том друштву, и нека је $a_i, i = 1, 2, \ldots, n$, број познаника i-те особе из тог друштва. Ако у пару $(x, \{x, y\})\in A$ прво изаберемо неуређени пар, па онда особу која припада том неуређеном пару добићемо да је $|A| = 2m$. Ако скуп A пребројимо тако што саберемо познанике сваке особе из скупа добићемо $|A| = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Имамо да је

$$2m = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Нека је

$$\begin{array}{ccl} k & - & \text{број људи са парним бројем познаника,} \\ l & - & \text{број људи са непарним бројем познаника,} \end{array}$$

тада је

$$2m = \underbrace{\underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}_{\text{паран број}} + \underbrace{a_{k+1} + \ldots + a_{k+l}}_{\text{непаран број}}}_{\text{непаран број}}, \quad k + l = n$$

$$2m = \text{непаран број}$$

на основу тога закључујемо да је број људи са непарним бројем познаника увек паран. ♢

Пример 4.16. *Дете има „коцкице" за слагање које су све међусобно различите по: материјалу (дрво и пластика), величини (мале, средње и велике), боји (црвене, плаве, зелене и жуте) и облику (округле, троугласте, квадратне и правоугаоне). Укупно има* $96 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$ *коцкица. Колико има коцкица које се од дрвеног, великог, плавог квадрата разликују у тачно две особине?*

Решење. У овом случају имамо четири скупа, и то скуп материјала $M = \{\text{ drvo, plastika}\}$, скуп величина $V = \{\text{ mala, srednja, velika}\}$, скуп боја $B = \{\text{ crvena, plava, zelena, žuta}\}$ и скуп облика $O = \{\text{ krug, trougao, kvadrat, pravougaonik}\}$. Коцкице које треба да пребројимо имају четири особине, две особине су исте а две различите од коцкице која има особине да је дрвена, велика, плава, и облика квадрата.

$$\text{дрво велика} \ * \ *$$

-користећи *принцип производа* број оваквих коцкица је $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3$

$$\text{дрво} \ * \ \text{плава} \ *$$

-користећи *принцип производа* број оваквих коцкица је $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3$

$$\text{дрво} \ * \ * \ \text{квадрат}$$

-користећи *принцип производа* број оваквих коцкица је $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1$

$$* \ \text{велика плава} \ *$$

-користећи *принцип производа* број оваквих коцкица је $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3$

$$* \ \text{велика} \ * \ \text{квадрат}$$

-користећи *принцип производа* број оваквих коцкица је $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1$

$$* \ * \ \text{плава квадрат}$$

-користећи *принцип производа* број оваквих коцкица је $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$

Користећи *принцип суме*, број коцкица које се од *дрвеног, великог, плавог, квадрата* разликују у тачно две особине је

$$3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 29.$$

$\diamondsuit$

Пример 4.17. *Колико има функција $f : [n] \to [n]$ без фиксне тачке?*

Решење. Сваки $k \in [n]$ може се пресликати у неки елемент скупа $[n] \backslash k$. Дакле, сваки од бројева $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ може се бирати на $n-1$ начин, па је према *принципу производа* број функција $f : [n] \to [n]$ без фиксне тачке

$$(n-1)^n.$$

$\diamondsuit$

Пример 4.18. *Колико има пермутација $f : [n] \to [n]$ без фиксне тачке?*

Решење. Број пермутација које фиксирају тачке $p_1, p_2, \ldots, p_k \in [n]$ је

$$(n-k)!.$$

Према *принципу укључења-искључења* укупан број пермутација које имају бар једну фиксну тачку износи

$$\sum_{\{p_1\} \subset [n]} (n-1)! - \sum_{\{p_1, p_2\} \subset [n]} (n-2)! + \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{\{p_1, p_2, \ldots, p_k\} \subset [n]} (n-k)! + \cdots$$

где су суме по k-точланим подскуповима скупа $[n]$. Срећивањем горњег израза добијамо

$$\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)! + \cdots =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)!.$$

Укупан број пермутација без фиксне тачке је једнак

$$n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} =$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

$\diamondsuit$

Пример 4.19. *Нека је $\mathcal{F}$ нека фамилија подскупова коначног скупа X. Ако сви скупови из $\mathcal{F}$ имају тачно k елемената и ако се сваки елемент из X налази у тачно r скупова из фамилије $\mathcal{F}$, докажи да је $\mid \mathcal{F} \mid \cdot k = \mid X \mid \cdot r$.*

Решење. Пребројмо колико елемената имају сви скупови из фамилије $\mathcal{F}$ рачунајући сваки елемент онолико пута колико се појављује. Сваки елемент из скупа X се налази у тачно r скуповаиз фамилије $\mathcal{F}$, па је укупан број

$$|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_i| = |X| \cdot r$$

где је A_j, $j = 1, 2, \ldots, i$ елемент из фамилије $\mathcal{F}$.
С друге стране, знамо да је

$$|A_j| = k,\ j = 1, 2, \ldots, i$$

па је

$$i \cdot k = |X| \cdot r$$

тј.

$$|\mathcal{F}| \cdot r = |X| \cdot r$$

$\diamond$

Пример 4.20. *Колико има петоцифрених природних бројева дељивих са три, којима је средња цифра једнака* 6*?*

Решење. Да би смо дошли до решења прво ћемо да израчунамо колико има петоцифрених бројева код којих је средња цифра 6. Користећи *принцип производа* долазимо до тог броја

$$9 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 \cdot 9 = 9000$$

Док петоцифрених бројева код којих је средња цифра 6 и који су дељиви са бројем 3 има

$$9000 \div 3 = 3000.$$

$\diamond$

Пример 4.21. *Колико има различитих* $m \times n$ *табела попуњених бројевима* -1 *или* 1 *у којима је производ елемената у свакој врсти и свакој колони једнак* 1.

Решење. Лако можемо да приметимо да производ елемената у свакој врсти и свакој колони зависи од последњег унетог елемента. Применом последице 2.1, долазимо и до нашег решења. Скуп $L = \{-1, 1\}$ има два симбола, тј. $s = 2$, док је дужина низа $k = (m-1) \cdot (n-1)$.

$$s^k = 2^{(m-1)\cdot(n-1)}$$

је број различитих $m \times n$ табела попуњених бројевима -1 или 1 у којима је производ елемената у свакој врсти и свакој колони једнак 1. $\diamond$

Пример 4.22. *Седмоцифрени телефонски број* $abcdefg$ *је лак за памћење ако је* $(a, b, c) = (d, e, f)$ *или* $(a, b, c) = (e, f, g)$*. Колико има таквих телефонских бројева састављених од цифара* $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$*?*

Решење. Прво ћемо да избројимо колико има телефонских бројева код којих је $(a, b, c) = (d, e, f)$. Користећи *принцип производа* број $abcdefg$, где су бројеви a, b, c једнозначно одређени избором бројева d, e, f, можемо направити на

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot = 10^4$$

начина. Исто тако, користећи *принцип производа*, можемо доћи и до броја могућих телефонских бројева код којих је $(a, b, c) = (e, f, g)$, тј. где су бројеви a, b, c једнозначно одређени избором бројева e, f, g. Број таквих телефонских бројева једнак је

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot = 10^4.$$

Како ова два скупа, нпр. $A = \{a, b, c, d, e, f, g \in P | (a, b, c) = (d, e, f)\}$ и $B = \{a, b, c, d, e, f, g \in P | (a, b, c) = (e, f, g)\}$ где је $P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, нису дисјунктна, тј. оба садрже телефонске бројеве код којих су све цифре исте, користићемо *принцип укључења - искључења.* Телефонских бројева код којих су све цифре исте има 10, па је и

$$|A \cap B| = 10$$

Број телефонских бројева који испуњавају услов задатка једнак је

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 10^4 + 10^4 - 10.$$

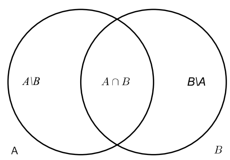
$\diamondsuit$

Пример 4.23. *На колико начина можемо изабрати два подскупа од* $[n]$ *чија је унија цели скуп* $[n]$*?*

Решење. Нека су $A, B \subseteq [n]$ и $A \cup B = [n]$. Тада сваки $k \in [n]$ има неку од следећих могућности:

$$k \in A \setminus B \vee k \in B \setminus A \vee k \in A \cap B$$

ови скупови су дисјунктни.



Према томе, сваком $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ додељујемо место од три могућа, и оваква додела одређује једнозначно скупове A и B. Зато је број могућности избора скупова $A, B, A \cap B$ где је $A, B \subseteq [n], A \cup B = [n]$, једнак броју размештаја k-ова из $[n]$ у три наведена скупа, тј. према *принципу производа*, 3^n. $\diamondsuit$

Пример 4.24. *Колико има парова суседних бројева у скупу* $\{1000, 1001, \ldots, 2000\}$ *код чијег сабирања нема преношења цифара?*

Решење. То су парови код којих је мањи број облика

$$1abc \text{ или } 1ab9 \text{ или } 1a99 \text{ или } 1999$$

где су a, b, c из скупа $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Користећи *принцип производа* и *принцип суме* долазимо и до резултата.

$1abc \Rightarrow$ на основу принципа производа, број комбинација је $1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$

$1ab9 \Rightarrow$ на основу принципа производа, број комбинација је $1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 = 5^2$

$1a99 \Rightarrow$ на основу принципа производа, број комбинација је $1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5^1$

$1999 \Rightarrow$ на основу принципа производа, број комбинација је $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

На основу *принципа суме* имамо да је

$$5^3 + 5^2 + 5^1 + 1 = 156$$

могући број парова. $\diamondsuit$

Пример 4.25. *Докажи да у скупу природних бројева мањих од милион има једнак број оних којима је збир цифара једнак* 20 *и оних којима је збир цифара једнак* 34.

Решење. Бројеви мањи од милион могу да имају највише шест цифара. Нпр. a, b, c, d, e, f и то

$$a, b, c, d, e, f \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Пресликавање

$$(a, b, c, d, e, f) \to (9 - a, 9 - b, 9 - c, 9 - d, 9 - e, 9 - f)$$

је бијекција, између скупа бројева којима је збир цифара једнак 20 и скупа бројева којима је збир цифара једнак 34. Нека је

$$s = a + b + c + d + e + f$$

тада је

$$54 - s = 9 - a + 9 - b + 9 - c + 9 - d + 9 - e + 9 - f$$

за $s = 20$ имамо да је

$$54 - s = 54 - 20 = 34.$$

$\diamondsuit$

Пример 4.26. *Бројеве* 21, 31, 41, 51, 61, 71 *и* 81 *треба поредати у низ тако да збир свака четири суседна броја буде дељив са* 3. *На колико начина се то може урадити?*

Решење. Означићемо бројеве у низу са $abcdefg$. Овде имамо три скупа, и то скуп $A = \{21, 51, 81\}$ где бројеви из скупа при дељењу са 3 дају остатак 0, скуп $B = \{31, 61\}$ где бројеви из скупа при дељењу са 3 дају остатак 1, и скуп $C = \{41, 71\}$ где бројеви из скупа при дељењу са 3 дају остатак 2. Поредаћемо бројеве у низ на основу њиховог остатка, на следећи начин

$$\frac{0}{a}\,\frac{1}{b}\,\frac{2}{c}\,\frac{0}{d}\,\frac{1}{e}\,\frac{2}{f}\,\frac{0}{g}$$

Нека је $a+b+c+d = s_1$ и $d+e+f+g = s_2$, тада је

$$\left.\begin{array}{ll} 3|s_1 & 3 \text{ дељиво са } s_1 \\ 3|s_2 & 3 \text{ дељиво са } s_2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3|s_1+s_2-d$$

За избор броја d имамо 3 могућности. Бројеви e, f, g су једнозначно одређени избором бројева a, b, c. За избор броја a имамо 6 могућности, за избор броја b имамо 4 могућности, и за избор броја c имамо 2 могућности.
Користећи *принцип производа* добијамо да је број начина за формирање низова који испуњавају услов задатка једнак

$$6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 144.$$

◊

Пример 4.27. *Колико има уређених k-торки $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ подскупова скупа $[n]$ код којих је $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_k = \emptyset$?*

Решење. Сваки елемент $i \in [n]$ може припадати ма ком од скупова $X_j, j = 1, 2, \ldots, k$, једини је услов да не припада свим скуповима. Број таквих избора можемо одредити као број k-торки нула и јединица, где је нула на j-том месту ако $i \notin X_j$, ако је јединица онда је $i \in X_j$. Оваквих избора има

$$2^k$$

али како не смемо имати све нуле, онда постоји

$$2^k - 1$$

избора који одговарају условy задатка. Према *принципу производа* и из независности размештања i-ова из $[n]$, укупан број уређених k-торки чији је пресек празан скуп, је

$$(2^k - 1)^n.$$

◊

Пример 4.28. *Колико различитих разностраничних троуглова се може направити од дужи чије су странице $1, 2, \ldots, n$?*

Решење. Нека је $1 \leqslant x < y < z$. Одредимо број решења неједначине

$$x + y > z$$

за фиксирано z.

1° $z = 2m$

$$y > x \wedge y > z - x = 2m - x \Rightarrow y > max\{x, 2m - x\}$$

$1 \leqslant x \leqslant m$:

Тада је $y > 2m - x$ (јер је $2m - x \geqslant x$) и $y \leqslant 2m - 1$, па је за фиксирано $x \in \{1, 2, \ldots, m\}$, број одговарајућих y-на: $x - 1$. Следи, за случај $1 \leqslant x \leqslant m$ имамо

$$\sum_{x=1}^{m}(x-1) = \frac{m \cdot (m+1)}{2} - m = \frac{m \cdot (m-1)}{2}$$

могућности.

$m + 1 \leqslant x \leqslant 2m - 2$:

Тада је $y \geqslant x + 1$ (јер је $x > 2m - x$) и $y \leqslant 2m - 1$, тј. за фиксирано $x \in \{m+1, \ldots, 2m-2\}$ број могућности за y је $2m - 1 - x$, па је укупан број парова (x, y) у овом случају:

$$\sum_{x=m+1}^{2m-1}(2m-1) - x = (2m-1)(m-1) - \sum_{x=m+1}^{2m-1} x =$$

$$= (2m-1)(m-1) - \frac{(2m-1) \cdot 2m}{2} + \frac{m \cdot (m+1)}{2} =$$

$$= (2m-1) \cdot (-1) + \frac{m^2 + m}{2} =$$

$$= \frac{m^2 - 3m + 2}{2} = \frac{(m-1) \cdot (m-2)}{2}$$

$\Rightarrow$ За $z = 2m$ број могућности је:

$$\left(\frac{m}{2} + \frac{m-2}{2}\right) \cdot (m-1) = (m-1)^2.$$

2° $z = 2m - 1$

$$y > max\{x, 2m - x - 1\}$$

$1 \leqslant x \leqslant m - 1$:

Тада је $y > 2m - x - 1$ и слично као и раније имамо

$$\sum_{x=1}^{m-1}(x-1) = \frac{(m-1) \cdot m}{2}.$$

$m \leqslant x \leqslant 2m-1$:

Тада је $y \geqslant x+1$, и имамо

$$\sum_{x=m}^{2m-1}(2m-1)-x=(2m-1)\cdot m-\sum_{x=m}^{2m-1}x=$$

$$(2m-1)\cdot m-\frac{(2m-1)\cdot 2m}{2}+\frac{(m-1)\cdot m}{2}=\frac{(m-1)\cdot m}{2}.$$

Дакле, у овом случају је

$$2\cdot\frac{(m-1)\cdot m}{2}=(m-1)\cdot m.$$

Како је $z \geqslant 4$, то је укупан број тражених решења
$n=2p$:

$$\sum_{z=4}^{2p}\left(\frac{z}{2}-1\right)^2+\sum_{z=5}^{2p-1}\left(\left[\frac{z}{2}\right]+1\right)\cdot\left[\frac{z}{2}\right]=$$

$$=\sum_{k=2}^{p}(k-1)^2+\sum_{k=2}^{p-1}(k+1)\cdot k=$$

$$=\sum_{k=1}^{p-1}k^2+\sum_{k=2}^{p-1}k^2+\sum_{k=2}^{p-1}k=$$

$$=-1+2\cdot\sum_{k=1}^{p-1}k^2+(-1)+\sum_{k=1}^{p-1}k=$$

$$=-2+2\cdot\frac{p\cdot(p-1)\cdot(2p-3)}{6}+\frac{p\cdot(p-1)}{2}=$$

$$=-2+\frac{2\cdot p\cdot(p-1)\cdot(2p-3)+3\cdot p\cdot(p-1)}{6}=$$

$$=\frac{p\cdot(p-1)\cdot(3+4p-6)-12}{6}=$$

$$=\frac{p\cdot(p-1)\cdot(4p-3)-12}{6}$$

$n=2p-1$:

$$\sum_{z=4}^{2p-2}\left(\frac{z}{2}-1\right)^2+\sum_{z=5}^{2p-1}\left(\left[\frac{z}{2}\right]+1\right)\cdot\left[\frac{z}{2}\right]=$$

$$=\frac{p\cdot(p-1)\cdot(4p-3)-12}{6}-(p-1)^2.$$

$\Diamond$

Пример 4.29. *Колико бројева у скупу* $\{9^k : k \in [4000]\}$ *почиње цифром* 9*? Познато је да* 9^{4000} *има 3817 цифара!*

Решење. Ако број 9^k почиње цифром 9 тада он има исти број цифара као и 9^{k-1}. У 3999 кораку број цифара повећан је на 3816 цифара, па је број бројева започетих цифром 9 облика 9^k једнак

$$3999 - 3816 + 1 = 184$$

(рачунали смо и $9^1 = 9$). $\Diamond$

Пример 4.30. *На састанку се налази* $12k$ *људи. Свака особа се руковала са тачно* $3k+6$ *осталих. За било која два човека на том састанку, број људи који се руковао са обојицом је увек исти. Колико је људи било присутно на том састанку?*

Решење. Пребројмо елементе скупа

$$X = \{(A, B, C) | A \text{ se rukovao sa } B \text{ i } C,\ B \text{ i } C \text{ se nisu rukovali}\}$$

Нека је n број људи који се руковао са двојицом из скупа X.
Бирајући особу A, а затим и особе B и C, имамо за X да је

$$|X| = 12k \cdot (3k+6) \cdot (3k+5-n).$$

Бирајући прво особу B, па C, а затим и особу A, добијамо

$$|X| = 12k \cdot (12k - (3k+7)) \cdot n = 12k \cdot (9k-7) \cdot n.$$

Одавде имамо да је

$$12k \cdot (3k+6) \cdot (3k+5-n) = 12k \cdot (9k-7) \cdot n$$

$$\Rightarrow 12k \cdot (3k+6) \cdot (3k+5) - n \cdot 12k \cdot (3k+6) = n \cdot 12k \cdot (9k-7)$$

$$\Rightarrow n = \frac{(3k+6) \cdot (3k+5)}{12k-1}$$

Закључујемо да је $3|n$, и из услова да је

$$\frac{4n}{3} = k + 4 - \frac{3k-44}{12k-1} \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & 12k-1 | -3k+44, \quad 12k-1 \leqslant -3k+44 \\ \Rightarrow & 15k \leqslant 45 \\ \Rightarrow & k \in \{1, 2, 3\} \end{array}$$

али како је $12k-1|44-3k$, добијамо да је $k = 3$, а одатле и да је број људи на састанку

$$12 \cdot k = 36.$$

$\Diamond$

Пример 4.31. *Фамилија подскупова $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$ скупа $[n]$ је сепарабилна ако за све $x, y \in [n]$, постоји скуп $A_i \in S$ такав да је $\mid A_i \cap \{x, y\} \mid = 1$. Даље, S је покривајућа ако је сваки $x \in [n]$ садржан у неком од скупова из S. Колико најмање елемената може да има нека сепарабилна, покривајућа фамилија подскупова од $[n]$.*

Решење. Нека је $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_t\}$ једна сепарабилна покривајућа фамилија подскупова скупа $[n]$. За $x \in [n]$ посматрајмо t-орку

$$(x_1, x_2, \ldots, x_t)$$

индикатора x_i

$$x_i = 1, x \in A_i \text{ и } x_i = 0, x \notin A_i.$$

Како је S покривајућа, не појављује се t-орка $(0, 0, \ldots, 0)$, па је

$$n \leqslant 2^t - 1, \text{тј.}$$

$$2^t \geqslant n + 1 \Rightarrow t \geqslant 1 + \log_2 n.$$

Записујући број $x \in [n]$ у бинарном систему, добијамо низ $(x_1, x_2, \ldots, x_t)$. Узимајући да је

$$A_i = \{x \in [n] | \text{ u binarnom zapisu broja } x \text{ jedinica je na } i\text{-tom mestu}\}$$

имамо

сваки $x \in [n]$ има бар једну јединицу у бинарном запису, јер је $x \neq 0$, тј. S је покривајућа фамилија.

Никоја два различита x и y немају све исте цифре у бинарном запису, па постоји позиција у запису на којој је код једног 1, а код другог 0, па ако је то j-та позиција, тада један од x, y припада A_j, а други не.

Зато је $A_i, i = 1, 2, \ldots, t; t = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$- број места (бинарних) у запису бројева $\{1, 2, \ldots, n\}$, сепарабилна покривајућа фамилија подскупова скупа $[n]$. $\Diamond$

5 ЗАКЉУЧАК

Како је комбинаторика једна од области из математике која је највише повезана са практичним потребама савременог живота, потребно је посветити много више рада у њеном савладавању.

Да бисмо ученике припремили за будући живот, који је препун комбинација и могућих избора, а неке од њих, можда, и за будуће научнике, потребно је да имају добру основу из комбинаторике. Решавајући комбинаторне проблеме ученици проширују начин размишљања. Није довољно да ученици решавају задатке механички, без неког претераног размишљања о проблему који је пред њима, и да при решавању задатака из комбинаторике прво што ће их мучити буде питање да ли су у питању *варијације, пермутације* или *комбинације*, са понављањем или без понављања, а затим и да се присете формуле која им је потребна да би дошли до решења. Неки од њих ће убрзо заборавити и формуле, јер је кратког века оно што се учи „напамет“, а можда ће им бити потребно то знање у решавању неких животних проблема.

У овом раду су наведени само *основни принципи енумеративне комбинаторике*, која се бави пребројавањем броја елемената у коначним скуповима. Сврха овог рада је да, кроз разне врсте задатака који су урађени на различите начине, покажемо ученицима да није потребно да памте формуле и да постоји више начина и метода за решавање неког задатка. Самим тим не ограничавамо их, и дозвољавамо да на њима најразумљивији начин, применом неке од метода за пребројавање, дођу до решења.

Желим да се захвалим свом ментору проф. др Зорану Петровићу, на саветима и сугестијама у току израде овог рада. Такође желим да се захвалим и др Горану Ђанковићу, као и др Небојши Икодиновићу који су детаљно прочитали рад и својим сугестијама допринели његовом финалном уобличавању.

Литература

[1] Дацић Р., *Елементарна комбинаторика*, Београд 1977.

[2] Ивановић Ж., Огњановић С., *Збирка задатака и тестова за четврти разред гимназија и техничких школа*, Београд 2010.

[3] Јојић Д., *Елементи енумеративне комбинаторике*, Београд 2011.

[4] Накић И., *Дискретна математика*, Београд 2007.

[5] Стевановић Д., Ћирић М., Симић С., Балтић В., *Дискретна математика*, Београд 2007.

[6] *Припреме за пријемни испит из математике*, Математички факултет у Београду 2007.

[7] http://www.dms.org.rs/index.php?action=competitions_ mathematics_ high_ school